Е.Е. Корякина

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.Е. Корякина

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ

Учебно-методическое пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

РАССМОТРЕНО и УТВЕРЖДЕНО методической комиссией
механико-математического факультета
Протокол № 6 от 17 июня 2016 г.
Председатель комиссии О.П. Федорова

Корякина Е.Е.
К 66 **Приведение квадратичной формы к главным осям:** учебно-методическое пособие. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 24 с.

Данное пособие разработано к курсу «Линейная алгебра» для студентов первого курса физического и физико-технического факультетов.

УДК 512.64
ББК В143

1. Скалярное произведение. Евклидово пространство

Пусть дано линейное пространство L_n над полем R.

Определение. Билинейная, симметричная форма, у которой соответствующая квадратичная положительно определена называется скалярным произведением.

Будем обозначать это таким образом

$$B\left(\vec{x},\vec{y}\right)=B\left(\vec{y},\vec{x}\right)=\left(\vec{x},\vec{y}\right).$$

Определение в математической символике запишется так

1) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{y},\vec{x}\right)$;

2) $\left(\vec{x_1}+\vec{x_2},\vec{y}\right)=\left(\vec{x_1},\vec{y}\right)+\left(\vec{x_2},\vec{y}\right)$;

3) $\left(\lambda\vec{x},\vec{y}\right)=\lambda\left(\vec{x},\vec{y}\right)$;

4) $\left(\vec{x},\vec{x}\right)\geq 0 \quad \left(\left(\vec{x},\vec{x}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}\right)$.

В силу последнего условия, можно ввести модуль вектора, как корень квадратный из скалярного произведения

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}.$$

А в силу неравенства Коши-Буняковского $\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2\leq\left(\vec{x},\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right)$, можно ввести угол между векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$.

Определение. За угол между векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$ берется угол $\alpha\in\left[0,\pi\right]$, такой что

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского эта дробь принадлежит промежутку $\left[-1,1\right]$ и действительно может определять косинус некоторого угла. $\frac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|}\le 1$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны (линейно зависимы). Используя угол, скалярное произведение можно записать в виде

$$\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|\cdot\cos\alpha .$$

Определение. Линейное пространство L_n вместе с определенным в нем скалярным произведением называется Евклидовым пространством E_n. В E_n можно определить ортонормированный базис.

Определение. Будем говорить, что вектор $\vec{x}$ ортогонален вектору $\vec{y}$, если $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=0$.

Определение. Будем говорить, что вектор $\vec{x}$ нормирован, если $\left|\vec{x}\right|=1$.

Определение. Базис называется ортонормированным (декартовым), если все его векторы нормированы и попарно ортогональны. Координаты вектора в данном базисе называются декартовыми.

Пусть $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, …, $\vec{e_n}$ – декартов базис. Тогда $\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)=\delta_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$, где символ Кронекера $\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\ne j\end{cases}$.

Формулы вычисления скалярного произведения и модуля в декартовых координатах:

$$\vec{x}=x^1\vec{e_1}+x^2\vec{e_2}+\ldots+x^n\vec{e_n}=x^i\vec{e_i},$$

$$\vec{y}=y^1\vec{e_1}+y^2\vec{e_2}+\ldots+y^n\vec{e_n}=y^j\vec{e_j},$$

$$\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\left(x^i\vec{e_i},y^j\vec{e_j}\right)=x^iy^j\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)=x^iy^j\delta_{ij}=x^1y^1+x^2y^2+\ldots+x^ny^n,$$

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\ldots+\left(x^n\right)^2 .$$

Пусть даны два декартовых базиса

$$\begin{cases} \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n} \text{ (старый) и } \vec{e_1^*}, \vec{e_2^*}, ..., \vec{e_n^*} \text{ (новый)} \\ \vec{\mathrm{e}_1^*} = p_1^1 \vec{e_1} + p_1^2 \vec{e_2} + ... + p_1^n \vec{e_n} \\ \vec{\mathrm{e}_2^*} = p_2^1 \vec{e_1} + p_2^2 \vec{e_2} + ... + p_2^n \vec{e_n} \\ .... \\ \vec{\mathrm{e}_\mathrm{n}^*} = p_n^1 \vec{e_1} + p_n^2 \vec{e_2} + ... + p_n^n \vec{e_n} \end{cases}.$$

Матрица перехода

$$P = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \cdots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \cdots & p_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^n & p_2^n & \cdots & p_n^n \end{pmatrix}$$

и в общем случае является невырожденной, а для декартова базиса обладает в силу ортонормированности векторов еще двумя свойствами:

1) сумма попарных произведений соответствующих элементов двух различных столбцов (строк) равна 0.

2) сумма квадратов элементов любого столбца (строки) равна 1.

Определение. Матрица, обладающая этими свойствами называется ортогональной.

Из определения ортогональной матрицы следует:

1) квадратная матрица является ортогональной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $P^{-1} = P^T$.

2) для каждой ортогональной матрицы $\det P = \pm 1$ (+, если базисы одноименные, – , если базисы разноименные).

2. Процесс ортогонализации базиса

Теорема. В E_n существует ортонормированный базис.

Процесс построения из произвольного базиса декартова базиса называется процессом ортогонализации базиса Грама–Шмидта. Процесс состоит из 2 частей:

1) из произвольного базиса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ получаем сначала ортогональный базис $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_n}$, все векторы которого попарно ортогональны, но не нормированы.

$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$.

$\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} + \alpha_2^1 \overrightarrow{b_1}$, при этом $\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right) = 0$.

$\left(\overrightarrow{a_2} + \alpha_2^1 \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1}\right) = 0$, откуда $\alpha_2^1 = -\dfrac{\left(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}\right)}{\left|\overrightarrow{b_1}\right|^2}$.

$\overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{a_3} + \alpha_3^1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_3^2 \overrightarrow{b_2}$, при этом $\left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_1}\right) = 0$ и $\left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_2}\right) = 0$.

$\left(\overrightarrow{a_3} + \alpha_3^1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_3^2 \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_1}\right) = 0$,

$\left(\overrightarrow{a_3} + \alpha_3^1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_3^2 \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_2}\right) = 0$, откуда

$\alpha_3^1 = -\dfrac{\left(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_1}\right)}{\left|\overrightarrow{b_1}\right|^2}$, $\alpha_3^2 = -\dfrac{\left(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_2}\right)}{\left|\overrightarrow{b_2}\right|^2}$.

и т. д.

В общем случае

$\overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{a_k} + \alpha_k^1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_k^2 \overrightarrow{b_2} + ... + \alpha_k^{k-1} \overrightarrow{b_{k-1}}$, где

$\alpha_k^p = -\dfrac{\left(\overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_p}\right)}{\left|\overrightarrow{b_p}\right|^2}$, $k = \overline{2, n}$, $p = \overline{1, k-1}$.

Система векторов $\overrightarrow{b_i}$ линейно независима и ортогональна.

2) из ортогонального базиса $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_n}$ получаем ортонормированный базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$, где

$$\overrightarrow{e_i} = \frac{\overrightarrow{b_i}}{\left|\overrightarrow{b_i}\right|}, \; i = \overline{1, n}.$$

Система векторов $\overrightarrow{e_i}$ линейно независима и ортонормирована, то есть составляет декартов базис.

Пример

E_3. $\overrightarrow{a_1} = \{1,2,3\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{-1,0,5\}$, $\overrightarrow{a_3} = \{-2,2,4\}$. Убедимся что эти векторы действительно можно взять за базис в E_3. Так как $\dim E_3 = 3$, достаточно проверить их линейную независимость.

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы максимален, значит, три вектора линейно–независимы и в трехмерном пространстве E_3 действительно образуют базис.

1) Получим базис ортогональный.

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1} = \{1,2,3\},$$

$$\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} + \alpha_2^1 \overrightarrow{b_1},$$

$$\alpha_2^1 = -\frac{\left(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}\right)}{\left|\overrightarrow{b_1}\right|^2} = -\frac{-1+15}{1+4+9} = -\frac{14}{14} = -1,$$

$$\overrightarrow{b_2} = \{-1,0,5\} - \{1,2,3\} = \{-2,-2,2\},$$

$$\overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{a_3} + \alpha_3^1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_3^2 \overrightarrow{b_2},$$

$$\alpha_3^1 = -\frac{\left(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_1}\right)}{\left|\overrightarrow{b_1}\right|^2} = -1,$$

$$\alpha_3^2 = -\frac{\left(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_2}\right)}{\left|\overrightarrow{b_2}\right|^2} = -\frac{2}{3},$$

$$\overrightarrow{b_3} = \{-2,2,4\} - \{1,2,3\} - \frac{2}{3}\{-2,-2,2\} = \left\{-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right\}.$$

$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ – ортогональный базис.

Векторы линейно–независимы и попарно ортогональны.

2) $$\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{b_1}}{\left|\overrightarrow{b_1}\right|} = \frac{\{1,2,3\}}{\sqrt{14}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right\},$$

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{b_2}}{\left|\overrightarrow{b_2}\right|} = \frac{\{-2,-2,2\}}{\sqrt{12}} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{\overrightarrow{b_3}}{\left|\overrightarrow{b_3}\right|} = \frac{\left\{-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right\}}{\frac{\sqrt{42}}{3}} = \left\{-\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}\right\}.$$

$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ – декартов базис.

Векторы линейно–независимы, нормированы и попарно ортогональны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для базисных векторов $\overrightarrow{a_1} = \{1,0,1\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{-1,1,0\}$, $\overrightarrow{a_3} = \{0,2,1\}$ провести процесс ортогонализации.

2. Для векторов $\overrightarrow{a_1} = \{1,2,2,-1\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{1,1,-5,3\}$, $\overrightarrow{a_3} = \{3,2,8,-7\}$ провести процесс ортогонализации.

3. Для базисных векторов $\overrightarrow{a_1} = \{1,1,0,0\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{1,0,1,0\}$, $\overrightarrow{a_3} = \{1,0,0,1\}$, $\overrightarrow{a_4} = \{3,1,1,1\}$ провести процесс ортогонализации.

4. Для базисных векторов $\overrightarrow{a_1} = \{-2,1,0\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{-4,0,2\}$, $\overrightarrow{a_3} = \{-1,-2,2\}$ провести процесс ортогонализации.

5. Доказать, что взаимно–ортогональные, не нулевые векторы линейно–независимы.

3. Самосопряженный оператор

Рассмотрим в E_n линейные операторы φ_1 и φ_2.

Определение. Линейные операторы φ_1 и φ_2 называются сопряженными, если $\left(\varphi_1 \vec{x}, \vec{y}\right)=\left(\vec{x}, \varphi_2 \vec{y}\right)$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$.

Определение. Линейный оператор φ называется самосопряженным, если он сопряжен самому себе, то есть $\left(\varphi \vec{x}, \vec{y}\right)=\left(\vec{x}, \varphi \vec{y}\right)$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$.

Свойства самосопряженного оператора:

1) самосопряженный оператор имеет симметричную матрицу $A=A^T$ в любом ортонормированном базисе и наоборот.
2) все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора (собственные числа) – вещественны.
3) собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны между собой.
4) для всякого самосопряженного оператора φ в E_n существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Примеры

1. Пространство E_3. Дан линейный оператор

$$\varphi\left(\vec{x}\right)=\left\{11x^1+2x^2-8x^3, 2x^1+2x^2+10x^3, -8x^1+10x^2+5x^3\right\}.$$

$\left(\varphi \vec{x}, \vec{y}\right)=\left(\vec{x}, \varphi \vec{y}\right)$, то есть оператор самосопряженный. Его симметричная матрица имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или в раскрытом виде

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 = 0.$$

Оно легко группируется

$$\lambda^2(\lambda - 18) - 81(\lambda - 18) = 0,$$

$$(\lambda - 18)(\lambda - 9)(\lambda + 9) = 0.$$

Три различных собственных значения у этого оператора

$$\lambda_1 = 18, \ \lambda_2 = 9, \ \lambda_3 = -9.$$

Находим собственные векторы для каждого собственного числа и в каждом подпространстве из собственных векторов находим базис (ФСР).

$\lambda_1 = 18$.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ -7 & 2 & -8 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & -54 & 27 \\ 0 & -54 & 27 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R(A - \lambda_1 E) = 2.$$

Восстанавливаем системы

$$\begin{cases} x^1 - 8x^2 + 5x^3 = 0 \\ \quad -2x^2 + x^3 = 0 \end{cases}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x^1 = -2x^2 \\ x^3 = 2x^2 \end{cases}.$$

ФСР

	x^1	x^2	x^3
$\overrightarrow{a_1}$	-2	1	2

Подпространство собственных векторов оператора, соответствующих $\lambda_1 = 18$, одномерно с базисным вектором $\overrightarrow{a_1} = \{-2,1,2\}$.

$\lambda_2 = 9$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -7 & 10 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 9 & -18 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$R(A - \lambda_2 E) = 2$.

Восстанавливаем системы

$$\begin{cases} x^1 + x^2 - 4x^3 = 0 \\ -x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x^1 = 2x^3 \\ x^2 = 2x^3 \end{cases}.$$

ФСР

	x^1	x^2	x^3
$\overrightarrow{a_2}$	2	2	1

Подпространство собственных векторов оператора, соответствующих $\lambda_2 = 9$, одномерно с базисным вектором $\overrightarrow{a_2} = \{2,2,1\}$.

$\lambda_3 = -9$.

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 1 & -4 \\ 2 & 11 & 10 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 10 & 1 & -4 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & 11 & 10\\ 0 & -54 & -54\\ 0 & 27 & 27\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 11 & 10\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$R(A-\lambda_3 E)=2.$$

Восстанавливаем системы

$$\begin{cases}2x^1+11x^2+10x^3=0\\ x^2+x^3=0\end{cases}.$$

Общее решение

$$\begin{cases}x^1=\dfrac{x^3}{2}\\ x^2=-x^3\end{cases}.$$

ФСР

	x^1	x^2	x^3
$\overrightarrow{a_3}$	1	-2	2

Подпространство собственных векторов оператора, соответствующих $\lambda_3=-9$, одномерно с базисным вектором $\overrightarrow{a_3}=\{1,-2,2\}$.

Три вектора $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ линейно–независимы и попарно–ортогональны. Значит, достаточно их просто нормировать.

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{a_1}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|}=\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\},$$

$$\overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_2}\right|}=\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\},$$

$$\overrightarrow{e_3}=\frac{\overrightarrow{a_3}}{\left|\overrightarrow{a_3}\right|}=\left\{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$$

Базис $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ составлен из собственных векторов оператора φ и является декартовым.

2. Пространство E_3. Дан линейный сопряженный оператор с симметричной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение оператора имеет вид

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или в раскрытом виде

$$\lambda^3-45\lambda^2+567\lambda-2187=0.$$

Убедившись, что $\lambda=9$ является корнем этого уравнения и разделив многочлен третьей степени на многочлен первой, приводим уравнение к виду

$$(\lambda-9)(\lambda^2-36\lambda+243)=0$$

или

$$(\lambda-9)(\lambda-9)(\lambda-27)=0.$$

У данного оператора два различных собственных числа $\lambda_1=27$, $\lambda_2=\lambda_3=9$. Находим собственные векторы.

$\lambda_1=27$.

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -5 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & -9 & -18 \\ 0 & -9 & -18 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$R(A-\lambda_1 E)=2$.

Восстанавливаем системы

$$\begin{cases} x^1 - x^2 - 4x^3 = 0 \\ \quad x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x^1 = 2x^3 \\ x^2 = -2x^3 \end{cases}.$$

ФСР

	x^1	x^2	x^3
$\overrightarrow{b_1}$	1	-2	2

Подпространство собственных векторов оператора, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 27$, одномерно с базисным вектором $\overrightarrow{b_1} = \{2,-2,1\}$.

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 9 .$$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim (2,-2,1)$$

$$R(A - \lambda_2 E) = 1 .$$

Восстанавливаем системы

$$2x^1 - 2x^2 + x^3 = 0 .$$

Общее решение

$$x^3 = -2x^1 + 2x^2 .$$

ФСР

	x^1	x^2	x^3
$\overrightarrow{a_2}$	1	0	-2
$\overrightarrow{a_3}$	0	1	2

Подпространство собственных векторов оператора, соответствующих собственному значению $\lambda_2 = 9$, двумерно с базисными векторами $\overrightarrow{a_2} = \{1,0,-2\}$ и $\overrightarrow{a_3} = \{0,1,2\}$. Оба этих вектора ортогональны вектору $\overrightarrow{b_1}$, но не ортогональны между собой, так как относятся к одному собственному значению. Проводим для этих двух векторов процесс ортогонализации

$$\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} = \{1,0,-2\},$$

$$\overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{a_3} + \alpha\overrightarrow{b_2} \text{, где } \alpha = -\frac{\left(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{a_3}\right)}{\left|\overrightarrow{b_2}\right|^2} = \frac{4}{5},$$

$$\overrightarrow{b_3} = \{0,1,2\} + \frac{4}{5}\{1,0,-2\} = \left\{\frac{4}{5},1,\frac{2}{5}\right\}.$$

Три вектора $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, $\overrightarrow{b_3}$ линейно–независимы и попарно–ортогональны. Осталось нормировка.

$$\overrightarrow{e_1} = \left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\},$$

$$\overrightarrow{e_2} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right\},$$

$$\overrightarrow{e_3} = \left\{\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}},\frac{2}{3\sqrt{5}}\right\}.$$

Декартов базис, составленный из собственных векторов линейного оператора.

4. Приведение квадратичной формы к главным осям

Пусть в E_n определена квадратичная форма $A(\vec{x},\vec{x}) = a_{ij}x^i x^j$, $i, j = \overline{1,n}$.

Определение. Если квадратичная форма в некотором базисе принимает вид

$$A(\vec{x},\vec{x}) = \lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 + \ldots + \lambda_n (x^n)^2,$$

где $\lambda_i \in R$, то говорят, что она имеет канонический вид и сам базис называется каноническим.

Матрица квадратичной формы $A = \left\| a^i_j \right\|$ является симметричной по определению. Но по каждой симметричной матрице в данном декартовом базисе можно восстановить самосопряженный линейный оператор. Получается соответствие между квадратичной формой и самосопряженным линейным оператором в данном базисе. $A(\vec{x},\vec{x}) \leftrightarrow A \leftrightarrow \varphi(\vec{x})$.

Матрицы линейного оператора и квадратичной формы в линейном пространстве меняются по разным законам.

$$A^*_{кв.ф.} = P^T \cdot A \cdot P,$$

$$A^*_{л.оп.} = P^{-1} \cdot A \cdot P,$$

где P невырожденная матрица перехода. Но если P матрица перехода от одного декартова базиса в E_n к другому, то P – ортогональная матрица, для которой $P^{-1} = P^T$. А значит, если матрицы квадратичной формы и линейного оператора совпали в одном базисе, то совпадут и в другом. Более того, в декартовом базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид, где по диагонали стоят собственные числа, а значит, в этом базисе квадратичная форма имеет канонический вид, где коэффициенты – собственные числа оператора.

Теорема. Для каждой квадратичной формы существует декартов базис, в котором форма принимает канонический вид.

Данный канонический базис состоит из собственных векторов того линейного самосопряженного оператора, который соответствует данной форме через равенство их матриц.

Определение. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с отысканием того декартового базиса, в котором форма имеет такой вид, называется приведением квадратичной формы к главным осям.

Алгоритм приведения к главным осям.

1) Составляем матрицу квадратичной формы.
2) Находим собственные числа соответствующего самосопряженного линейного оператора λ_i.
3) Записываем канонический вид квадратичной формы $A(\vec{x},\vec{x}) = \lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 + \ldots + \lambda_n (x^n)^2$.
4) Для каждого собственного значения λ_i находим базис подпространства собственных векторов, соответствующих этому значению (ФСР). Из всех таких базисных векторов составляем декартов базис E_n, применяя, если надо, процесс ортогонализации и нормировки.
5) Составляем матрицу преобразования базиса P, а так же формулы преобразования координат.

Пример

В E_3 дана квадратичная форма.

$$A(\vec{x},\vec{x}) = 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3 .$$

1) Матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Характеристическое уравнение соответствующего оператора имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или в раскрытом виде

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0 .$$

Подбором находим первый корень $\lambda_1 = -2$. Деля многочлен третьей степени на многочлен первой и решая квадратичное уравнение, находим еще 2 корня. Уравнение имеет вид

$$(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2 = 0 ,$$

а корни (собственные числа линейного оператора) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 4$. Значит канонический вид квадратичной формы

3) $A(\vec{x}, \vec{x}) = -2(x^{*1})^2 + 4(x^{*2})^2 + 4(x^{*3})^2$.

4) Находим канонический базис

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$R(A - \lambda_1 E) = 2 .$$

Восстанавливаем системы

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ \quad x^2 - x^3 = 0 \end{cases}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x^1 = -2x^3 \\ \ x^2 = x^3 \end{cases}.$$

ФСР

	x^1	x^2	x^3
$\vec{b}_1$	-2	1	1

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim(2,1,-1)$$

$$R(A-\lambda_2 E)=1\,.$$

Восстанавливаем систему

$$2x^1-x^2-x^3=0\,.$$

Общее решение

$$x^3=2x^1-x^2\,.$$

ФСР

	x^1	x^2	x^3
$\overrightarrow{a_2}$	1	0	2
$\overrightarrow{a_3}$	0	1	-1

Векторы $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ ортогональны вектору $\overrightarrow{b_1}$, но не ортогональны между собой. Проводим процесс ортогонализации в этом подпространстве

$$\overrightarrow{b_2}=\overrightarrow{a_2}=\{1,0,2\}\,.$$

$$\overrightarrow{b_3}=\overrightarrow{a_3}+\alpha\overrightarrow{b_2}\,.$$

Из условия $\left(\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}\right)=0$, находим

$$\alpha=-\frac{\left(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_2}\right)}{\left|\overrightarrow{b_2}\right|^2}=\frac{2}{5}\,.$$

$$\overrightarrow{b_3}=\{0,1,-1\}+\frac{2}{5}\{1,0,2\}=\left\{\frac{2}{5},1,-\frac{1}{5}\right\}.$$

Базис $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, $\overrightarrow{b_3}$ – ортогональный. Проводим нормировку.

$$\overrightarrow{e_1^*}=\left\{\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$\overrightarrow{e_2^*}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right\},$$

$$\overrightarrow{e_3^*}=\left\{\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}}\right\}.$$

$\overrightarrow{e_1^*}$, $\overrightarrow{e_2^*}$, $\overrightarrow{e_3^*}$ – канонический декартов базис, в котором форма принимает канонический вид.

5)
$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1^*}=-\frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2^*}=\frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{e_1}+\frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_3^*}=\frac{2}{\sqrt{30}}\overrightarrow{e_1}+\frac{5}{\sqrt{30}}\overrightarrow{e_2}-\frac{1}{\sqrt{30}}\overrightarrow{e_3} \end{cases}.$$

Матрица преобразования базиса P имеет вид

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x^1=-\frac{2}{\sqrt{6}}x^{*1}+\frac{1}{\sqrt{5}}x^{*2}+\frac{2}{\sqrt{30}}x^{*3} \\ x^2=\frac{1}{\sqrt{6}}x^{*1}+\frac{5}{\sqrt{30}}x^{*2} \\ x^3=\frac{1}{\sqrt{6}}x^{*1}+\frac{2}{\sqrt{5}}x^{*2}-\frac{1}{\sqrt{30}}x^{*3} \end{cases}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Привести квадратичные формы к главным осям.

1. $A(\vec{x},\vec{x})=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+4x^1x^2+4x^2x^3+4x^1x^3$.

2. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+5\left(x^3\right)^2-6x^1x^2-2x^1x^3+2x^2x^3$.

3. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\left(x^1\right)^2-2\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+4x^1x^2-8x^1x^3-4x^2x^3$.

4. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+2x^1x^2+2x^2x^3+2x^1x^3$.

5. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=6\left(x^1\right)^2+5\left(x^2\right)^2+7\left(x^3\right)^2-4x^1x^2+4x^1x^3$.

6. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=3\left(x^1\right)^2+2\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+4x^1x^2-4x^2x^3$.

7. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=4\left(x^1\right)^2+4\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2-8x^1x^2-4x^1x^3-4x^2x^3$.

8. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=2x^1x^2+2x^1x^3+2x^2x^3$.

9. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\left(x^1\right)^2+5\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+2x^1x^2+6x^1x^3+2x^2x^3$.

10. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=4\left(x^1\right)^2+4\left(x^2\right)^2-2\left(x^3\right)^2+4x^1x^2-8x^1x^3+8x^2x^3$.

11. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+4x^1x^2+4x^1x^3+4x^2x^3$.

12. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\frac{1}{2}\left(x^1\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^2\right)^2+x^1x^2-\sqrt{2}x^1x^3+\sqrt{2}x^2x^3$.

13. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\left(x^1\right)^2-5\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+4x^1x^2+2x^1x^3+4x^2x^3$.

14. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=11\left(x^1\right)^2+5\left(x^2\right)^2+2\left(x^3\right)^2+16x^1x^2+4x^1x^3-20x^2x^3$.

15. $A\left(\vec{x},\vec{x}\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+5\left(x^3\right)^2-6x^1x^2-2x^1x^3+2x^2x^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., 1970.
2. Головина Л.Н. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М., 1975.
3. Мизин А.Г. Краткий курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Томск, 2006.
4. Бухтяк М.С. Основы линейной алгебры. Томск, 2002.
5. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М., 1975.

СОДЕРЖАНИЕ

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на оборудовании Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36. Тел. 8+(382-2)–53-15-28. Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru

Заказ № 1943 от «30» июня 2016 г. Тираж 15 экз.