ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С «ПРОГУЛКАМИ» ПРИБОРА, УПРАВЛЯЕМОЙ *T*-СТРАТЕГИЕЙ

А. А. Назаров, С. В. Пауль

Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: nazarov.tsu@gmail.com, paulsv82@mail.ru

Исследуется система массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком и одним обслуживающим прибором с прерыванием обслуживания («прогулками»). Предлагается аналитический метод нахождения объема работы по обслуживанию всех заявок, находящихся в системе.

Ключевые слова: система массового обслуживания, система с «прогулками», циклическая система, метод асимптотического анализа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Современные инфотелекоммуникационные системы, математическими моделями которых могут являться однолинейные системы массового обслуживания с «прогулками» обслуживающего прибора, достаточно часто встречаются на практике [1]. В реальности под «прогулкой» понимается временное прекращение обслуживания для выполнения либо других работ прибором, либо его поломкой, либо его ремонтом [2]. Анализ подобных систем представляет значительный интерес еще и потому, что их характеристики позволяют исследовать циклические системы [3], [4].

Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором и очередью с неограниченным числом мест для ожидания. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Система функционирует в циклическом режиме, цикл которой состоит из двух последовательных интервалов. В течение первого интервала заявки потока обслуживаются на приборе. Если заявок в очереди нет к моменту начала этого интервала или прибор обслужил все заявки, которые на этом интервале находились в очереди, то прибор все равно остается в этом режиме, ожидая прихода заявок. От момента окончания этого интервала прибор уходит на «прогулку», в течение второго интервала указанного цикла. Во время прогулки пришедшие в систему заявки накапливаются в очереди и ждут, когда прибор вернется на обслуживание.

Пусть продолжительности этих интервалов случайные и определяются функциями распределения $T_1(x)$ и $T_2(x)$ соответственно. В течение первого интервала прибор обслуживает заявки случайное время с функцией распределения $B(x)$. Будем рассматривать системы с дообслуживанием заявок.

Обозначим

$V(t)$ – объем работы по обслуживанию всех заявок, находящихся в системе в момент времени t;

$k(t)$ – состояние прибора: 1 – прибор на первом интервале, 2 – прибор на «прогулке»;

$z(t)$ – остаточное время пребывания прибора в соответствующем состоянии.

Рассмотрим трехмерный марковский процесс $\{V(t), k(t), z(t)\}$ и для распределения вероятностей

$$P_k(v, z, t) = P\{V(t) < v, k(t) = k, z(t) < z\}$$

составим прямую систему уравнений Колмогорова. Будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_1(v,z)}{\partial v} + \dfrac{\partial P_1(v,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_1(v,0)}{\partial z} - \lambda P_1(v,z) + \lambda \int\limits_0^v B(v-x) dP_1(x,z) + \dfrac{\partial P_2(v,0)}{\partial z} T_1(z) = 0, \\ \dfrac{\partial P_2(v,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_1(v,0)}{\partial z} - \lambda P_2(v,z) + \lambda \int\limits_0^v B(v-x) dP_2(x,z) + \dfrac{\partial P_1(v,0)}{\partial z} T_2(z) = 0. \end{cases}$$

Введем частичные характеристические функции $H_k(u,z) = \int\limits_0^\infty e^{juv} dP_k(v,z)$, для которых систему уравнений Колмогорова перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_1(u,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial H_1(u,0)}{\partial z} - [\lambda(1-\beta(u)) + ju] H_1(u,z) + juP_1(0,z) + \dfrac{\partial H_2(u,0)}{\partial z} T_1(z) = 0, \\ \dfrac{\partial H_2(u,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial H_2(u,0)}{\partial z} - \lambda(1-\beta(u)) H_2(u,z) + \dfrac{\partial H_1(u,0)}{\partial z} T_2(z) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь обозначили

$$\beta(u) = \int\limits_0^\infty e^{juv} dB(v).$$

$P_1(0, z)$ – вероятность того, что прибор в режиме обслуживания, но в системе нет заявок.

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Систему (1) будем решать методом асимптотического анализа в условиях большой загрузки системы. Обозначим

$$\lambda = (1-\varepsilon)S, \quad u = \varepsilon w, \quad H_k(u, z) = F_k(w, z, \varepsilon), \quad P_1(0, z) = \varepsilon\pi_1(z, \varepsilon). \qquad (2)$$

Здесь S имеет смысл загрузки системы. Ее значение будет найдено ниже. Тогда систему (1) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1(w,z,\varepsilon)}{\partial z} - \dfrac{\partial F_1(w,0,\varepsilon)}{\partial z} - \\ -((1-\varepsilon)S(1-\beta(\varepsilon w)) + j\varepsilon w) F_1(w,z,\varepsilon) + j\varepsilon^2 w \pi_1(z,\varepsilon) + \dfrac{\partial F_2(w,0,\varepsilon)}{\partial z} T_1(z) = 0, \\ \dfrac{\partial F_2(w,z,\varepsilon)}{\partial z} - \dfrac{\partial F_2(w,0,\varepsilon)}{\partial z} - (1-\varepsilon)S(1-\beta(\varepsilon w)) F_2(w,z,\varepsilon) + \dfrac{\partial F_1(w,0,\varepsilon)}{\partial z} T_2(z) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Устремим $\varepsilon \to 0$, и учитывая $\beta(0) = \int\limits_0^\infty dB(v) = 1$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1(w,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial F_1(w,0)}{\partial z} - \dfrac{\partial F_2(w,0)}{\partial z} T_1(z) = 0, \\ \dfrac{\partial F_2(w,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial F_2(w,0)}{\partial z} + \dfrac{\partial F_1(w,0)}{\partial z} T_2(z) = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы будем искать в виде

$$F_k(w, z) = R_k(z)\Phi(w).$$

Тогда приходим к следующей системе

$$\begin{cases} R_1'(z) - R_1'(0) - R_2'(0)T_1(z) = 0, \\ R_2'(z) - R_2'(0) - R_1'(0)T_2(z) = 0, \end{cases}$$

для которой запишем решение в виде

$$\begin{cases} R_1(z) = \int\limits_0^z \left(R_1'(0) - R_2'(0)T_1(x)\right)dx, \\ R_2(z) = \int\limits_0^z \left(R_2'(0) - R_1'(0)T_2(x)\right)dx. \end{cases}$$

Здесь $\{R_1(z), R_2(z)\}$ – двумерное распределение состояния прибора и величины остаточного времени пребывания прибора в нем. Устремим $z \to \infty$. Учитывая, что $T(\infty) = 1$, получим:

$$\begin{cases} R_1(\infty) = \int\limits_0^\infty \left(R_1'(0) - R_2'(0)T_1(x)\right)dx, \\ R_2(\infty) = \int\limits_0^\infty \left(R_2'(0) - R_1'(0)T_2(x)\right)dx. \end{cases}$$

Для сходимости несобственного интеграла необходимо выполнения следующего условия

$$R_1'(0) - R_2'(0)T_1(\infty) = 0,$$

откуда получаем равенство

$$R_1'(0) = R_2'(0).$$

Обозначим

$$R_1'(0) = R_2'(0) = R'(0).$$

Имеем

$$R_k(z) = R'(0)\int\limits_0^z \left(1 - T_k(x)\right)dx.$$

Учитывая, что $\int\limits_0^\infty \left(1 - T_k(x)\right)dx = T_k$ – среднее время пребывания прибора в соответствующем состоянии, тогда с одной стороны

$$R_1(\infty) + R_2(\infty) = 1,$$

с другой

$$R_1(\infty) + R_2(\infty) = R'(0)\int\limits_0^\infty \left(1 - T_1(x)\right)dx + \int\limits_0^\infty \left(1 - T_2(x)\right)dx = R'(0)\left(T_1 + T_2\right).$$

Получим

$$R'(0) = \frac{1}{\left(T_1 + T_2\right)}.$$

Тогда

$$\begin{cases} R_1(\infty) = \dfrac{1}{T_1 + T_2}\int\limits_0^\infty \left(1 - T_1(x)\right)dx = \dfrac{T_1}{T_1 + T_2}, \\ R_2(\infty) = \int\limits_0^\infty \left(R_2'(0) - R_1'(0)T_2(x)\right)dx = \dfrac{T_2}{T_1 + T_2}. \end{cases}$$

В систему (3) подставим следующее разложение

$$F_k(w,z,\varepsilon)=\Phi(w)\{R_k(z)+j\varepsilon w f_k(z)\}+O(\varepsilon^2).$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R_1(z)}{\partial z}+j\varepsilon w\dfrac{\partial f_1(z)}{\partial z}-\dfrac{\partial R(0)}{\partial z}-j\varepsilon w\dfrac{\partial f_1(0)}{\partial z}-[(1-\varepsilon)S\{1-\beta(\varepsilon w)\}+j\varepsilon w]\{R_1(z)+j\varepsilon w f_1(z)\}+\\ +\dfrac{\partial R(0)}{\partial z}T_1(z)+j\varepsilon w\dfrac{\partial f_2(0)}{\partial z}T_1(z)+O(\varepsilon^2)=0,\\ \dfrac{\partial R_2(z)}{\partial z}+j\varepsilon w\dfrac{\partial f_2(z)}{\partial z}-\dfrac{\partial R(0)}{\partial z}-j\varepsilon w\dfrac{\partial f_2(0)}{\partial z}-(1-\varepsilon)S(1-\beta(\varepsilon w)\{R_2(z)+j\varepsilon w f_2(z)\}+\\ +\dfrac{\partial R(0)}{\partial z}T_2(z)+j\varepsilon w\dfrac{\partial f_1(0)}{\partial z}T_2(z)+O(\varepsilon^2)=0.\end{cases}$$

В функции $\beta(\varepsilon w)$ разложим экспоненту в ряд

$$\beta(\varepsilon w)=\int_0^\infty e^{j\varepsilon wx}dB(x)=\int_0^\infty(1+j\varepsilon wx)dB(x)=1+j\varepsilon wb+O(\varepsilon^2),$$

здесь b – начальный момент первого порядка.

$$\begin{cases}R_1'(z)-R'(0)(1-T_1(z))+j\varepsilon w(f_1'(z)-f_1'(0)+f_2'(0)T_1(z))-\\ -(-j\varepsilon wSb+j\varepsilon w)\{R_1(z)+j\varepsilon w f_1(z)\}+O(\varepsilon^2)=0,\\ R_2'(z)-R'(0)(1-T_2(z))+j\varepsilon w(f_2'(z)-f_2'(0)+f_1'(0)T_2(z))+\\ +Sj\varepsilon wb\{R_2(z)+j\varepsilon w f_2(z)\}+O(\varepsilon^2)=0.\end{cases}$$

В силу не сложных преобразований, имеем

$$\begin{cases}j\varepsilon w(f_1'(z)-f_1'(0)+f_2'(0)T_1(z))+jw\varepsilon SbR_1(z)-jw\varepsilon R_1(z)+O(\varepsilon^2)=0,\\ j\varepsilon w(f_2'(z)-f_2'(0)+f_1'(0)T_2(z))+Sj\varepsilon wbR_2(z)+O(\varepsilon^2)=0.\end{cases}$$

Разделим оба уравнения системы на ε и устремим $\varepsilon\to 0$:

$$\begin{cases}f_1'(z)-f_1'(0)+f_2'(0)T_1(z)+SbR_1(z)-R_1(z)=0,\\ f_2'(z)-f_2'(0)+f_1'(0)T_2(z)+SbR_2(z)=0.\end{cases}$$

Запишем

$$\begin{cases}f_1(z)=\int_0^z\{f_1'(0)-f_2'(0)T_1(x)+R_1(x)(1-Sb)\}dx,\\ f_2(z)=\int_0^z\{f_2'(0)-f_1'(0)T_2(x)-SbR_2(x)\}dx.\end{cases}$$

Найдем $f_1(\infty)$, $f_2(\infty)$:

$$\begin{cases}f_1(\infty)=\int_0^\infty\{f_1'(0)-f_2'(0)T_1(x)+R_1(x)(1-Sb)\}dx,\\ f_2(\infty)=\int_0^\infty\{f_2'(0)-f_1'(0)T_2(x)-SbR_2(x)\}dx.\end{cases}$$

Необходимо, чтобы

$$\begin{cases}f_1'(0)-f_2'(0)T_1(\infty)+R_1(\infty)(1-Sb)=0,\\ f_2'(0)-f_1'(0)T_2(\infty)-SbR_2(\infty)=0.\end{cases}$$

Обозначим $R_1=R_1(\infty)$, $R_2=R_2(\infty)$, тогда

$$R_1=Sb,\quad R_2=1-Sb.$$

С другой стороны загрузка системы равна

$$S=\frac{R_1}{b}=\frac{T_1}{(T_1+T_2)b}.$$

Получим дополнительное равенство

$$f_1'(0)-f_2'(0)=Sb(Sb-1)=R_1(R_1-1). \tag{4}$$

Имеем

$$\begin{cases} f_1(\infty)=f_2'(0)\int\limits_0^\infty(1-T_1(x))dx-R_2\int\limits_0^\infty(R_1-R_1(x))dx,\\ f_2(\infty)=f_1'(0)\int\limits_0^\infty(1-T_2(x))dx+R_1\int\limits_0^\infty(R_2-R_2(x))dx. \end{cases}$$

Обозначим $\Delta_k=\int\limits_0^\infty(R_k-R_k(x))dx$,

$$\begin{cases} f_1(\infty)=f_2'(0)T_1-R_2\Delta_1,\\ f_2(\infty)=f_1'(0)T_2+R_1\Delta_2. \end{cases} \tag{5}$$

Устремим $z\to\infty$, просуммируем уравнения системы (3):

$$-[(1-\varepsilon)S(1-\beta(\varepsilon w))+j\varepsilon w]F_1(w,\varepsilon)-(1-\varepsilon)S(1-\beta(\varepsilon w))F_2(w,\varepsilon)+j\varepsilon^2w\pi_1(\varepsilon)=0.$$

Подставим разложения

$$F_k(w,z,\varepsilon)=\Phi(w)\{R_k(z)+j\varepsilon wf_k(z)\}+o(\varepsilon^2),$$

$$\beta(\varepsilon w)=\int\limits_0^\infty e^{j\varepsilon wx}dB(x)=\int\limits_0^\infty\left(1+j\varepsilon wx+\frac{(j\varepsilon wx)^2}{2}\right)dB(x)=1+j\varepsilon wb+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}b_2+o(\varepsilon^2),$$

где b_2 – второй начальный момент времени пребывания в соответствующем состоянии прибора, в полученное равенство

$$\left[\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}Sb_2-j\varepsilon^2wSb+(j\varepsilon w)^2Sbf_1(\infty)-(j\varepsilon w)^2f_1(\infty)+(j\varepsilon w)^2Sbf_2(\infty)\right]\Phi(w)+$$

$$+j\varepsilon^2w\pi_1(\varepsilon)=o(\varepsilon^2).$$

Разделим обе части уравнения на ε^2 и устремим $\varepsilon\to0$, положим $w=0$, и, учитывая, что $\Phi(0)=1$, получим:

$$\pi_1=Sb,\ \text{где}\ \ \pi_1=\lim_{\varepsilon\to0}\pi_1(\varepsilon).$$

Тогда

$$\Phi(w)=\frac{Sb}{Sb-jw\left\{\frac{1}{2}Sb_2+(Sb-1)f_1(\infty)+Sbf_2(\infty)\right\}}.$$

Рассмотрим отдельно выражение в знаменателе

$$(Sb-1)f_1(\infty)+Sbf_2(\infty),$$

Учитывая (4), (5), получим и обозначим

$$-R_1R_2\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}+R_1{}^2R_2\frac{T_2{}^{(2)}}{2T_2}+R_2{}^2R_1\frac{T_1{}^{(2)}}{2T_1}=\Delta. \tag{6}$$

Здесь $T_k{}^{(2)}$ – второй начальный момент времени пребывания прибора в состоянии k. Тогда

$$\Phi(w) = \frac{Sb}{Sb - jw\left\{\frac{1}{2}Sb_2 + \Delta\right\}},$$

где Δ определено равенством (6). То есть функция $\Phi(w)$ является характеристической функцией экспоненциально распределенной случайной величины. Обозначим

$$\gamma = Sb\left(\frac{Sb_2}{2} + \Delta\right)^{-1}.$$

Сделаем обратные замены, устремим $z \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, получим характеристическую функцию объема работы по обслуживанию всех заявок

$$H(u) = \sum_k F(w, \varepsilon) = \sum_k \Phi(w) R_k(\infty) + o(\varepsilon) = \frac{\gamma}{\gamma - ju}.$$

Система с прогулками лежит в основе метода исследования циклической системы и позволяет найти распределение вероятностей значений времени ожидания заявок в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Печинкин, А. В.* Система массового обслуживания с ненадежным прибором в дискретном времени / А. В. Печинкин, И. А. Соколов // Информ. и ее примен. 2011. Т. 5. В. 4. С. 6–17.

2. *Саксонов, Е. А.* Метод вычисления вероятностей состояний для однолинейной системы массового обслуживания с “прогулками” обслуживающего прибора // Автомат. и телемех. 1995. В. 1, С. 101–106.

3. *Вишневский, В.* Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях / В. Вишневский, О. Семенова. М. : Техносфера, 2007. 312 с.

4. *Вишневский, В. М.* Математические методы исследования систем поллинга / В. М. Вишневский, О. В. Семенова // Автомат. и телемех. 2006. В. 2, С. 3–56.