ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ BMAP|M|∞

С. П. Моисеева, С. В. Пауль

Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: smoiseeva@mail.ru, paulsv82@mail.ru

Исследуется система массового обслуживания с групповым входящим потоком и неограниченным числом приборов. Методом асимптотического анализа найдено распределение вероятностей числа занятых приборов в системе.

Ключевые слова: система массового обслуживания, BMAP-поток, метод асимптотического анализа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов [1] являются моделями реальных систем в различных сферах жизнедеятельности человека: банковское дело, страхование, торговля, транспорт и т.д.

В случае простейшего входящего потока для таких систем удается найти аналитическое решение для стационарного распределения вероятностей числа занятых приборов в системе, а также для числа заявок, окончивших обслуживание на некотором промежутке времени [2]. Но в случае других моделей входящего потока общих подходов к исследованию нет. Для их исследования применяют численные методы, имитационное моделирование и асимптотический метод [3].

Рассмотрим бесконечнолинейную систему массового обслуживания, на вход которой поступает BMAP-поток. Продолжительности обслуживания заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют экспоненциальную функцию распределения с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов. Завершив обслуживание, заявка покидает систему.

В случае экспоненциального времени обслуживания задача исследования немарковского процесса (при непуассоновском входящем потоке), определяющего число обслуживаемых заявок (число занятых приборов), решается введением дополнительных переменных таким образом, чтобы случайный процесс в расширенном фазовом пространстве становился марковским, что в некоторых работах называют «внешним» марковизированием.

Пусть $i(t)$ – число заявок в системе, то есть число приборов, занятых в момент времени t. Так как $i(t)$ – немарковский процесс, то будем рассматривать двумерный случайный процесс $\{i(t),k(t)\}$, где $k(t)$ – состояния управляющей BMAP-потоком цепи Маркова $k(t)$ в момент времени t.

Обозначим $P\{k(t)=k,i(t)=i\}=P(k,i,t)$. С учетом этого запишем систему уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P(k,i,t)$:

$$\frac{\partial P(k,i,t)}{\partial t}=P(k,i,t)\left(-\lambda_k+q_{kk}-i\mu\right)+\sum_{l=1}^{i}P(k,i-l,t)\lambda_k d_{kk}(l)+$$

$$+(i+1)\mu P(k,i+1,t)+\sum_{\nu\neq k}\sum_{l=1}^{i}P(\nu,i-l,t)q_{\nu k}d_{\nu k}(l). \qquad (1)$$

Для стационарного распределения $\Pi(k,i)=\lim_{t\to\infty}P(k,i,t)$ систему (1) запишем в виде

$$0=\Pi(k,i)\left(-\lambda_k+q_{kk}-i\mu\right)+\sum_{l=1}^{i}\Pi(k,i-l)\lambda_k d_{kk}(l)+$$

$$+(i+1)\mu\Pi(k,i+1)+\sum_{\nu\neq k}\sum_{l=1}^{i}\Pi(\nu,i-l)q_{\nu k}d_{\nu k}(l). \qquad (2)$$

Рассмотрим частичные характеристические функции следующего вида

$$H(k,u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}\Pi(k,i).$$

Тогда система уравнений для частичных характеристических функций примет вид:

$$j\mu\left(e^{-ju}-1\right)\frac{\partial H(k,u)}{\partial u}=H(k,u)\left\{\left(-\lambda_k+q_{kk}\right)+\sum_{l=1}^{\infty}e^{jul}\lambda_k d_{kk}(l)\right\}+$$

$$+\sum_{\nu\neq k}H(\nu,u)\sum_{l=1}^{\infty}e^{jul}q_{\nu k}d_{\nu k}(l). \qquad (3)$$

Введем следующие обозначения: $\mathbf{H}(u,t)=\left[H(1,u)H(1,u),\ldots,H(K,u)\right]$ – вектор-строка;

$$\mathbf{D}(0)=\begin{bmatrix}-\left(\lambda_1-q_{11}\right) & q_{12}d_{12}(0) & \cdots & q_{1K}d_{1K}(0)\\ q_{21}d_{21}(0) & -\left(\lambda_2-q_{22}\right) & \cdots & q_{2K}d_{2K}(0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q_{K1}d_{K1}(0) & q_{K2}d_{K2}(0) & \cdots & -\left(\lambda_K-q_{KK}\right)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}(l)=\begin{bmatrix}\lambda_1 d_{11}(l) & q_{12}d_{12}(l) & \cdots & q_{1K}d_{1K}(l)\\ q_{21}d_{21}(l) & \lambda_2 d_{22}(l) & \cdots & q_{2K}d_{2K}(l)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q_{K1}d_{K1}(l) & q_{K2}d_{K2}(l) & \cdots & \lambda_K d_{KK}(l)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}(u)=\sum_{l=0}^{\infty}e^{jul}\mathbf{D}(l).$$

Тогда система дифференциальных уравнений (3) примет векторно-матричный вид

$$j\mu(e^{-ju}-1)\frac{\partial\mathbf{H}(u)}{\partial u}=\mathbf{H}(u)\mathbf{Q}(u). \qquad (4)$$

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Для исследования системы BMAP|M|∞ воспользуемся её основным уравнением (4), которое будем решать в асимптотическом условии растущего времени обслуживания, то есть при $\mu\to 0$. Обозначим $\mu=\varepsilon$ и в уравнении (4) выполним замены

$$u=\varepsilon w, \qquad \mathbf{H}(u)=\mathbf{F}_1(w,\varepsilon), \qquad (5)$$

для вектора $\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)$ получим уравнение

$$j(e^{-j\varepsilon w}-1)\frac{\partial\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)}{\partial w}=\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)\mathbf{Q}(w,\varepsilon). \qquad (6)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Предельное при $\varepsilon \to 0$ значение $F_1(w)$ решения $F_1(w,\varepsilon)$ уравнения (6) имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R}\, e^{jw\lambda}, \tag{7}$$

где вектор **R** – вектор стационарного распределения управляющей потоком цепи, а параметр λ определяется равенством

$$\lambda = \mathbf{R}\mathbf{D}_1\mathbf{E}. \tag{8}$$

Доказательство.

В уравнении (6) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим, что $F_1(w)$ является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}_1(w)\mathbf{Q} = 0,$$

поэтому $\mathbf{F}_1(w)$ имеет вид

$$\mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R}\Phi_1(w). \tag{9}$$

Здесь **R** – вектор стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$, определяемый системой уравнений $\mathbf{RQ} = 0$ и условием нормировки $\mathbf{RE} = 1$.

Скалярную функцию $\Phi_1(x)$ определим следующим образом. Просуммируем все уравнения системы (6), поделив левую и правую части полученного равенства на ε и, полагая $\varepsilon \to 0$, получим, что $F_1(w)$ является решением уравнения

$$w\frac{\partial \mathbf{F}_1(w)}{\partial w}\mathbf{E} = \mathbf{F}_1(w)\, jw\mathbf{D}_1\mathbf{E},$$

подставив в которое (9), принимая во внимание равенство $\mathbf{RE} = 1$, получим для скалярной функции $\Phi_1(w)$ уравнение

$$\frac{\partial \Phi_1(w)}{\partial w} = j\Phi_1(w)\mathbf{R}\mathbf{D}_1\mathbf{E}.$$

Используя обозначение (8), решение $\Phi_1(w)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_1(0) = 1$, запишем в виде

$$\Phi_1(w) = e^{jw\lambda}.$$

Подставляя это выражение для $\Phi_1(w)$ в (9), получим, что $\mathbf{F}_1(w)$ определяется равенством (7). Теорема доказана.

В силу замены (5) и равенства (9), можно записать приближённое (асимптотическое) равенство

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{F}_1(w,\varepsilon) \approx \mathbf{F}_1(w) = \mathbf{R}\, e^{jw\lambda},$$

поэтому для характеристической функции стационарного процесса $i(t)$ запишем

$$Me^{jui(t)} = \mathbf{H}(u)\mathbf{E} \approx e^{jw\lambda} = \exp\{ju\,\lambda/\mu\}. \tag{10}$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка для системы обслуживания BMAP|M|∞, которая определяет значение λ/μ асимптотического среднего значения числа занятых приборов.

Для нахождения аппроксимации допредельного распределения $\Pi(i)$ рассмотрим асимптотику второго порядка.

В уравнении (4) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_2(u)\exp\{ju\,\lambda/\mu\}, \tag{11}$$

получим уравнение для $\mathbf{H}_2(u)$

$$j\mu(e^{-ju}-1)\frac{\partial \mathbf{H}_2(u)}{\partial u}=\mathbf{H}_2(u)\{\mathbf{Q}(u)+\lambda(e^{-ju}-1)\mathbf{I}\}, \tag{12}$$

здесь $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица.

Обозначив $\mu=\varepsilon^2$, в уравнении (12) выполним замены

$$u=\varepsilon w, \quad \mathbf{H}_2(u)=\mathbf{F}_2(w,\varepsilon), \tag{13}$$

получим

$$j\varepsilon(e^{-j\varepsilon w}-1)\frac{\partial \mathbf{F}_2(w,\varepsilon)}{\partial w}=\mathbf{F}_2(w,\varepsilon)\big(\mathbf{Q}(w,\varepsilon)+\lambda(e^{-j\varepsilon w}-1)\mathbf{I}\big). \tag{14}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Предельное при $\varepsilon \to 0$ значение $F_2(w)$ решения $F_2(w,\varepsilon)$ уравнения (14) определяется равенством

$$\mathbf{F}_2(w)=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}, \tag{15}$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2=\frac{\mathbf{R}\mathbf{D}_2\mathbf{E}+\lambda}{2}+\mathbf{f}_2\mathbf{D}_1\mathbf{E}, \tag{16}$$

здесь вектор $\mathbf{f}_2$ удовлетворяет условию $\mathbf{f}_2\mathbf{E}=0$ и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{f}_2\mathbf{Q}+\mathbf{R}(\mathbf{D}_1-\lambda\mathbf{I})=0. \tag{17}$$

Доказательство. В уравнении (14) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим уравнение

$$\mathbf{F}_2(w)\mathbf{Q}=0,$$

решение которого запишем в виде

$$\mathbf{F}_2(w)=\mathbf{R}\Phi_2(w), \tag{18}$$

где скалярная функция $\Phi_2(w)$ будет определена ниже.

Решение $\mathbf{F}_2(w,\varepsilon)$ уравнения (14) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(w,\varepsilon)=\Phi_2(w)\big(\mathbf{R}+j\varepsilon w\mathbf{f}_2\big)+O(\varepsilon^2), \tag{19}$$

в котором положим выполнение дополнительного условия и, подставив которое в (14), получим, что вектор $\mathbf{f}_2$ является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений, совпадающей с (17).

Для нахождения скалярной функции $\Phi_2(w)$ просуммируем все уравнения системы (14), получим равенство, раскладывая в ряд экспоненты в котором, имеем следующее соотношение

$$j\varepsilon(-j\varepsilon w)\frac{\partial \mathbf{F}_2(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{E}=\mathbf{F}_2(w,\varepsilon)\left\{\mathbf{Q}+j\varepsilon w(\mathbf{D}_1-\lambda\mathbf{I})+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}(\mathbf{D}_2+\lambda\mathbf{I})\right\}\mathbf{E}+O(\varepsilon^3),$$

подставив в которое разложение (19) и в силу (8) последнее равенство примет вид

$$\frac{\partial\Phi_2(w)}{\partial w}=j^2w\Phi_2(w)\left(\frac{\mathbf{R}\mathbf{D}_2\mathbf{E}+\lambda}{2}+\mathbf{f}_2\mathbf{D}_1\mathbf{E}\right).$$

Решение $\Phi_2(w)$ этого уравнения, удовлетворяющее условию $\Phi_2(0) = 1$, в силу обозначения (16), можно записать в виде выражения

$$\Phi_2(w)=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

подставляя которое в (18), получим равенство (15). Теорема доказана.

В силу замены (13) и равенства (11) для $\mathbf{H}_2(u)$ можно записать асимптотическое равенство

$$\mathbf{H}_2(u)=\mathbf{F}_2(w,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_2(w)=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}=\mathbf{R}\exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}. \qquad (20)$$

Тогда

$$\mathbf{H}(u)=\mathbf{H}_2(u)\exp\left\{ju\frac{\lambda}{\mu}\right\}\approx\mathbf{R}\exp\left\{ju\frac{\lambda}{\mu}+\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\},$$

поэтому для характеристической функции величины $i(t)$ получим

$$h_2(u)=Me^{jui(t)}=\mathbf{H}(u)\mathbf{E}\approx\exp\left\{ju\frac{\lambda}{\mu}+\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\mu}\right\}. \qquad (21)$$

Это равенство будем называть асимптотикой второго порядка.

Из (21) следует, что стационарное распределение вероятностей $\Pi(i)$ числа приборов, занятых в системе обслуживания BMAP|M|∞, можно аппроксимировать гауссовским распределением с параметрами

$$a=Mi(t)=\lambda/\mu,\quad \sigma^2=M\left\{(i(t)-a)^2\right\}=\kappa_2/\mu,$$

где величина λ определяется равенством (8), а величина κ_2 определяется равенством (16).

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Для определения области применимости сравним характеристики, полученные с помощью метода асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания, и характеристики, полученные с помощью метода начальных моментов, полученные ранее.

Используя следующие значения параметров BMAP-потока:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5\\ 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}5\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}(0)=\begin{bmatrix}0 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.2\\ 0.1 & 0.2 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}(1)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.5 & 0.2\\ 0.1 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}(2)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.8 & 0.6\\ 0.8 & 0.5 & 0.6\\ 0.8 & 0.6 & 0.5\end{bmatrix},$$

для различных значений $\mu=\varepsilon$ получим следующие характеристики.

Таблица 1

Область применимости асимптотических характеристик в допредельной ситуации

ε	**0,1**	**0,05**	**0,01**	**0,001**
Допредельные значения дисперсии	676,62	1420,86	7410,35	74842,49
Асимптотические значения дисперсии	749,26	1438,52	7492,58	74925,83
Относительная погрешность	0,107	0,05	0,011	0,001

Из результатов, приведенных в Таблице 1, можно сделать вывод о том, что при уменьшении параметра ε асимптотические результаты приближаются к допредельным. Значение относительной погрешности при $\mu = 0{,}05$ составляет 5%, что является приемлемым для практических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко, Б. В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. Изд. 3-е, испр. и доп. М. : КомКнига, 2007. 400 с.

2. Mirasol, N. M. The output of an M|G|∞ queueing system is Poisson / N. M. Mirasol // Operations Research. 1963. № 11. P. 282–284.

3. *Назаров, А. А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Томск : изд-во НТЛ, 2006. 112 с.