

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Томск — 1985

7-584462

Абелевы группы
и модули.
Вып. 5 1985

50 (весн) 1985

2/10

1-584462

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Выпуск 5



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1985

5162.541+5162.555
Абелевы группы и модули: Сборник статей / Под ред. Л. А. Скорняков а.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985.—8,8 л.—1 р. 40 к. 500 экз. 1702030000.

Публикуются работы, относящиеся к актуальным проблемам теории абелевых групп и модулей. Представлены такие направления, как абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов (группы автоморфизмов), чистая теория колец и модулей, вопросы теории градуированных модулей и др.

Для научных работников, аспирантов, студентов, интересующихся проблемами современной алгебры.

5 кб

Редакционная коллегия: Л. А. Скорняков (ответственный редактор), А. П. Мишина, А. В. Михалев, Ю. М. Рябухин, И. Х. Беккер (зам. ответственного редактора), С. Ф. Кожухов, П. А. Крылов

Рецензент — С. К. Росошек

ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МОРИТЫ КАТЕГОРИЙ ГРАДУИРОВАННЫХ МОДУЛЕЙ

И. Н. Балаба

Пусть R и S — градуированные кольца, $\text{gr-}R$ и $\text{gr-}S$ — категории градуированных R -модулей и S -модулей соответственно [1]. Градуированные варианты теоремы Мориты об эквивалентности категорий $\text{gr-}R$ и $\text{gr-}S$ были получены автором [2], а также R. Gordon и E. Green [3]. В то же время в работах K. Fuller [4] и T. Kato [5] были предложены интересные обобщения теоремы Мориты, а K. Ohtake [6] предложил вариант теоремы Мориты, уже включающий в себя одновременно результаты K. Fuller и T. Kato. Цель данной работы — градуированный вариант теоремы Отаке, который включает в себя результаты работ [2 и 3].

§ 1. Радикалы в ситуации сопряженности

Всюду далее Z — кольцо целых чисел. Рассмотрим категорию $\text{gr-}S$ и определим функтор сдвига градуировки $\tau_n: \text{gr-}S \rightarrow \text{gr-}S$, полагая $\tau_n(X = \bigoplus X_i) = X(n)$, где $X(n)_i = X_{n+i}$ для всех $n, i \in Z$. Для любых $X, Y \in \text{gr-}S$ обозначим через $\text{HOM}_S(X, Y)_n$ все S -модульные гомоморфизмы степени n . Тогда $\text{HOM}_S(X, Y)_n = \text{Hom}_{\text{gr-}S}(X(-n), Y) = \text{Hom}_{\text{gr-}S}(X, Y(n))$ и $\text{HOM}_S(X, Y) = \bigoplus_{n \in Z} \text{HOM}_S(X, Y)_n$ — градуированная абелева группа.

Теорию кручения (T, F) в категории $\text{gr-}S$ назовем жесткой, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) если $M \in T$, то $M(m) \in T$ для всех $m \in Z$.
- 2) если $N \in F$, то $N(n) \in F$ для всех $n \in Z$.

Лемма 1.1 [1, лемма 12.1.3]. Жесткой теории кручения (T, F) в $\text{gr-}S$ соответствует жесткий радикал t , для которого $t(M(n)) = t(M)(n)$ для всех $n \in Z$.

Лемма 1.2 [1, лемма 12.1.4]. Существует биективное соответствие между:

- 1) жесткими наследственными теориями кручения в $\text{gr-}S$;
- 2) жесткими кручениями категории $\text{gr-}S$;
- 3) градуированными фильтрами в S .

Пусть далее \mathbf{A} — жесткая подкатегория в $\text{gr-}S$, т. е. полная подкатегория, замкнутая относительно подмодулей, гомоморфных образов, прямых сумм и сдвигов градуировки. Для $U \in \mathbf{A}$ рассмотрим функтор $\text{HOM}_S(U, -) : \mathbf{A} \rightarrow \text{gr-}R$, где $R = \text{END}_S(U) = \text{HOM}_S(U, U)$ — градуированное кольцо эндоморфизмов. Так как существует естественный изоморфизм градуированных абелевых групп

$$\eta : \text{HOM}_S(M \times_R U, A) \cong \text{HOM}_R(M, \text{HOM}_S(U, A))^1$$

для любых $M \in \text{gr-}R$, $A \in \text{gr-}S$, то функтор $(-)\times_R U : \text{gr-}R \rightarrow \mathbf{A}$ является сопряженным справа к функтору $\text{HOM}_S(U, -)$. Обозначим естественные преобразования, индуцированные изоморфизмом η , через

$$\Phi : \text{HOM}_S(U, -)\times_R U \rightarrow 1_{\mathbf{A}}$$

и

$$\Psi : 1_{\text{gr-}R} \rightarrow \text{HOM}_S(U, (-)\times_R U).$$

Тогда функция t , сопоставляющая объекту $A \in \mathbf{A}$ подмодуль $t(A) = \text{Im } \Phi_A = \bigcup \{\text{Im } f \mid f \in \text{HOM}_S(U, A)\}$, определяет жесткий идемпотентный предрадикал категории \mathbf{A} .

Лемма 1.3. Функция r , сопоставляющая каждому $M \in \text{gr-}R$ подмодуль $r(M) = \ker \Psi_M$, является жестким радикалом в $\text{gr-}R$.

Доказательство. Поскольку $(r(M)\times_R U \rightarrow M\times_R U) = 0$, то $M\times_R U \cong M/r(M)\times_R U$. Следовательно, $r(M/r(M)) = 0$.

Градуированный модуль $A \in \mathbf{A}$ называется CQF-3-объектом в \mathbf{A} , если из того, что $f : A \rightarrow A''$ — эпиморфизм в \mathbf{A} и $\text{Hom}_{\text{gr-}S}(U, f) = 0$, следует, что $\text{Hom}_{\text{gr-}S}(U, A'') = 0$.

Лемма 1.4. Предрадикал t сохраняет эпиморфизмы тогда и только тогда, когда $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n)$ является CQF-3-объектом.

Доказательство. Рассмотрим теорию кручения (T, F) в \mathbf{A} , порожденную объектом $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n)$, т. е. $F = \{A \in \mathbf{A} \mid \text{Hom}_{\text{gr-}S}(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n), A) = 0\}$. Она является конаследственной тогда и только тогда, когда модуль $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n)$ является CQF-3-объектом [6, лемма 2.2].

Если же t является радикалом, то (T, F) — соответствующая ему теория кручения. Остается заметить, что если $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n)$ является CQF-3-объектом, то t — радикал. Действительно, поскольку $\text{HOM}_S(U, f) = 0$ для канонического эпиморфизма $f : A \rightarrow A/t(A)$, то $\text{HOM}_S(U, A/t(A)) = 0$ для любого $A \in \mathbf{A}$.

Градуированный модуль ${}_R U$ назовем слабо плоским, если из того, что $f : X'_R \rightarrow X_R$ — мономорфизм в $\text{gr-}R$ и $f \times_R U = 0$, следует, что $X' \times_R U = 0$.

¹ Знак \times обозначает тензорное произведение.

Лемма 1.5. Радикал r является кручением тогда и только тогда, когда ${}_R U$ — слабо плоский градуированный модуль.

Доказательство. Предположим, что r является кручением, тогда для любого мономорфизма $f: X'_R \rightarrow X_R$ имеем мономорфизм $f: X'/r(X') \rightarrow X/r(X)$. Если кроме того $f \times_R U = 0$, то из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow X'/r(X') & \rightarrow & X/r(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{НОМ}_S(U, X'/r(X') \times_R U) & \rightarrow & \text{НОМ}_S(U, X/r(X) \times_R U) \end{array}$$

следует, что $X' = r(X')$.

С другой стороны, если градуированный модуль ${}_R U$ является слабо плоским, то для любого $X \in \text{gr-}R$ имеем $r(X) \times_R U = 0$. Следовательно, r — идемпотентный радикал и $X \times_R U = 0$ в том и только том случае, если $X = r(X)$. Далее заметим, что если $X = r(X)$ и $X' \subset X$, то $X' = r(X')$. Следовательно, r является кручением.

Лемма 1.6. Пусть $U \in \mathbf{A}$, $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n)$ является CQF-3-объектом, и $R = \text{END}_S(U)$. Тогда ${}_R U$ является слабо плоским градуированным модулем.

Доказательство. Поскольку $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n)$ является CQF-3-объектом, то порожденная им жесткая теория кручения (T, F) является наследственной и соответствует радикалу t . Легко проверить, что класс F замкнут относительно прямых сумм. Действительно, пусть $T \in F$, $F_i \in F$, тогда $\text{Hom}_{\text{gr-}S}(T, \bigoplus F_i) \rightarrow \text{Hom}_{\text{gr-}S}(T, \prod F_i) = \prod \text{Hom}_{\text{gr-}S}(T, F_i) = 0$.

Так как модуль $\bar{R} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(n)$ является образующим в категории $\text{gr-}R$, то для любого мономорфизма $f \in \text{Hom}_{\text{gr-}S}(X', X)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i \in I'} \bar{R}_i & \rightarrow & \bigoplus_{j \in J'} \bar{R}_j & \rightarrow & X' \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i \in I} \bar{R}_i & \rightarrow & \bigoplus_{j \in J} \bar{R}_j & \rightarrow & X \rightarrow 0. \end{array}$$

Тогда коммутативна и индуцированная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i \in I'} V_i & \rightarrow & \bigoplus_{j \in J'} V_j & \rightarrow & X' \times_R U \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \times_R U \\ \bigoplus_{i \in I} V_i & \rightarrow & \bigoplus_{j \in J} V_j & \rightarrow & X \times_R U \rightarrow 0. \end{array}$$

Отсюда (согласно доказательству леммы 2.3 из [6]) следует что $\ker f \times_R U \in F$. Если $f \times_R U = 0$, то $\ker f \times_R U = X' \times_R U \in F$. Таким образом, $\text{НОМ}_S(U, X' \times_R U) = 0$, и, следовательно, $X' \times_R U = 0$, т. е. ${}_R U$ является слабо плоским.

§ 2. Эквивалентность между локализациями и колокализациями

Пусть \mathbf{A} — абелева категория; (T, F) — теория кручения в \mathbf{A} и t — соответствующий радикал. Напомним некоторые определения. Объект $A \in \mathbf{A}$ называется инъективным относительно теории кручения (T, F) (или t -инъективным), если функтор $\text{Mog}_{\mathbf{A}}(-, A)$ точен на всех коротких точных последовательностях $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ с $X'' \in T$. Морфизм $f: A \rightarrow B$ называется t -локализацией объекта A , если $\ker f, \text{coker } f \in T$, $B \in F$ и B является t -инъективным. Теория кручения (T, F) называется наследственной, если класс T замкнут относительно подобъектов, и строго наследственной, если каждый объект категории \mathbf{A} обладает t -локализацией. В [7] было доказано существование взаимно однозначного соответствия между строго наследственными теориями кручения и рефлексивными подкатегориями, рефлексоры которых сохраняют ядра. Такие рефлексивные подкатегории называются подкатегориями Жиро (см. [8]). Двойственные этим определения будут получены при рассмотрении теории кручения (F, T) в дуальной категории \mathbf{A}^* .

Лемма 2.1. Пусть \mathbf{A} — жесткая подкатегория в $\text{gr-}S$, $U, X \in \mathbf{A}$ и $I(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{НОМ}_S(U, X)_n$. Рассмотрим семейство градуированных модулей $\{U_f | f \in I(X), U_f \cong U(-\deg f)\}$ и канонический морфизм $p: \bigoplus_{f \in I(X)} U_f \rightarrow X$. Тогда для объекта $U \in \mathbf{A}$ следующие условия эквивалентны:

1) канонический морфизм p является эпиморфизмом для любого $X \in \mathbf{A}$;

2) функтор $\text{НОМ}_S(U, -): \mathbf{A} \rightarrow \text{gr-END}_S(U)$ унивалентен.

Доказательство. 1) \rightarrow 2). Пусть $f, g \in \text{Hom}_{\text{gr-}S}(X, Y)$. Если $fh = gh$ для любого $h \in I(X)$, то $fp = gp$, где p — канонический морфизм. Поскольку p — эпиморфизм, то $f = g$.

2) \rightarrow 1). Пусть $Y = \text{coker } p$ и $X \xrightarrow{p} Y \rightarrow 0$. Так как $\text{НОМ}_S(U, y) \times \times (f) = uf$ для любого $f \in I(X)$, то $\text{НОМ}_S(U, y) = 0$. Из унивалентности функтора $\text{НОМ}_S(U, -)$ следует, что p — эпиморфизм.

Теорема 2.1. Пусть \mathbf{A} — жесткая подкатегория Гротендика в $\text{gr-}S$; $U \in \mathbf{A}$ и $R = \text{END}_S(U)$. Предположим, что функтор $T = \text{НОМ}_S(U, -): \mathbf{A} \rightarrow \text{gr-}R$ унивалентен. Тогда существует естественная эквивалентность функторов $\text{НОМ}_S(U, -) \times_R U \simeq 1_{\mathbf{A}}$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в случае произвольной категории Гротендика [9, теорема 5.70] с учетом специфики категорий градуированных модулей.

Поскольку функторы $((-)\times_R U, \text{НОМ}_S(U, -))$ образуют сопряженную пару, то для доказательства теоремы достаточно доказать полноту функтора $\text{НОМ}_S(U, -)$ [9, следствие 5.69].

Пусть $X, Y \in \mathbf{A}$ и $\varphi \in \text{НОМ}_{\text{gr-}R}(TX, TY)$, тогда $\varphi(f) \in TY = = \text{НОМ}_S(U, Y)$ для любого $f \in TX$. Обозначим через $I = h(TX) = = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{НОМ}_S(U, X)_n$ и рассмотрим коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{f \in I} U_f & \xrightarrow{p} & X \\ \uparrow i_f & \nearrow f & \\ U_f & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{f \in I} U_f & \xrightarrow{q} & Y \\ \uparrow i_f & \nearrow \varphi(f) & \\ U_f & & \end{array}$$

где $U_f \cong U(-\deg f)$.

Поскольку (согласно лемме 2.1) p является эпиморфизмом, то для того, чтобы получить морфизм $\Psi \in \text{НОМ}_{\text{gr-}S}(X, Y)$, для которого $\varphi = T(\Psi)$, необходимо и достаточно, чтобы $\ker q \supseteq \ker p$. Пусть J — конечное подмножество в I и K_J — ядро канонического морфизма $p_J: \bigoplus_{f \in J} U_f \rightarrow X$, индуцированного морфизмом p . Так как \mathbf{A} является категорией Гротендика, то достаточно доказать, что $K_J \subseteq \ker q$ для любого конечного $J \subset I$.

Пусть $h: K_J \rightarrow \bigoplus_{f \in J} U_f$ — канонический мономорфизм; π_f и i'_f — проекции и инъекции для копроизведения $\bigoplus_{f \in J} U_f$. В силу универсальности функтора T для того, чтобы морфизм q аннулировал K_J , достаточно, чтобы q аннулировал каждый такой морфизм $\alpha: U \rightarrow \bigoplus_{f \in J} U_f$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & K_J & \xrightarrow{h} & \bigoplus_{f \in J} U_f & \rightarrow & \bigoplus_{f \in J} U_f \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & U & \\ & \swarrow & & & & & \searrow \\ & \alpha' & & & & & \alpha \end{array}$$

Пусть h' — произведение морфизмов $(K_J \xrightarrow{h} \bigoplus_{f \in J} U_f \rightarrow \bigoplus_{f \in I} U_f)$. Тогда $0 = p_J h' \alpha' = p_J (\sum_{f \in J} i'_f \pi_f) h' \alpha' = \sum_{f \in J} f \lambda_f$, где $\lambda_f = \pi_f h' \alpha' \in R$. Обозначим через $q_J = q|_{\bigoplus_{f \in J} U_f}$, тогда $q_J h' \alpha' = \sum_{f \in J} q_J i'_f \pi_f h' \alpha' = \sum_{f \in J} \varphi(f) \lambda_f = \varphi(\sum_{f \in J} f \lambda_f) = 0$. Это завершает доказательство теоремы.

Под эквивалентностью в категориях градуированных модулей будем понимать эквивалентность, коммутирующую с функторами сдвига градуировки τ_n для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2.2. Пусть \mathbf{A} — жесткая подкатегория в $\text{gr-}S$, $U \in \mathbf{A}$, $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n)$ является CQF-3-объектом и $R = \text{END}_S(U)$. Обозначим через (T, F) жесткую конаследственную теорию кручения, порожденную объектом U ; t — соответствующее кокручение. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) объект U является t -проективным;
- 2) для любого $A \in \mathbf{A}$ канонический морфизм $\Phi_A: \text{HOM}_S(U, A) \times_R U \rightarrow A$ является t -локализацией;
- 3) градуированный модуль ${}_R U$ — слабо плоский, для любого $M \in \text{gr-}R$ канонический морфизм $\Psi_M: M \rightarrow \text{HOM}_S(U, M \times_R U)$ является g -локализацией, где g — кручение, определенное модулем ${}_R U$.

Если эти условия выполнены, то функторы $\text{HOM}_S(U, -)$ и $(-) \times_R U$ индуцируют эквивалентность между подкатегорией ко-Жиро G в \mathbf{A} , соответствующей теории кручения (T, F) и подкатегорией Жиро L в $\text{gr-}R$; соответствующей кручению g .

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Если объект U является t -проективным, то t -проективным будет и любой градуированный модуль $U(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, теория кручения (T, F) является строго конаследственной, поскольку она порождена t -проективным CQF-3-объектом $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U(n)$ [6, теорема 2.5].

Пусть G — подкатегория ко-Жиро, соответствующая теории кручения (T, F) . Так как G состоит из всех t -радикальных и t -проективных объектов категории \mathbf{A} , то функтор $\text{HOM}_S(U, -): G \rightarrow \text{gr-}R$ унивалентен. Кроме того, категория G обладает точными прямыми пределами и $M \times_R U \in G$ для любого $M \in \text{gr-}R$. Следовательно, к категории G применена теорема 2.1. Тогда $\ker \Phi_A \in F$ для любого $A \in \mathbf{A}$. Тем самым утверждение 2) доказано.

2) \Rightarrow 3). Согласно лемме 1.6 градуированный модуль ${}_R U$ является слабо плоским. Обозначим через (T', F') наследственную теорию кручения, соответствующую кручению g . Так как функторы $T = (-) \times_R U$ и $H = \text{HOM}_S(U, -)$ индуцируют эквивалентность $\text{Im } T \sim \text{Im } H$, то для любого $M \in \text{gr-}R$ имеем $\text{coker } \Psi_M \times_R U = 0$, т. е. $\text{coker } \Psi_M \in T'$.

Заметим, что $\text{HOM}_S(U, A) \in F'$ для любого $A \in \mathbf{A}$. Действительно, пусть $X \in T'$, тогда $\text{HOM}_R(X, \text{HOM}_S(U, A)) \cong \text{HOM}_S(X \times_R U, A) = 0$. Докажем теперь, что модуль $\text{HOM}_S(U, A)$ является g -инъективным для любого $A \in \mathbf{A}$. Рассмотрим в категории $\text{gr-}R$ точную последовательность $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ с $X'' \in T'$. Тогда точная последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow X' \times_R U \rightarrow X \times_R U \rightarrow 0$, где $K \in F$, расщепляется в силу t -проективности модуля $X \times_R U$. Следовательно, $K = 0$. Отсюда в силу сопряженности функторов $\text{HOM}_S(U, -)$

—) и $(-)\times_R U$ следует r -инъективность модуля $\text{НОМ}_S(U, -)$, что и доказывает 3).

3) \rightarrow 1). Пусть $f: A \rightarrow A''$ — эпиморфизм категории \mathbf{A} . Поскольку эпиморфизм $h: \text{НОМ}_S(U, A'') \times_R U \rightarrow t(A'')$ является минимальным [7, лемма 2.2], то эпиморфизмом является и морфизм $\Theta = \text{НОМ}_S(U, f) \times_R U$. Рассмотрим в категории \mathbf{A} точную последовательность $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ с $A' \in F$. Тогда последовательность $0 \rightarrow \text{НОМ}_S(U, A) \rightarrow \text{НОМ}_S(U, A'') \rightarrow N \rightarrow 0$ является точной и $N \times_R U = 0$. В силу r -инъективности градуированного модуля $\text{НОМ}_S(U, A)$ последняя последовательность расщепляется. Следовательно, $N=0$, и градуированный S -модуль U является t -проективным, что и требовалось доказать.

В качестве следствия получается следующая

Теорема 2.3. Для градуированных колец R и S следующие условия равносильны:

- 1) категории $\text{gr-}R$ и $\text{gr-}S$ эквивалентны;
- 2) существуют конечно-порожденный градуированный S -модуль ${}_S U$, изоморфизм градуированных колец $R \cong \text{END}_S(U)$ и эпиморфизм $h \in \text{Hom}_{\text{gr-}S}(\bigoplus_{i=1}^n U(k_i), S)$ для некоторых целых чисел $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Теорема следует из теоремы 2.2 при условии, что $G = \text{gr-}S$ и $L = \text{gr-}R$. Пусть выполнено условие 2). Для любого градуированного модуля $M \in \text{gr-}R$ имеет место точная последовательность $\bigoplus_{i \in I} R_i \rightarrow \bigoplus_{j \in J} R_j \rightarrow M \rightarrow 0$, где $R_k \cong R(n_k)$ для некоторых чисел $n_k \in \mathbb{Z}$. Так как U является конечно-порожденным проективным S -модулем, то коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{i \in I} R_i & \rightarrow & \bigoplus_{j \in J} R_j & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \Psi_M & & \\ \text{НОМ}_S(U, \bigoplus_{i \in I} U_i) & \rightarrow & \text{НОМ}_S(U, \bigoplus_{j \in J} U_j) & \rightarrow & \text{НОМ}_S(U, M \oplus_R U) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

где $U_k \cong U(n_k)$. Следовательно, Ψ_M является изоморфизмом для любого $M \in \text{gr-}R$ и $L = \text{gr-}R$. Кроме того, в этом случае $G = \text{gr-}S$.

Обратное утверждение очевидно, поскольку эквивалентность $T: \text{gr-}R \rightarrow \text{gr-}S$ индуцирует функтор $\text{НОМ}_S(TR, -): \text{gr-}S \rightarrow \text{gr-}R$.

Автор выражает благодарность А. В. Михалеву за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nastasescu C., Van F. Oystaeyen. Graded and filtered rings and modules—Lect. Notes in Math, 1979, № 758.

2. Балаба И. Н. Градуированный вариант теоремы Мориты. — Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1982, с. 10—11.
 3. Gordon R., Green E. L. Graded artin algebras — J. Algebra, 1982, v. 76, № 1, p. 111—137.
 4. Fuller K. R. Density and equivalence — J. Algebra, 1974, v. 29, p. 528—550.
 5. Kato T. Duality between colocalization and localization — J. Algebra, 1978, v. 55, № 2, p. 351—374.
 6. Ohtake K. Equivalence between colocalization and localization in abelian categories with application to the theory of modules. J. Algebra, 1982, v. 79, № 1, p. 169—205.
 7. Tachikawa H., Ohtake K. Colocalization and localization in abelian categories. — J. Algebra, 1979, v. 56, № 1, p. 1—23.
 8. Кашу А. И. Радикалы и кручения в модулях. — Кишинев: Штиинца, 1983.
 9. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — М.: Мир, 1977. — 688 с.
-

УНИТАРНОСТЬ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ ГРУППОВОГО КОЛЬЦА НАД КОНЕЧНЫМ ПРОСТЫМ ПОЛЕМ

А. А. Бовди

Пусть KG — групповое кольцо группы G над коммутативным кольцом K с единицей и f — гомоморфизм группы G в мультипликативную группу кольца K . Если $x = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ — элемент кольца KG , то обозначим через x^f элемент $\sum_{g \in G} \alpha_g f(g)g^{-1}$. Отображение $x \rightarrow x^f$ является антиавтоморфизмом 2-го порядка. Это отображение в дальнейшем будем называть инволюцией, порожденной гомоморфизмом f .

Элемент u мультипликативной группы $U(KG)$ группового кольца KG называется f -унитарным, если обратный элемент u^{-1} совпадает с элементом εu^f , где ε — некоторый обратимый элемент кольца K . Очевидно, все f -унитарные элементы группы $U(KG)$ образуют подгруппу $U_f(KG)$, которая называется f -унитарной подгруппой группы $U(KG)$. Если $U_f(KG) = U(KG)$, то группа $U(KG)$ называется f -унитарной.

Работа посвящена выяснению вопроса, когда группа $U(KG)$ f -унитарна над конечным простым полем K . Приводятся необходимые условия f -унитарности группы $U(KG)$ и доказывается, что при некоторых дополнительных ограничениях на группу G эти условия являются достаточными для f -унитарности группы $U(KG)$. Отметим, что если K — кольцо целых чисел Z , то вопрос об унитарности группы $U(ZG)$ рассмотрен в работе [1].

§ 1. Некоторые вспомогательные факты

Если x — элемент кольца KG , то обозначим через $\chi(x)$ сумму коэффициентов элемента x . Подгруппа $V(KG) = \{x \in U(KG) | \chi(x) = 1\}$ группы $U(KG)$ называется нормированной мультипликативной группой кольца KG .

Если f — тривиальный гомоморфизм группы G и $x \in KG$, то элемент x^f будем обозначать через x^* . Очевидно, если $u \in V(KG)$, то и $u^* \in V(KG)$. Поэтому если u — f -унитарный элемент группы

$V(KG)$, то $u^{-1}=u^*$. Следовательно, если f — тривиальный гомоморфизм, то совокупность всех f -унитарных элементов группы $V(KG)$ образует подгруппу $V_*(KG)$ и $U_f(KG)=V_*(KG) \times U(K)$, где $U(K)$ — мультипликативная группа кольца K .

Известно [2], что если K — поле характеристики p и G — конечная p -группа, то элемент из KG принадлежит подгруппе $V(KG)$ тогда и только тогда, когда сумма коэффициентов элемента равна 1.

Лемма 1.1. Пусть K — поле из двух элементов. Тогда:

1) если $G=\langle a|a^4=1 \rangle$, то подгруппа $V_*(KG)$ совпадает с группой $V(KG)$ и $V(KG)=G \times \langle a+a^2+a^3 \rangle$;

2) если $G=\langle a|a^8=1 \rangle$, то подгруппа $V_*(KG)$ не совпадает с группой $V(KG)$ и подгруппа $V_*(KG)$ представима как прямое произведение группы G и элементарной 2-группы порядка 4.

Доказательство. Пусть $G=\langle a|a^4=1 \rangle$. Если $x=\alpha_0+\alpha_1a+\alpha_2a^2+\alpha_3a^3$ — элемент группы $V(KG)$, то $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ и $xx^*=1+(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)(a+a^3)$. Так как $(\alpha_0+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)=0$, то группа $V(KG)$ унитарна.

Пусть $G=\langle a|a^8=1 \rangle$. Тогда элемент x группы $V_*(KG)$ с точностью до элемента группы G можно представить в виде $x=x_1+x_2a$, где элементы x_1 и x_2 из $K\langle a^2 \rangle$ обладают следующими свойствами: x_1 — обратим и сумма коэффициентов $\chi(x_2)$ элемента x_2 равна нулю. Очевидно, $xx^*=1$ тогда и только тогда, когда $x_1x_1^*(1+x_2x_2^*)=1$ и $x_2a^2+x_2^*=0$. В силу доказанного в первой части леммы утверждения элемент x_1 унитарный. Поэтому равенство $xx^*=1$ имеет место только в том случае, когда

$$x_2x_2^*=0 \text{ и } x_2a^2=x_2^*. \quad (1.1)$$

Пусть $x_2=\beta_0+\beta_1a^2+\beta_2a^4+\beta_3a^6$. Так как $\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, то в силу (1.1) $x_2=\beta_0(1+a^2+a^4+a^6)$. Следовательно, группа $V_*(KG)$ представима как прямое произведение группы G и подгруппы $\{1+(1+a^2+a^4+a^6)(a+\beta a) \mid \alpha, \beta \in K\}$, которая является прямым произведением двух циклических групп 2-го порядка. Лемма доказана.

Лемма 1.2. Если $G=\langle a, b \mid a^4=1; b^2=a^2; b^{-1}ab=a^{-1} \rangle$ — группа кватернионов 8-го порядка и K — поле из двух элементов, то группа $V_*(KG)$ представима как прямое произведение группы G и трех циклических групп 2-го порядка из центра группы $V(KG)$.

Доказательство. Каждый элемент группы $V_*(KG)$ с точностью до элемента группы G можно представить в виде $x=x_1+x_2b$, где $x_i \in K\langle a \rangle$, $\chi(x_1)=1$ и $\chi(x_2)=0$. В силу леммы 1.1 элемент x_1 унитарный и поэтому равенство $xx^*=1$ имеет место тогда и только тогда, когда $x_2x_2^*=0$ и $x_2a^2=x_2^*$. Пусть $x_2=\beta_0+$

$+\beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3$. Тогда из равенств $x_2 x_2^* = 0$ и $\chi(x_2) = 0$ следует, что $x_2 = (\beta_0 + \beta_1 a)(1 + a^2)$. Отсюда и в силу леммы 1.1 получаем, что группа $V_*(KG)$ является прямым произведением группы G и подгруппы

$$\{1 + [\alpha(1+a) + (\beta_0 + \beta_1 a)b](1+a^2) \mid \alpha, \beta_i \in K\},$$

которая представима как прямое произведение трёх циклических групп порядка 2. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Пусть в группе G все элементы конечного порядка образуют подгруппу $\pi(G)$, группа $\pi(G)$ абелева и все ее подгруппы нормальны в G , а фактор-группа $G/\pi(G)$ правоупорядочена. Если групповая алгебра $K\pi(G)$ над полем K полупроста и все идемпотенты алгебры $K\pi(G)$ центральны в алгебре KG , то $V(KG) = V(K\pi(G)) \cdot G$.

Лемма 1.3 доказывается так же, как и теорема 1 из работы [3].

§ 2. Унитарность группы $V(KG)$ относительно инволюции, порожденной тривиальным гомоморфизмом

Теорема 2.1. Пусть группа $V(KG)$ над полем из p элементов K унитарна относительно инволюции, порожденной тривиальным гомоморфизмом группы G . Тогда выполняется одно из следующих условий:

1. K — поле из двух элементов и группа G , либо показателя 2, либо циклическая группа порядка 4.

2. K — поле из двух элементов и группа G представима как полупрямое произведение элементарной 3-группы A и группы $\langle b \rangle$ порядка 2, причем $b^{-1} a b = a^{-1}$ для всех $a \in A$.

3. K — поле из двух элементов и в группе G все элементы конечного порядка образуют подгруппу $\pi(G)$, каждая подгруппа группы $\pi(G)$ нормальна в G и $\pi(G)$ — элементарная абелева 3-группа.

4. K — поле из трех элементов и в группе G все элементы конечного порядка образуют подгруппу $\pi(G)$, каждая подгруппа группы $\pi(G)$ нормальна в G и $\pi(G)$ — элементарная абелева 2-группа.

5. G — группа без кручения.

Если группа G и поле K удовлетворяют одному из указанных выше условий и, кроме того, в п. 3—5 фактор-группа группы G по подгруппе элементов конечного порядка правоупорядочена, то группа $V(KG)$ унитарна относительно инволюции, порожденной тривиальным гомоморфизмом группы G .

Доказательство. Пусть группа $V(KG)$ унитарна относительно инволюции, порожденной тривиальным гомоморфизмом группы G .

Если a элемент простого порядка q группы G и в поле K существует такой ненулевой элемент α , порядок которого не равен q , то элемент $x = (a - \alpha)(1 - \alpha)^{-1}$ обратим в KG и $x^{-1} = (1 - \alpha)(1 - \alpha^q)^{-1}(\alpha^{q-1} + \alpha^{q-2}a + \dots + \alpha a^{q-2} + a^{q-1})$. Так как $x^* = (a^{-1} - \alpha)(1 - \alpha)^{-1}$, то элемент x не является унитарным, а это невозможно. Следовательно, если группа G обладает элементом конечного порядка и группа $V(KG)$ унитарна, то K — поле из двух элементов либо K — поле из трех элементов и в группе G все элементы конечного порядка являются 2-элементами. Рассмотрим каждый случай отдельно.

1. Пусть K — поле из двух элементов. Предположим, что силовская 2-подгруппа P группы G нетривиальна. Так как ввиду леммы 1.1 мультипликативная группа $U(KH)$ группового кольца KH циклической группы H порядка 8 не унитарна, то показатель группы P делит 4 и в силу теоремы Санова [4, теорема 18.3.1] группа P локально конечна. Докажем, что группа P не обладает подгруппой, которая представима как прямое произведение циклической группы $\langle a \rangle$ порядка 2 и циклической группы $\langle b \rangle$ порядка 4. Действительно, если $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — подгруппа группы P , то элемент $1 + b(1 + a)$ обратим и не является унитарным, а это невозможно. Пусть группа P обладает неабелевой конечной подгруппой H . Тогда в центре группы H имеется элемент порядка 2 и, как отмечено выше, содержится в каждой циклической подгруппе порядка 4 группы H . Поэтому группа H содержит единственную подгруппу порядка 2 и в силу теоремы 12.5.2 из [4] является группой кватернионов порядка 8. Так как $U(KH)$ подгруппа f -унитарной группы, то получаем противоречие с леммой 1.2. Следовательно, группа P либо циклическая группа порядка 4, либо показателя 2.

Докажем, что если $P \neq 1$, то G — периодическая группа. Пусть g — элемент бесконечного порядка группы G и a — элемент порядка 2 группы P . Тогда $ag \neq ga$, так как в противном случае элемент $1 + g(1 + a)$ не является унитарным. Очевидно, $u = (1 + a)g(1 + a) \neq 0$ и элемент $1 + u$ имеет порядок 2. Поскольку этот элемент унитарный, то $u = u^*$, и непосредственно проверяем, что это невозможно.

Пусть q — нечетное простое число и L — силовская q -подгруппа группы G . Если a — элемент порядка q^m группы L и $q^m > 3$, то элемент $x = 1 + a + a^2 + \dots + a^{q^m-3}$ обратим в групповом кольце KL над полем из двух элементов. Очевидно, если $q^m \equiv 1 \pmod{4}$, то

$$x^{-1} = a^2 + a^4 + a^6 + \dots + a^{q^m+1},$$

и в случае $q^m \equiv 3 \pmod{4}$ —

$$x^{-1} = a^3 + a^5 + a^7 + \dots + a^q.$$

Так как $x^* \neq x^{-1}$, то отсюда следует, что группа L имеет показатель 3. Докажем, что подгруппа $\langle a \rangle$ порядка 3 группы L нормальна в G . Действительно, если элемент $g \in G$ не принадлежит нормализатору подгруппы $\langle a \rangle$, то $u = (1+a+a^2)g(1+a) \neq 0$ и $1+u \in V(KG)$. Ввиду унитарности элемента $1+u$ получаем равенство $u = u^*$, а это возможно только в случае $u = 0$. Поэтому каждая подгруппа элементарной 3-подгруппы L нормальна в G .

Пусть $P \neq 1$ и $L \neq 1$. Тогда в силу доказанных выше утверждений группа G периодическая и совпадает с произведением подгрупп P и L . Докажем, что группа P порядка 2 и $bab^{-1} = a^{-1}$ для всех $a \in L$ и $b \in P \setminus \{1\}$. Так как циклическая подгруппа $\langle a \rangle$ нормальна в G , то достаточно доказать, что в централизаторе элемента a нет элементов порядка 2 из P . Действительно, если $b \in P$, $b^2 = 1$, $ab = ba$, то $1+a(b+1)$ не унитарный элемент, а это невозможно. Следовательно, G — полупрямое произведение подгрупп L и $P = \langle b \mid b^2 = 1 \rangle$, причем $bab^{-1} = a^{-1}$ для всех $a \in L$.

2. K — поле из трех элементов и элементы конечного порядка группы G являются 2-элементами. Если a — элемент порядка 4 группы G , то $x = 1+2a+a^3 \in V(KG)$ и $xx^* = a^2$, а это противоречит унитарности элемента. Поэтому в группе G все элементы конечного порядка имеют порядок 2. Докажем, что эти элементы принадлежат центру группы G . Действительно, если $a^2 = 1$ и $ab \neq ba$ для некоторого $b \in G$, то $u = (1+a)b(1-a) \neq 0$, $u^2 = 0$ и $1+u \in V(KG)$. Тогда из равенства $1+u^* = 1-u$ следует

$$ab + b - aba - ba + b^{-1} - ab^{-1} + b^{-1}a - ab^{-1}a = 0. \quad (2.1)$$

Отсюда $b = ab^{-1}a$ и равенство (2.1) принимает вид $2(ab - ba) = 0$, а это невозможно. Следовательно, элементы конечного порядка группы G принадлежат центру и образуют элементарную абелеву 2-подгруппу. Необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность этих условий при дополнительном предположении на группу G в условиях 3—5, что фактор-группа группы G по подгруппе элементов конечного порядка правоупорядочена.

Пусть K — поле из двух элементов. Если G — циклическая группа порядка 4, то в силу леммы 1.1 группа $V(KG)$ унитарна. Если же группа G показателя 2, то таким же свойством обладает и группа $V(KG)$ и поэтому унитарна.

Пусть G — полупрямое произведение элементарной абелевой 3-группы A и группы $\langle b \rangle$ порядка 2. Если $x \in V(KG)$, то $x = x_1 + x_2b$ ($x_i \in KA$) и

$$y = xx^* = (x_1 + x_2b)(x_1^* + x_2^*b) = x_1x_1^* + x_2x_2^*.$$

Тогда $y \in V(KA)$ и $y = y^*$. Если $y = \sum_{h \in A} \alpha_h h$, то в силу формулы биннома Ньютона

$$y^2 = \sum_{h \in A} \alpha_h^2 h^2 = \sum_{h \in A} \alpha_h h^{-1} = y^* = y.$$

Отсюда $y = 1$ и группа $V(KG)$, а также ее подгруппа $V(KA)$ унитарны.

Пусть K — поле из трех элементов и A — элементарная абелева 2-группа. Если $x = \sum_{h \in A} \alpha_h h$, то

$$x^3 = \sum_{h \in A} \alpha_h^3 h^3 = \sum_{h \in A} \alpha_h h = x.$$

Так как x обратим, то $x^2 = 1$, и в силу равенства $x = x^*$ группа $V(KA)$ унитарна.

Пусть в группе G все элементы конечного порядка образуют подгруппу $\pi(G)$, каждая подгруппа группы $\pi(G)$ нормальна в G и фактор-группа $G/\pi(G)$ правоупорядочена. Если K — поле из двух элементов и $\pi(G)$ — элементарная абелева 3-группа или K — поле из трех элементов и $\pi(G)$ — элементарная абелева 2-группа, то все идемпотенты алгебры $K\pi(G)$ центральны в KG . Так как группа $V(K\pi(G))$ унитарна, то в силу леммы 1.3 группа $V(KG)$ унитарна. Теорема доказана.

§ 3. Унитарность группы $U(KG)$ относительно инволюции, порожденной нетривиальным гомоморфизмом

Теорема 3.1. Пусть K — поле из p элементов и f — нетривиальный гомоморфизм группы G в мультипликативную группу поля K с ядром A . Если группа $U(KG)$ f -унитарна, то в группе G существует такой элемент b , что группа G порождается этим элементом и подгруппой A и выполняется одно из следующих условий:

1. A — абелева группа без кручения; b — элемент порядка 2; $f(b) = -1$ и $bab = a^{-1}$ для всех $a \in A$ и $p > 2$.

2. A — группа без кручения; b — элемент порядка 2 из централизатора подгруппы A ; $f(b) = -1$ и $p > 2$.

3. K — поле из трех элементов и в группе A элементы конечного порядка образуют элементарную абелеву 2-подгруппу $\pi(A)$, принадлежащую центру группы G , и фактор-группа $G/\pi(A)$ без кручения.

4. G — группа без кручения и $p > 2$.

Если группа G и поле K удовлетворяют одному из вышеуказанных условий и, кроме того, в п. 2—4 фактор-группа группы

G по подгруппе элементов конечного порядка правоупорядочена, то группа $U(KG)$ f -унитарна, где f — гомоморфизм группы G в мультипликативную группу поля K с ядром A .

Доказательство. Пусть группа $U(KG)$ f -унитарна и A — ядро гомоморфизма f . Тогда фактор-группа G/A циклическая и подгруппа $U(KA)$ группы $U(KG)$ унитарна относительно инволюции, порожденной тривиальным гомоморфизмом. Очевидно, $p > 2$ и в силу теоремы 2.1 группа A либо без кручения, либо в группе A элементы конечного порядка образуют подгруппу центра показателя 2. Отметим, что в последнем случае K — поле из трех элементов. Так как группа G/A циклическая, то группа G порождается подгруппой A и некоторым элементом b .

Рассмотрим случай, когда b — элемент конечного порядка. Если $C = \langle b \rangle \cap \ker f \neq 1$, то в силу теоремы 2.1 группа C порядка 2 и K — поле из трех элементов. Докажем, что элемент b порядка 2.

Пусть группа $\langle b \rangle$ обладает элементом a нечетного порядка q . Тогда элемент $a+1$ обратим и

$$(a+1)(a+1)^f = (a+1)(a^{-1}f(a)+1) = a+a^{-1}f(a)+1+f(a) \in K.$$

Следовательно, элемент $a+1$ не является f -унитарным и получили противоречие.

Пусть 2^t — порядок группы $\langle b \rangle$, $t > 1$ и $p > 5$. Если a элемент порядка 2 группы $\langle b \rangle$, то, как отмечено выше, $a \in \ker f$, и существует такой элемент $a \neq 0$ поля K , что элемент $a-a$ обратим. Очевидно, элемент $a-a$ является f -унитарным тогда и только тогда, когда $f(a) = -1$. Так как $t > 1$, то группа $\langle b \rangle$ обладает элементом c порядка 4, а поле K элементом β , порядок которого не равен 4. Тогда элемент $c-\beta$ обратим, $c^2=a$ и $f(c) \neq -1$. Отсюда вытекает, что элемент $c-\beta$ не является унитарным, а это невозможно.

Если $p=3$ и c — элемент порядка 4 группы $\langle b \rangle$, то $x=1+2c+c^3 \in V(KG)$, $x^f=x$ и $x^{-1}=2c+c^2+c^3$, а это невозможно. Если же $p=5$, то элемент $x=1+c+c^2-c^3$ обратим, $f(c)$ равно 2 или 3 и x снова не является унитарным элементом. Следовательно, порядок элемента b равен 2 и $f(b) = -1$.

Пусть группа $\langle b \rangle$ порядка 2 не является нормальной в G . Если $N \langle b \rangle$ — нормализатор подгруппы $\langle b \rangle$ в G , $a \in A \setminus N \langle b \rangle$, то $u=(1+b)a(1-b) \neq 0$, $u^2=0$ и $1+u \in V(KG)$. Так как элемент $1+u$ унитарный, то $u+u^f=0$, а отсюда следует

$$(1+b)(a+a^{-1})(1-b)=0. \tag{3.1}$$

В силу того, что $p > 2$, из (3.1) вытекает, что все элементы по-



рядка 2 группы A принадлежат центру группы G . Кроме того, из (3.1) следует $bab^{-1}=a^{-1}$ для всех $a \in A \setminus N \langle b \rangle$. Докажем, что группа $A \cap N \langle b \rangle$ — периодическая. Действительно, если c элемент бесконечного порядка группы $A \cap N \langle b \rangle$, то $ac \in N \langle b \rangle$ и $bc = cb$. Тогда $c^{-1}a^{-1} = bacb^{-1} = a^{-1}c$ и элементы a и c^2 перестановочны. Повторяя эти рассуждения по отношению к элементу ac^2 , мы получим, что $a^{-1}c^{-2} = a^{-1}c^2$, а это невозможно. Следовательно, $bab^{-1} = a^{-1}$ для всех $a \in A$, в силу чего группа A абелева.

Пусть группа $\langle b \rangle$ порядка 2 нормальна в G . Тогда $G = A \times \langle b \rangle$, и в случае $p > 3$ на основании теоремы 2.1 группа A без кручения. Пусть $p = 3$ и группа A обладает элементом a порядка 2. Тогда $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — подгруппа группы G и согласно теореме 2.1 группа $U(KH)$ унитарна относительно инволюции, порожденной тривиальным гомоморфизмом, поэтому $x^{-1} = x^*$ для каждого $x \in V(KH)$. Представим элемент x группы $V(KH)$ в виде $x = x_1 + x_2b$, где $x_i \in K \langle a \rangle$. Ввиду того, что $U(KH)$ подгруппа f -унитарной группы, то $x^f = \pm x^{-1}$ и $x^f = x_1^* - x_2^*b$. Таким образом, мы получаем равенство $x^f = \pm x^*$, а отсюда следует, что один из элементов x_1, x_2 равен нулю. Тогда ввиду равенства $V(K \langle a \rangle) = \langle a \rangle$ группа $V(KH)$ тривиальна, а это невозможно. Следовательно, группа A без кручения и группа G удовлетворяет условию 1 или 2 теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда смежный класс bA не обладает элементом конечного порядка. Если множество $G \setminus A$ имеет элемент c конечного порядка, то $H = \langle c, A \rangle$ — подгруппа группы G и группа $U(KH)$ f -унитарна. Тогда в силу выше рассмотренного случая элемент c имеет порядок 2 и $f(c) = -1$.

Докажем, что каждый элемент d порядка 2 из G перестановочен с элементом b . Действительно, если $bd \neq db$, то $u = (1+d)b(1-d) \neq 0$ и $1+u \in V(KG)$. Тогда $u+u^f = 0$, а это равенство противоречиво.

Очевидно, подмножество $G \setminus A$ состоит только из элементов бесконечного порядка, так как если c — элемент конечного порядка из $G \setminus A$, то $c^2 = 1$, $lc = cb$ и обратимый элемент $2^{-1}(1-c) + 2^{-1}(1+c)b$ не является f -унитарным. В силу теоремы 2.1 группа A либо без кручения, либо в ней все элементы конечного порядка образуют подгруппу P центра группы A и группа P имеет показатель 2. По доказанному выше элемент b принадлежит централизатору подгруппы P . Поэтому подгруппа P содержится в центре группы G , фактор-группа G/P без кручения и K — поле из трех элементов. Следовательно, выполняется условие 3 теоремы и необходимость условий теоремы доказана.

Докажем, что полученные условия являются достаточными

для f -унитарности группы $U(KG)$, если в п. 2—4 дополнительно предположить, что фактор-группа группы G по подгруппе элементов конечного порядка правоупорядочена.

Пусть выполняется условие 1 теоремы. Если $x \in U(KG)$, то $x = x_1 + x_2 b$ ($x_i \in KA$) и $x^f = x_1^* - x_2 b$. Очевидно, $xx^f = x_1 x_1^* - x_2 x_2^* \in KA$. Так как $V(KA) = A$ и $(xx^f)^* = xx^f$, то $xx^f = \pm 1$, и группа $U(KG)$ f -унитарна.

Если выполняется условие 2 теоремы и A —правоупорядоченная группа, то $V(KA) = A$, и в силу леммы Хигмэна [5] $V(KG) = V(KA) \times \langle b \rangle$. Следовательно, группа $U(KG)$ f -унитарна.

Пусть выполняется условие 3 теоремы и фактор-группа $G/\pi(A)$ правоупорядочена. Тогда в силу леммы 1.3 $V(KG) = V(K\pi(A))G$ и на основании теоремы 2.1 группа $V(K\pi(A))$ унитарна относительно инволюции, порожденной тривиальным гомоморфизмом. Отсюда следует f -унитарность группы $U(KG)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бовди А. А. Унитарность мультипликативной группы целочисленного группового кольца.— Матем. сб., 1982, т. 119, № 3, с. 387—400.
2. Бовди А. А. Групповые кольца.— Ужгород: Изд-во Ужгородск. ун-та, 1974.— 120 с.
3. Бовди А. А. О строении целочисленного группового кольца с тривиальными элементами конечного порядка.— Сиб. мат. ж., 1980, т. 21, № 4, с. 28—37.
4. Холл М. Теория групп.— М., 1962.— 468 с.
5. Higman G. The units of group rings. — Proc. London Math. Soc., 1940 v. 46, № 2, p. 231—248.

О МАТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР МНОГООБРАЗИЙ

В. В. Борисенко

Будем называть (ассоциативную) алгебру над полем F представимой, если ее можно вложить в алгебру матриц над расширением F . Основы теории представлений бесконечномерных алгебр были заложены А. И. Мальцевым в [1]. А. З. Ананьиним описаны многообразия алгебр над бесконечным полем, все конечно-порожденные (к. п.) алгебры которых представимы [2].

В данной работе изучается вопрос о представимости относительно свободных (о. с.) алгебр. Относительно свободной (свободной в многообразии \mathbf{M}) алгеброй называется фактор-алгебра свободной алгебры по некоторому T -идеалу (идеалу тождеств \mathbf{M}). Впервые результат о представимости о. с. алгебр был получен Ю. П. Размысловым в [3], в ней доказано, что всякая о. с. алгебра в классе алгебр с 1 над полем характеристики 0, удовлетворяющая всем тождествам алгебры матриц порядка 2, вкладывается в алгебру, конечно-порожденную как модуль над центром. К. И. Бейдаром доказано, что алгебра эндоморфизмов к. п. модуля над коммутативной нётеровской алгеброй над полем представима [4]. Из этих двух результатов следует, что любая о. с. алгебра с 1 над полем характеристики 0, удовлетворяющая тождествам алгебры матриц порядка 2, представима.

А. Р. Кемером доказано, что все собственные (т. е. обращающиеся в 0 при подстановке 1) полилинейные тождества алгебры матриц порядка 2 над полем характеристики 0 степени выше шести следуют из стандартного тождества четвертой степени [5]. Используя предложение 5 данной работы, получаем, что в классе алгебр с 1 над полем характеристики 0 любая о. с. алгебра, удовлетворяющая стандартному тождеству четвертой степени, представима.

Основные результаты данной работы относятся к случаю поля характеристики 0. В предложении 2 показывается, что бесконечно-порожденная свободная в многообразии \mathbf{M} алгебра представима тогда и только тогда, когда \mathbf{M} порождается конечномерной

над основным полем алгеброй. Будем называть такие многообразия свободно представимыми (с. п.). В предложении 3 указываются некоторые операции над многообразиями, сохраняющие свойство свободной представимости. Главной целью работы является следующая

Теорема. Пусть \mathbf{M} — многообразие алгебр с 1 над полем характеристики 0, в котором для некоторого m выполняются тождества $[[x_1, \dots, x_m][y_1, \dots, y_m], z] = 0$ и $S_m(x_1, \dots, x_m) = 0$, где $S_m(x_1, \dots, x_m)$ — стандартный полином. Тогда \mathbf{M} — свободно представимо.

Отметим, что до сих пор неизвестен ответ на вопрос, будет ли всякая конечно-порожденная о. с. алгебра представима? Над произвольным бесконечным полем F это эквивалентно следующей проблеме: пусть A — к. п. PI-алгебра над F . Существует ли конечномерная над F алгебра B такая, что идеалы тождеств A и B совпадают? Эквивалентность доказана в предложении 1. В случае поля характеристики 0 положительный ответ равносильен свободной представимости любого многообразия, в котором выполняется стандартное тождество.

Будем использовать следующие обозначения: F — основное поле; $F\langle X \rangle$ — свободная алгебра, порожденная счетным множеством свободных образующих X ; $F\langle X_k \rangle$ — свободная алгебра, порожденная k свободными образующими. Элементы свободной алгебры будем называть (некоммутативными) полиномами; $T(\mathbf{M})$ — идеал тождеств многообразия \mathbf{M} ; $T(A)$ — идеал тождеств алгебры A ; $T(f)$ — T -идеал, порожденный полиномом f ; если T — T -идеал в $F\langle X \rangle$, то $T_k = T \cap F\langle X_k \rangle$; Γ_n — пространство собственных полилинейных полиномов от x_1, \dots, x_n , т. е. полиномов, обращающихся в 0 при подстановке 1 вместо любого x_i ; V_m — идеал тождеств Капелли порядка m , т. е. T -идеал, порожденный полиномом вида $\sum_{\sigma} (-1)_{\sigma} x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \dots y_{m-1} x_{\sigma(m)}$, где некоторые из y_i могут быть равны 1;

$$[x, y] = xy - yx; [x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n];$$

$$i_n = T([x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_n, y_n]).$$

Следуя работе В. Н. Латышева [6], будем называть произведение s коммутаторов произвольных степеней s -одночленом; s -одночлен — канонический, если переменные в каждом коммутаторе упорядочены следующим образом: первая переменная имеет минимальный номер, номера переменных, начиная с третьей, возрастают. В [6] доказано, что канонические одночлены образуют базис в Γ_n .

Все алгебры предполагаются с 1, если не оговаривается противное.

В следующих 3 предложениях наличие 1 не предполагается.

Предложение 1. Пусть основное поле F бесконечно. Следующие условия эквивалентны:

- (1) о. с. алгебра A (произвольного ранга) представима;
- (2) существует алгебра B такая, что $\dim_F B < \infty$ и $T(A) = T(B)$.

Предложение 2. Пусть F — поле характеристики 0; \mathbf{M} — многообразие алгебр над F . Следующие условия эквивалентны:

- (1) \mathbf{M} свободно представимо;
- (2) \mathbf{M} порождается конечномерной над F алгеброй;
- (3) \mathbf{M} порождается алгеброй, вложимой в алгебру матриц над коммутативной алгеброй;
- (4) $T(\mathbf{M})$ содержит V_{k+1} для некоторого k и $F\langle X_k \rangle / T_k(\mathbf{M})$ вкладывается в алгебру эндоморфизмов конечно-порожденного модуля над коммутативной алгеброй.

Назовем многообразие \mathbf{M} локально свободно представимым (л. с. п.), если любая к. п. свободная в \mathbf{M} алгебра представима.

Предложение 3. Пусть основное поле F бесконечно. Тогда:

- 1) если \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 — с. п. (л. с. п.) многообразия, то $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$ — с. п. (л. с. п.) многообразие;
- 2) если \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 — с. п. многообразия, то $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ — с. п. многообразие¹;
- 3) если \mathbf{M}_1 — л. с. п. многообразие; \mathbf{M}_2 — с. п. многообразие, то $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ — л. с. п. многообразие.
- 4) если основное поле имеет характеристику 0, \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 — с. п. (л. с. п.) многообразия, $T = T(\mathbf{M}_1)T(\mathbf{M}_2)$, $\mathbf{M} = \text{var}(T)$, то \mathbf{M} — с. п. (л. с. п.) многообразие;

Доказательство предложения 1. Импликация (1) \Rightarrow (2) вытекает из следующей леммы, принадлежащей С. А. Пихтилькову.

Лемма 1. Пусть основное поле F бесконечно; Φ — расширение F ; A — алгебра над Φ ; $\dim_\Phi A < \infty$. Тогда существует алгебра B над F такая, что $\dim_F B < \infty$, и множества тождеств с коэффициентами из F алгебр A и B совпадают.

Лемма доказана в работе [7] для алгебр с 1 над полем характеристики 0 (доказательство получается из теории о представлении конечномерной алгебры в виде полупрямого произведения полупростой подалгебры и радикала). Доказательство легко обобщается путем использования того факта, что при центральном расширении алгебры тождества над бесконечным полем сохраняются.

Докажем (2) \Rightarrow (1). Алгебра B вкладывается в алгебру матриц над F . Пусть e_1, \dots, e_n — базис B ; e_i — некоторые матрицы с элементами из F . Рассмотрим алгебру матриц над трансцендент-

¹ Знак \times здесь и далее обозначает тензорное произведение.

ным расширением F , полученным присоединением трансцендентных элементов t_{ij} , $i=1, \dots, n$, $j=1, 2, \dots$. Пусть $A_1 - F$ -подалгебра в ней, порожденная „общими матрицами“ $x_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i$, $j=1, 2, \dots$. A_1 изоморфна свободной алгебре в многообразии, порожденном алгеброй B .

Доказательство предложения 2. Эквивалентность (1) \leftrightarrow (2) доказывается так же, как и в предложении 1. Импликация (2) \Rightarrow (3) очевидна. Докажем (3) \Rightarrow (4). Пусть \mathbf{M} порождается подалгеброй B алгебры матриц $M_n(C)$ над коммутативной алгеброй C . Обозначим $A = F \langle X \rangle / T(\mathbf{M})$. Для любого полинома $f(x_1, \dots, x_r) \notin T(\mathbf{M})$ существует подстановка $x_i = b_i \in B$ такая, что $f(b_1, \dots, b_r) \neq 0$. Отсюда следует, что для любого $g \in A$, $g \neq 0$ существует гомоморфизм $\varphi_g: A \rightarrow B$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 0$. Рассмотрим алгебру $B_1 = \prod_{0+g \in A} B_g$, где все B_g изоморфны B . Пусть $\varphi: A \rightarrow B_1$ — прямое произведение гомоморфизмов φ_g . Очевидно, что φ инъективен. В свою очередь B_1 вкладывается в $\prod_{0+g \in A} M_n(C) \cong M_n(\prod_{0+g \in A} C)$. Мы доказали, что A представима матрицами над коммутативной алгеброй, откуда следует (4).

Докажем (4) \Rightarrow (2). Обозначим $A = F \langle X_k \rangle / T_k(\mathbf{M})$. Так как $T(\mathbf{M}) \cong V_{k+1}$, то $\mathbf{M} = \text{var}(A)$. Поскольку алгебра A конечно-порождена, она вкладывается в алгебру эндоморфизмов к. п. модуля над к. п. коммутативной алгеброй. Используя результат К. И. Бейдара [4], получаем, что A представима. Поэтому условие (2) следует из предложения 1.

Доказательство предложения 3. Пункт 1) следует из того, что прямая сумма двух представимых алгебр представима. Пункт 4) вытекает из результатов работы J. Lewin'a [8]. 2) вытекает из определения и корректности операции тензорного произведения многообразий [9], а также предложения 1. Докажем 3). Так как \mathbf{M}_2 — с. п. многообразие, то \mathbf{M}_2 порождается некоторой конечномерной алгеброй A . Обозначим $T = T(\mathbf{M}_1)$, $Q = T(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)$. $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$ порождается алгеброй $F \langle X \rangle / T \times A$. Покажем, что всякий полином $f(x_1, \dots, x_k) \notin Q_k$ не является тождеством в $F \langle X_{kn} \rangle / T_{kn} \times A$, где $n = \dim_F A$. Пусть e_1, \dots, e_n — базис A . Так как $f \notin Q$, то существует подстановка $x_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} \times e_i$, $j=1, \dots, k$, $g_{ij} \in F \langle X \rangle / T$, при которой f не обращается в 0. Тогда f не будет обращаться в 0 и при подстановке $x_j = \sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} \times e_i$, где \bar{x}_{ij} — образующие $F \langle X_{kn} \rangle / T_{kn}$. Это означает, что алгебра $F \langle X_k \rangle / Q_k$ аппроксимируется представимой алгеброй $F \langle X_{kn} \rangle / T_{kn} \times A$. Далее следует повторить

рассуждения, приведенные при доказательстве импликации (3) → (4) в предложении 2. Предложение 3 доказано.

Всюду далее будем рассматривать только класс алгебр с 1 над полем характеристики 0.

Перейдем к доказательству теоремы. Основным в доказательстве будет следующее.

Предложение 4. Пусть в M выполняются тождества

$$[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0 \text{ и } [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] = 0.$$

Тогда M — с. п. многообразие.

Используем следующие обозначения: $\Lambda_3(X)$ — алгебра общих верхнетреугольных матриц порядка 3, т. е. подалгебра в алгебре матриц над кольцом коммутативных многочленов $F[t_{ij}^{(k)}]$, $1 \leq i \leq j \leq 3$, $k = 1, 2, \dots$, порожденная общими треугольными матрицами $x_k = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} t_{ij}^{(k)} \times e_{ij}$, где e_{ij} — матричные единицы. Хорошо известно, что $\Lambda_3(X)$ канонически изоморфна о. с. алгебре $F\langle X \rangle / I_3$; $G_3(X)$ — алгебра общих верхнетреугольных матриц порядка 3, к которой добавлены следы ее элементов.

Обозначим $T = T(M)$.

Лемма 2. Пусть $T \not\subseteq I_2$. Тогда M свободно представимо.

Доказательство. Так как мы рассматриваем алгебры с 1, то $T(M)$ порождается собственными полилинейными элементами. Поэтому найдется $f \in T \cap \Gamma_n$, $f \in I_2$. Представим f через каноническую базу; в этом представлении найдется хотя бы один 1-одночлен с ненулевым коэффициентом; пусть он равен $[x_1, x_i, x_3, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$. При подстановке $x_i = x$, $x_j = y$ при $j \neq i$ все остальные одночлены обратятся в 0. Поэтому T содержит полином $[x, y, \dots, y]$; утверждение леммы следует из основной теоремы работы [2] и предложения 2.

Дальнейшие рассуждения будем вести в предположении $T \subseteq I_2$.

Лемма 3. Пусть $T \subseteq I_2$. Для любого полинома $f(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma \cap \Gamma_n$ найдется полилинейный полином $g(x_1, \dots, x_n, y) \in T$ такой, что в алгебре $G_3(X)$ выполняется равенство $\text{tr}(y)f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, y)$.

Доказательство. Представим f через каноническую базу: $f = \sum_i \lambda_i [*][*]$ (здесь и далее звездочка используется в тех случаях, когда несущественно, какие переменные входят в коммутатор). Легко проверяется, что в алгебре $G_3(X)$ справедливо равенство

$$\text{tr}(y)f = yf + \sum_i \lambda_i [*]y[*] + fy.$$

Для доказательства леммы нужно доказать, что правая часть равенства принадлежит T . Будем использовать следующее обо-

значенце, введенное в работе [6]: $\sigma_1(z)h = \sum_i \gamma_i [[*, z] [*],$ где $h = \sum_i \gamma_i [**]$ — представление h через каноническую базу. Итак, для доказательства леммы достаточно показать, что $\sigma_1(y) f(x_1, \dots, x_n) \in T$. Выделим произвольную переменную x_r , входящую в запись f . Разобьем сумму в представлении f через каноническую базу на две части, в зависимости от того, в первый или во второй коммутатор входит x_r :

$$\begin{aligned} \text{Имеем} \quad f &= \sum_j \alpha_j [\dots x_r \dots] [*] + \sum_k \beta_k [*] [\dots x_r \dots]. \\ 2x_r f - f/x_r = x_r^2 &= 2x_r f - \sum_j \alpha_j [\dots x_r^2 \dots] [*] - \sum_k \beta_k [*] [\dots x_r^2 \dots] \equiv \\ &\equiv 2x_r f - \sum_j \alpha_j (x_r [\dots x_r \dots] [*] + [\dots x_r \dots] x_r [*]) - \\ &- \sum_k \beta_k ([*] x_r [\dots x_r \dots] + [*] [\dots x_r \dots] x_r) \equiv \sigma_1(x_r) f \pmod{T}. \end{aligned}$$

Итак, для любой переменной x_r , входящей в запись f , $\sigma_1(x_r) f \in T$. Линеаризуя последнее соотношение, получим

$$\sigma_1(y) f(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \equiv -\sigma_1(x_r) f(x_1, \dots, y, \dots, x_n) \pmod{T}.$$

Последнее сравнение по модулю T верно для любого r , $1 \leq r \leq n$. Отсюда следует, что

$$(n+1)! \sigma_1(y) f(x_1, \dots, x_n) \equiv \text{alt}(\sigma_1(y) f(x_1, \dots, x_n)) \pmod{T},$$

где alt — оператор полного альтернирования по переменным y, x_1, \dots, x_n . Но правая часть сравнения равна нулю, т. к. $\sigma_1(y) f \in T([x_1, x_2, x_3])$. Лемма 3 доказана.

Доказательство предложения 4. Обозначим через \tilde{T} вербальный идеал $T(\Lambda_3(X))$ алгебры общих треугольных матриц порядка 3 $\Lambda_3(X)$. Алгебры $F\langle X \rangle/T$ и $\Lambda_3(X)/\tilde{T}$ изоморфны. Так как T порождается как T -идеал собственными полилинейными элементами, то из леммы 3 следует, что \tilde{T} является идеалом в алгебре $G_3(X)$. Поэтому фактор-алгебра $\Lambda_3(X)/\tilde{T}$ вкладывается в алгебру $G_3(X)/\tilde{T}$. Поскольку в многообразии \mathbf{M} выполняется тождество Капелли порядка 7, то достаточно показать представимость алгебры $F\langle X_6 \rangle/T_6$. Рассмотрим подалгебру A в $G_3(X)/\tilde{T}$, порожденную образами при каноническом эпиморфизме общих треугольных матриц x_1, \dots, x_6 , а также $\text{tr}(x_i^j)$, $i=1, \dots, 6$, $j=1, 2, 3$. Алгебра $F\langle X_6 \rangle/T_6$ вкладывается в A . Образы x_i в алгебре A алгебраичны степени 3 над центром A ; A удовлетворяют тождеству $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] = 0$. Отсюда следует, что A порождается как модуль над центром образами слов от x_i , не содержащих подслов вида x_i^3 , а также более двух вхождений подслов вида $x_j x_i$, $j > i$. Таких слов конечное число, следовательно, A

конечно-порождена как модуль над центром. Предложение 4 следует теперь из предложения 2.

Лемма 4. Пусть T_1 и T_2 — T -идеалы. Тогда для любого n

$$(T_1 + T_2) \cap \Gamma_n = T_1 \cap \Gamma_n + T_2 \cap \Gamma_n.$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in (T_1 + T_2) \cap \Gamma_n$. Тогда $f = g + h$, где $g \in T_1$, $h \in T_2$. Полиномы g и h можно считать полилинейными; g можно представить в виде $g = g_0 + \sum x_{i_1} \dots x_{i_k} g_{i_1 \dots i_k}$, где индексы $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ пробегает все непустые подмножества множества $\{1, \dots, n\}$; $g_0 \in T_1 \cap \Gamma_n$, $g_{i_1 \dots i_k}$ — собственный полилинейный элемент T_1 , не зависящий от x_{i_1}, \dots, x_{i_k} . Аналогично

$$h = h_0 + \sum x_{i_1} \dots x_{i_k} h_{i_1 \dots i_k}.$$

Имеем

$$f = g + h = g_0 + h_0 + \sum x_{i_1} \dots x_{i_k} (g_{i_1 \dots i_k} + h_{i_1 \dots i_k}).$$

Подставляя последовательно в это равенство $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 1$ при $k = n, n-1, \dots, 1$ получим, что $g_{i_1 \dots i_k} + h_{i_1 \dots i_k} = 0$. Поэтому $f = g_0 + h_0 \in T_1 \cap \Gamma_n + T_2 \cap \Gamma_n$. Итак, доказано включение $(T_1 + T_2) \cap \Gamma_n \subseteq T_1 \cap \Gamma_n + T_2 \cap \Gamma_n$. Обратное очевидно.

Лемма 5. Пусть T_1 и T_2 — T -идеалы, и существует натуральное число N такое, что для всех $n \geq N$, $T_1 \cap \Gamma_n \subseteq T_2$. Тогда при $n \geq N$, $(T_1 + T_2) \cap \Gamma_n = T_2 \cap \Gamma_n$.

Лемма 5 очевидным образом следует из леммы 4.

Предложение 5. Пусть T и Q — T -идеалы такие, что:

- 1) для любого T -идеала $P \supseteq Q$, $F \langle X \rangle / P$ представима и
- 2) существует натуральное N такое, что при $n \geq N$, $T \supseteq Q \cap \Gamma_n$.

Тогда $F \langle X \rangle / T$ представима.

Доказательство. Из условия следует, что $F \langle X \rangle / T + Q$ представима. Пусть $i \triangleleft F \langle X_N \rangle$ — идеал, порожденный всеми словами от переменных x_1, \dots, x_N степени выше N . Рассмотрим алгебру $A = F \langle X_N \rangle / T_N + i$. A конечномерна; всякий полином $f \notin T$ степени не больше N не является тождеством в A . Докажем, что

$$T(F \langle X \rangle / (T + Q) \oplus A) = T(F \langle X \rangle / T) = T.$$

Включение $T(F \langle X \rangle / (T + Q) \oplus A) = (T + Q) \cap T(A) \supseteq T$ очевидно. Докажем обратное. Достаточно показать, что для любого $(T + Q) \cap T(A) \cap \Gamma_n \subseteq T \cap \Gamma_n$. Пусть $f \in \Gamma_n$, $f \notin T \cap \Gamma_n$. Если $n < N$, то $f \notin T(A)$, следовательно, $f \notin (T + Q) \cap T(A) \cap \Gamma_n$. Пусть $n \geq N$. По лемме 5 $(T + Q) \cap \Gamma_n = T \cap \Gamma_n$. Так как $f \notin T \cap \Gamma_n$, то $f \notin (T + Q) \cap T(A) \cap \Gamma_n$. Обратное включение доказано. Поскольку алгебра

$F \langle X \rangle / (T+Q) \oplus A$ представима, то по предложению 2 $F \langle X \rangle / T$ представима, что и требовалось доказать.

Обозначим через T T -идеал, порожденный полиномами $[[x_1, \dots, x_m][y_1, \dots, y_m], Z]$ и $S_m(x_1, \dots, x_m)$. Дальнейший план доказательства теоремы состоит в том, чтобы показать, что все собственные полилинейные следствия достаточно высокой степени полиномов, указанных в предложении 4, лежат в T .

Лемма 6. $T ([[x_1, \dots, x_m][y_1, \dots, y_m], z])$ содержит для некоторого k полином $[x_1, \dots, x_k][y_1, \dots, y_k][z_1, \dots, z_k]$.

Доказательство. Обозначим $[x_1, \dots, x_{m-1}] = a$, $x_m = x$, $[y_1, \dots, y_m] = b$, $T([[a, x] b, z]) = P$. Имеем $0 \equiv [[a, x^2] b, z] - [[a, x, x] b, z] = 2[x[a, x] b, z] \pmod{P}$, $0 \equiv [x[a, x] b, z] - x[[a, x] b, z] = [x, z][a, x] b \pmod{P}$. Подставляя в последнее сравнение $x_1 = z$, $x_2 = \dots = x_m = x$, получим $[z, x][z, x, \dots, x] b \in P$. Из результатов работы [2] следует, что $T([z, x][z, x, \dots, x])$ содержит полином вида $[z, x, \dots, x][t, u, \dots, u]$. В работе [10] доказано, что $T([z, x, \dots, x])$ содержит полином вида $[x_1, \dots, x_k]$. Поэтому P содержит полином $[x_1, \dots, x_k][y_1, \dots, y_k][z_1, \dots, z_k]$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Существует натуральное число N такое, что при $n \geq N$ $T \equiv i_3 \cap \Gamma_n$.

Доказательство. Обозначим через Q T -идеал, порожденный элементами $[[x_1, \dots, x_m][y_1, \dots, y_m], z]$ и $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$. Докажем сначала, что для всякого l существует $d = d(l)$ такое, что любой 2-одночлен степени не ниже d представляется по модулю Q в виде линейной комбинации произведений двух коммутаторов, каждый из которых имеет длину не меньше l . Из основной теоремы работы [6] следует, что Q содержит элемент вида $[[x_1, x_2][x_3, x_4], y_1, y_2, \dots, y_t]$, поэтому для любых $p, s \geq 2$ справ дивы сравнения по модулю Q $[x_1, \dots, x_p][z_1, \dots, z_s, y_1, \dots, y_t] \equiv \equiv - \sum [x_1, \dots, x_p, y_i, \dots, y_t][z_1, \dots, z_s, y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, \hat{y}_t, \dots, y_t]$, где суммирование ведется по всем упорядоченным подмножествам $\{i_1, \dots, i_a\}$ множества $\{1, \dots, t\}$.

Возьмем $d = 2l + t$. Если в 2-одночлене степени не ниже d первый коммутатор имеет длину меньше l , то его можно представить по модулю Q в виде линейной комбинации 2-одночленов, в которых первый коммутатор имеет большую длину, а второй коммутатор имеет длину не меньше l . Таким образом, можно привести любой 2-одночлен степени не ниже d к нужному виду.

Доказанное означает, что для всякого l существует $d = d(l)$ такое, что для всех $n \geq d$ и для любых $p, 1 < p < n$, выполняется сравнение (*) $[x_1, \dots, x_p][x_{p+1}, \dots, x_n] \equiv f + g \pmod{T}$, где f — линейная комбинация 2-одночленов, каждый коммутатор в которых имеет длину не меньше l ; g — линейная комбинация s -одночленов при $s \geq 3$.

По лемме 6 $T \ni [x_1, \dots, x_r][y_1, \dots, y_r][z_1, \dots, z_r]$. Так как T — матричный T -идеал и T содержит стандартное тождество, то T содержит полином вида $[x_1, y_1] \dots [x_r, y_r]$. Для доказательства леммы достаточно показать, что для всякого $j \geq 3$ любой j -одночлен достаточно большой степени лежит в T . Будем вести доказательство нисходящей индукцией по j . Для $j=r$ утверждение верно. Пусть $j < r, j \geq 3$. Рассмотрим произвольный j -одночлен степени не ниже $N = d(d(k)) \cdot r$. В нем найдется коммутатор длины не меньше $d(d(k))$. Рассмотрим соседний коммутатор. Применим к их произведению сравнение (*). Используя предположение индукции, заключаем, что наш j -одночлен представляется по модулю T в виде линейной комбинации j -одночленов, содержащих два соседних коммутатора степени не меньше $d(k)$ каждый; делая то же самое еще раз, получаем представление в виде линейной комбинации j -одночленов, содержащих три соседних коммутатора степени не меньше k . Но любой такой j -одночлен лежит в T . Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть Q — T -идеал, порожденный полиномами $[[x_1, \dots, x_m][y_1, \dots, y_m], z]$ и $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$; R — T -идеал, порожденный полиномами $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]$ и $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$. Тогда существует натуральное число N такое, что при $n \geq N, Q \cap \Gamma_n = R \cap \Gamma_n$.

Доказательство. Докажем сначала, что $R \cap \Gamma_n$ порождается как модуль над групповой алгеброй симметрической группы элементами $f_s(x_1, \dots, x_n) = [[x_1, \dots, x_s][x_{s+1}, \dots, x_{n-1}], x_n]$, $s = 2, 3, \dots, n-3$. В работе [6] доказано, что собственные полилинейные следствия собственного полилинейного полинома $f \in I_2$ по модулю I_3 можно получить при помощи симметрических операций (т. е. перенумерации переменных и взятия линейных комбинаций), а также операторов $d_x(u)$ и $p(y)$, которые определяются следующим образом:

$$d_x(u) f(x) = f(xu) - xf(u) - f(x)u,$$

$$p(y) f = [f, y].$$

Будем вести доказательство индукцией по степени n . Пусть $g(x)$ имеет степень $n+1$. Он получается применением операторов $d_x(u)$ и $p(y)$ к элементам $R \cap \Gamma_n$, а затем применением симметрических операций. Ввиду индуктивного предположения достаточно доказать, что полиномы $d_{x_i}(x_{n+1}) f_s(x_1, \dots, x_n)$ и $p(x_{n+1}) f_s(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит симметрическому модулю, порожденному элементами $f_s(x_1, \dots, x_{n+1})$, $s = 2, 3, \dots, n-2$. Имеем $d_{x_n}(x_{n+1}) f_s(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{I_3}$. При $i < n$ $d_{x_i}(x_{n+1}) f_s(x_1, \dots, x_n) = d_{x_i}(x_{n+1}) p(x_n) [x_1, \dots, x_s][x_{s+1}, \dots, x_{n-1}] \equiv p(x_n) d_{x_i}(x_{n+1}) ([x_1, \dots, x_s][x_{s+1}, \dots,$

$x_{n-1}] \pmod{i_3}$, так как операторы $d_{x_i}(x_{n+1})$ и $p(x_n)$ коммутируют [6]. Очевидно, что для любого $f(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_n \cap i_2$ полином $p(y) f(x_1, \dots, x_n)$ представим в нужном виде.

Докажем теперь, что существует N такое, что для любых $n \geq N$ $f(x_1, \dots, x_s) \in Q$. Возьмем $N = d(m) + 1$, где функция $d(m)$ определена при доказательстве леммы 7. Воспользуемся сравнением (*):

$$f_s(x_1, \dots, x_n) = [[x_1, \dots, x_s][x_{s+1}, \dots, x_{n-1}], x_n] \equiv [f + g, x_n] \equiv [f, x_n] \pmod{Q}, \text{ т. к. } g \in i_3 \subseteq Q.$$

Здесь f — линейная комбинация произведений двух коммутаторов длины не меньше m каждый. Очевидно, что $[f, x_n] \in Q$. Лемма 8 доказана.

Доказательство теоремы. Обозначим $T = T(\mathbf{M})$; R — T -идеал, порожденный элементами $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]$ и $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$. Ввиду предложений 4 и 5 достаточно показать, что существует N такое, что при $n \geq N$, $T \supseteq R \cap \Gamma_n$. Из леммы 7 следует существование N_1 такого, что для $n \geq N_1$, $T \supseteq i_3 \cap \Gamma_n$. Пользуясь леммой 4, получаем, что при $n \geq N_1$, $T \supseteq Q \cap \Gamma_n$ (определенные Q в лемме 8). По лемме 8, существует N_2 такое, что при $n \geq N_2$, $Q \cap \Gamma_n = R \cap \Gamma_n$. Поэтому достаточно взять $N = \max(N_1, N_2)$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы вытекает также следующее утверждение: пусть \mathbf{M} — многообразие алгебр с 1 над полем характеристики 0 такое, что:

1) в \mathbf{M} выполняются тождества $[[x_1, \dots, x_m][y_1, \dots, y_m], z] = 0$ и $S_m(x_1, \dots, x_m) = 0$;

2) \mathbf{M} содержит алгебру верхнетреугольных матриц второго порядка. Тогда свободная алгебра \mathbf{M} вкладывается в алгебру, порожденную как модуль над центром k образующими, где k зависит только от m .

Автор выражает благодарность В. Н. Лагышеву за оказанную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. О представлениях бесконечных алгебр.— Матем. сб. 1943, № 13, с. 263—286.
2. Ананьин А. З. Локально финитно аппроксимируемые и локально представимые многообразия.— Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 1, с. 3—23.
3. Размыслов Ю. П. Конечная базированность некоторых многообразий.— Алгебра и логика, 1974, т. 13, № 6, с. 685—693.
4. Бейдар К. И. О матричном представлении колец эндоморфизмов. Пятый Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 1982, с. 18.

5. Кемер А. Р. Идеал тождеств, порожденный стандартным тождеством четвертой степени. XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Минск, 1983, с. 89.
 6. Латышев В. Н. О сложности нематричных многообразий. Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 2, с. 149—183.
 7. Пихтильков С. А. О многообразии, порожденном n -мерными алгебрами. Деп. в ВИНТИ 27 марта 1980, № 1213-80.
 8. Lewin J. A matrix representation for associative algebras. I. — Trans Amer. Math. Soc., 1974, v. 188, p. 297—308.
 9. Leron U., Varne A. Polynomial identities of related rings.—Israel J. Math., 1970, v. 8, № 2, p. 127—137.
 10. Кемер А. Р. О нематричных многообразиях.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 3, с. 255—283.
-

О ПРОДОЛЖЕНИЯХ ЧАСТИЧНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ, II

Ю. Б. Добрусин

Продолжается исследование, начатое в [1]. Сохраняются терминология, обозначения, нумерация результатов и параграфов [1]. В данной части работы изучаются транзитивные и вполне транзитивные группы без кручения (по-прежнему всюду под группой понимается абелева группа). Термин (вполне) транзитивность введен И. Капланским [2] для определенных модулей над полным дискретного нормирования и использовался многими авторами при исследовании соответствующих примарных групп (см. библиографию в [8]). Позднее П. А. Крылов [3] определил класс групп без кручения, названных им транзитивными и под этим названием исследовавшихся автором [4]. Впоследствии стало ясно, что для случая групп без кручения отмеченный перенос терминологии был сделан неудачно. Транзитивные по [3, 4] группы естественно было бы, учитывая терминологию И. Капланского, называть вполне транзитивными, а термин «транзитивность» использовать в другом смысле, что и было сделано в работах [1, 5, 6, 7]. Используемые теперь определения (вполне) транзитивных групп без кручения и примарных групп можно, естественно, объединить следующим образом.

Определение [11]. Абелеву группу G назовем транзитивной (соответственно вполне транзитивной), если для любых элементов $a, b \in G$, таких, что их высотные матрицы [8] $H(a) = (\alpha_{ij})$ и $H(b) = (\beta_{ij})$ совпадают (соответственно удовлетворяют условию $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$ для всех $i, j = 1, 2, \dots$), существует автоморфизм (соответственно эндоморфизм) G , переводящий a в b .

Данное определение в случае «без кручения» согласуется с [1, 5, 6, 7] (см. предложение 5.1) и полностью соответствует исходной идее И. Капланского [2]. В частности, транзитивность группы означает транзитивность действия ее группы автоморфизмов на множестве элементов с одинаковыми высотными матрицами.

В случае групп без кручения наибольшим вниманием пользо-

вались однородные транзитивные (другое название — сильно однородные) группы. Наибольшее продвижение здесь получено П. А. Крыловым [9] и Д. Арнольдом [10], описавшими данные группы в случае счетности и конечности их рангов. Произвольные вполне транзитивные и транзитивные группы без кручения впервые стали специально исследоваться автором [4—6, 11] вначале в связи с решением проблемы Л. Фукса об описании квазисервантной инъективных групп, а затем и как представляющие самостоятельный интерес группы. Результаты о транзитивных группах без кручения, совпадающих со своими сервантными подгруппами, порожденными минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами, анонсированы П. А. Крыловым [7]. Все упомянутые результаты согласуются между собой.

Данная часть работы содержит три параграфа (§ 5—7). Основные результаты и их следствия (§ 5, 6) описывают в ряде случаев строение и свойства (вполне) транзитивных групп без кручения, в частности, такие группы, имеющие конечный ранг, а также являющиеся сепарабельными, векторными и др. При этом применяются результаты [1]. В § 7 строятся примеры. Основные результаты работы были анонсированы в [6]. В данной части работы описываются (вполне) транзитивные группы без кручения, которые можно получить из групп, обладающих элементами максимального типа, все ненулевые эндоморфизмы которых — мономорфизмы, с помощью конструкций прямой суммы, прямого произведения и близких конструкций (теорема 5.3). Отметим, что таким строением обладают все (вполне) транзитивные группы без кручения, о которых удалось получить содержательные результаты в упомянутых работах.

§ 5. Транзитивные и вполне транзитивные группы без кручения

Предложение 5.1. Для группы G без кручения свойство транзитивности эквивалентно любому из свойств 1)–3), а свойство вполне транзитивности — любому из свойств 1*)–3*).

1. Для любых $a, b \in G$ таких, что $\chi_G(a) = \chi_G(b)$, существует автоморфизм G , переводящий a в b .

2. Всякий изоморфизм между любыми двумя изоморфными сервантными подгруппами ранга 1 группы G продолжается до автоморфизма G .

3. Для любой сервантной подгруппы H ранга 1 группы G все сохраняющие высоты элементов гомоморфизмы $H \rightarrow G$ продолжаются до автоморфизмов G .

1*. Для любых $a, b \in G$ таких, что $\chi_G(a) \leq \chi_G(b)$, существует эндоморфизм G , переводящий a в b .

2*. Всякий гомоморфизм между любыми 2 сервантными

подгруппами ранга 1 группы G продолжается до эндоморфизма G .

3*. Для любой сервантной подгруппы H ранга 1 группы G все гомоморфизмы $H \rightarrow G$ продолжаются до эндоморфизмов G .

Доказательство основано на тех же соображениях, что и доказательство предложения 1.1, и опускается.

Основными блоками, из которых будут строиться изучаемые группы, являются группы, все ненулевые эндоморфизмы которых — мономорфизмы. Последние рассмотрим, используя соответствующую теорему 2.1 об эндотранзитивных группах (см. 2.2—2.5).

Теорема 5.2. Пусть G — группа без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которой — мономорфизмы и $m(G) \neq \emptyset$. Тогда свойства транзитивности и эндотранзитивности G равносильны и характеризуются п. 3) теоремы 2.1. Следующие утверждения эквивалентны:

а) G вполне транзитивна;

б) G транзитивна и $T(G) = T_m(G)^1$;

в) G квазиоднородна и существует i' -расширение S кольца Z такое, что $\Pi(S^+) = \Pi(G)$, и G является таким модулем без кручения над кольцом S , что любые два линейно независимых над S элемента имеют несравнимые типы в группе G .

Если для неоднородной группы G выполнено в), то $S = E(G)$, все ненулевые эндоморфизмы G обязаны быть мономорфизмами.

Доказательство. Учитывая 2.1, 2.3, 2.4, достаточно лишь проверить эквивалентность а), б), в).

а) \Rightarrow б). Пусть G вполне транзитивна, тогда она эндотранзитивна и согласно 2.1 транзитивна. В силу 5.1, п. 1* для всякого $0 \neq a \in G$ и всякого $b \in G[a] = \{y \in G \mid \chi_G(y) \geq \chi_G(a)\}$ существует (причем по условию единственный) $\varphi_b \in E(G)$ такой, что $\varphi_b(a) = b$. Ясно, что соответствие $b \rightarrow \varphi_b$ задает изоморфизм $G[a]$ на $E(G)$. В частности, $G[a] \cong G[a']$ для всех $0 \neq a, a' \in G$. Отсюда, так как $m(G) \neq \emptyset$, следует $T(G) = T_m(G)$.

б) \Leftrightarrow в) следует из 2.1 непосредственно.

б) \Rightarrow а) легко вывести из 5.1, п. 1, 1*. Теорема доказана.

Замечание. Как уже отмечалось в 2.5, при условии однородности исходной, рассмотренной в 5.2 группы G , свойства транзитивности и вполне транзитивности G оказываются равносильны и эквивалентны тому, что G — это просто модуль ранга 1 над таким коммутативным i' -расширением S кольца Z , что все ненулевые эндоморфизмы аддитивной группы S^+ — мономорфизмы. В то же время существуют (см. § 7) неоднородные транзитивные группы, удовлетворяющие посылке теоремы 5.2, не являющиеся вполне транзитивными.

¹ Здесь и далее $T(G)$ — множество всех типов ненулевых элементов G , $T_m(G)$ — подмножество максимальных типов.

Переходя к основной теореме, обозначим через F некоторое произвольное множество редуцированных групп без кручения, таких, что $m(A) \neq \emptyset$, и все ненулевые эндоморфизмы A — мономорфизмы для всех $A \in F$. Не исключено, что в F имеются различные, но изоморфные группы.

Теорема 5.3. Пусть группа G такова, что любая пара ее элементов входит в прямое слагаемое G , разложимое в прямое произведение групп, изоморфных некоторым группам из F , причем для любых различных $A, B \in F$ группа G имеет прямое слагаемое, изоморфное $A \oplus B$. Тогда утверждения о транзитивности групп $G, \bigoplus_{A \in F} A, \Sigma^*_{A \in F} A$ равносильны и эквивалентны тому, что все группы $A \in F$ транзитивны и для любых различных $A, B \in F$, таких, что $\Pi(A) \cap \Pi(B) \neq \emptyset$, группы A и B изоморфны и однородны.

Теорема остается в силе при замене всюду термина «транзитивность» на «вполне транзитивность».

Доказательство. Поскольку свойства вполне транзитивности и эндотранзитивности наследуются прямыми слагаемыми, то необходимость вытекает непосредственно из 3.1, 5.2.

Достаточность. Пусть все группы $A \in F$ удовлетворяют заключительным условиям теоремы. Тогда рассуждениями, совершенно идентичными проведенным при доказательстве теоремы 3.1, все сводится к доказательству транзитивности и вполне транзитивности группы

$$C = \sum_{j \in J}^* A_j,$$

где $A_j \cong A$ — некоторая однородная транзитивная (или, что в этом случае равносильно, вполне транзитивная) группа из F ; J — произвольное множество некоторой мощности n . Вполне транзитивность такой группы C уже доказана в 3.3; доказательство ее транзитивности разобьем на несколько этапов. Для удобства далее индекс C в обозначениях χ_C, τ_C опускаем. При $n < \infty$ транзитивность C вытекает из 5.1, 3.3, п. 2. Поэтому считаем далее, что $n = \infty$.

Два элемента $x, y \in C$ назовем эквивалентными, если $\varphi(x) = y$ для некоторого автоморфизма φ группы C (обозначение — $x \sim y$). Непосредственно из 3.3, п. 2) вытекает:

1. Всякие два ненулевых элемента, типы которых в C равны типу группы A и характеристики в группе C которых совпадают, эквивалентны.

Для дальнейшего зафиксируем $a, b \in C, a = (\dots a_i \dots), b = (\dots b_j \dots), a_j, b_j \in A_j, j \in J$ и будем считать заданным инъективное отображение $\chi: J \rightarrow J$ такое, что $\chi(a_j) = \chi(b_{\chi(j)})$ для всех $j \in J$.

Докажем

2. Пусть $b_j=0$ при всех $j \notin \nu(J)$. Тогда $a \sim b$.

Для доказательства рассмотрим разбиение (под разбиением понимаем представление множества в виде объединения непересекающихся подмножеств) $J=J_1 \cup J_2$ такое, что имеется биекция μ множества J_1 на J_2 . Из транзитивности $A \oplus A$ вытекает существование автоморфизма группы $A_j \oplus A_{\mu(j)}$, $j \in J_1$, отображающего элемент $(a_j + a_{\mu(j)})$ на элемент $d_j \in A_j$, $\chi(d_j) = \chi(a_j + a_{\mu(j)})$. Поэтому $a \sim c$, где $c = (\dots c_j \dots)$, $c_j = d_j$ при $j \in J_1$, $c_j = 0$ при $j \in J_2$. Аналогично рассуждая, получим также, что $b \sim c$. Поэтому $a \sim b$.

Из 1) и 2) вытекает

3. Если для каждого $j \in J \setminus \nu(J)$ найдется хотя бы один индекс $\delta(j) \in J$ такой, что $\chi(b_j) \geq \chi(a_{\delta(j)})$, то $a \sim b$.

Докажем

4. Пусть для каждого $j \in J \setminus \nu(J)$ существует конечное подмножество $I_j \subseteq J$ такое, что

$$\chi(b_j) = \bigcap_{i \in I_j} \chi(a_i).$$

Тогда $a \sim b$.

Положим $K = J \setminus \nu(J)$. Поскольку $|\nu(J)| = n = \infty$, то рассмотрим разбиение $\nu(J) = V \cup W$, $|V| = n$, $|W| = \sum_{i \in K} |I_j|$. Пусть μ — биекция V на $\nu(J)$. Рассмотрим элемент $e \in C$, $e = (\dots e_j \dots)$, $e_j \in A_j$, $j \in J$, где $\chi(e_j) = \chi(b_{\mu(j)})$ при всех $j \in V$; $e_j = b_j$ при всех $j \in K$; $e_j = 0$ при всех $j \in W$.

Согласно 2) $e \sim b$. Рассмотрим разбиение $W = \bigcup_{i \in K} I'_j$, где $|I'_j| = |I_j|$. Для всякого $j \in K$ элемент b_j принадлежит группе $A_j \oplus \sum_{i \in I'_j} A_i$.

Ввиду транзитивности этой группы и условия 4) найдется ее автоморфизм, отображающий b_j на $\sum_{i \in I'_j} a'_i$, где $a'_i \in A_i$; $\chi(a'_i) = \chi(a_{s(i)})$;

s — некоторая биекция I'_j на I_j . Следовательно, $e \sim f$, где $f = (\dots f_j \dots)$, $f_j \in A_j$; $f_j = e_j$ при всех $j \in V$; $f_j = 0$ при всех $j \in K$; $f_i = a'_i$ при всех $i \in I'_j$, $j \in K$.

Согласно 3) $a \sim f$. Так как $f \sim e \sim b$, то $a \sim b$.

Из 3) и 4) вытекает

5. Если для каждого $j \in J \setminus \nu(J)$ найдется конечное подмножество $I_j \subseteq J$ такое, что

$$\chi(b_j) \geq \bigcap_{i \in I_j} \chi(a_i),$$

то $a \sim b$.

Наконец, докажем транзитивность C . Допустим, что $\chi(a) = \chi(b)$ для заданных выше a, b . Рассмотрим разбиение $J = J_1 \cup J_2$, такое, что имеется биекция μ_i , отображающая J_i на J , $i=1, 2$.

Положим $x = (\dots x_j \dots)$, $x_j \in A_j$, где $x_j = a_{\mu_j(i)}$ для всех $j \in J_2$ и $x_j = b_{\mu_j(i)}$ для всех $j \in J_1$. Обозначим $\nu = \mu_1^{-1}$. Тогда если $j \in (J \setminus \nu(J)) = J_2$, то из того, что $\chi(a) = \chi(b)$, следует $\chi(x_j) = \chi(b_{\mu_j(i)}) \geq \geq \bigcap_{i \in I_j} \chi(a_i)$ для некоторого конечного подмножества $I_j \subseteq J$. Согласно 5) $a \sim x$. Аналогично получим, что $b \sim x$. Следовательно, $a \sim b$. Теорема доказана.

§ 6. Некоторые следствия

Из 5.2, 5.3, 4.1 непосредственно вытекает

Теорема 6.1. Для редуцированной группы G без кручения конечного ранга свойство транзитивности эквивалентно любому из следующих утверждений:

- 1) $G = \bigoplus_{j=1}^n G_j$, где семейство $\{G_j | j=1, 2, \dots, n\}$ состоит из однородных групп и из сильно неразложимых неоднородных групп, все группы G_j транзитивны и $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_k) = \emptyset$ при всех $i \neq k$;
- 2) $G = \bigoplus_{A \in F} A$, где F — конечное множество транзитивных групп, все ненулевые эндоморфизмы которых — мономорфизмы, и для любых различных $A, B \in F$ таких, что $\Pi(A) \cap \Pi(B) \neq \emptyset$, группы A и B изоморфны и однородны.

Теорема остается в силе при замене везде термина „транзитивность“ на „вполне транзитивность“.

К изучению указанных в 6.1 групп применимы все результаты § 4, в частности, для них справедлива теорема об изоморфизме прямых разложений (см. 4.5). Из 6.1, 2.5 вытекает

Следствие 6.2 (ср. [9, 10]). Следующие свойства группы G без кручения конечного ранга равносильны:

- 1) G однородна и транзитивна;
- 2) G однородна и вполне транзитивна;
- 3) G однородна и эндотранзитивна;
- 4) G является однородным вполне разложимым модулем без кручения конечного ранга над коммутативным i' -расширением S кольца Z таким, что все ненулевые эндоморфизмы группы S^+ — мономорфизмы. S при этом совпадает с центром $E(G)$.

Отметим, что хорошие свойства группы G фактически обеспечиваются соответствующими свойствами модуля ${}_S G$ (см. доказательство леммы 3.3, п. 5).

Из 3.1, 5.2, 5.3, 6.1 вытекает

Следствие 6.3. Пусть G — либо группа без кручения конечного ранга, либо G — группа, удовлетворяющая посылке теоремы 5.3. Тогда свойства транзитивности и эндотранзитивности G рав-

носильны. Если группа G вполне транзитивна, то она транзитивна (обратное неверно, см. 7.2).

Наиболее простыми примерами групп без кручения, обладающих всеми тремя свойствами: транзитивностью, эндотранзитивностью, вполне транзитивностью, являются (по следствию 6.2) группы ранга 1, а также аддитивные группы колец J_p целых p -адических чисел (в качестве кольца S в 6.2 нужно взять соответствующее подкольцо поля рациональных чисел, либо кольцо J_p). Отсюда с помощью 5.3 получаем также

Следствие 6.4. Пусть группа G удовлетворяет посылке теоремы 5.3. а. Пусть F — множество групп ранга 1 (в частности, в этом случае G может оказаться любой вполне разложимой, сепарабельной или векторной группой без кручения), тогда свойства транзитивности, эндо транзитивности, вполне транзитивности группы G равносильны и эквивалентны тому, что $\Pi(X) \cap \Pi(Y) = \emptyset$ для любых двух неизоморфных прямых слагаемых X, Y ранга 1 группы G . б. Пусть F — множество групп, каждая из которых изоморфна аддитивной группе одного из колец целых p -адических чисел по различным простым числам p (в частности, G может оказаться любой алгебраически компактной группой без кручения), тогда G всегда обладает тремя упомянутыми свойствами.

§ 7. Примеры

Итак, имеется много примеров групп, являющихся одновременно и транзитивными и вполне транзитивными. Гораздо сложнее построить группу лишь с одним из этих свойств. Цель параграфа — построить транзитивную, но не вполне транзитивную группу без кручения, а также проиллюстрировать строение (вполне) транзитивных групп без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которых — мономорфизмы. Речь здесь идет о неоднородных группах, поскольку строение однородных достаточно простое.

Заранее выберем некоторое i' -расширение S кольца Z такое, что

$$|S| = |\Pi(S^+)| = \infty,$$

положим $\Omega = \Pi(S^+)$. Простейшие такие кольца составляют большинство подколец поля Q рациональных чисел. Вначале построим

Пример 7.1 (неоднородная вполне транзитивная группа G без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которой — мономорфизмы и $E(G) \cong S$). Пусть A — свободный конечно порожденный нециклический S -модуль; $X(A)$ — множество всех циклических прямых слагаемых модуля A . В силу счетности множества $X(A)$

найдется семейство $\{F_B \mid B \in X(A)\}$ подгрупп F_B аддитивной группы поля Q такое, что $\Pi(F_B) = \Omega$ для всех $B \in X(A)$; множества $W_B = \left\{ p \in \Omega \mid \frac{1}{p} \in F_B \right\}$ бесконечны и попарно не пересекаются для всех $B \in X(A)$.

В делимой оболочке группы A рассмотрим подгруппу $G = \sum_{B \in X(A)} F_B B$. Поскольку B — подмодуль в ${}_S A$, то, естественно, превратим G в S -модуль. Докажем, что G неоднородна и удовлетворяет п. в) теоремы 5.2, а поэтому является искомой.

1) Докажем, что типы любых двух линейно независимых над S элементов в группе G несравнимы.

Пусть $0 \neq a \in A$. Поскольку S — i' -расширение Z , то сервантная подгруппа $L_a = \langle Sa \rangle^{A^+}$ группы A является одновременно [12, предложение 8.1; 13, предложение 5, с. 210] чистым подмодулем S -модуля A и выделяется в A [12, следствие теоремы 8.5] прямым слагаемым. Т. е. L_a — проективный S -модуль ранга 1. Так как все левые и правые идеалы области S — главные, то $L_a \cong S$, $L_a \in X(A)$. Для каждого $B \in X(A)$, обозначим через ε_B образующий S -модуля B . Поскольку каждый элемент из G линейно зависит (над Z) от некоторого элемента из A , который в свою очередь линейно зависит (над S) от некоторого ε_B , $B \in X(A)$, то для доказательства 1) достаточно установить несравнимость $\tau_G(\varepsilon_D)$ и $\tau_G(\varepsilon_C)$ для всех неравных $D, C \in X(A)$. Поскольку $\Omega = \Pi(S^+)$, то

$$\varepsilon_B \notin pA \text{ для всех } p \in \Omega. \quad (1)$$

Как уже отмечалось, $\langle D \oplus C \rangle^{A^+}$ является прямым слагаемым модуля A и $\langle D \oplus C \rangle^{A^+} = Sx \oplus Sy$ для некоторых $x, y \in A$. Пусть $0 \neq n_{DC}$ — такое целое число, что $n_{DC}x \in D \oplus C$, $n_{DC}y \in D \oplus C$, тогда

$$n_{DC} \langle D \oplus C \rangle^{A^+} \subseteq D \oplus C. \quad (2)$$

Докажем несравнимость типов элементов ε_C и ε_D в группе G . Пусть $p \in W_D$, $(n_{DC}, p) = 1$. Тогда согласно определению W_D , $h_p^G(\varepsilon_D) \geq 1$. В то же время, $h_p^G(\varepsilon_C) = 0$. Действительно, допустим, что $\varepsilon_C \in pG$. Тогда $\varepsilon_C = p \sum_{B \in X(A)} f_B \varepsilon_B$, где f_B — почти все равные нулю элементы из F_B . Причем согласно определению W_B , $f_B = \frac{m_B}{n_B}$, где m_B, n_B — взаимно простые целые числа и $(n_B, p) = 1$ для всех $B \neq D$. Поэтому $(\varepsilon_C - p f_D \varepsilon_D) \in pA$. Из (2) и из того что p не делит n_{DC} , тогда вытекает, что $\varepsilon_C \in pC$, что противоре-

чит (1). Аналогично докажем, что для всех $p \in W_C$, не делящих n_{DC} , имеет место $h_p^G(\varepsilon_C) \geq 1$, $h_p^G(\varepsilon_D) = 0$. Поскольку множества W_C , W_D бесконечны и не пересекаются, то $\tau_G(\varepsilon_C)$ несравним с $\tau_G(\varepsilon_D)$. Утверждение 1) доказано. В частности, G неоднородна.

2) Докажем, что группа G квазиоднородна и $\Pi(G) = \Omega$.

Из приведенных выше соображений достаточно проверить, что для всех $B \in X(A)$

$$\Omega = \{p \in \Pi/h_p^G(\varepsilon_B) \neq \infty\}. \quad (3)$$

Поскольку G — S -модуль и $\Omega = \Pi(S^+)$, то включение \supseteq очевидно. Докажем обратное включение. Допустим противное, пусть $h_p^G(\varepsilon_C) = \infty$ для некоторых $p \in \Omega$, $C \in X(A)$. Тогда для всякого натурального k найдутся (зависящие от k) почти все равные нулю числа $f_B \in F_B$, $B \in X(A)$, $f_B = \frac{m_B}{n_B}$ (n_B, m_B — те же, что и выше), что

$$\varepsilon_C = p^k \sum_{B \in X(A)} f_B \varepsilon_B. \quad (4)$$

Если $p \notin \bigcup_{B \in X(A)} W_B$, то $(n_B, p) = 1$ для всех $B \in X(A)$. Согласно

(4) $\varepsilon_C \in pA$, что противоречит (1).

Пусть $p \in W_D$ для некоторого $D \in X(A)$. Если $D = C$, то из (4) следует, что $(\varepsilon_C - p^k f_C \varepsilon_C) \in p^k A$. Согласно (1) тогда n_C делится нацело на p^k . В силу произвольности k $pF_C = F_C$, что противоречит тому, что $p \in \Omega = \Pi(F_C)$. Если же $D \neq C$, то из (4) вытекает, что $(\varepsilon_C - p^k f_D \varepsilon_D) \in p^k A$. Можно считать, что n_{DC} не делится на p^k . Тогда из (2) получим, что $\varepsilon_C \in pA$, что противоречит (1). Таким образом равенство (3) и квазиоднородность группы G показаны. Согласно 1), 2) группа G удовлетворяет п. в) теоремы 5.2. Построение примера 7.1 завершено.

Пример 7.2 (транзитивная группа G' без кручения, не являющаяся вполне транзитивной). Исполюем обозначения, введенные при построении 7.1. Зафиксируем некоторый подмодуль $C \in X(A)$. Для каждого $D \in X(A) \setminus \{C\}$ обозначим через n_{DC} [существующее согласно (2)] некоторое ненулевое целое число такое, что

$$n_{DC} \langle D \oplus C \rangle^A \subseteq D \oplus C.$$

Обозначим через P_D множество всех чисел из W_D , делящих n_{DC} . Положим $P = \bigcup_{D \in X(A) \setminus \{C\}} P_D$. Пусть H — кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых являются произведениями чисел из $P \cup (\Omega \setminus (\bigcup_{B \in X(A) \setminus \{C\}} W_B))$. В делимой оболочке группы A рассмотрим подгруппу

Докажем, что G' является транзитивной группой, у которой все ненулевые эндоморфизмы — мономорфизмы и $m(G') \neq \emptyset$, а именно G' удовлетворяет 2.4, п. 2. Но покажем также, что $T(G') \neq T_m(G')$ и поэтому согласно 5.2 G' не вполне транзитивна.

Доказательство. Поскольку B, C — подмодули в ${}_S A$, то естественно, зададим на G' S -модуль без кручения. Так же, как в 7.1, устанавливается, что группа G' квазиоднородна, а любой ее элемент линейно зависит над S от некоторого ε_B , $B \in X(A)$, и поэтому имеет в G' тип, равный типу соответствующего ε_B , т. е.

$$T(G') = \{\tau_{G'}(\varepsilon_B) \mid B \in X(A)\}. \quad (5)$$

Также аналогично 7.1 доказывается, что если $B, D \in X(A)$ и B, D, C попарно различны, то

$$h_p^{G'}(\varepsilon_B) \geq 1, \quad h_p^{G'}(\varepsilon_D) = 0, \quad (6)$$

для всех $p \in W_B \setminus P, \quad (p, n_{DB}) = 1;$

$$h_p^{G'}(\varepsilon_D) \geq 1, \quad h_p^{G'}(\varepsilon_B) = 0, \quad (7)$$

для всех $p \in W_D \setminus P \quad (p, \dot{n}_{DB}) = 1;$

$$h_p^{G'}(\varepsilon_D) \geq 1, \quad h_p^{G'}(\varepsilon_C) = 0, \quad (8)$$

для всех $p \in W_D \setminus P = W_D \setminus P_D$. Поскольку $|W_D \setminus P| = |W_B \setminus P| = \infty$, то из (6), (7) ясно, что типы $\tau_{G'}(\varepsilon_B)$ и $\tau_{G'}(\varepsilon_D)$ несравнимы. Из определения G' ясно, что $pG' = G'$ для всех $p \in (P \cup (\Omega \setminus (\cup_{B \in X(A) \setminus \{C\}} W_B)))$.

Поэтому из (8) и из того, что $|W_D \setminus P_D| = \infty$, следует, что

$$\tau_{G'}(\varepsilon_C) < \tau_{G'}(\varepsilon_D) \quad (9)$$

для всех $D \in X(A), D \neq C$. Таким образом, группа G' неоднородна, любые два ее линейно независимых элемента имеют разные типы. Согласно (5), (9) $T_m(G') = \{\tau_{G'}(\varepsilon_D) \mid D \in (X(A) \setminus \{C\})\}$, $\tau_{G'}(\varepsilon_C) \notin T_m(G')$. Таким образом, согласно 2.4, 5.2 группа G' является транзитивной, но не вполне транзитивной. Пример построен.

Существуют ли вполне транзитивные группы без кручения, не являющиеся транзитивными? Существуют ли (вполне) транзитивные группы без кручения, не обладающие элементами максимальных типов? Пока эти вопросы открыты. Не затронуто также исследование смешанных (вполне) транзитивных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та (в печати).
 2. Karłan'sky I. Infinite abelian groups. Michigan: Ann. Arbor, 1954.— 91 p.
 3. Крылов П. А. О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения.— Сборник аспирантских работ по математике. Томск, 1973, с. 15—20.
 4. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно инъективные и транзитивные абелевы группы без кручения.— Томск, 1977.— 45 с.— Рукопись представлена Томск. ун-том. Деп. в ВИНТИ 19 июля 1977, № 2942-77.
 5. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно инъективные группы.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 45—63.
 6. Добрусин Ю. Б. О транзитивных и вполне транзитивных абелевых группах без кручения.— Томск, 1981, с. 16—18.— Рукопись представлена Томск. ун-том. Деп. в ВИНТИ 16 марта 1982, № 1197-82.
 7. Крылов П. А. Об абелевых группах без кручения.— Томск, 1981, с. 21—34. Рукопись представлена Томск. ун-том. Деп. в ВИНТИ 16 марта 1982, № 1197-82.
 8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1977, т. 2.— 416 с.
 9. Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения.— Сиб. матем. журнал, 1983, т. 34, № 2, с. 77—84.
 10. Arnold D. M. Strongly homogeneous torsion free groups of finite rank.— Proc. Amer. m. s., 1976, v. 56, № 1, p. 67—72.
 11. Добрусин Ю. Б. Абелевы группы, близкие к алгебраически компактным: Дис. ... канд физ.-мат. наук.— Томск, 1982.— 157 с.
 12. Fieldhouse D. I. Pure theories.— Math. Annalen, 1969, v. 184, № 1, p. 1—18.
 13. Ламбек И. Кольца и модули.— М.: Мир, 1971.— 280 с.
-

ПОЧТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ С ПРИМАРНЫМИ ФАКТОРАМИ

С. Ф. КОЖУХОВ

Абелева группа G без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой, если она квазиравна некоторой вполне разложимой группе [1]. То есть группа G обладает такой вполне разложимой подгруппой $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$, A_j — группы ранга 1, $j=1, \dots,$

k , что для некоторого целого числа m $mG \subseteq A \subseteq G$. Всякая такая подгруппа A с сервантными подгруппами A_j называется полным квазиразложением группы G [2]. Если G — почти вполне разложимая группа и $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$ — ее полное квазиразложение, то множество $T(G)$ всех типов квазислагаемых A_j не зависит от выбора подгруппы A , то есть является инвариантом группы G [3]. Фактор-группа G/A не является инвариантом группы G , поскольку группа G может обладать еще таким полным квазиразложением

$B = \bigoplus_{j=1}^k B_j$, что группы G/A и G/B не изоморфны [1]. Однако если множество $T(G)$ состоит из попарно несравнимых типов, то группа G обладает единственным полным квазиразложением $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$ [2], так что фактор-группа G/A является инвариантом группы G . И в этом случае можно говорить о почти вполне разложимых группах G с фиксированным множеством попарно несравнимых типов $T = T(G)$ и фиксированным фактором $K = G/A$, где A — полное квазиразложение группы G .

Пусть T — фиксированное конечное множество попарно несравнимых типов и K — некоторая конечная абелева группа. Всякую почти вполне разложимую группу G с полным квазиразложением $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$ будем называть (T, K) -группой, если $T(G) = T$ и $G/A \cong K$. Пусть G — такая почти вполне разложимая группа, что $T(G) = T$ и пусть $G = G_1 \oplus G_2$, где G_2 — максимальное вполне разложимое

42

прямое слагаемое группы G . Такое разложение для группы G единственно, а прямая сумма группы G_2 и полного квазиразложения группы G_1 будет полным квазиразложением группы G [2]. Очевидно, что G является (T, K) -группой тогда и только тогда, когда для подмножества $T' = T \setminus T(G_2)$ группа G_1 является (T', K) -группой. Поэтому в дальнейшем считаем, что (T, K) -группы не имеют прямых слагаемых ранга 1.

В работе даётся характеристизация (T, K) -групп для случая, когда группа K изоморфна некоторой p -группе P . Отметим, что для случая циклической группы K описание таких групп дано в [4]. Все обозначения и терминология стандартны и взяты из [5] и [6]. Специальные термины и определения будут введены по мере надобности.

Пусть $H = \bigoplus_{j=1}^k H_j$ — вполне разложимая группа с множеством типов слагаемых H_j ранга 1 равным T . Вложим каждую группу H_j в делимую оболочку D_j и пусть $D = \bigoplus_{j=1}^k D_j$. Очевидно, что для любой (T, P) -группы G с полным квазиразложением $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$ существует такой изоморфизм φ группы G на некоторую подгруппу группы D , содержащую H , что $\varphi(A_j) = H_j, j=1, \dots, k$. Поэтому в дальнейшем (T, P) -группы рассматриваем как подгруппы группы D , в которых подгруппы H_j отождествляются с $A_j, j=1, \dots, k$.

Далее, любое разложение группы P в прямую сумму циклических групп записываем так, что слагаемые типа $Z(p^t)$ располагаются в порядке возрастания показателей t . Занумеруем типы в T и эту нумерацию фиксируем. Для любой (T, P) -группы G с полным квазиразложением $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$ слагаемые A_i нумеруем так, что для

всякого $j=1, \dots, k$ $\tau(A_j) = \bar{\tau}_j \in T$. Пусть ранг p -группы P равен r и $r = r_1 + r_2 + \dots + r_v$, где r_1 — число слагаемых типа $Z(p^{t_1})$ в разложении группы P ; r_2 — число слагаемых типа $Z(p^{t_2})$ и т. д. и $t_1 < t_2 < \dots < t_v$. Обозначим через I_1 множество чисел $\{1, 2, \dots, r_1\}$; I_2 — множество чисел $\{r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_1 + r_2\}$; ...; I_v — множество чисел $\{r_1 + r_2 + \dots + r_{v-1} + 1, \dots, r_1 + r_2 + \dots + r_v\}$ и пусть $I = I_1 U I_2 U \dots U I_v$.

Выясним, каким условиям должны удовлетворять множество T и группа P , чтобы класс (T, P) -групп был не пуст.

Лемма 1. Класс (T, P) -групп не пуст тогда и только тогда, когда каждый тип в T не p -делим и ранг r группы P меньше мощности $|T| = k$.

Доказательство. Пусть класс (T, P) -групп не пуст и предположим, что некоторый тип $\tau_i \in T$ p -делим. Если $G = (T,$

P)-группа, $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$ — ее полное квазиразложение, то пусть A_i^* — сервантная оболочка в группе G подгруппы $\bigoplus_{j=1, j \neq i}^k A_j$. Так как $p^{t^v} \times G \subseteq A$, то $p^{t^v} G \subseteq A_i \oplus A_i^*$. Если $g \in G$, $p^{t^v} g = a_i + a_i^*$, $a_i \in A_i$, $a_i^* \in A_i^*$, то $a_i = p^{t^v} \bar{a}_i$ для некоторого элемента $\bar{a}_i \in A_i$. Тогда $p^{t^v} (g - \bar{a}_i) = a_i^* \in A_i^*$, следовательно, $g - \bar{a}_i \in A_i^*$. Это означает, что $g \in A_i \oplus A_i^*$, то есть группа A_i ранга 1 выделяется в G прямым слагаемым, что противоречит отсутствию у группы G слагаемых ранга 1.

Теперь покажем, что ранг r группы P меньше k . Известно, что для любой группы H конечного ранга и любой ее подгруппы U того же ранга ранг q -компоненты фактор-группы H/U не больше ранга H для любого простого числа q . Так как подгруппа A_i сервантна в G , то G/A_i — группа без кручения ранга $k-1$, а A/A_i — ее подгруппа того же ранга. Значит, ранг p -компоненты группы $(G/A_i) / (A/A_i)$ не больше $k-1$. Но эта фактор-группа изоморфна группе $G_p/A \cong P$, следовательно, ранг r группы P строго меньше k .

Обратно, пусть выполнены условия леммы. В каждой группе A_j , $j=1, \dots, k$, выберем по одному элементу a_j , имеющему нулевую p -высоту. Рассмотрим группу $G = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x_1, \dots, x_r \rangle$, где элементы x_1, \dots, x_r удовлетворяют условию $p^{t^m} x_i = a_i + a_{i+1}$ для $i \in I_m$, $m=1, \dots, v$, $i \neq r$ и $p^{t^v} x_r = a_r + a_{r+1} + \dots + a_k$. Нетрудно проверить, что построенная группа G является (T, P) -группой (более подробно это следует из теоремы 1).

Всякая (T, P) -группа G имеет вид $G = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, y_1, \dots, y_r \rangle$, где $y_1 + (\bigoplus_{j=1}^k A_j), \dots, y_r + (\bigoplus_{j=1}^k A_j)$ — образующие фактор-группы $G / (\bigoplus_{j=1}^k A_j)$. Элементы y_1, \dots, y_r удовлетворяют следующему условию: для всякого $i \in I_m$, $m=1, \dots, v$, $p^{t^m} y_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}$ для некоторых элементов $a_{ij} \in A_j$, $j=1, \dots, k$. Фиксируем в каждой группе A_j , $j=1, \dots, k$, по одному элементу a_j , имеющему нулевую p -высоту в A_j . Тогда для всякого натурального s элемент $a_j + p^s A_j$ является образующим фактор-группы $A_j / p^s A_j$. Поэтому существуют такие неотрицательные целые числа n_{ij} , что для каждого $i \in I_m$, $m=1, \dots, v$, $a_{ij} = n_{ij} a_j + p^{t^m} \bar{a}_{ij}$, $j=1, \dots, k$, $\bar{a}_{ij} \in A_j$. Тогда группа G может быть записана в следующем виде:

$$G = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x_1, \dots, x_r \mid p^{tm}x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij}a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \nu \rangle. \quad (*)$$

В дальнейшем, рассматривая (T, P) -группы, элементы a_1, \dots, a_k считаем фиксированными, а сама группа записывается в виде (*). Таким образом, всякой (T, P) -группе ставится в соответствие некоторая целочисленная матрица $N=(n_{ij})$. Выясним, каким условиям должна удовлетворять матрица N , чтобы группа G вида (*) являлась (T, P) -группой.

Определение 1. Пусть $C=(c_{ij})$ —произвольная целочисленная матрица, имеющая r строк и k столбцов. Будем говорить, что строки $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ik}), i=1, \dots, r$, матрицы C P -независимы, если всякий раз из условия $\sum_{m=1}^{\nu} (p^{t\nu-t} \sum_{i \in I_m} l_i (c_{i1}, \dots, c_{ik})) \equiv 0 \pmod{p^{t\nu}}$ следует, что $l_i \equiv 0 \pmod{p^{tm}}$ для $i \in I_m, m=1, \dots, \nu$ (сравнение строк рассматривается поэлементно).

Определение 2. Будем говорить, что j -й столбец (c_{ij}) матрицы $C, j=1, \dots, k$, равен нулю по модулю P , если $c_{ij} \equiv 0 \pmod{p^{tm}}, i \in I_m, m=1, \dots, \nu$.

Для каждого $j=1, \dots, k$ через $C^{(j)}$ обозначаем матрицу, полученную из C вычеркиванием j -го столбца.

Теорема 1. Пусть G —группа вида (*) с соответствующей матрицей $N=(n_{ij})$. Группа G является (T, P) -группой тогда и только тогда, когда для любого $j=1, \dots, k$ строки матрицы $N^{(j)}$ P -независимы, а j -й столбец матрицы N отличен от нуля по модулю P .

Доказательство. Пусть G является (T, P) -группой, и покажем, что строки матрицы $N^{(1)}$, например, P -независимы, а первый столбец отличен от нуля по модулю P . Предположим,

что $\sum_{m=1}^{\nu} (p^{t\nu-t} \sum_{i \in I_m} l_i (n_{i2}, \dots, n_{ik})) \equiv 0 \pmod{p^{t\nu}}$, то есть для $j=2, 3, \dots, k$

$\sum_{m=1}^{\nu} (p^{t\nu-t} \sum_{i \in I_m} l_i n_{ij}) \equiv 0 \pmod{p^{t\nu}}$. Это означает, что существуют

элементы $\bar{a}_j \in A_j, j=2, \dots, k$, для которых $\left(\sum_{m=1}^{\nu} (p^{t\nu-t} \sum_{i \in I_m} l_i n_{ij}) \right) a_j =$

$= -p^{t\nu} \bar{a}_j$. Рассмотрим элемент $g = \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_k + l_1 x_1 + \dots + l_r x_r$.

Умножая обе части равенства на $p^{t\nu}$ и учитывая, что для каждого $i \in I_m, m=1, \dots, \nu, p^{tm}x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij}a_j$, получаем, что $p^{t\nu}g = p^{t\nu} \times$

$\bar{a}_2 + \dots + p^{t\nu} \bar{a}_k + \sum_{j=1}^k \left(\sum_{m=1}^{\nu} (p^{t\nu-t} \sum_{i \in I_m} l_i n_{ij}) \right) a_j = \sum_{m=1}^{\nu} (p^{t\nu-t} \sum_{i \in I_m} l_i n_{i1}) a_1 \in$

$\in A_1$. Так как подгруппа A_1 сервантна в G , то $g \in A_1$. Но p -высота элемента a_1 равна нулю в A_1 , следовательно, $\sum_{m=1}^{\nu} (p^{t-\nu-t} \sum_{i \in I_m} l_i \times \times n_{i1}) \equiv 0 \pmod{p^t}$. Таким образом, имеем $\sum_{m=1}^{\nu} (p^{t-\nu-t} \sum_{i \in I_m} l_i (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{ik})) \equiv \equiv 0 \pmod{p^t}$. Рассмотрим элемент $u = l_1 x_1 + \dots + l_r x_r$. Умножая обе части равенства на p^t , имеем $\sum_{m=1}^{\nu} (p^{t-\nu-t} \sum_{i \in I_m} (l_i \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j)) = \sum_{j=1}^k (\sum_{m=1}^{\nu} p^{t-\nu-t} (\sum_{i \in I_m} l_i n_{ij})) a_j = p^t u$. Но, как только что получили, каждый коэффициент при a_j , $j=1, \dots, k$, делится на p^t . Деля обе части полученного равенства на p^t , получим, что $u \in A = \bigoplus_{i=1}^k A_i$. Следовательно, линейная комбинация $l_1(x_1+A) + \dots + l_r(x_r+A)$ равна нулю в фактор-группе G/A . Но в этой фактор-группе элементы x_i+A , $i=1, \dots, r$, линейно независимы, поэтому коэффициенты l_i делятся на $0(x_i+A)$, $i=1, \dots, r$ [5]. Это и означает, что $l_i \equiv 0 \pmod{p^t}$ для $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$, то есть строки матрицы $N^{(1)}$ P -независимы.

Теперь покажем, что 1-й столбец матрицы N отличен от нуля по модулю P . Предположим, что $n_{i1} \equiv 0 \pmod{p^t}$ для $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$. Так как для каждого $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$, $p^t m x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j$, то $p^t m (x_i - n_{i1} a_1) = \sum_{j=2}^k n_{ij} a_j$, где $n_{i1} = p^t m n'_{i1}$. Это означает, что $x_i = = n'_{i1} a_1 + a_i^*$ для некоторых элементов a_i^* из сервантной оболочки A_1^* подгруппы $\bigoplus_{i=2}^k A_i$. Следовательно, $G = A_1 \oplus A_1^*$, что противоречит отсутствию у (T, P) -групп слагаемых ранга 1. Необходимость условий теоремы доказана.

Обратно пусть группа G удовлетворяет условию теоремы, и докажем, что она является (T, P) -группой. Для этого надо пока ать, что группа G не имеет прямых слагаемых ранга 1, каждая подгруппа A_j сервантна в G (т. е. $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$ — полное квазиразложение G) и что $G/A \cong P$.

Если группа G имеет прямое слагаемое ранга 1, то этим слагаемым согласно [2] будет одна из групп A_i , а дополнительным слагаемым A_i^* будет сервантная оболочка остальных подгрупп A_j , $j=1, \dots, k$, $j \neq i$. Пусть, например, $G = A_1 \oplus A_1^*$. Тогда из равенств

$p^t m x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j$, $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$, следует, что $n_{i1} \equiv 0 \pmod{p^t m}$ для $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$. То есть первый столбец матрицы N равен нулю по модулю P , что противоречит условию.

Покажем, что каждая подгруппа A_j сервантна в G , $j=1, \dots, k$. Для этого достаточно показать p -сервантность каждой из этих подгрупп. Пусть, например, $pg \in A_1$ и $g = \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k + l_1 x_1 + \dots + l_r x_r$. Умножая обе части данного равенства на $p^{t\nu}$ и учитывая, что для каждого $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$, $p^t m x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j$, получаем $A_1 \equiv \equiv p^t \nu g = p^t \nu \bar{a}_1 + \dots + p^t \nu \bar{a}_k + \sum_{j=1}^k \left(\sum_{m=1}^{\nu} p^{t\nu-tm} \sum_{i \in I_m} l_i n_{ij} \right) a_j$. Отсюда следует, что для каждого $j=2, \dots, k$ $\sum_{m=1}^{\nu} \left(p^{t\nu-tm} \sum_{i \in I_m} l_i n_{ij} \right) a_j = -p^t \nu \bar{a}_j$, то

есть $\sum_{m=1}^{\nu} \left(p^{t\nu-tm} \sum_{i \in I_m} l_i (n_{i2}, \dots, n_{ik}) \right) \equiv 0 \pmod{p^{t\nu}}$. Так как строки матрицы $N^{(1)}$ P -независимы, то $l_i \equiv 0 \pmod{p^t m}$ для $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$. Но в таком случае из равенства $g = \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k + l_1 x_1 + \dots + l_r x_r$ следует, что $g \in A$. А так как $pg \in A_1$, то $g \in A_1$. Этим доказана сервантность подгруппы A_1 в группе G .

Наконец докажем, что $G/A \cong P$. Для этого надо показать, что $0(x_i + A) = p^t m$ для $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$ и что элементы $x_i + A$, $i=1, \dots, r$, независимы в группе G/A . Предположим, к примеру, что $0(x_1 + A) = p^s$, где $s < t_1$. Тогда $p^s x_1 = \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k$, $\bar{a}_j \in A_j$, $j=1, \dots, k$, и так как $p^t x_1 = n_{11} a_1 + \dots + n_{1k} a_k$, то $n_{11} a_1 + \dots + n_{1k} a_k = p^{t-s} \bar{a}_1 + \dots + p^{t-s} \bar{a}_k$. Следовательно, n_{ij} делится на p^{t-s} , $j=1, \dots, k$. Но в таком случае нетрудно видеть, что строки матрицы N P -зависимы. Это говорит о том, что $0(x_1 + A) = p^{t_1}$. Аналогично показывается, что для всех $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$, $0(x_i + A) = p^t m$. Предположим далее, что $l_1(x_1 + A) + \dots + l_r(x_r + A) = A$, то есть $l_1 x_1 + \dots + l_r x_r = \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k$, $\bar{a}_j \in A_j$, $j=1, \dots, k$. Умножим обе части последнего равенства на $p^{t\nu}$. Получаем $\sum_{j=1}^k \left(\sum_{m=1}^{\nu} p^{t\nu-tm} \sum_{i \in I_m} l_i n_{ij} \right) a_j = \sum_{j=1}^k p^{t\nu} \bar{a}_j$. Так как p -высота каждого элемента a_j равна нулю, то $\sum_{m=1}^{\nu} \left(p^{t\nu-tm} \sum_{i \in I_m} l_i n_{ij} \right) \equiv 0 \pmod{p^{t\nu}}$

для всех $j=1, \dots, k$ или $\sum_{m=1}^{\nu} \left(p^{t\nu-tm} \sum_{i \in I_m} l_i (n_{i1}, \dots, n_{ik}) \right) \equiv 0 \pmod{p^{t\nu}}$. Так как строки матрицы $N^{(1)}$ P -независимы, то отсюда следует что $l_i \equiv 0 \pmod{p^t m}$ для всех $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$. Это означает линей-

ную независимость в группе G/A элементов $x_i + A$, $i=1, \dots, r$ [5]. Теорема доказана.

Определение 3. Всякую целочисленную матрицу размерности $r \times k$, которая удовлетворяет условиям теоремы 1, назовем (T, P) -матрицей.

Таким образом, всякая (T, P) -группа полностью определяется некоторой (T, P) -матрицей. Например, группа G , построенная при доказательстве леммы 1, определяется матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$
, которая имеет r строк и k столбцов.

Естественно, возникает вопрос, когда две (T, P) -матрицы $N = (n_{ij})$ и $M = (m_{ij})$ определяют одну и ту же (T, P) -подгруппу в группе D .

Пусть N — произвольная (T, P) -матрица. Обозначим через N_P матрицу, полученную из N умножением i -й строки при $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$, на $p^{t\nu-tm}$.

Теорема 2. Две (T, P) -матрицы $N = (n_{ij})$ и $M = (m_{ij})$ определяют одну и ту же (T, P) -группу тогда и только тогда, когда существует такая целочисленная матрица $S = (s_{ij})$, что $N_P \equiv SM_P \pmod{p^{t\nu}}$, где сравнение матриц рассматривается поэлементно.

Доказательство. Пусть $G = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x_1, \dots, x_r \mid p^{tm}x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} \times a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \nu \rangle$, и $H = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, y_1, \dots, y_r \mid p^{tm}y_i = \sum_{j=1}^k m_{ij} a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \nu \rangle$.

Предположим, что $G=H$. Тогда существует такая целочисленная матрица $S = (s_{ij})$, что $x_i + A = \sum_{\alpha=1}^r s_{i\alpha} (y_\alpha + A)$, где $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$, $i=1, \dots, r$, то есть $x_i = \sum_{\alpha=1}^r s_{i\alpha} y_\alpha + \sum_{j=1}^k a_{ij}$ для некоторых элементов $a_{ij} \in A_j$, $j=1, \dots, k$. Умножим обе части данного равенства на $p^{t\nu}$. Тогда для $i \in I_m$, $m=1, \dots, \nu$, имеем $p^{t\nu-tm} \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j = \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{\alpha \in I_m} (s_{i\alpha} p^{t\nu-tm} \times (\sum_{j=1}^k m_{\alpha j} a_j)) + \sum_{j=1}^k p^{t\nu} a_{ij}$. Группируя все слагаемые из одной подгруппы A_j и учитывая, что $h_p(a_j) = 0$, $j=1, \dots, k$, получаем

систему сравнений, в которой для $i \in I_m$, $m=1, \dots, v$, и $j=1, \dots, k$ имеем $p^{t \cdot v - t} n_{ij} \equiv \sum_{m=1}^v \sum_{z \in I_m} s_{iz} p^{t \cdot v - t} m z_j \pmod{p^{t \cdot v}}$. Нетрудно видеть, что в левой части данных сравнений стоят элементы матрицы N_p , а в правой — соответствующие элементы матрицы SM_p , то есть $N_p \equiv SM_p \pmod{p^t}$.

Обратно, пусть существует такая целочисленная матрица S , что $N_p \equiv SM_p \pmod{p^{t \cdot v}}$, и покажем, что $G=H$. Расписывая данное сравнение матриц поэлементно, получаем систему сравнений вида $p^{t \cdot v - t} m n_{ij} \equiv \sum_{m=1}^v \sum_{z \in I_m} s_{iz} p^{t \cdot v - t} m z_j \pmod{p^{t \cdot v}}$, $i \in I_m$, $m=1, \dots, v$, $j=1, \dots, k$. Следовательно, существуют такие элементы $a_{ij} \in A_j$, $j=1, \dots, k$, $i=1, \dots, r$, что $p^{t \cdot v - t} m n_{ij} a_j = \sum_{m=1}^v \sum_{z \in I_m} s_{iz} p^{t \cdot v - t} m z_j a_j + p^{t \cdot v} a_{ij}$.

Фиксируя индекс i и проведя суммирование данных равенств по j , получаем r равенств вида $p^{t \cdot v - t} m \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{m=1}^v \sum_{z \in I_m} s_{iz} p^{t \cdot v - t} m z_j a_j \right) + p^{t \cdot v} \sum_{j=1}^k a_{ij}$.

Из этих равенств получаем, что $p^{t \cdot v} x_i = p^{t \cdot v} \left(\sum_{\mu=1}^r \times s_{i\mu} y_\mu \right) + p^{t \cdot v} \sum_{j=1}^k a_{ij}$ или $x_i = \sum_{\mu=1}^r s_{i\mu} y_\mu + \sum_{j=1}^k a_{ij}$. Это означает, что образующие фактор группы G/A выражаются через образующие фактор-группы H/A , следовательно, $G \subseteq H$. На самом деле здесь имеет место равенство. Действительно, если $G \neq H$, то G/A — собственная подгруппа группы H/A . Но $H/A \cong G/A \cong P$ и P — конечная группа. Поэтому H/A не может иметь собственных подгрупп, себе изоморфных. Следовательно, $G=H$, и теорема доказана.

Теорема 2 дает описание всех (T, P) -групп, рассматриваемых как подгруппы группы D с точностью до равенства. Дадим теперь описание (T, P) -групп с точностью до изоморфизма. Для каждого $j=1, \dots, k$ обозначим через Π_j множество всех тех целых чисел, каждое из которых делится на степени только тех простых чисел q , для которых соответствующая группа A_j q -делима. В частности, Π_j содержит ± 1 и каждое число из Π_j не делится на p .

Теорема 3. Пусть G и H — две (T, P) -группы, заданные матрицами N и M . Группы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие диагональные матрицы размерности $k \times k$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_k \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_k \end{bmatrix}$$

и

с элементами $r_j, q_j \in \Pi_j, j=1, \dots, k$, и такая целочисленная матрица S размерности $r \times r$, что $N_p R \equiv S M_p Q \pmod{p^{t \vee}}$.

Доказательство. Пусть вышеуказанные матрицы R, Q, S существуют и покажем, что группы G и H изоморфны. Группы G и H определяются (T, P) -матрицами N и M соответственно, то

$$G = \left\langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x_1, \dots, x_r \mid p^t m x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \vee \right\rangle \text{ и } H = \left\langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, y_1, \dots, y_r \mid p^t m y_i = \sum_{j=1}^k m_{ij} a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \vee \right\rangle.$$

Рассмотрим группу $G' = \left\langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x'_1, \dots, x'_r \mid p^t m x'_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} r_j a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \vee \right\rangle$.

Так как $r_j \in \Pi_j$, то умножение элементов группы A_j на r_j задает автоморфизм этой группы, поэтому соответствие $a_j \rightarrow r_j a_j, j=1, \dots, k, x_i \rightarrow x'_i, i=1, \dots, r$, продолжается до изоморфизма групп G и G' . Итак, $G' \cong G$, то есть G' является (T, P) -группой, определяемой (T, P) -матрицей NR . Аналогично группа H изоморфна группе $H' = \left\langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, y'_1, \dots, y'_r \mid p^t m y'_i = \sum_{j=1}^k m_{ij} q_j a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \vee \right\rangle$,

которая определяется (T, P) -матрицей MQ . Нетрудно видеть, что $(NR)_p = N_p R$ и $(MQ)_p = M_p Q$. По условию существует такая целочисленная матрица S размерности $r \times r$, что $(NR)_p \equiv S(MQ)_p \pmod{p^{t \vee}}$. Следовательно, по теореме 2 $G' = H'$ и, значит, $G \cong H$.

Обратно, пусть группы G и H изоморфны, покажем существование матриц R, Q, S . Пусть φ — изоморфизм группы G на H . Так как типы групп $A_j, j=1, \dots, k$, попарно несравнимы, то $\varphi(A_j) = A_j$, то есть φ индуцирует некоторый автоморфизм групп A_j . Этот автоморфизм действует на группе A_j как умножение на некоторое рациональное число $r_j/g_j, r_j, q_j \in \Pi_j, j=1, \dots, k$. Следова-

тельно, $\varphi(G) = \left\langle \bigoplus_{j=1}^k \varphi(A_j), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_r) \mid p^t m \varphi(x_i) = \sum_{j=1}^k n_{ij} (r_j/g_j) a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \vee \right\rangle$.

Так как $q_j \in \Pi_j$, то существуют такие элементы $a'_j \in A_j$, что $a_j = q_j a'_j$, и элементы a'_j имеют нулевую p -высоту, $j=1, \dots, k$. Пусть $N', M' — (T, P)$ -матрицы, которые определяют группы G' и H относительно элементов $a'_j, j=1, \dots, k$. Так как $\varphi(G) = H$, то по теореме 2 существует такая целочисленная мат-

рица S размерности $r \times r$, что $N'_p \equiv SM'_p \pmod{p^{t'}}$. Нетрудно видеть, что $N' = NR$ и $M' = MQ$, где

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & r_k \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & q_k \end{bmatrix}.$$

Поскольку $(NR)_p = N_p R$ и $(MQ)_p = M_p Q$, $N_p R \equiv S M_p Q \pmod{p^{t'}}$, и теорема доказана.

Назовем две (T, P) -матрицы N и M (T, P) -подобными, если $N_p R \equiv S M_p Q \pmod{p^{t'}}$ для некоторых матриц R, Q, S , указанных в теореме 3. Нетрудно видеть, что отношение (T, P) -подобия является отношением эквивалентности на множестве всех (T, P) -матриц. Из теоремы 3 получаем

Следствие. Существует взаимнооднозначное соответствие между классами изоморфных (T, P) -групп и классами (T, P) -подобных (T, P) -матриц.

Таким образом, получено описание (T, P) -групп на языке (T, P) -матриц. Применим данное описание для выяснения вопроса разложимости (T, P) -групп в прямую сумму своих ненулевых подгрупп. Кроме того, выясним, когда у произвольной (T, K) -группы G (K —любая конечная группа) каждый автоморфизм полного квазиразложения A продолжается до автоморфизма самой группы G .

Теорема 4. (T, P) -группа G разлагается в прямую сумму двух своих ненулевых подгрупп тогда и только тогда, когда соответствующий ей класс (T, P) -подобных матриц содержит матрицу, которую путем перестановки строк и столбцов можно привести к блочному виду

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Пусть G — (T, P) -группа. Предположим, что группа G разлагается в прямую сумму двух своих ненулевых подгрупп G_1 и G_2 . Согласно [2] существует такое непустое собственное подмножество M множества $I = \{1, \dots, k\}$, что G_1 есть сервантная оболочка подгрупп A_j , $j \in M$, а G_2 —сервантная оболочка остальных подгрупп A_j , $j \in I \setminus M$. Итак, $G_1 = \langle \bigoplus_{j \in M} A_j \rangle_*$, $G_2 = \langle \bigoplus_{j \in I \setminus M} A_j \rangle_*$ и $G = G_1 \oplus G_2$. Выберем в группе G_1 элементы $u_1, \dots,$

y_s так, что $(y_1 + \bigoplus_{i \in M} A_i), \dots, (y_s + \bigoplus_{i \in M} A_j)$ — образующие группы $G_1 / (\bigoplus_{i \in M} A_j)$. Аналогично, z_1, \dots, z_{r-s} — такие элементы из G_2 , что $(z_1 + \bigoplus_{i \in I \setminus M} A_j), \dots, (z_{r-s} + \bigoplus_{i \in I \setminus M} A_j)$ — образующие группы $G_2 / (\bigoplus_{i \in I \setminus M} A_j)$. Тогда группа G

порождается подгруппой $\bigoplus_{j=1}^k A_j$ и элементами $y, \dots, y_s, z_1, \dots, z_{r-s}$.

Если N — (T, P) -матрица группы G , построенная с помощью элементов $y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_{r-s}$, то в любой ее строке либо все элементы с номерами из подмножества M равны нулю, либо равны нулю элементы с номерами из подмножества $I \setminus M$. Очевидно, что такая матрица N путем перестановки строк и столбцов приводится к блочному виду.

Пусть матрица N группы G приводится путем перестановки строк и столбцов к блочному виду. Это означает, что существует такое собственное непустое подмножество M множества I , что в каждой строке матрицы N $n_{ij} = 0$ либо для $j \in M$, либо для $j \in I \setminus M$. Пусть $G_1 = \langle \bigoplus_{i \in M} A_j \rangle_*$, $G_2 = \langle \bigoplus_{i \in I \setminus M} A_j \rangle_*$ и покажем, что

$G = G_1 \oplus G_2$. Для любого элемента $g \in G$ имеем $g = \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k + l_1 x_1 + \dots + l_r x_r$, где $\bar{a}_j \in A_j$, $j = 1, \dots, k$. Рассмотрим элемент x_i ,

$i \in I_m$, $m = 1, \dots, \nu$. Для этого элемента $p^t m x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j$. Так как

$n_{ij} = 0$ либо для $j \in M$, либо для $j \in I \setminus M$, то x_i принадлежит либо G_2 , либо G_1 соответственно. Следовательно, $g \in G_1 \oplus G_2$, то есть $G = G_1 \oplus G_2$.

Следствие. Пусть (T, P) -группа G разлагается в прямую сумму $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_s$, где каждое слагаемое G_i , $i = 1, \dots, s$, неразложимо и имеет ранг k_i . Тогда класс (T, P) -подобных матриц группы G содержит такую матрицу N , которая путем перестановки строк и столбцов приводится к блочному виду

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N_s \end{bmatrix},$$

где в блоке N_i содержится k_i столбцов и каждый блок N_i перестановкой строк и столбцов уже не приводится к блочному виду. Обратное, если некоторая (T, P) -матрица N группы G приводится к вышеуказанному блочному виду, то группа G разлагается в прямую сумму s неразложимых слагаемых ранга k_i .

Пусть G — произвольная (T, P) -группа с полным квазиразло-

жением $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$. Каждый автоморфизм φ группы A (так как типы слагаемых A_j попарно несравнимы) представляется в виде $\varphi = (r_1/q_1, \dots, r_k/q_k)$, где $r_j, q_j \in \Pi_j$, $j=1, \dots, k$. Выясним, когда этот автоморфизм продолжается до автоморфизма группы G .

Лемма 2. Пусть G — (T, P) -группа, определяемая (T, P) -матрицей $N = (n_{ij})$. Автоморфизм $\varphi = (r_1/q_1, \dots, r_k/q_k)$, $r_j, q_j \in \Pi_j$, $j=1, \dots, k$, полного кэлибраложения $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$ группы G продолжается до автоморфизма группы G тогда и только тогда, когда существует такая целочисленная матрица $S = (s_{ij})$ порядка $r \times r$, что $N_p Q \equiv S N_p R \pmod{p^{t_\nu}}$, где Q и R — диагональные матрицы вида

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & q_k \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & r_k \end{bmatrix},$$

Доказательство. Пусть $G = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x_1, \dots, x_r \mid p^t m x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \nu \rangle$, и пусть φ продолжается до автоморфизма $\bar{\varphi}$ группы G . Тогда $\bar{\varphi}(G) = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, \bar{\varphi}(x_1), \dots, \bar{\varphi}(x_r) \mid p^t m \bar{\varphi}(x_i) = \sum_{j=1}^k n_{ij} \times (r_j/q_j) a_j, i \in I_m, m=1, \dots, \nu \rangle$. Так как каждая группа A_j , $j=1, \dots, k$, q_j -делима, то существуют такие элементы $a_j' \in A_j$, что $a_j = q_j \times a_j'$. Тогда $G = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x_1, \dots, x_r \mid p^t m x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} q_j a_j', i \in I_m, m=1, \dots, \nu \rangle$ и $\bar{\varphi}(G) = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, \bar{\varphi}(x_1), \dots, \bar{\varphi}(x_r) \mid p^t m \bar{\varphi}(x_i) = \sum_{j=1}^k n_{ij} r_j a_j', i \in I_m, m=1, \dots, \nu \rangle$, то есть группы G и $\bar{\varphi}(G)$ относительно элементов a_j' определяются (T, P) -матрицами NQ и NR соответственно, где

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & q_k \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & r_k \end{bmatrix}.$$

Так как $\bar{\varphi}(G) = G$, то по теореме 2 существует такая целочисленная матрица S , что $(NQ)_p \equiv S(NR)_p \pmod{p^{t_\nu}}$ или $N_p Q \equiv S N_p R \pmod{p^{t_\nu}}$.

Обратно, пусть выполнено условие леммы, покажем, что автоморфизм φ продолжается до автоморфизма группы G . Итак $G =$

$= \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x_1, \dots, x_r \mid p^t m x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j, i \in I_m, m=1, \dots, v \rangle$, рассмотрим

группу $H = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, y_1, \dots, y_r \mid p^t m y_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} (r_j/q_j) a_j, i \in I_m, m=1, \dots,$

$v \rangle$. Нетрудно видеть, что автоморфизм φ группы A продолжается до изоморфизма $\bar{\varphi}$ группы G на H путем соответствия $\bar{\varphi}(a_j) = \varphi(a_j), j=1, \dots, k$, и $\bar{\varphi}(x_i) = y_i, i=1, \dots, r$. Если $a_j = q_j a'_j$ для некоторых элементов $a'_j \in A_j, j=1, \dots, k$, то относительно a'_1, \dots, a'_k группы G и H будут определяться матрицами NQ и NR соответственно. Так как $N_p Q \equiv S N_p R \pmod{p^t}$ для некоторой целочисленной матрицы S , то по теореме 2 $G=H$, то есть φ —автоморфизм группы G .

Теорема 5. Пусть G —произвольная (T, K) -группа с полным квазиразложением $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$. Каждый автоморфизм подгруппы A продолжается до автоморфизма группы G тогда и только тогда, когда K является элементарной 2-группой.

Доказательство. Пусть K является элементарной 2-группой, то есть $G = \langle \bigoplus_{j=1}^k A_j, x_1, \dots, x_r \mid 2x_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} a_j, i=1, \dots, r \rangle$. Если $\varphi = (r_1/q_1, \dots, r_k/q_k)$ —произвольный автоморфизм группы A , то r_j, q_j —числа нечетные. Тогда все элементы матрицы $N(R-Q)$ являются четными числами. А это означает, что $NQ \equiv SNR \pmod{2}$, где S —единичная матрица порядка r . По лемме 2 автоморфизм φ продолжается до автоморфизма группы G .

Обратно, пусть всякий автоморфизм подгруппы A продолжается до автоморфизма группы G и покажем, что K является элементарной 2-группой. По условию каждый автоморфизм группы A , действующий как тождественный автоморфизм ε на A_i и как $-\varepsilon$ на остальных слагаемых $A_j, j \neq i$, продолжается до автоморфизма группы G . Согласно [7] тогда $2G \subseteq A$, то есть K —элементарная 2-группа.

Если G — (T, K) -группа с полным квазиразложением $A = \bigoplus_{j=1}^k A_j$, то согласно [2] каждая подгруппа $A_j, j=1, \dots, k$, вполне характеристична в G . Следовательно, существует естественный мономорфизм группы $\text{Aut } G$ в $\text{Aut } A$, ставящий в соответствие каждому автоморфизму φ группы G автоморфизм $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ группы A , где φ_j —ограничение автоморфизма φ на подгруппе $A_j, j=1, \dots, k$. Теорема 5 дает ответ на вопрос, когда этот мономорфизм является эпиморфизмом, то есть изоморфизмом.

ЛИТЕРАТУРА

1. L a d y E. L. Almost completely decomposable torsion free abelian groups.—Proc. Amer. Math. Soc., 1974, v. 45, p. 41—47.
2. Кожухов С. Ф. Абелевы группы без нильпотентных эндоморфизмов.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск, 1979, с. 87—94.
3. Jonsson B. On direct decompositions of torsion free abelian groups.— Math. Scand., 1959, v. 7, p. 361—371.
4. Кожухов С. Ф. Об одном классе почти вполне разложимых абелевых групп без кручения.— Изв. вузов. Математика, 1983, вып. 10, с. 29—36.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М., 1974, т. 1.— 335 с.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М., 1977, т. 2.— 416 с.
7. Кожухов С. Ф. Регулярно простые абелевы группы.— Изв. вузов. Математика, 1981, вып. 1, с. 34—40.

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, II

П. А. Крылов

В работе продолжены исследования, начатые в [1,2]. В [2] изучалась неприводимая абелева группа G без кручения. Для такой группы G $R \times Q$ -модуль $G \times Q$ неприводим (R —кольцо эндоморфизмов группы G)¹. Изучается группа G , у которой этот модуль является однородным вполне приводимым, то есть прямой суммой почленно изоморфных вполне приводимых модулей. Оказывается, исследование такой группы можно во многом свести к случаю неприводимой группы. А в наиболее важных и естественных ситуациях такое сведение удается осуществить полностью.

Пусть G —группа без кручения с однородным вполне приводимым $R \times Q$ -модулем $G \times Q$ (если G имеет конечный ранг, то это равносильно тому, что $R \times Q$ —простое кольцо). Выберем в G какую-либо минимальную *psi*-подгруппу H , то есть минимальную сервантную вполне характеристическую подгруппу. Как группа, H —неприводимая группа. Тогда $H \times Q$ —неприводимый $R \times Q$ -модуль. Поэтому отображение ограничения $\alpha \rightarrow \alpha|_H$, $\alpha \in R$ является вложением колец $E(G) \rightarrow E(H)$. Случаи, когда это вложение—изоморфизм, встречаются редко.

Положим $S = \text{End}_R H$. Здесь S —область целостности и H —правый S -модуль. Существует канонический мономорфизм колец $R \rightarrow \text{End}_S H$. Естественней выяснять, когда он является изоморфизмом. Однако и этот модуль H еще не очень удобен, так как H является произвольной неприводимой группой.

Выберем в H некоторый ненулевой циклический R -модуль F . Тогда F —неприводимая эндоциклическая группа [2, определение 1.3]. Положим $S = \text{End}_R F$. Здесь S —также область целостности, а F —правый S -модуль. Ввиду результатов работы [2] всякий ненулевой S -подмодуль в F конечного S -ранга квазиизоморфен свободному S -модулю. И именно этот модуль F мы будем использовать. Как и выше, канонический гомоморфизм $R \rightarrow \text{End}_S F$ является мономорфизмом. В теореме 1 выявляется, когда он

¹ Знак \times здесь и далее обозначает тензорное произведение.

будет изоморфизмом. Теоремы 3 и 5 дают естественные примеры таких групп.

Однако можно пойти дальше. При подходящих условиях существует, оказывается, изоморфизм между категорией всех подмодулей S -модуля F и категорией определенных подгрупп группы G (теорема 2). В этом смысле можно сказать, что исследование группы G с однородным вполне приводимым $R \times Q$ -модулем $G \times Q$ сводится в рамках теории категорий к исследованию определенной неприводимой группы.

Кроме указанных теорем приводится результат об изоморфизме колец эндоморфизмов рассматриваемых групп (теорема 6). Затем из основной теоремы 2 получается эквивалентность некоторых двух категорий (теорема 4) с конкретными приложениями (следствия 4 и 6).

Как и в [1, 2], Z обозначает кольцо целых чисел, Q — поле рациональных чисел. Вместо $A \times_z B$ будем писать $A \times B$. Сделаем одно важное замечание относительно результатов работы [2]. В [2] исследовалась неприводимая группа G без кручения, то есть $E(G) \times Q$ -модуль $G \times Q$ для такой группы G неприводим. Доказательства всех результатов работы [2] без всяких изменений справедливы в том более общем случае, когда R — такое подкольцо в $E(G)$, что $R \times Q$ -модуль $G \times Q$ неприводим. Мы будем постоянно опираться на это замечание и ссылаться на [2] для этого общего случая, не делая никаких оговорок. В [2] группа G рассматривалась как модуль над центром S кольца эндоморфизмов $E(G)$ группы G . Но $S = \text{End}_{E(G)} G$. Поэтому в упомянутом общем случае $S = \text{End}_R G$ и G рассматривается как правый S -модуль. Например, теорема 1.5 [2] формулируется в этой общей ситуации следующим образом.

Пусть G — группа без кручения; R — подкольцо в $E(G)$. Допустим, что $G \times Q$ — неприводимый $R \times Q$ -модуль, а G — конечно-порожденный R -модуль. Положим $S = \text{End}_R G$. Тогда каждый S -подмодуль в G конечного S -ранга квазиизоморфен свободному S -модулю.

Введем следующие обозначения: G — группа без кручения; $R = E(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G ; $S = R \times Q$ — кольцо квазиэндоморфизмов группы G ; $V = G \times Q$ — ее делимая оболочка. Эту оболочку естественным образом рассматриваем как левый S -модуль. Положим $K = \text{End}_S V$. Услеримся, что K действует на V справа.

На протяжении всей работы G — такая группа, что S -модуль V является однородным вполне приводимым. Естественные примеры таких групп будут приведены ниже.

Если V — однородный вполне приводимый S -модуль, то он будет также однородным вполне приводимым K -модулем и неприводимым S - K -бимодулем. Если ненулевой элемент ω лежит в некотором неприводимом подмодуле S -модуля V , то ωK — неприводимый K -подмодуль в V .

Лемма 1. Пусть ненулевые элементы a_1 и a_2 принадлежат некоторым неприводимым подмодулям S -модуля V . Положим $W_i = a_i K$ и $A_i = W_i \cap G$ ($i=1, 2$). Тогда: 1) если $\alpha \in R$ и $0 \neq \alpha a \in A_2$ для какого-либо элемента $a \in A_1$, то $\alpha A_1 \subseteq A_2$; 2) если $\beta \in R$, то либо $\beta_{1, A_1} = 0$, либо β_{1, A_1} — мономорфизм.

Доказательство. 1) K -подмодуль $a_1 K$ неприводим и потому $a_1 K = aK$. Имеем $\alpha W_1 = \alpha(aK) = (\alpha a)K \subseteq W_2 K = W_2$. Отсюда $\alpha A_1 = \alpha(W_1 \cap G) \subseteq W_2 \cap G = A_2$. 2) Так как $K = \text{End}_S V$, то β является эндоморфизмом K -модуля V . Теперь достаточно учесть, что W_1 — неприводимый K -подмодуль в V . Действительно, либо $\beta_{1, W_1} = 0$, либо β_{1, W_1} — изоморфизм.

§ 1. В целях удобства следующие рассуждения разобьем на пункты.

1) Пусть H — некоторая минимальная pfi -подгруппа группы G . Обозначим $W = H \times G$. Ввиду [1] лемма 1.5 W — неприводимый S -модуль. Далее, $D = \text{End}_S V$ — тело и S плотно в конечной топологии кольца $\text{End}_D W$ [3, с. 54]. Кольцо S плотно также в конечной топологии кольца $\text{End}_K V$. Если $e: V \rightarrow W$ — проекция, то можно отождествить D с eKe .

2) Зафиксируем некоторый элемент $0 \neq a \in H$. Положим $F = Ra$. Здесь F — точный R -модуль. Имеем $F \times Q = Ra \times Q = (R \times Q)a \times Q = Sa \times Q = W$ и учитываем условия, наложенные на группу F и кольцо R . Именно $R \subseteq E(F)$ и $F \times Q$ — неприводимый $R \times Q$ -модуль. Пусть $C = \text{End}_R F$. Рассматриваем F как правый C -модуль. Поскольку F — циклический R -модуль, то по теореме 1.5 [2] каждый C -подмодуль в F конечного C -ранга квазиизоморфен свободному C -модулю.

3) Имеем $F \times Q = W$. Если $\alpha \in C$, то $\alpha \times 1$ — эндоморфизм R -модуля W . Поскольку $R \times Q = S$, то, очевидно, $\text{End}_R W = \text{End}_S W$. Таким образом, $\alpha \times 1 \in D$. В этом смысле считаем, что $C \subseteq D$. Затем кольцо $E(F)$ мы отождествляем с образом в $\text{End}_Q W$ вложения $\beta \rightarrow \beta \times 1$, $\beta \in E(F)$. Из этих замечаний вытекают равенства $C = E(F) \cap D = E(F) \cap K$.

Из леммы 1.4 [2] следует, что $C \times Q = D$. Проверим это равенство снова. Так как $C \subseteq D$, то $C \times Q \subseteq D \times Q = D$. Пусть $d \in D$. Тогда ввиду $F \times Q = W$ получаем $n(ad) \in F$ для некоторого натурального числа n . Теперь $F(nd) = (Ra)(nd) = R(nad) \subseteq F$. Откуда $nd \in E(F) \cap D = C$. Следовательно, $d \in C \times Q$ и равенство $C \times Q = D$

установлено. Заметим, что мы отождествляем C с образом канонического мономорфизма $C \rightarrow C \times Q$, $\alpha \rightarrow \alpha \times 1$.

4) Положим $A = aK \cap G$. Как было замечено выше, aK есть неприводимый K -модуль. Справедливы равенства $A \cap F = aK \cap F = aC$. Первые из них очевидно. Предположим, что $b \in aK \cap F$. Тогда $b = ak = g$, где $k \in K$, $g \in F$. Имеем $Fk = (Ra)k = R(ak) = Rg \subseteq F$. Отсюда $k \in E(F) \cap K = C$ и $b = ak \in aC$. Получили, что $aK \cap F \subseteq aC$ и, следовательно, $aK \cap F = aC$.

Справедливо также равенство $A \times Q = aK$. Поскольку $A \subseteq aK$ и aK есть Q -пространство, то $A \times Q \subseteq aK$. Пусть $ak \in aK$. Тогда $n(ak) \in G$ и, значит, $n(ak) \in aK \cap G = A$, то есть $ak \in A \times Q$.

5) Покажем, что группу A естественным образом можно превратить в левый C -модуль. Положим $M(A) = \{\alpha \in R \mid \alpha A \subseteq A\}$, $N(A) = \{\alpha \in R \mid \alpha A = 0\}$. Здесь $M(A)$ — подкольцо в R , а $N(A)$ — идеал в $M(A)$. Группа A является левым $M(A)/N(A)$ -модулем. Докажем, что кольца C и $M(A)/N(A)$ изоморфны. Это позволит считать A левым C -модулем.

Так как $C \subseteq D$, то C — область целостности. Следовательно, сопоставление $c \rightarrow ac$, $c \in C$ является изоморфизмом $C \cong aC$ правых C -модулей. Этот изоморфизм индуцирует изоморфизм колец $\text{End}_C C \cong \text{End}_C aC$. Кольцо C канонически изоморфно кольцу $\text{End}_C C$ и поэтому в итоге получаем канонический изоморфизм $C \cong \text{End}_C aC$.

Обозначим $B = aC$ и докажем существование некоторого изоморфизма

$$\Phi: M(A)/N(A) \rightarrow \text{End}_C B.$$

Отображение ограничения $\Phi': \alpha \rightarrow \alpha_B$, $\alpha \in M(A)$, определено корректно. Действительно, $\alpha_B = \alpha(aC) = \alpha(A \cap F) \subseteq A \cap F = B$. Далее, для $c \in C$ верно $\alpha(ac) = (\alpha a)c$, то есть $\alpha_B \in \text{End}_C B$. Получили, что Φ' — гомоморфизм $M(A) \rightarrow \text{End}_C B$. Пусть $\beta \in \text{End}_C B$. Выберем $\alpha \in R$ так, что $\alpha a = \beta a$. Тогда $\alpha \in M(A)$ (лемма 1) и, как и выше, $\alpha_B \in \text{End}_C B$. Учитывая равенство $\alpha a = \beta a$ и то обстоятельство, что ненулевые эндоморфизмы из $\text{End}_C B$ — мономорфизмы, получаем $\alpha_B = \beta$. Это говорит о том, что Φ' — эпиморфизм. В силу леммы 1 $\ker \Phi' = N(A)$, таким образом, Φ' индуцирует изоморфизм $\Phi: M(A)/N(A) \rightarrow \text{End}_C B$. Композицию канонического изоморфизма $C \cong \text{End}_C aC$ и изоморфизма Φ^{-1} обозначим Ψ . Если $c \in C$, $b \in A$, то положим $cb = \Psi(c)b$, это превращает A в левый C -модуль.

Чему равен элемент $\Psi(c)$? При каноническом изоморфизме $C \cong \text{End}_C aC$ элементу c соответствует такой эндоморфизм модуля aC , при котором элемент a переходит в элемент ac . Пусть $\mu \in M(A)$ таков, что $\mu a = ac$. Тогда $\Psi(c) = \mu + N(A)$. Таким образом, $cb = \mu b$.

В частности, если $b=ad$, $d \in C$, то $cb = \mu b = \mu(ad) = (\mu a)d = (ac)d$ и потому $c(ad) = (ac)d$. При $d=1$ получаем $ca=ac$.

6) Итак, F —правый, а A —левый C -модули. Можно образовать тензорное произведение $F \times_C A$. Здесь C —область целостности, для которой $C \times Q = D$ —тело. А F — C -модуль без кручения. Нужно учесть, что $C \subseteq D$, D есть кольцо эндоморфизмов неприводимого модуля. Причем всякий подмодуль конечного C -ранга в F квазиизоморфен свободному C -модулю. C -модуль A также не имеет кручения. Действительно, по лемме 1 каждый эндоморфизм из $M(A) \rightarrow N(A)$ является мономорфизмом группы A . Поэтому A есть $M(A)/N(A)$ -модуль без кручения и, значит, C -модуль без кручения. Относительно C -модуля A будет сказано еще в теореме 1.

7) Определим некоторый канонический гомоморфизм $f: F \times_C A \rightarrow G$. С этой целью покажем, что отображение

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ п } A \rightarrow G \\ \langle g, b \rangle \rightarrow \alpha b, \quad g \in F, b \in A, \alpha \in R \\ \text{таков, что } g = \alpha a, \end{array} \right.$$

сбалансированно над C . Для упрощения записей считаем, что $\langle \alpha a, b \rangle = \alpha b$. Проверим корректность этого отображения. Если $\alpha' \in R$ и $\alpha a = \alpha' a$, то $(\alpha - \alpha')A = 0$ (лемма 1) и, следовательно, $\alpha b = \alpha' b$.

Проверим линейность отображения по обоим аргументам. Пусть $g_i = \alpha_i a$, $\alpha_i \in R$ и $b_i \in A$ ($i=1,2$). Тогда $\langle g_1 + g_2, b \rangle = \langle \alpha_1 a + \alpha_2 a, b \rangle = (\alpha_1 + \alpha_2)b = \alpha_1 b + \alpha_2 b = \langle g_1, b \rangle + \langle g_2, b \rangle$ и $\langle g, b_1 + b_2 \rangle = \alpha(b_1 + b_2) = \alpha b_1 + \alpha b_2 = \langle g, b_1 \rangle + \langle g, b_2 \rangle$. Теперь покажем, что $\langle gc, b \rangle = \langle g, cb \rangle$ при любом $c \in C$ или $\langle (\alpha a)c, b \rangle = \langle \alpha a, cb \rangle$, где $g = \alpha a$, $\alpha \in R$. Выберем $\mu \in M(A)$ со свойством $\mu a = ac$. Тогда $\mu b = cb$ (пункт 5). Имеем $\langle (\alpha a)c, b \rangle = \langle \alpha(ac), b \rangle = \langle \alpha(\mu a), b \rangle = (\alpha\mu)b = \alpha(cb) = \langle \alpha a, cb \rangle$. Этим закончено доказательство того, что рассматриваемое отображение сбалансированно.

Существует гомоморфизм $f: F \times_C A \rightarrow G$, для которого $f(g \times b) = \alpha b$, где $\alpha \in R$ и $g = \alpha a$ [4, с. 513]. Ясно, что $\text{im } f = RA$, где RA —вполне характеристическая подгруппа группы G , порожденная подгруппой A .

8) В этом и следующем пунктах найдем $\ker f$. Оказывается, $\ker f$ совпадает с периодической подгруппой $t(F \times_C A)$ тензорного произведения $F \times_C A$. Гомоморфизм f индуцирует гомоморфизм абелевых групп $(F \times_C A) \times Q \rightarrow G \times Q = V$. Здесь $(F \times_C A) \times Q = (F \times Q) \times_C (A \times Q) = W \times_C AK$. S -модуль W является также правым D -пространством. Поскольку $A \times Q$ является левым $C \times Q$ -моду-

лем, а $C \times Q = D$, то aK есть левое D -пространство. Таким образом, существует тензорное произведение $W \times_D aK$.

Так как $C \subseteq D$, то имеем канонический гомоморфизм $W \times_C aK \rightarrow W \times_D aK$, $w \times_C ak \rightarrow w \times_D ak$ [4, лемма 11.12]. Используя равенство $C \times Q = D$ и беря во внимание то, что $W \times_D aK$ — группа без кручения, так как является Q -пространством, получаем следующее. Отображение $W \times_C aK \rightarrow W \times_D aK$, $\langle w, ak \rangle \rightarrow w \times_D ak$ сбалансированно над D . Следовательно, существует гомоморфизм $W \times_D aK \rightarrow W \times_C aK$. $w \times_D ak \rightarrow w \times_C ak$, он вместе с указанным выше составляет пару взаимно обратных изоморфизмов. Таким образом, $W \times_C aK$ и $W \times_D aK$ канонически изоморфны. И гомоморфизм f индуцирует гомоморфизм $\hat{f} : W \times_D aK \rightarrow V$.

Как действует \hat{f} ? Так как S -модуль W неприводим, то $W = Sa$. Пусть $w \times ak \in W \times_D aK$ и $w = \beta a$, где $\beta \in S$. Тогда $\hat{f}(w \times ak) = \beta(ak)$. Действительно, вспомним, что $F \times Q = W$ и $A \times Q = aK$ (п. 2 и 4). Поэтому существуют натуральные числа m и n со свойством $m\alpha \in F$, $n(ak) \in A$. Откуда $m\alpha \times n(ak) \in F \times_C A$ (точнее говоря, элемент $m\alpha \times n(ak)$ лежит в образе канонического гомоморфизма $F \times_C A \rightarrow (F \times_C A) \times Q$). Выберем $\alpha \in R$ так, что $m\alpha = \alpha a$, и положим $\beta = m^{-1}\alpha$. Тогда $\beta \in S$ и $m\hat{f}(w \times ak) = f(m\alpha \times n(ak)) = f(\alpha a \times n(ak)) = \alpha(nak) = m\beta(ak)$. Отсюда $\hat{f}(w \times ak) = \beta(ak)$, где $w = \beta a$.

9) Так как $D = \text{End}_S W$, то W является S - D -бимодулем. Покажем, что aK является D - K -бимодулем. Положим $M(ak) = \{\alpha \in S / \alpha(ak) \in aK\}$, $N(ak) = \{\alpha \in S / \alpha(ak) = 0\}$. Подобно тому как в 5) был установлен изоморфизм $C \cong M(A)/(N(A)$, доказывается, что $D \cong M(ak)/N(ak)$ (по существу, это следствие теоремы полноты). Причем первый изоморфизм индуцируется этим вторым. Так возникает левый D -модуль aK . Поскольку $M(ak) \subseteq S$, то aK есть $M(ak)/N(ak)$ - K -бимодуль и, следовательно, D - K -бимодуль. Теперь можно заключить, что $W \times_D aK$ является S - K -бимодулем.

Уже отмечалось, что V — неприводимый S - K -бимодуль. Докажем, что то же верно для $W \times_D aK$. Пусть E — ненулевой подбимодуль в $W \times_D aK$ и $0 \neq z = \sum_{i=1}^n w_i \times ak_i \in E$. Можно считать, что элементы $\{w_i\}$ линейно независимы над D . На основании полноты кольца S в $\text{End}_D W$ найдется $\alpha \in S$, для которого $\alpha w_1 = w_1$ и $\alpha w_i = 0$ ($i=2, \dots, n$) [3, с. 49]. Откуда $\alpha z = \sum \alpha w_i \times ak_i = w_1 \times ak_1 \in E$. Далее в силу неприводимости S -модуля W и K -модуля aK для любых элементов $w \in W$ и $ak \in aK$ существуют элементы $\beta \in S$ и $l \in K$ со свойством $\beta w_1 = w$ и $(ak_1)l = ak$ (считаем $k_1 \neq 0$). Следовательно, $w \times ak = \beta(w_1 \times ak_1)l \in E$. Так что для всяких $w \in$

$\in W$ и $k \in K$ элемент $w \times ak \in E$. Поэтому $E = W \times_D ak$, то есть S - K -бимодуль $W \times_D ak$ неприводим.

Пусть $\gamma \in S$ и $l \in K$. Имеем следующие равенства, означающие, что $f: W \times_D ak \rightarrow V$ — бимодульный гомоморфизм. Пусть $w \in W$, $k \in K$ и $w = \alpha a$, где $\alpha \in S$. Тогда $\gamma f(w \times ak) = \gamma \alpha(ak) = (\gamma \alpha)(ak) = f((\gamma \alpha)a \times ak) = f(\gamma(\alpha a \times ak)) = f(\gamma(w \times ak))$ и $(f(w \times ak))l = (\alpha(ak))l = (\alpha a)(kl) = \alpha(akl) = f(\alpha a \times ak l) = f((\alpha a \times ak)l) = f((w \times ak)l)$. Еще заметим, что $a \times a \in W \times_D ak$ и $f(a \times a) = a \neq 0$. Установили, что f — ненулевой гомоморфизм неприводимых бимодулей. Следовательно, f — изоморфизм.

Итак, отображение $f: F \times_C A \rightarrow G$ индуцирует изоморфизм $(F \times_C A) \times Q \rightarrow G \times Q$. Значит, $\ker f \subseteq t(F \times_C A)$. Обратное включение вытекает из того, что G — группа без кручения. Значит, $\ker f = t(F \times_C A)$ и f индуцирует изоморфизм

$$F \times_C A / t(F \times_C A) \rightarrow RA,$$

который также обозначим через f . Положим $U(F) = F \times_C A / t(F \times_C A)$. Имеем изоморфизм $f: U(F) \rightarrow RA$. Отображение f действует так. Если $g \in F$, $b \in A$, причем $g = \alpha a$, $\alpha \in R$, то $f(g \times b) = \alpha b$, где черта обозначает смежный класс. Если $RA = G$, то получаем изоморфизм $f: U(F) \rightarrow G$.

Обозначим через $Z(C)$ центр кольца C . Все кольца эндоморфизмов наделяем конечной топологией.

Теорема 1. В ситуации, рассмотренной выше:

- 1) существует изоморфизм $f: U(F) \rightarrow RA$;
- 2) если $RA = G$, то существует изоморфизм $f: U(F) \rightarrow G$. Кроме того, в этом случае существует канонический топологический изоморфизм колец $R \cong \text{End}_C F$. Или по другому, отображение ограничения $\alpha \rightarrow \alpha|_F$, $\alpha \in R$ является топологическим изоморфизмом $R \cong \text{End}_C F$. Существует также канонический изоморфизм колец $Z(C) \cong \text{End}_C A$;

3) если A — плоский C -модуль или F — плоский C -модуль, то $t(F \times_C A) = 0$. Значит, имеем изоморфизм $f: F \times_C A \rightarrow RA$;

4) C -модуль A будет плоским, если C — наследственно справа, например C — область главных правых идеалов.

Доказательство. 2) Если $\alpha \in R$ и $\alpha F = 0$, то $\alpha W = 0$. Так как S -модуль V — однородный вполне приводимый, то $\alpha V = 0$ и $\alpha = 0$. Следовательно, отображение ограничения $\alpha \rightarrow \alpha|_F$, $\alpha \in R$ является вложением колец $R \rightarrow \text{End}_C F$.

Пусть $\beta \in \text{End}_C F$. Обозначим через $\beta \times 1$ эндоморфизм фактор-группы $F \times_C A / t(F \times_C A)$, индуцируемый β . Положим $\alpha = f \beta \times 1 f^{-1}$. Здесь $\alpha \in R$. Проверим, что $\alpha|_F = \beta$. По определению отображе-

ния f для всякого $m \in F$ справедливо $f(m \times a) = m$. Отсюда $\alpha m = (f \beta \times 1) f^{-1} m = (f \beta \times 1) (m \times a) = f(\beta m \times a) = \beta m$, то есть $\alpha_F = \beta$, и имеем изоморфизм $R \cong \text{Eid}_C F$.

Покажем, что этот изоморфизм колец является топологическим. Ясно, что если U — окрестность нуля в кольце $\text{End}_C F$, то ее образ будет окрестностью нуля в кольце R . В данном случае изоморфизм $R \rightarrow \text{End}_C F$ индуцируется каноническим мономорфизмом $S \rightarrow \text{End}_D W$, где $S = R \times Q$, а неприводимый S -модуль $W = F \times Q$. Топология, индуцированная на S конечной топологией кольца R , совпадает с топологией, индуцированной на S конечной топологией кольца $\text{End}_D W$. Отсюда видно, что, наоборот, если U — окрестность нуля кольца R , то ее образ является окрестностью нуля кольца $\text{End}_C F$.

Действие элемента из $Z(C)$ на A является, очевидно, эндоморфизмом C -модуля без кручения A . Покажем, что всякий эндоморфизм $\varphi \in \text{End}_C A$ может быть так получен. Этим и будет установлен канонический изоморфизм $Z(C) \cong \text{End}_C A$. Обозначим через $1 \times \varphi$ эндоморфизм фактор-группы $F \times_C A / t(F \times A)$, индуцируемый эндоморфизмом φ . Если $b \in A$, то $f(a \times b) = b$. Поэтому, положив $\mu = f 1 \times \varphi f^{-1}$, найдем $\mu b = (f 1 \times \varphi f^{-1}) b = (f 1 \times \varphi (a + b)) = f(a \times b \varphi) = b \varphi$ при любом $b \in A$. Заключаем, что $\mu \in M(A)$ и $\mu|_A = \varphi$. Пусть $\bar{\mu} = \mu + N(A)$. Тогда $\bar{\mu} b = b \varphi$ для всех $b \in A$. Если ν — произвольный элемент из $M(A)/N(A)$, то $(\bar{\mu} \nu) b = \bar{\mu} (\nu b) = (\nu b) \varphi = \nu (b \varphi) = \nu (\bar{\mu} b) = (\nu \bar{\mu}) b$ и $\bar{\mu} \nu = \nu \bar{\mu}$. Следовательно, элемент $\bar{\mu}$ лежит в центре кольца $M(A)/N(A)$. Определим $c = \Psi^{-1} \bar{\mu}$. Тогда $c \in Z(C)$ и $cb = \mu b = b \varphi$ при любом $b \in A$. Таким образом, эндоморфизм φ C -модуля A совпадает с действием на A элемента $c \in Z(C)$.

3) Так как F — группа без кручения, то есть плоский Z -модуль, то имеем мономорфизм C -модулей $F \rightarrow Q \times F$. Индуцированное отображение $F \times_C A \rightarrow Q \times F \times_C A$ также является мономорфизмом ввиду плоскости модуля A . Группа $Q \times F \times_C A$ не имеет кручения, как Q -пространство. Поэтому $t(F \times_C A) = 0$. Случай плоского модуля F проверяется аналогично.

4) Достаточно показать, что каноническое отображение $I \times_C A \rightarrow I A$ является изоморфизмом для каждого правого идеала I кольца C [4, предложение 11.20]. Учитывая проективность идеала I , нетрудно получить, что $t(I \times_C A) = 0$. Далее, $C \times Q$ есть тело и потому $A \times Q$ — плоский $C \times Q$ -модуль. В силу того же предложения каноническое отображение $I \times_C A \times Q \rightarrow I A \times Q$ будет изоморфизмом (как и в 8, $I \times_C A \times Q$ и $(I \times Q) \times_{C \times Q} (A \times Q)$ канонически изоморфны). Так как $t(I \times_C A) = 0$, то $I \times_C A \rightarrow I \times_C$

$A \times Q$ — мономорфизм и результирующее отображение $\Gamma \times_{CA} \rightarrow \Gamma A$ также мономорфизм. Теорема доказана.

Если C — об. асть главных правых идеалов, то по следствию 1.6 [2] всякий C -подмодуль в F счетного C -ранга свободен.

Следствие 1. Если G — счетная группа, C — область главных правых идеалов и $RA = G$, то G — A -свободная группа, то есть изоморфна прямой сумме некоторого числа копий группы A . Кроме того, $C \cong E(A)$.

Доказательство. В силу условий следствия и теоремы 1 $G \cong F \times_{CA}$. Так как $|G| = \omega_0$, то $|F| = \omega_0$ и F — свободный C -модуль. Тогда G — A -свободная группа. Можно считать группу A прямым слагаемым группы G . Отображение $M(A) \rightarrow E(A)$, $\alpha \rightarrow \alpha_A$ имеет своим ядром идеал $N(A)$. В нашем случае оно — элиморфизм. Следовательно, $C \cong M(A)/N(A) \cong E(A)$.

§ 2. У нас есть некоторые соотношения между группой G и C -модулем F . Оказывается, можно установить подобные соотношения между определенными подгруппами группы G и подмодулями модуля F .

С этой целью введем две категории. Пусть \mathbf{M} — категория всех подмодулей C -модуля F . Если $M, N \in \mathbf{M}$, то множество морфизмов из M в N состоит из эндоморфизмов группы G , переводящих M в N , то есть это множество $\{\alpha \in R \mid \alpha M \subseteq N\}$. Для подгруппы $P \subseteq G$ положим $S_P(A) = \{\sum \alpha A \mid \alpha \in R, \alpha A \subseteq P\}$. Пусть теперь \mathbf{G} — категория всех подгрупп P группы G , для которых $S_P(A) = P$. Как и для категории \mathbf{M} , если $P, T \in \mathbf{G}$, то множество морфизмов из P в T есть $\{\alpha \in R \mid \alpha P \subseteq T\}$.

Построим два функтора $O: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{G}$ и $E: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{M}$. Будем исходить из основных функторов \times и Hom .

Для $M \in \mathbf{M}$ положим $T(M) = M \times_{CA}$ и $U(M) = M \times_{CA} / t(M \times_{CA})$. Пусть $i: M \rightarrow F$ — вложение и $U(i): U(M) \rightarrow U(F)$ — индуцированный гомоморфизм. Так как $A \times Q$ — плоский $C \times Q$ -модуль, то отображение $M \times_{CA} \times Q \rightarrow F \times_{CA} \times Q$, индуцированное вложением i , является мономорфизмом. Отсюда следует, что ядро отображения $T(i): M \times_{CA} \rightarrow F \times_{CA}$ лежит в $t(M \times_{CA})$. Можно заключить, что $U(i)$ — мономорфизм. Обозначим $f_M = fU(i): U(M) \rightarrow G$. Теперь положим $O(M) = f_M U(M)$. Так, функтор O действует на объектах. Если $N \in \mathbf{M}$, $\alpha \in R$ и $\alpha M \subseteq N$, то $O(\alpha) = f_N U(\alpha) f_M^{-1}$ — действие функтора O на морфизмах. Заметим, что для $m \in M$ всегда $f_M(m \times a) = m$ и поэтому $M \subseteq O(M)$.

Лемма 2. $O(M) \in \mathbf{G}$.

Доказательство. Нужно убедиться, что $S_{O(M)}(A) = O(M)$. Если $g \in O(M)$, то $g = f_M(\sum m_i \times b_i)$ с $m_i \in M$, $b_i \in A$. Для каждого i запишем $m_i = \alpha_i a$, где $\alpha_i \in R$. Тогда $g = \sum f_M(m_i \times b_i) = \sum \alpha_i b_i$.

Достаточно установить, что $\alpha_i A \subseteq O(M)$. Для любого $z \in A$ имеем $m_i \times z \in M \times_C A$ и $f_M(m_i \times z) \in O(M)$. Но $f_M(m_i \times z) = \alpha_i z$, то есть $\alpha_i z \in O(M)$. Значит, $\alpha_i A \subseteq O(M)$ и $g = \Sigma \alpha_i b_i \in S_{O(M)}(A)$.

Лемма 3. Предположим, что $\gamma: M \rightarrow N$, где $M, N \in \mathbf{M}$ и $\gamma \in R$. Тогда $O(\gamma) = \gamma$.

Доказательство. Пусть, как в лемме 2, $g \in O(M)$, $g = f_M(\Sigma m_i \times b_i)$ и $m_i = \alpha_i a$, $\alpha_i \in R$. Тогда $O(\gamma)g = O(\gamma)f_M(\Sigma m_i \times b_i) = f_N U(\gamma)f_M f_M^{-1}(\Sigma m_i \times b_i) = f_N(\Sigma \gamma m_i \times b_i) = f_N(\Sigma \gamma \alpha_i a \times b_i) = \Sigma(\gamma \alpha_i) b_i = = \gamma(\Sigma \alpha_i b_i) = \gamma f_M(\Sigma \alpha_i a \times b_i) = \gamma f_M(\Sigma m_i \times b_i) = \gamma g$.

Из леммы 3 получаем, что если $L \in \mathbf{M}$ и $\delta: N \rightarrow L$, $\delta \in R$, то $O(\gamma\delta) = \gamma\delta = O(\gamma)O(\delta)$ и $O(1_M) = 1_{C(M)}$. Учитывая еще лемму 2, видим, что мы действительно имеем функтор $O: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{G}$.

Определим $E: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{M}$. Для $P \in \mathbf{G}$ положим $H(P) = \{\alpha_{i,A} \mid \alpha \in \in R, \alpha A \subseteq P\}$. Эту группу $H(P)$ можно превратить в правый C -модуль. Именно, если $c \in C$, а $b \in A$, то считаем, что $(\alpha_{i,A} c) b = = \alpha_{i,A}(cb)$. Тогда $\alpha_{i,A} c \in H(P)$.

Определим отображение $h_P: H(P) \rightarrow F$ как $h_P(\alpha) = \alpha a$, $\alpha \in H(P)$. Проверим, что h_P — модульный гомоморфизм. Для $c \in C$ выберем $\mu \in M(A)$ так, что $\Psi(c) = \mu + N(A)$. Тогда $cb = \mu b$ при любом $b \in A$ (п. 5). Теперь для всякого $\alpha \in H(P)$ будет $(h_P(\alpha))c = = (\alpha a)c = \alpha(ac) = \alpha(ca) = \alpha(\mu a) = (\alpha\mu)a$. Поскольку $\mu A \subseteq A$, то $\alpha\mu \in \in H(P)$. Отсюда $(\alpha\mu)a = h_P(\alpha\mu)$. Взяв $b \in A$, получим $(\alpha\mu)b = \alpha(\mu b) h = \alpha(cb) = (\alpha c)b$, то есть $\alpha\mu = \alpha c$. Следовательно, $h_P(\alpha\mu) = h_P(\alpha c)$ и $(h_P(\alpha))c = h_P(\alpha c)$. Это равенство означает, что h_P — гомоморфизм правых C -модулей. Кроме того, если $\alpha a = 0$, то $\alpha_{i,A} = 0$ по лемме 1 и поэтому h_P — мономорфизм.

Положим $E(P) = h_P H(P)$, $P \in \mathbf{G}$. Из определения h_P видно, что $E(P) \subseteq P$.

Определим, как E действует на морфизмы. Если $P, T \in \mathbf{G}$ и $\beta: P \rightarrow T$, $\beta \in R$, то положим $E(\beta) = h_T H(\beta) h_P^{-1}$, где, конечно, $H(\beta): H(P) \rightarrow H(T)$ действует так. Для $\alpha \in H(P)$ $H(\beta)\alpha = \beta\alpha$.

Лемма 4. $E(\beta) = \beta$, то есть $E(\beta)$ является ограничением β на $E(P)$.

Доказательство. Если $t \in E(P)$, то $t = h_P(\alpha) = \alpha a$, где $\alpha \in H(P)$, и $E(\beta)t = E(\beta)(h_P(\alpha)) = h_T H(\beta) h_P^{-1} h_P(\alpha) = h_T(\beta\alpha) = (\beta\alpha)a = = \beta(\alpha a) = \beta t$. Откуда $E(\beta) = \beta$, и лемма доказана.

Пусть $S \in \mathbf{G}$ и $\gamma: T \rightarrow S$, $\gamma \in R$. Тогда по лемме 4 $E(\beta\gamma) = \beta\gamma = = E(\beta)E(\gamma)$ и $E(1_P) = 1_{E(P)}$, то есть $E: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{M}$ — функтор.

Теорема 2. Всегда $OE = 1$. Если дополнительно $t(F \times_C A) = = 0$ и $IA \neq A$ для любого собственного правого идеала I кольца C , то $EO = 1$, то есть функторы O и E определяют изоморфизм категорий \mathbf{M} и \mathbf{G} .

Обратно, если функторы O и E определяют изоморфизм этих категорий, то $IA \neq A$ для любого собственного правого идеала I кольца C .

Доказательство. Покажем, что $OE=1$. Для подгруппы $P \in G$ убедимся, что $(OE)P=P$. Если $g \in (OE)P$, то найдутся элементы $m_i \in E(P)$ и $b_i \in A$, для которых $g = f_{E(P)}(\Sigma m_i \times b_i)$. Так как $m_i \in E(P)$, то $m_i = h_P(\alpha_i) = \alpha_i a$, где $\alpha_i \in H(P)$. Имеем $g = \Sigma f_{E(P)}(\alpha_i a \times b_i) = \Sigma \alpha_i b_i$, где все $\alpha_i b_i \in P$, то есть $g \in P$. Обратно, пусть $g \in P$. Предыдущие рассуждения можно обратить и $g \in (OE)P$.

Если $\alpha \in R$ и $\alpha P \subseteq P$, то $(OE)\alpha = O(E(\alpha)) = O(\alpha) = \alpha$. Равенство $OE=1$ доказано.

Допустим, что $t(F \times_C A) = 0$ и выполняется указанное условие на правые идеалы кольца C . Пусть $M \in M$. Докажем, что $(EO)M = M$.

Для $m \in M$ выберем $\alpha \in R$ со свойством $\alpha a = m$. Для этого $\alpha A \subseteq O(M)$, то есть $\alpha \in H(O(M))$. Действительно, если $b \in A$, то $\alpha b = f_M(\alpha a \times b) = f_M(m \times b) \in O(M)$. Следовательно, $m = \alpha a = h_{O(M)}(\alpha) \in E(O(M)) = (EO)M$ и $M \subseteq (EO)M$.

Предположим наоборот, что $m \in (EO)M$. Тогда $m = h_{O(M)}(\alpha) = \alpha a$, где $\alpha \in H(O(M))$ и $\alpha A \subseteq O(M)$. Обозначим через i вложение $M \rightarrow F$. Пусть $\langle M, m \rangle$ — C -подмодуль в F , порожденный M и m . Имеем точную строку $M \times_C A \xrightarrow{i \times 1} \langle M, m \rangle \times_C A \rightarrow \langle M, m \rangle / M \times_C A \rightarrow 0$. Покажем, что $\langle M, m \rangle / M \times_C A = 0$ или, что все равно, $i \times 1$ — эпиморфизм. Отметим, что треугольник

$$\begin{array}{ccc} & i \times 1 & \\ & \swarrow & \searrow \\ M \times_C A & \xrightarrow{\quad} & F \times_C A \\ & f_M \searrow & \swarrow f \\ & & G \end{array}$$

коммутативен по определению отображений f и f_M .

Пусть $b \in A$. Так как $f(m \times b) = \alpha b$, $\alpha A \subseteq O(M)$ и $O(M) = \text{im } f_M$, то $\alpha b \in \text{im } f_M$. Значит, $\alpha b = f_M(w)$, где $w \in M \times_C A$. Откуда $f_M(w) = f(i \times 1)w = f(m \times b)$ и $m \times b = (i \times 1)w$. Но $t(F \times_C A) = 0$, поэтому черту можно убрать и $m \times b = (i \times 1)w$ для всякого $b \in A$. Получили, что $i \times 1$ — эпиморфизм и $\langle M, m \rangle / M \times_C A = 0$.

Модуль $\langle M, m \rangle / M$ является циклическим. Следовательно, он изоморфен C/I для некоторого правого идеала I кольца C .

Таким образом, $C/I \times_C A = 0$. Это означает, что строка

$$I \times_C A \xrightarrow{\mu} C \times_C A \rightarrow 0,$$

индуцированная вложением $I \rightarrow C$, точна. Если ν обозначает канонический изоморфизм $C \times_C A \cong A$, то образ отображения ν равен IA . Следовательно, $IA = \bar{A}$. По предположению $I = C$, поэтому $C/I = 0$ и $\langle M, m \rangle / M = 0$. Откуда $\langle M, m \rangle = M$ и $m \in M$. Равенство $M = (EO)M$ доказано.

Если $\alpha \in R$, $\alpha M \subseteq M$, то $(EO)\alpha = E(O(\alpha)) = E(\alpha) = \alpha$. Этим полностью доказано, что $EO = 1$.

Осталось проверить, что если $EO = 1$ и $IA = A$, то $I = C$. Пусть $I \times_C A \rightarrow C \times_C A$ — каноническое отображение. Ввиду равенства $IA = A$ оно — эпиморфизм. Так как C -модули I и aI , C и aC канонически изоморфны, то эпиморфизмом будет и каноническое отображение $aI \times_C A \rightarrow aC \times_C A$. Поэтому $U(aI) \rightarrow U(aC)$ — также эпиморфизм. Пусть $i: aI \rightarrow aC$ — вложение, то есть $i = 1_{aI}$. Тогда $O(i) = 1_{C(aI)}$. Поскольку $U(i)$ — эпиморфизм, то $O(i): O(aI) \rightarrow O(aC)$ также эпиморфизм. Но $O(i) = 1_{C(aI)}$ и, следовательно, $O(aI) = O(aC)$. Теперь имеем $aI = (EO)aI = (EO)aC = aC$. Отсюда также $I = C$. Теорема доказана.

Замечание 1. а) По теореме 1, если F — плоский C -модуль, то $t(F \times_C A) = 0$.

б) Если A — плоский C -модуль, то $t(M \times_C A) = 0$ для всякого C -подмодуля M в F . Это доказывается так же, как аналогичное утверждение относительно F в теореме 1. В таком случае для группы $P \in \mathbf{G}$ имеем $P \cong E(P) \times_C A$.

Следствие 2. Пусть C — область главных правых идеалов. Тогда всякая счетная подгруппа $P \in \mathbf{G}$ A -свободна.

Действительно, если $|P| = \omega_0$, то ввиду $E(P) \subseteq P$ также $|E(P)| = \omega_0$. Отсюда C -модуль $E(P)$ свободен по следствию 1.6 [2]. По замечанию 1 $P \cong E(P) \times_C A$ и ясно, что группа P A -свободна. Заметим, что это следствие — более общее утверждение по сравнению со следствием 1.

Для подгруппы X в G положим $R(X) = \{\alpha_{iX} \mid \alpha \in R, \alpha X \subseteq X\}$. Здесь $R(X)$ — подкольцо в кольце $E(X)$ эндоморфизмов группы X . Наделяем его конечной топологией. При определении категории \mathbf{G} для подгрупп $P, T \in \mathbf{G}$ в качестве множества морфизмов из P в T взяли $\{\alpha \in R \mid \alpha P \subseteq T\}$. Можно было ограничиться сужениями эндоморфизмов, то есть брать множество $\{\alpha_{iP} \mid \alpha \in R, \alpha P \subseteq T\}$. То же верно для категории \mathbf{M} .

C -сервантный подмодуль N в M это подмодуль, для которого $N \cap Mc = Nc$ при всех $c \in C$. Модуль называется локально свободным, если каждое конечное семейство его элементов можно вложить в свободное прямое слагаемое.

Следствие 3. а) Подгруппа $P \in \mathbf{G}$ вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда $E(P)$ есть R - C -подбимодуль в F .

б) Если M — C -подмодуль в F , то каноническое отображение колец $R(M) \rightarrow R(O(M))$, $\alpha \rightarrow O(\alpha)$ является топологическим. По-другому, если $P \in G$, то отображение ограничения $\alpha \rightarrow \alpha|_{E(P)}$ является топологическим изоморфизмом колец $R(P) \rightarrow R(E(P))$.

в) Если M —подмодуль конечного C -ранга в F , то кольцо $R(O(M))$ дискретно в конечной топологии. Если F —локально свободный C -модуль и $R = \text{End}_C F$, то верно обратное утверждение для C -сервантных подмодулей M .

г) Если подгруппа $P \in G$ сервантна в G , то C -подмодуль $E(P)$ C -сервантен в F .

Доказательство. а) \Rightarrow Пусть $m \in E(P)$ и $\gamma \in R$. Запишем $m = \gamma a$ с $a \in H(P)$. Вполне характеристичность подгруппы P влечет $\gamma a \in H(P)$. Отсюда $\gamma m = (\gamma a)a = h_P(\gamma a) \in h_P H(P) = E(P)$, то есть $\gamma m \in E(P)$. \Leftarrow Для R — C -подбимодуля M в F проверим, что $O(M)$ —вполне характеристическая подгруппа в G . Пусть $\gamma \in R$ и $g \in O(M)$. Записав $g = f_M(\sum m_i \times b_i) = \sum \alpha_i b_i$, где $\alpha_i \in R$ и $m_i = \alpha_i a$, найдем $\gamma g = \sum (\gamma \alpha_i) b_i$. Так как $\gamma m_i \in M$, то дальше $\sum (\gamma \alpha_i) b_i = f_M(\sum \gamma m_i \times b_i) \in O(M)$ и $\gamma g \in O(M)$.

б) Пусть U —окрестность нуля в $R(M)$, причем считаем, что M лежит в образе функтора E . Значит, существуют элементы $m_1, \dots, m_s \in M$, для которых $U = \text{Ann} \langle m_1, \dots, m_s \rangle = \{ \alpha \in R(M) \mid \alpha m_i = 0, i=1, \dots, s \}$. Из лемм 3 и 4 видно, что U является окрестностью нуля кольца $R(O(M))$.

Напротив, пусть U —окрестность нуля в $R(O(M))$. Тогда $U = \text{Ann} \langle g_1, \dots, g_s \rangle$, $g_i \in O(M)$. Запишем $g_i = \sum_{j=1}^{n_i} f_M(\overline{m_{ij}} \times b_{ij})$, $i=1, \dots, s$. Здесь $m_{ij} \in M$, $b_{ij} \in A$. Докажем, что $U = \text{Ann} \langle m_{ij} \mid i=1, \dots, s; j=1, \dots, n_i \rangle$. Достаточно убедиться, что если $g = \sum_{i=1}^s f_M$

$(\overline{m_i} \times b_i)$, $m_i \in M$, $b_i \in A$, то $\text{Ann} g = \text{Ann} \langle n_1, \dots, n_k \rangle$.

Если $\alpha m_i = 0$ при всех i , то $O(\alpha)g = f_M O(\alpha) f_M^{-1} f_M \sum m_i \times b_i = f_M U(\alpha) \sum m_i \times b_i = f_M \sum \alpha_i m_i \times b_i = 0$. Предположим сейчас, что $\alpha g = 0$. Используя изоморфизм f из 9), отождествим $W \times_{DA} K$ с V . Пусть $V = \sum_{j \in J} \oplus V_j$, где V_j —неприводимый S -модуль, причем один из них

есть W . Элемент g в тензорном произведении $W \times_{DA} K$ имеет вид $\sum m_i \times b_i$. Можно считать, что элементы b_i линейно независимы над D и каждый из них лежит в некотором слагаемом V_j . Из определения изоморфизма $f : W \times_{DA} K \rightarrow V$ вытекает, что в таком случае элементы $m_i \times b_i$ лежат в различных слагаемых V_j . Поэтому равенство $\alpha \sum m_i \times b_i = 0$ влечет $\alpha(m_i \times b_i) = 0$ при всяком i . Пусть $b_i = \alpha k_i$, где $k_i \in K$, причем $k_i \neq 0$ (используем неприво-

димось K -модуля aK). Тогда $(\alpha(m_i \times a))k_i = \alpha(m_i \times ak_i) = 0$. Поскольку ограничение эндоморфизма k_i на любом слагаемом V_j есть мономорфизм, то $\alpha m_i \times a = \alpha(m_i \times a) = 0$. Учитывая отождествление $W \times_D aK$ с V , получаем $\alpha m_i = 0$ для всех i и $\alpha \in \text{App} \langle m_1, \dots, m_k \rangle$.

в) Предположим, что $\text{rang}_C M = t$ и M лежит в образе фактора E . Выберем некоторую линейно независимую над C систему элементов m_1, \dots, m_t модуля M . Приняв во внимание, что M — C -модуль без кручения и любой элемент из M линейно выражается через m_1, \dots, m_t , получим следующее.

Если $\alpha \in R(M)$ и $\alpha m_i = 0$ ($i = 1, \dots, t$), то $\alpha M = 0$. Следовательно, $\text{App} \langle m_1, \dots, m_t \rangle = 0$ и дискретность кольца $R(M)$ установлена. В силу б) кольцо $R(O(M))$ также дискретно.

Пусть кольцо $R(M)$ дискретно в конечной топологии, причем C -модуль F локально свободен, $R = \text{End}_C F$ и M — C -сервантный подмодуль. Существуют элементы $m_1, \dots, m_t \in M$ со свойством $\text{App} \langle m_1, \dots, m_t \rangle = 0$ (аннуляторы в кольце $R(M)$). Обозначим через N C -сервантный подмодуль, порожденный элементами m_1, \dots, m_t . Если $N \neq M$, то можно выбрать элемент $m \in M - N$. Существует разложение $F = F_1 \oplus F_2$, в котором F_1 — конечно порожденный свободный C -модуль и $m, m_1, \dots, m_t \in F_1$. Перейдем к D -пространству W . Элемент m линейно не зависит от элементов m_1, \dots, m_t , поэтому существует эндоморфизм $\alpha \in R$ со свойством $\alpha F_1 \subseteq M$, $\alpha m \neq 0$ и $\alpha m_i = 0$ ($i = 1, \dots, t$). Для этого нужно использовать плотность кольца S в $\text{End}_D W$ и сервантность подмодуля M . Пусть $\pi: F \rightarrow F_1$ — проекция. Тогда композиция $\alpha\pi \in \text{End}_C F = R$ и $(\alpha\pi)M \subseteq M$. Значит, $\alpha\pi \in R(M)$. Далее, $(\alpha\pi)m \neq 0$ и $\alpha\pi \in \text{App} \langle m_1, \dots, m_t \rangle$, что противоречит выбору элементов m_1, \dots, m_t . Следовательно, $M = N$ и C -модуль M имеет конечный ранг.

г) Пусть подгруппа $P \in G$ и она сервантна в G . Докажем, что подмодуль $E(P)$ C -сервантен в F . С этой целью допустим, что $mc \in E(P)$, где $m \in F$, $c \in C$ и $c \neq 0$. Нужно убедиться, что $m \in E(P)$. Так как $E(P) = h_P N(P)$, то $mc = h_P(\alpha) = \alpha a$, где $\alpha \in N(P)$, то есть $\alpha A \subseteq P$. Выберем $\beta \in R$ так, что $m = \beta a$. Для любого $b \in A$ имеем $\alpha b = f(\alpha a \times b) = f(mc \times b) = f(m \times cb) = \beta(cb) = (\beta c)b$. Откуда $\alpha_A = \beta_{1A}c$. Покажем, что $\beta \in N(P)$ или $\beta A \subseteq P$. Имеем $\beta(cz) = \alpha z \in P$ для всякого $z \in A$. Теперь вспомним, что $C \times Q$ — тело по 3). Поэтому $cd = 1$ для некоторого $d \in C \times Q$ и для этого d существует натуральное число n со свойством $nd \in C$. Таким образом, $c(nd) = 1 \cdot n$, откуда $nA \subseteq cA$. Значит, если $b \in A$, то $nb = cz$ для определенного элемента $z \in A$ и $\beta(nb) = \beta(cz) \in P$. Или $n(\beta b) \in P$. Сервантность подгруппы P гарантирует, что $\beta b \in P$. Получили, что $\beta A \subseteq P$ и $\beta \in N(P)$. Поскольку $m = \beta a$, то $m = h_P(\beta) \in N(P)$. Следствие доказано.

§ 3. Пусть A и G — группы. Группа G называется локально A -свободной, если каждое конечное семейство ее элементов можно вложить в прямое слагаемое группы G , являющееся прямой суммой групп, изоморфных группе A , то есть вложить в A -свободное прямое слагаемое [5, с. 8]. Ясно, что A -свободная группа всегда локально A -свободна. Локально A -свободные группы — это естественное обобщение однородных сепарабельных групп. При подходящих условиях они обладают хорошими свойствами этих групп. Покажем, что если группа A не имеет кручения и $E(A)$ является телом, то у локально A -свободной группы G $E(G) \times XQ$ -модуль $G \times Q$ — однородный вполне приводимый. Это даст естественный пример групп, рассматриваемых в этой работе. В частности, становится ясным, что упомянутые выше известные результаты [5, следствие IV] получаются с учетом следствия 3 из стандартных свойств локально свободных модулей над областью главных идеалов.

Теорема 3. Группа G без кручения является локально A -свободной для некоторой группы A без кручения, такой, что ее кольцо квазиизоморфизмов $E(A)$ есть тело тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) S -модуль V — однородный вполне приводимый;
- 2) существует в обозначениях, введенных перед теоремой 1, циклический R -модуль F такой, что F — локально свободный S -модуль и $G = RA$.

Доказательство. Если 1) и 2) справедливы, то S -модуль F плосок как локально свободный модуль. На основании теоремы 1 имеем изоморфизм $G \cong F \times_C A$, F — локально свободный S -модуль. Легко убедиться, что группа G локально A -свободна. Как и в следствии 1, кольца C и $E(A)$ можно отождествить. Значит, $E(A) = E(A) \times Q = C \times Q = D$, где D — тело.

Предположим, что $E(A)$ — тело и G — локально A -свободная группа. Можно считать, что A — одно из прямых слагаемых группы G . Тогда равенство $G = RA$ очевидно. Поскольку $F \cap A = aC$ (a — какой элемент, как выше), где $aC \cong C$ и F — вполне характеристическая подгруппа в G , то имеем дальше следующее. Если X — прямое слагаемое группы G и $X \cong A$, то $F \cap X \cong F \cap A$ и, следовательно, $F \cap X \cong C$. Отсюда, если элементы $x_1, \dots, x_n \in F$, то существует разложение $G = \sum_{i=1}^m \oplus X_i \oplus G_1$, в котором все $X_i \cong A$ и $x_1, \dots, x_n \in \sum_{i=1}^m \oplus X_i$. Имеем $F = \sum_{i=1}^m \oplus (F \cap X_i) \oplus (F \cap G_1)$, где все

слагаемые $F \cap X_i \cong C$ и $x_1, \dots, x_n \in \sum_{i=1}^m \oplus (F \cap X_i)$. Это доказывает локальную свободу C -модуля F и справедливость 2).

Докажем, что справедливо 1). Группа G имеет разложение $G = A \oplus G_1$. Пусть H — некоторая минимальная pfi -подгруппа группы A . Проверим, что RH — минимальная pfi -подгруппа группы G . Вполне характеристичность ее очевидна. Предположим теперь что n — натуральное число, $g \in G$ и $ng \in RH$. Группа G как локально, A -свободная обладает разложением $G = A_1 \oplus \dots \oplus A_k \oplus G'$, в котором $A_i \cong A$ ($i = 1, \dots, k$) и $ng \in A_1 \oplus \dots \oplus A_k$. Запишем $ng = g_1 + \dots + g_k$, $g_i \in A_i$ и пусть $\pi_i: G \rightarrow A_i$ — проекции. Так как $ng \in RH$, то $\pi_i(ng) = g_i \in RH$.

Учитывая изоморфизм $A_i \cong A$ и вполне характеристичность подгруппы RH , получаем $RH \cap A_i \cong RH \cap A = H$. Откуда выводим, что пересечение $RH \cap A_i$ — минимальная pfi -подгруппа в A_i . В частности, она сервантна в A_i и потому включение $n(\pi_i g) \in RH$ влечет $\pi_i g \in RH$. Значит, $g \in RH$, поскольку $g = \sum_{i=1}^k \pi_i g$.

Этим установлена сервантность подгруппы RH .

Допустим, что E — ненулевая pfi -подгруппа группы G , лежащая в RH . Тогда $E = (A \cap E) \oplus (G_1 \cap E)$. Используя локальную A -свободу группы G , можно убедиться, что $A \cap E \neq 0$. Тогда $A \cap E$ — ненулевая pfi -подгруппа группы A , лежащая в H . Следовательно, $A \cap E = H$. Отсюда $E \subseteq RH = R(A \cap E) \subseteq RE \subseteq E$ и $E = RH$. Таким образом, RH — минимальная pfi -подгруппа группы G . Группа A сервантно порождается своими минимальными pfi -подгруппами. Опираясь снова на локальную A -свободу группы G , можно проверить, что она сервантно порождается минимальными pfi -подгруппами вида RH , где H пробегает все минимальные pfi -подгруппы группы A . Следовательно, S -модуль V порождается минимальными подмодулями, то есть он вполне приводим.

Почему V — однородный вполне приводимый S -модуль? Пусть H_1 и H_2 — некоторые минимальные pfi -подгруппы группы A . Тогда RH_1 и RH_2 — минимальные pfi -подгруппы группы G . Покажем, что минимальные подмодули $RH_1 \times Q$ и $RH_2 \times Q$ S -модуля V изоморфны. Каждый из этих подмодулей порождается любым своим ненулевым элементом. Пусть поэтому $RH_1 \times Q = Sa$ и $RH_2 \times Q = Sb$, где $a, b \in A$. Проверим, что отображение $Sa \rightarrow Sb$, $sa \rightarrow sb$ определено корректно. Допустим, что $sa = 0$ для некоторого $s \in S$, но $sb \neq 0$. Элемент sb можно вложить в A -свободное прямое слагаемое группы G . Беря в случае необходимости проекцию, можно получить гомоморфизм $\alpha: A \rightarrow A'$ такой, что $\alpha a = 0$, но $\alpha b \neq 0$. Здесь A' — некоторое прямое слагаемое группы G , изоморфное

группе A . Но такого гомоморфизма не может быть, так как кольцо квазиэндоморфизмов $E(A)$ является телом. Значит, $sb=0$ и указанное отображение существует. В действительности оно является ненулевым гомоморфизмом S -модулей и следовательно, оно—изоморфизм. Минимальные подмодули вида $RH \times Q$ порождают модуль V , поэтому доказали, что он является однородным вполне приводимым. Теорема доказана.

Итак, для локально A -свободной группы G S -модуль V является однородным вполне приводимым при условии, что кольцо квазиэндоморфизмов группы A есть тело. Как можно сформулировать в этом случае теорему 2? Рассмотрим кратко следствия, которые здесь получают. Автор предполагает подробно и в более полном виде рассмотреть эти вопросы в другой статье.

Пусть A —такая группа без кручения, что кольцо квазиэндоморфизмов $E(A)$ является телом. Положим $C=E(A)$. Рассмотрим такие функторы: $H=Hom_Z(A, -)$ —из категории абелевых групп в категорию правых C -модулей и $T=(- \times_C A)$ и $U=(- \times_C A)/t(- \times_C A)$ —из категории правых C -модулей в категорию абелевых групп.

Если F —локально свободный C -модуль, то $U(F) \cong T(F)$ —локально A -свободная группа. Если же G —локально A -свободная группа, то $H(G)$ —локально свободный C -модуль. В качестве группы A из теорем 1 и 2 можно взять любое прямое слагаемое группы G , изоморфное группе A . Тогда вместо категории \mathbf{G} можно рассмотреть категорию всех подгрупп P локально A -свободных групп, таких, что $S_P(A) = P$, а вместо категории \mathbf{M} —категорию всех подмодулей локально свободных C -модулей. По определению $S_P(A) = \{\sum \varphi A \mid \varphi \in Hom(A, P)\}$ —след группы A в группе P .

Теорема 4. Пусть A —группа без кручения, у которой кольцо квазиэндоморфизмов является телом и $IA \neq A$ для любого собственного правого идеала I кольца $E(A)$. Тогда функторы H и U осуществляют эквивалентность между категорией всех подгрупп P локально A -свободных групп и категорией всех подмодулей локально свободных $E(A)$ -модулей.

Условие " $IA \neq A$ для любого собственного правого идеала I кольца $E(A)$ " появилось в [6]. Оно выполняется, если кольцо $E(A)$ наследственно справа. Если A имеет конечный ранг, то это же верно, если $E(A)$ —коммутативное кольцо ([6], следствие 2.4) или локальное кольцо.

Следствие 4. Если A —группа без кручения и $E(A)$ —тело, то эквивалентны следующие условия:

- 1) $IA \neq A$ для любого собственного правого идеала I коль-

ца $E(A)$ и всякая подгруппа P A -свободной группы со свойством $S_P(A) = P$ A -свободна;

2) $E(A)$ — область главных правых идеалов.

В [6] этот результат доказан для группы A конечного ранга. Теперь запишем пункты в) и г) [следствия 3₂ для нашего случая (читаем $C = E(A)$).

Следствие 5. 1) Если P — сервантная подгруппа локально A -свободной группы G ($E(A)$ — тело) и $S_P(A) = P$, то кольцо $E(P)$ дискретно в конечной топологии тогда и только тогда, когда C -модуль $H(P)$ имеет конечный C -ранг.

2) Если подгруппа P сервантна в G , то C -подмодуль $H(P)$ C -сервантен в $H(G)$.

Ввиду теоремы 4 и следствия 5 становятся ясными важные результаты следствия IV работы [5]. В силу установленной эквивалентности категорий они вытекают из соответствующих свойств локально свободных C -модулей.

Следствие 6 [5]. Пусть A — группа без кручения, причем $E(A)$ — тело, а $E(A)$ — область главных идеалов. Тогда, если P — такая подгруппа локально A -свободной группы G , что $S_P(A) = P$, то справедливы утверждения:

1) счетная подгруппа P A -свободна;

2) сервантная подгруппа P , у которой кольцо $E(P)$ дискретно в конечной топологии, является прямым слагаемым группы G ;

3) счетная группа G A -свободна.

§ 4. Изучим группы, соответствующие в неприводимом случае группам, рассмотренным в теоремах 3.1, 4.1 и следствиях 3.4, 3.6 работы [2]. Если G — неприводимая группа без кручения, C — центр кольца $E(G)$, то в этих утверждениях требовалось, чтобы всякий ненулевой сервантный C -подмодуль в G содержал некоторый образующий элемент $E(G)$ -модуля G .

Мы ограничимся рассмотрением групп, являющихся неоднородным аналогом сильно однородных групп, изучавшихся в [2, 7, 8]. Такие группы уже появлялись в литературе [1, предложение 5.1]. Их можно рассматривать и как обобщение транзитивных и вполне транзитивных групп [1, 2], когда «транзитивность» имеет место не для всей группы, а для некоторой подгруппы, прежде всего для некоторой минимальной psi -подгруппы.

Определение. Кольцо C называется сильно однородным, если всякий его элемент есть целое кратное некоторого обратимого в C элемента.

Доказываемая ниже теорема 5 применяется для описания групп без кручения конечного ранга, кольцо эндоморфизмов которой является кольцом матриц над некоторым сильно однородным коль-

цом или прямой суммой таких колец матриц (теорема 7, следствие 9). Такие группы часто встречаются.

Замечание 2. Для сильно однородной группы G без кручения справедливо утверждение, аналогичное замечанию перед леммой 1. А именно: доказательства всех результатов работы [8] без изменений справедливы в том более общем случае, когда R — такое подкольцо в $E(G)$, что группа обратимых элементов кольца R действует транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 группы G .

Теорема 5. Пусть G — группа без кручения с однородным вполне приводимым S -модулем V . Предположим, что выполняются следующие условия:

а) группа G порождается своими минимальными pfi -подгруппами;

б) группа $\text{Aut } G$ действует транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 некоторой минимальной pfi -подгруппы группы G . Тогда существует циклический левый R -модуль F такой, что кольцо $C = \text{End}_R F$ сильно однородно, а F — правый C -модуль без кручения, всякий подмодуль счетного C -ранга которого свободен. Существует левый C -модуль A без кручения такой, что кольца $Z(C)$ и $\text{End}_C A$ канонически изоморфны. Кроме того:

1) $G \cong F \times_C A$, а именно каноническое отображение $F \times_C A \rightarrow G$ из теоремы 1 является изоморфизмом;

2) каноническое отображение колец $R \rightarrow \text{End}_C F$ — топологический изоморфизм, то есть F — сбалансированный точный R -модуль.

Доказательство. Пусть H — минимальная pfi -подгруппа группы G , о которой говорится в п. б). Зафиксируем некоторый элемент $0 \neq a \in H$. Пусть F , C и A такие, как в теореме 1. Таким образом, $F = Ra$ и $C = \text{End}_R F$.

Если X' и Y' — некоторые сервантные подгруппы в F ранга 1, то пусть X и Y — сервантные подгруппы в G , порожденные X' и Y' соответственно. Выберем $\alpha \in \text{Aut } G$, для которого $\alpha X = Y$. Тогда $\alpha X' = \alpha(X \cap F) = Y \cap F = Y'$.

Итак, мы находимся в ситуации замечания 2 относительно группы F и кольца R . Именно $R \cong E(F)$ и группа обратимых элементов кольца R действует транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 группы F . В силу замечания 2 и теоремы 1 [8] кольцо C является сильно однородным, а F — правый C -модуль без кручения, все подмодули счетного C -ранга которого свободны.

Сильно однородное кольцо C является областью главных правых идеалов. Поэтому по теореме 1 [п. 3) и 4)] имеем канонический изоморфизм $F \times_C A \rightarrow RA$. Покажем, что $RA = G$. Тогда

все оставшиеся утверждения теоремы будут следовать из теоремы 1.

Допустим, что элемент $0 \neq x \in G$. Учитывая а), можно считать, что x лежит в некоторой минимальной *phi*-подгруппе группы G . Положим $X = xK \cap G$. Здесь xK — неприводимый K -модуль. Пересечение $X \cap F$ отлично от нуля и сервантно в F . Следовательно, оно содержит некоторый элемент b такой же характеристики, что и a . Так как $xK = bK$, то $X = bK \cap G$.

По замечанию 1 [8] существуют $\alpha, \beta \in \text{Aut } G$, для которых $\alpha a = b$ и $\beta b = a$. Значит, $(\beta\alpha)a = a$ и $(\alpha\beta)b = b$. По лемме 1 $(\beta\alpha)A \subseteq A$ и $(\alpha\beta)X \subseteq X$. Таким образом, $\beta\alpha|_A = 1_A$ и $\alpha\beta|_X = 1_X$. Откуда $\alpha|_A$ — изоморфизм A на X . Поэтому $x \in \alpha A$, то есть $x \in RA$. В силу произвольности элемента x $RA = G$, и теорема доказана.

Теорема 5 сводит по существу изучение группы G к изучению сильно однородной группы.

Следствие 7. Пусть G — такая группа, как в теореме 5. Тогда:

- 1) категория \mathbf{G} из теоремы 2 не зависит от выбора элемента a , то есть определяется однозначно;
- 2) категории \mathbf{M} и \mathbf{G} из теоремы 2 изоморфны;
- 3) счетная подгруппа $P \in \mathbf{G}$ A -свободна. Поэтому счетная группа G A -сво одна и в этом случае $C = E(A)$, то есть $E(A)$ — сильно однородное кольцо.

Доказательство. 1) Пусть a_1 — ненулевой элемент, лежащий в некоторой минимальной *phi*-подгруппе группы G , и $A_1 = a_1K \cap G$. Как и в доказательстве теоремы 5, $\alpha A = A_1$ и $\beta A_1 = A$, где $\alpha, \beta \in \text{Aut } G$. Отсюда если P — подгруппа в G и $S_P(A) = P$, то $S_P(A_1) = P$, и наоборот. Следовательно, существует единственная категория \mathbf{G} для группы G .

2) Достаточно убедиться, что $IA \neq A$ для любого собственного правого идеала I кольца C . Идеал I равен nC для некоторого целого n . Допустим, что $IA = A$. Тогда $nA = A$, поскольку $G \cong F \times_C A$, то $nG = F \times_C nA = F \times_C A = G$. Откуда $nR = R$ и $nF = rRa = Ra = F$. Далее учитывая что $C = \text{Eld}_R F$, получаем $nC = C$, то есть $I = C$.

Утверждение 3) получается из следствий 2 и 1.

Теорема 6. Пусть $G \cong F \times_C A$ и $G_1 \cong F_1 \times_{C_1} A_1$ — две группы из теоремы 5. Если кольца $E(G)$ и $E(G_1)$ топологически изоморфны, то $C \cong C_1$, кольца $\text{Eld}_C F$ и $\text{Eld}_{C_1} F_1$ топологически изоморфны и всякий топологический изоморфизм ψ между ними индуцируется некоторым полулинейным изоморфизмом модулей $\varphi: F \rightarrow F_1$, то есть $\psi(\eta) = \varphi\eta\varphi^{-1}$, $\eta \in \text{End}_C F$.

Доказательство. По теореме 1 кольца $E(G)$ и $\text{Eld}_C F$, а также $E(G_1)$ и $\text{Eld}_{C_1} F_1$ топологически изоморфны. Из условия теоремы следует существование топологического изоморфизма

$\text{End}_c F \cong \text{End}_c F_1$. Пусть ψ — некоторый топологический изоморфизм этих колец. Мы находимся в условиях теоремы 3.1 [2]. По этой теореме существует изоморфизм абелевых групп $\varphi: F \rightarrow F_1$ такой, что $\psi(\eta) = \varphi\eta\varphi^{-1}$, $\eta \in \text{End}_c F$. Определим отображение $\mu: C \rightarrow C_1$ по правилу $\mu(c) = \varphi c \varphi^{-1}$, $c \in C$. Легко проверить, что μ — кольцевой изоморфизм. Если $g \in F$, $c \in C$, то имеем $\varphi(g)\mu(c) = \varphi(g)(\varphi c \varphi^{-1}) = \varphi(g\varphi c) = \varphi(gc)$. Таким образом, $\varphi(gc) = \varphi(g)\mu(c)$. Это равенство означает, что φ — полулинейный изоморфизм модулей F_c и F_{1c_1} . Теорема доказана.

Следствие 8. Группы G и G_1 изоморфны тогда и только тогда, когда кольца $E(G)$ и $E(G_1)$ топологически изоморфны и существует полулинейный изоморфизм модулей ${}_c A$ и ${}_{c_1} A_1$.

Предложение 2 доставляет примеры групп из теоремы 5.

Сформулируем по-иному предложение 2.13 работы [2].

Предложение 1. Пусть G — сильно однородная группа без кручения идемпотентного типа; $R = E(G)$, $S = R \times Q$ и C — центр кольца R . Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G — локально свободный C -модуль;
- 2) G — проективный R -модуль;
- 3) кольцо S обладает минимальным левым идеалом;
- 4) существует сильно однородное E -кольцо T без кручения и локально свободный T -модуль M такой, что $G \cong M$. В этом случае $C \cong T$.

Предложение 2. Группа G без кручения является локально A -свободной для некоторой группы A с сильно однородным кольцом $E(A)$ тогда и только тогда когда, группа G удовлетворяет условиям теоремы 5 и кольцо $S = R \times Q$ обладает минимальным левым идеалом.

Доказательство. \Rightarrow . Пусть A — группа без кручения с сильно однородным кольцом $E(A)$, а G — локально A -свободная группа. Все односторонние идеалы кольца $E(A)$ исчерпываются идеалами вида $nE(A)$, поэтому кольцо квазиэндоморфизмов $E(A)$ есть тело. Следовательно, к группе G можно применить теорему 3. В силу этой теоремы S -модуль V — однородный вполне приводимый. Как и в доказательстве теоремы 3, считаем, что A — одно из прямых слагаемых группы G .

Если $a \in A$, то элемент a можно вложить в подпространство W размерности 1 $E(A)$ -пространства $A \times Q$. Откуда $a \in W \cap A$, где $W \cap A$ — минимальная *pf*-подгруппа группы A . Таким образом, всякий элемент группы A лежит в некоторой ее минимальной *pf*-подгруппе. Отсюда можно вывести, что группа G удовлетворяет п. а) теоремы 5. Для этого достаточно учесть локальную A -свободу группы G и следующий факт, установленный в дока-

зательстве теоремы 3. Если H — некоторая минимальная pfi -подгруппа группы A , то RH — минимальная pfi -подгруппа группы G .

Осталось показать, что группа G удовлетворяет п. б) теоремы 5. С этой целью установим следующий факт. Именно докажем, что всякий элемент группы G , лежащий в некоторой ее минимальной pfi -подгруппе, можно вложить в прямое слагаемое группы G , изоморфное группе A . Обозначим $C = E(A)$. Можно считать, что G — конечно A -свободная группа, т. е. $G = \sum_{i=1}^n \oplus A_i$, где все

группы $A_i \cong A$. Имеем: $G = \sum_{i=1}^n \oplus A_i \cong \sum_n \oplus C \times_c A \cong (\sum_n \oplus C) \times_c A$.

Здесь $\sum_n \oplus C$ — прямая сумма n копий модуля C . Отождествим G с $(\sum_n \oplus C) \times_c A$. Пусть элемент g лежит в некоторой минималь-

ной pfi -подгруппе группы G . Запишем $g = \sum_{i=1}^n b_i \times a_i$, где $b_i \in \sum_n \oplus C$; $a_i \in A$. Все элементы a_i лежат в одной минимальной pfi -подгруппе группы A , скажем P . Выберем в P некоторый элемент $a \neq 0$. В силу минимальности подгруппы P для каждого i существует эндоморфизм $c_i \in \mathcal{C}$ и натуральное число t_i со свойством $c_i a = t_i a_i$.

Имеем $t_1 \dots t_n g = \sum_{i=1}^n t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n b_i \times t_i a_i = \sum_{i=1}^n (t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n b_i c_i \times a) = b \times a$, где $b = \sum_{i=1}^n t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n b_i c_i$. И так,

$t_1 \dots t_n g = b \times a$.

Элемент b можно вложить в прямое слагаемое C -модуля $\sum_n \oplus C$, изоморфное C , причем дополнительное слагаемое — свободный C -модуль. Следовательно, элемент $t_1 \dots t_n g$ лежит в некотором прямом слагаемом группы G , изоморфном группе A . Элемент g также лежит в этом слагаемом. Дополнительное слагаемое является A -свободной группой, а именно прямой суммой $n-1$ копии группы A .

Пусть теперь X и Y — суръективные подгруппы ранга 1, лежащие в одной минимальной pfi -подгруппе группы G . Можно написать $G = A_1 \oplus G_1 = A_2 \oplus G_2$, где $A_1 \cong A_2 \cong A$; $X \subset A_1$; $Y \subset A_2$ и $G_1 \cong G_2$. Существует изоморфизм $A_1 \rightarrow A_2$, отображающий X на Y [1, предложение 5.1]. Сумма этого изоморфизма с некоторым изоморфизмом $G_1 \rightarrow G_2$ дает искомым автоморфизм группы G , переводящий X в Y . Таким образом, группа $\text{Aut } \mathcal{C}$ действует

транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 любой минимальной *pfi*-подгруппы группы *G*.

←=. В силу теоремы $5G \cong F \times_C A$, где *F*, *C*, *A*—такие как в этой теореме, причем *F*—точный сбалансированный *R*-модуль. К *C*-модулю *F* можно применить, учитывая замечание 2, предложение 1. Так как кольцо *S* имеет минимальный левый идеал, то *C*-модуль *F* локально свободен. Но $C \times_C A \cong A$. И ясно, что *G*—локально *A*-свободная группа. Точно так же, как в следствии 1, $E(A) \cong C$ и $E(A)$ —сильно однородное кольцо. Предложение доказано.

Определение. Группа *G* без кручения называется *p*-простой (*p*-полупростой), если кольца R/pR простые (классически полупростые) для всякого простого числа *p*.

Следующая теорема описывает строение группы *G* без кручения конечного ранга с кольцом эндоморфизмов *R*, являющимся кольцом матриц над некоторым сильно однородным кольцом. Не уменьшая общности, можно считать кольцо *R* первичным.

Теорема 7. Следующие утверждения о группе *G* без кручения конечного ранга с первичным кольцом *R* эквивалентны:

1) группа *G* *A*-свободна для некоторой группы *A*, кольцо эндоморфизмов которой сильно однородно;

2) *R*—кольцо матриц над некоторым сильно однородным кольцом;

3) а) группа *G* порождается своими минимальными *pfi*-подгруппами и б) группа $\text{Aut } G$ действует транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 некоторой минимальной *pfi*-подгруппы группы *G*;

4) *G*—*p*-простая группа и утверждение б) из 3);

5) *G*—*p*-полупростая группа и б) из 3);

6) *R*—наследственно справа и б) из 3).

Доказательство. Ясно, что $1) \Leftrightarrow 2)$. Первичность кольца *R* влечет простоту кольца $S = R \times Q$. Следовательно, *S*-модуль $V = G \times Q$ —однородный вполне приводимый. Отсюда $1) \Leftrightarrow 3)$ на основании предложения 2.

$2) \Rightarrow 4), 5), 6)$. Если *C*—некоторое сильно однородное кольцо без кручения, то все его односторонние идеалы имеют вид *kC*, *k*=0, 1, 2, ... Значит, все кольца C/pC являются телами. Если теперь $R \cong C_n$, то $R/pR \cong (C/pC)_n$, и кольцо R/pR просто, т.е. *G*—*p*-простая группа и справедливо 4), 5). Сильно однородное кольцо *C* является областью главных правых идеалов. Поэтому кольцо *R* наследственно справа и верно 6).

Если выполняется одно из утверждений 4), 5), 6), то известно, что $G = \sum_{i=1}^n \oplus A_i$, где все *A_i* сильно неразложимы попарно квази-

изоморфные группы. Такая группа G порождается своими минимальными pfi -подгруппами. Это доказывается так же, как аналогичный факт в доказательстве предложения 2. Таким образом, имеем 3).

Следствие 9. Следующие утверждения о группе G без кручения конечного ранга эквивалентны:

- 1) $G = \sum_{i=1}^n \oplus G_i$, где каждая G_i вполне характеристична в G и является A_i -свободной группой для некоторой группы A_i , кольцо эндоморфизмов которой сильно однородно;
- 2) R — прямая сумма колец матриц над некоторыми сильно однородными кольцами;
- 3) а) группа G порождается своими минимальными pfi -подгруппами и б) группа $\text{Aut } G$ действует транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 любой минимальной pfi -подгруппы группы G ;
- 4) G — p -полупростая группа и б) из 3);
- 5) R — наследственно справа и б) из 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П. А. Об абелевых группах без кручения. 1.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984, с. 40—64.
2. Крылов П. А. Неприводимые абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984, выпуск 4, с. 73—100.
3. Джекобсон Н. Строение колец.— М.: ИЛ, 1961.
4. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории.— М., 1977, т. 1.— 688 с.
5. Arnold D. M., Murley C. E. Abelian groups A , such that $\text{Hom}(A, -)$ preserves direct sums of copies of A .— *Pacif. J. Math.*, 1975, v. 56, № 1, p. 7—20.
6. Arnold D. M., Lady E. L. Endomorphism rings and direct sums of torsion free abelian groups.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, v. 211, p. 225—237.
7. Arnold D. M. Strongly homogeneous torsion free abelian groups of finite rank.— *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, v. 56, p. 67—72.
8. Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения.— *СМЖ*, 1983, № 2, с. 77—84.

ЧИСТО ПОЛУПРОСТЫЕ КОЛЬЦА И МОДУЛИ, I

С. К. Росошек

В работе (первой из цикла работ, посвященных данному кругу вопросов) рассматриваются чистые аналоги различных классов модулей. Чистота понимается в смысле П. Кона [1]. Свойства чистоты, используемые в работе, описаны в [2]. При использовании соответствующих классов модулей получены характеристики некоторых классов колец. Все рассматриваемые кольца — ассоциативные с единицей, все модули — правые унитарные.

Определение 1. Модуль M назовем чисто простым, если M не содержит чистых подмодулей, отличных от нуля и M . Модуль M назовем чисто полупростым, если M изоморфен прямой сумме чисто простых модулей.

Ясно, что простой модуль — чисто полупростой, а полупростой модуль — чисто полупростой.

Пример 1. Пусть R — регулярное по Нейману кольцо. Тогда любая точная последовательность R -модулей является чистой точной последовательностью. Следовательно, класс чисто простых R -модулей совпадает с классом простых R -модулей, а класс чисто полупростых R -модулей совпадает с классом полупростых R -модулей.

Пример 2. Пусть $R=Z$ — кольцо целых чисел; $N-Z$ — модуль ранга 1 (т. е. либо циклическая p -группа $Z(p^k)$, $k=1, 2, \dots$, либо квазициклическая p -группа $Z(p^\infty)$, либо подгруппа аддитивной группы рациональных чисел). Известно [3, с. 142], что абелева группа A не содержит собственных сервантных подгрупп тогда и только тогда, когда A изоморфна некоторой группе N ранга 1. Поскольку для Z -модулей сервантность эквивалентна чистоте, то класс чисто простых Z -модулей совпадает с классом абелевых групп ранга 1. Отсюда следует, что класс чисто полупростых Z -модулей совпадает с классом прямых сумм групп ранга 1.

Хорошо известно, что модуль M полупрост тогда и только тогда, когда M вполне приводим (т. е. любой подмодуль моду-

ля M есть его прямое слагаемое). Выясним, имеет ли место „чистый“ аналог этого утверждения.

Определение 2. Назовем модуль M чисто вполне приводимым, если любой его чистый подмодуль есть прямое слагаемое модуля M .

Пример 3. Пусть $R=Z$ —кольцо целых чисел. Известно что любая абелева группа K такая, что всякая ее сервантная подгруппа есть прямое слагаемое в K и имеет вид

$$K = \left(\bigoplus_{p \in \pi} K_p \right) \oplus S \oplus D,$$

где π —произвольное множество простых чисел; K_p —ограниченная p -группа (т. е. $p^m K_p = 0$ для некоторого целого числа $m > 0$); S —однородная вполне разложимая группа без кручения конечного ранга; D —делимая группа. Следовательно, любой чисто вполне приводимый Z -модуль изоморфен некоторой группе K указанного выше вида.

Теорема 1. Пусть R —произвольное кольцо. Любой чисто вполне приводимый R -модуль M есть чисто полупростой модуль.

Доказательство. Можем считать, что $M \neq 0$. Покажем сначала, что любой ненулевой чистый подмодуль N модуля M содержит ненулевой чисто простой чистый подмодуль. Пусть $0 \neq n \in N$ —произвольный фиксированный элемент и рассмотрим множество Φ чистых подмодулей модуля N , где $\Phi = \{L/n \notin L \text{ и } L \text{—чистый подмодуль в } N\}$. Множество Φ непустое, т. к. $0 \in \Phi$. Возможны два случая.

Случай 1. $|\Phi| = 1$, т. е. Φ содержит только нулевой подмодуль. Покажем, что в этом случае N есть чисто простой подмодуль. Действительно, предположим противное, пусть N не является чисто простым модулем. Тогда существует чистый подмодуль K модуля N , отличный от 0 и N . Отсюда следует, что K —чистый подмодуль модуля M . Так как модуль M чисто вполне приводим, то K —прямое слагаемое в M , а значит, и в N , т. е. $N = K \oplus K'$ для некоторого ненулевого подмодуля K' модуля N . Поскольку $0 \neq n$, то элемент $n \in N$ не может принадлежать одновременно K и K' , т. е. или $n \notin K$, или $n \notin K'$. Следовательно, Φ имеет кроме 0 , по крайней мере, еще один элемент, что противоречит предположению.

Случай 2. $|\Phi| \geq 2$. Так как объединение возрастающей цепи чистых подмодулей есть чистый подмодуль [2], то легко видеть, что множество Φ удовлетворяет условию индуктивности. По лемме Цорна существует максимальный элемент $X \in \Phi$. Ясно, $0 \neq X \neq N$ и X —чистый подмодуль модуля M . Тогда X —пря-

мое слагаемое в M , а значит, и в N , т. е. $N = X \oplus X_0$ для некоторого ненулевого подмодуля X_0 модуля N .

Покажем, что X_0 — чисто простой модуль. Предположим противное, пусть существует ненулевой чистый подмодуль Y модуля X_0 такой, что $Y \neq X_0$. Тогда $X_0 = Y \oplus Y_0$ для некоторого ненулевого подмодуля $Y_0 \neq X_0$. Можем считать для определенности, что $n \notin Y$ (если $n \in X_0$, то тем более $n \in Y$; если $n \notin X_0$, то, поскольку $0 \neq n$ не может принадлежать одновременно Y и Y_0 , либо $n \notin Y$, либо $n \notin Y_0$ и, переобозначая, если потребуется, Y_0 на Y , а Y на Y_0 , получаем, что $n \notin Y$). Учтем теперь, что $X \oplus Y$ — прямое слагаемое модуля N . Непосредственно проверяется, что $n \notin X \oplus Y$ или $n \notin X \oplus Y_0$.

Действительно, пусть $n \in X \oplus Y$ и убедимся, что тогда $n \in X \oplus Y_0$. Имеем $n = x + y$, $0 \neq x \in X$, $0 \neq y \in Y$ (если $x = 0$, то $n = y \in Y$, противоречие с $n \notin Y$; если $y = 0$, то $n = x \in X$, противоречие с $X \in \Phi$). Так как $N = X \oplus Y \oplus Y_0$ и $0 \neq n$, то $n \notin Y_0$. Пусть $n \in X \oplus Y_0$, тогда $n = x' + y'_0$, $x' \in X$, $y'_0 \in Y_0$. Поскольку по предположению $n \in X \oplus Y$, то $n = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Таким образом, имеем две записи элемента $n \in N$ относительно одного и того же прямого разложения $N = X \oplus Y \oplus Y_0$, а именно $n = x + y + 0 = x' + 0 + y'_0$. Следовательно, имеем $x = x'$, $y = y'_0 = 0$, откуда $n = x \in X$, противоречие с $X \in \Phi$.

Итак, имеем, что элемент n не принадлежит хотя бы одному из прямых слагаемых $X \oplus Y$ или $X \oplus Y_0$. Отсюда следует, что $X \oplus Y$ или $X \oplus Y_0$ принадлежит Φ , что противоречит максимальности X в Φ . Тогда X_0 — чисто простой модуль, что завершает доказательство для случая 2.

Таким образом, показано, что любой ненулевой чистый подмодуль чисто вполне приводимого модуля M содержит ненулевое чисто простое слагаемое модуля M .

Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — множество всех ненулевых чисто простых прямых слагаемых модуля M . Обозначим через Ψ множество всех тех подмножеств в S множества I , которые удовлетворяют следующим условиям:

- (I) $\sum_{i \in S} X_i$ — прямая сумма;
- (II) $\sum_{i \in S} X_i$ — прямое слагаемое в M .

Множество Ψ непустое, так как любое одноэлементное подмножество $\{i\} \subseteq I$ удовлетворяет условиям (I) и (II). Легко видеть, что частично упорядоченное по включению множество Ψ удовлетворяет условию индуктивности и, следовательно, по лемме Цорна существует максимальный элемент $Z \in \Psi$.

Покажем, что $M = \bigoplus_{i \in Z} X_i$. От противного, пусть $M \neq \bigoplus_{i \in Z} X_i$.

По (II) имеем, что $\bigoplus_{i \in Z} X_i$ — прямое слагаемое модуля, т. е. $M = (\bigoplus_{i \in Z} X_i) \oplus M'$ для некоторого подмодуля $M' \neq 0$ модуля M . По доказанному выше существует чисто простое ненулевое прямое слагаемое X_{j_0} модуля M' , которое является, очевидно, прямым слагаемым модуля M . Имеем

$$M = ((\bigoplus_{i \in Z} X_i) \oplus X_{j_0}) \oplus M''$$

для некоторого подмодуля M'' модуля M . Но тогда $(\bigoplus_{i \in Z} X_i) \oplus X_{j_0}$ есть прямое слагаемое модуля M , $X_{j_0} \in \{X_i\}_{i \in I}$ и подмножество $Z \cup \{j_0\}$ множества I удовлетворяет условиям (I) и (II). Следовательно, $Z \cup \{j_0\} \in \Psi$, что противоречит максимальнойности Z в Ψ .

Замечим, что, как следует из примеров 2 и 3, утверждение, обратное к теореме 1.6, неверно. Следовательно, „чистый“ аналог классического результата „полупростота = вполне приводимости“ не имеет места.

Определение 3. Модуль M назовем чисто непрерывным, если:

а) для любого чистого подмодуля K модуля M существует прямое слагаемое N модуля M такое, что K есть существенный подмодуль в N ;

б) если чистый подмодуль K модуля M таков, что K изоморфен N , где N — прямое слагаемое M , то K — прямое слагаемое модуля M .

Предложение 1. Пусть R — любое кольцо, тогда всякий чисто вполне приводимый R -модуль чисто непрерывен.

Доказательство очевидно.

Определение 4. Модуль M называется чисто корректным, если для любого модуля N из того, что M и N изоморфны соответственно чистым подмодулям $N' \subseteq N$ и $M' \subseteq M$, следует изоморфизм $M \cong N$.

Предложение 2. Пусть R — любое кольцо. Всякий чисто вполне приводимый R -модуль чисто корректен.

Доказательство следует из [4, теорема 3].

Утверждение, обратное к предложению 2, вообще говоря, неверно.

Пример 4. Известно, что любая прямая сумма циклических p -групп чисто корректна. Из примера 3 следует, что существует чисто корректная абелева группа, которая не является чисто вполне приводимой.

Как видно из вышеизложенного, класс чисто вполне приводимых модулей содержится в классах чисто полупростых, чисто непрерывных и чисто корректных модулей. Возникает естественный

вопрос, для каких колец эти включения являются равенствами? Выясним, в частности, когда вышеуказанные классы модулей совпадают с классом всех модулей.

Вспомним, что кольцо R называется чисто полупростым справа, если любая точная чистая последовательность правых R -модулей расщепляется.

В [5] этот класс колец был введен под названием «чисто квазифробениусовы кольца», а в [9] уже использован более подходящий термин «чисто полупростые кольца».

Из работ [6, 7, 8] вытекает следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть R — произвольное кольцо. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) любой правый R -модуль алгебраически компактен;
- (б) любой правый R -модуль имеет прямое разложение, дополняющее прямые слагаемые;
- (в) любой правый R -модуль есть прямая сумма неразложимых модулей;
- (г) любой правый R -модуль есть прямая сумма конечно порожденных модулей;
- (д) любой правый R -модуль есть прямая сумма конечно представленных модулей;
- (е) любой правый R -модуль есть прямая сумма модулей с локальными кольцами эндоморфизмов;
- (ж) R — чисто полупростое справа кольцо.

Оказывается, что к этому списку можно добавить целый ряд характеристик, которые являются «чистыми» аналогами характеристик классически полупростых колец. В следующей теореме приведена часть таких характеристик.

Теорема 3. Для произвольного кольца R следующие утверждения эквивалентны:

- (I) любой правый R -модуль чисто вполне приводим;
- (II) любой правый R -модуль чисто полупрост;
- (III) любой правый R -модуль чисто непрерывен;
- (IV) любой правый R -модуль чисто корректен;
- (V) R — чисто полупростое справа кольцо.

Доказательство. (I) \Rightarrow (II) следует из теоремы 1.

(II) \Rightarrow (V). Пусть любой правый R -модуль чисто полупрост, т. е. изоморфен прямой сумме чисто простых правых R -модулей. Поскольку, очевидно, любой чисто простой модуль неразложим, то любой правый R -модуль изоморфен прямой сумме неразложимых модулей. Следовательно, по теореме 2 получаем (II) \Rightarrow (V).

(IV) \Rightarrow (I). Очевидно.

(I) \Rightarrow (III). Следует из предложения 1.

(III) \Rightarrow (V). Пусть

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0 \quad (*)$$

произвольная точная чистая последовательность правых R -модулей. Покажем, что если выполнено условие (III), то $(*)$ — расщепляемая последовательность. Рассмотрим модуль $D = B \oplus B'$, где $B' \cong A$. По (III) модуль D чисто непрерывен. Так как $i(A)$ есть чистый подмодуль модуля B , то $i(A)$ — чистый подмодуль модуля D . Кроме того, имеем изоморфизм $i(A) \cong B'$. Из определения чисто непрерывного модуля получаем, что $i(A)$ — прямое слагаемое модуля B , т. е. последовательность $(*)$ расщепляется.

Эквивалентность $(IV) \Leftrightarrow (V)$ была доказана в [4, теорема 3]. Заметим, что в [4] чисто полупростые кольца назывались чисто квазифробениусовыми кольцами.

Выясним, над какими кольцами любой инъективный и соответственно любой плоский модуль чисто вполне приводим.

Теорема 4. Любой инъективный правый R -модуль чисто вполне приводим тогда и только тогда, когда R — нетерово справа кольцо.

Доказательство. Достаточность. Пусть R — нетерово справа кольцо, M — инъективный правый R -модуль и N — чистый подмодуль модуля M . Покажем, что N есть прямое слагаемое модуля M .

Заметим сначала, что модуль M абсолютно чист, так как любой инъективный модуль абсолютно чист (модуль M называется абсолютно чистым, если M чист в любом модуле, его содержащем, или, эквивалентно, модуль M чист в своей инъективной оболочке или, эквивалентно, $\text{Ext}_R^1(L, M) = 0$ для любого конечно представленного правого R -модуля L [10]). Так как N — подмодуль инъективного модуля M , то инъективная оболочка \bar{N} модуля N содержится в M , следовательно, модуль N чист в своей инъективной оболочке \bar{N} (поскольку N чист в модуле M). Но тогда модуль N абсолютно чист и по [10, теорема 3] N — инъективный модуль. Следовательно, N есть прямое слагаемое модуля M и тогда M — чисто вполне приводимый модуль.

Необходимость. Пусть любой инъективный правый R -модуль чисто вполне приводим и пусть M — произвольный правый абсолютно чистый R -модуль. Тогда модуль M чист в своей инъективной оболочке \bar{M} и, по предположению, M есть прямое слагаемое модуля \bar{M} . Следовательно, M — инъективный модуль и по [10, теорема 3] кольцо R нетерово справа.

Теорема 5. Любой плоский правый R -модуль чисто вполне приводим тогда и только тогда, когда R — совершенное справа кольцо.

Доказательство. Необходимость. Пусть любой плоский правый R -модуль чисто вполне приводим и M —произвольный плоский правый R -модуль. Пусть $F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$ —свободный правый R -модуль, где $\langle x_i \rangle \cong R_R$ для любого $i \in I$ такой, что $M \cong \cong F/K$ для некоторого подмодуля K модуля F . Покажем, что последовательность

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow F/K \rightarrow 0 \quad (*)$$

является точной чистой последовательностью.

Пусть система уравнений (1) $\sum_{j=1}^n x_{ij} r_{ij} = k_i$, $k_i \in K$, $i=1, \dots, s$ разрешима в модуле F . Докажем, что это система разрешима в подмодуле K , тогда по [1] последовательность $(*)$ точная чис ая. Пусть $f_{ij} \in F$, $i=1, \dots, s$; $j=1, \dots, n$ есть решение системы (1) в модуле F . Так как $F/K \cong M$ есть плоский модуль, то по [11, лемма 11. 27] для любого $k_i \in K$, $i=1, \dots, s$, существуют гомоморфизмы $\theta_i: F \rightarrow K$ такие, что $\theta_i(k_i) = k_i$. Отсюда, если обозначить $\theta_i(f_{ij}) = y_{ij} \in K$ для любого $i=1, \dots, s$; $j=1, \dots, n$, получаем, что $\sum_{j=1}^n y_{ij} r_{ij} = k_i$, $i=1, \dots, s$. Следовательно, мы нашли решение системы (1) в подмодуле K и $(*)$ —точная чистая последовательность.

Поскольку модуль F чисто вполне приводим по условию (свободный модуль—плоский), то K есть прямое слагаемое в F . Но тогда F/K , а следовательно, и M изоморфен прямому слагаемому модуля F . Таким образом, M —проективный модуль. Мы получили, что любой плоский правый R -модуль проективен. Следовательно, R —совершенное справа кольцо.

Достаточность. Пусть кольцо R совершенно справа; M —плоский правый R -модуль и N —чистый подмодуль модуля M . Тогда M —проективный модуль и, как следует из [12, лемма 3. 1], N есть прямое слагаемое в M . Следовательно, любой плоский правый R -модуль чисто вполне приводим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sohn P. On the free product of associative rings I.—Math. Zelt., 1959, v. 71, p. 380—398.
2. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули.—М.: Наука, 1969.—152 с.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.—М.: Мир, 1974, т. 1.—335 с.
4. Росошек С. К. Корректность модулей.—Изв. вузов. Математика, 1978, № 10, с. 77—82.
5. Kiełpiński R., Simson D. On pure homological dimension.—Bull. Acad. Polon., 1975, v. 23, p. 1—6.

6. Simson D. On pure global dimension of locally finite presented Grothendieck categories.—Fund. Math., 1977, v. 96, p. 91–116.
7. Zimmermann-Huisgen B. Rings whose right modules are direct sums of indecomposable modules.—Proc. Amer. M. S., 1979, v. 77, N 2, p. 191–197.
8. Fuller K. On rings whose modules are direct sums of finitely generated modules.—Proc. Amer. M. S., 1976, v. 54, p. 39–44.
9. Simson D. Right pure semisimple hereditary rings.—Lect. Notes in Math., 1980, v. 832, p. 573–578.
10. Megibben C. Absolutely pure modules.—Proc. Amer. M. S., 1970, v. 26, № 4, p. 561–566.
11. Фейс К. Алгебра: кольца, модули, категории.—М.: Мир, 1977, т. 1.—688 с.
12. Griffith P. A note on a theorem of P. Hill.—Pacif. J. Math., 1969, v. 29, p. 279–284.

КОЛЬЦА С ДИСТРИБУТИВНОЙ СТРУКТУРОЙ ИДЕАЛОВ

А. А. Туганбаев

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, модули — унитарными и, когда не указана сторона, правыми. Слова типа «нётерово кольцо» означают, что соответствующие модульные условия выполнены справа и слева. Через $L(M)$ обозначается структура всех подмодулей модуля M .

Модуль M называется дистрибутивным, если структура $L(M)$ дистрибутивна, т. е. $A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C$ для любых его подмодулей A, B, C . Кольцо R называется дистрибутивным справа, если R_R — дистрибутивный модуль. Дистрибутивным кольцом называется дистрибутивное справа и слева кольцо. Дистрибутивными кольцами являются, например, коммутативные декиндовы кольца, кольца нормирования, строго регулярные кольца. Дистрибутивным модулям посвящен § 4.1 монографии П. Кона [1]. О некоммутативных дистрибутивных справа кольцах говорится в работах [2—9].

В теореме 1.1 данной работы выяснено, когда полунаследственное справа кольцо является дистрибутивным справа. В теореме 1.2 установлена связь между дистрибутивными кольцами, кольцами слабой глобальной размерности единица и кольцами, у которых в любом фактор-кольце все эндоморфизмы конечнопорожденных правых или левых идеалов продолжаются на все фактор-кольцо. В теореме 1.3 доказано, что дистрибутивное первичное кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром, обязано быть полунаследственным максимальным порядком над прюферовой областью. В теореме 2.1, описывающей строение дистрибутивных колец с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов, показывается, как такие кольца могут быть получены из цепных артиновых колец. Этот результат уточняется для коммутативных колец и колец, нётеровых по модулю первичного радикала. В теореме 3.1 дистрибутивные кольца, являющиеся конечно-порожденными модулями над своими центрами, охарактеризованы с помощью локализаций по максималь-

ным идеалам центра. Этот результат уточняется в полупервичном случае в теореме 3.2.

Обозначения и определения. Если M — модуль над кольцом R , то для любых его подмножеств A, B через $(A:B)$ обозначим множество $\{r \in R \mid Br \subseteq A\}$, а через $r(B)$ — множество $(0:B)$. Через $l(T)$ обозначается левый аннулятор подмножества T кольца R , через $N(R), J(R), Z(R_R)$ — соответственно первичный радикал, радикал Джекобсона и правый сингулярный идеал кольца R . (Напомним, что $Z(R_R) = \{a \in R \mid r(a) \text{ — существенный правый идеал}\}$). Кольцо эндоморфизмов модуля M обозначается через $\text{Eld}(M)$. Модуль называется конечномерным, если он не содержит бесконечных прямых сумм подмодулей, не равных нулю. Подмодуль B модуля M называется замкнутым, если он не имеет собственных существенных расширений в модуле M . Редуцированным кольцом называется кольцо без ненулевых нильпотентных элементов.

Кольцо R называется антисингулярным справа, если $Z(R_R) = 0$. Кольцо называется инвариантным справа (слева), если все его правые (левые) идеалы являются идеалами. Кольцо, у которого все идемпотенты центральны, называется нормальным кольцом. Кольцо, у которого все главные правые идеалы являются проективными модулями, называется риккартовым справа кольцом. Кольцо, у которого все главные правые идеалы являются плоскими модулями, называется pf -кольцом. Понятие pf -кольца право—лево симметрично [16]. Мультипликативным подмножеством кольца R называется любое мультипликативно замкнутое подмножество кольца R , содержащее единицу и не содержащее нуля кольца R . Мультипликативное подмножество T кольца R называется правым подмножеством Ore , если для любых элементов $a \in R, t \in T$ найдутся такие элементы $a_1 \in R, t_1 \in T$, что $at_1 = ta_1$. Подмножество T кольца R называется множеством правых знаменателей, если выполнены следующие два эквивалентных условия: (а) T — правое подмножество Ore и для любых элементов $a \in R, t \in T$ из равенства $ta = 0$ следует, что $at_1 = 0$ для некоторого $t_1 \in T$; (б) существуют такое кольцо R_T и кольцевой гомоморфизм $f: R \rightarrow R_T$, что все элементы из $f(T)$ обратимы в R_T , каждый элемент кольца R_T имеет вид $f(a)f(t)^{-1}$ ($a \in R, t \in T$), причем $\text{Ker}(f) = \{a \in R \mid at = 0 \text{ для некоторого } t \in T\}$ [11, с. 110]. В этих условиях кольцо R_T называется правым кольцом частных кольца R относительно множества T .

Если B — правый идеал кольца R , то через B_r обозначается правый идеал кольца R_r , порожденный множеством $f(B)$. Идеал P кольца R называется вполне первичным, если R/P — область, т. е. кольцо без делителей нуля. Если множество правых знаме-

нателей T имеет вид $T=R \setminus P$, где P — вполне первичный идеал, то мы будем писать R_P вместо R_T . Модуль, у которого все конечно-порожденные подмодули являются циклическими модулями, называется модулем Безу. Модуль называется цепным модулем, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Модуль M над кольцом R называется модулем без кручения по Хаттори, если для любых $b \in M$, $s \in r(b)$ существуют такие элементы $b_1, \dots, b_n \in M$; $t_1, \dots, t_n \in R$, что $b = \sum b_i t_i$, $t_i s = 0$ ($1 \leq i \leq n$).

Через $w. gl. dim (R)$ обозначается слабая глобальная размерность кольца R . Неравенство $w. gl. dim (R) \leq 1$ эквивалентно тому, что все подмодули плоских R -модулей являются плоскими модулями. Кольцо называется целозамкнутым справа (слева), если все эндоморфизмы его конечно-порожденных правых (левых) идеалов продолжаются на все кольцо. Кольцо R называется самобазисным, если $R/J(R)$ — конечное прямое произведение тел.

§ 1. Дистрибутивные и полунаследственные кольца, плоские модули

В лемме 1.1 собран ряд известных результатов, приведенных для удобства вместе с доказательствами.

Л е м м а 1.1. Пусть R — кольцо. Тогда:

(а) если R — антисингулярное справа кольцо, у которого все замкнутые правые идеалы являются идеалами, то R — редуцированное кольцо;

(б) если кольцо R риккартово справа, то R — антисингулярное справа кольцо;

(в) если R — риккартово справа кольцо, у которого все замкнутые правые идеалы являются идеалами, то R — редуцированное кольцо;

(г) если R — редуцированное кольцо, то равенство $ta=0$ при $t, a \in R$ влечет равенство $at=0$ и $aR \cap r(a)=0$, $r(a)=l(a)$;

(д) если R — редуцированное кольцо, то кольцо R антисингулярно;

(е) если R — инвариантное справа полупервичное кольцо, то кольцо R антисингулярно;

(ж) если R — инвариантное справа кольцо, то любое его мультипликативное подмножество T является правым множеством Оре;

(з) если T — правое подмножество Оре редуцированного кольца R , то T — множество правых знаменателей;

(и) если R — инвариантное справа редуцированное кольцо, то любое его мультипликативное подмножество является множеством правых знаменателей;

(к) если T — подмножество правых знаменателей кольца R , причем $T = R \setminus P$, где P — вполне первичный идеал кольца R , то кольцо R_T локально.

Доказательство. (а). Пусть $a \in R$, $a^2 = 0$, $A = aR$. Выберем такой замкнутый правый идеал B кольца R , что $A \cap B = 0$, причем $A \oplus B$ — существенный правый идеал. Так как по условию B — идеал, то $aB = 0$, $a(A \oplus B) = 0$, $a \in Z(R_R) = 0$.

(б). Пусть $a \in Z(R_R)$. Так как модуль aR проективен и $aR \cong eRr(a)$, то $r(a) = eR$, $e = e^2$, причем $r(a)$ — существенный правый идеал. Поэтому $eR = R$, $a = 0$.

(в). Утверждение следует из пунктов (а) и (б).

(г). Если $ta = 0$, то $(at)^2 = 0$, откуда $at = 0$.

Пусть $b = ax \in aR \cap r(a)$. Тогда $a(ax) = 0$, откуда $axa = 0$, $(ax)^2 = 0$, $ax = 0$, $b = 0$.

(д). Утверждение следует из того, что $aR \cap r(a) = 0$.

(е). Утверждение следует из пункта (д) и редуцированности инвариантного справа полупервичного кольца.

(ж). Пусть $t \in T$. Так как tR — идеал, то для любого $a \in R$ найдется такое $a_1 \in R$, что $at = ta_1$, и все доказано.

(з). Утверждение вытекает из пункта (г).

(и). Утверждение вытекает из пунктов (ж) и (з).

(к). Утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 1.2. Пусть M — дистрибутивный модуль над кольцом R .

Тогда:

(а) если $a, b \in M$ и $aR \cap bR = 0$, то $r(a) + r(b) = R$;

(б) если A, B — такие подмодули в M , что $A \cap B = 0$, то $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(B, A) = 0$;

(в) все максимальные подмодули и все минимальные подмодули модуля M вполне инвариантны в M ;

(г) все замкнутые подмодули модуля M вполне инвариантны в M .

Доказательство. Пункты (а), (б) и (в) доказаны в [2], а пункт (г) — в [7].

Лемма 1.3 [7]. Пусть M — модуль над инвариантным справа кольцом R . Тогда равносильны следующие условия:

(а) модуль M дистрибутивен;

(б) $R = (A : B) + (B : A)$ для любых конечно-порожденных $A, B \in L(M)$;

(в) $A(B : A) = B$ для любого конечно-порожденного $A \in L(M)$ и произвольного $B \in L(A)$;

(г) $((B + C) : A) = (B : A) + (C : A)$ для любых $A, B, C \in L(M)$, где B, C — конечно-порождены;

(д) $(A : (B \cap C)) = (A : B) + (A : C)$ для любых $A, B, C \in L(M)$, где B, C — конечно-порожденные модули.

Лемма 1.4. Пусть R —дистрибутивное справа кольцо. Тогда:

(а) $R/Z(R_R)$ —редуцированное кольцо;

(б) если P —вполне первичный идеал кольца R , то $R \setminus P$ —правое множество Оре;

(в) если P —вполне первичный идеал кольца R , $T=R \setminus P$, причем для любых $a \in R$, $t \in T$, если $ta=0$, то $at_1=0$ для некоторого $t_1 \in T$, то правое кольцо частных R_P существует и является цепным справа кольцом.

Доказательство. Необходимо доказывать только пункт (а), так как пункты (б) и (в) доказаны в [7]. Достаточно доказать, что если $f \in R$ и $A=r(f^2)$ —существенный правый идеал, то и $B=r(f)$ —существенный правый идеал. Допустим противное. Тогда $B \cap C=0$ для некоторого ненулевого правого идеала C . Если $A_1=A \cap C$, то $A_1 \neq 0$, поскольку A —существенный правый идеал. Так как $f^2 A_1=0$, то $f A_1 \subseteq B$, причем $A_1 \cap B=0$. Тогда по лемме 1.2(б) $f A_1=0$. Поэтому $A_1 \subseteq A_1 \cap r(f)=A_1 \cap B=0$ и получено противоречие.

Лемма 1.5. Для кольца R равносильны следующие условия:

(а) R —дистрибутивное справа анти сингулярное справа кольцо;

(б) R —дистрибутивное справа редуцированное кольцо;

(в) R —дистрибутивное справа редуцированное pf -кольцо;

(г)—редуцированное кольцо и для любого максимального правого идеала M кольца R верно, что M —идеал, правое кольцо частных R_M существует и является цепным справа кольцом.

Доказательство. Эквивалентность условий (б) и (г) доказана в [7]. Эквивалентность условий (а) и (б) вытекает из лемм 1.4 (а), 1.1 (д). Импликация (б) \Leftarrow (в) тривиальна. Остается доказать импликацию (б) \Rightarrow (в). Пусть $b \in R$. Так как $bR \cong R/r(b)$, то для доказательства того, что bR —плоский модуль, достаточно показать, что для любого левого идеала A верно равенство $A \cap r(b)=r(b)A$ [11, с. 33]. Пусть $a \in A \cap r(b)$. По лемме 1.1 (г) $aR \cap bR=0$, $r(a)=l(a)$. Тогда по лемме 1.2 (а) найдутся такие элементы $x \in r(a)$, $y \in r(b)$, что $1=x+y$. Тогда $a=xa+ya$, причем из равенства $r(a)=l(a)$ следует, что $xa=0$. Поэтому $a=ya \in r(b)A$, $A \cap r(b) \subseteq r(b)A \subseteq A \cap r(b)$.

Лемма 1.6. Пусть R —инвариантное справа полупервичное кольцо. Тогда:

(а) R —редуцированное кольцо, обладающее классическим правым кольцом частных Q ;

(б) если кольцо R дистрибутивно справа, то R —редуцированное pf -кольцо, обладающее дистрибутивным справа классическим правым кольцом частных.

Доказательство. Пункт (а) вытекает из леммы 1.1 (з), пункт (б)—из леммы 1.5 пункта (а) и того, что классическое

правое кольцо частных дистрибутивного справа кольца дистрибутивно справа [2].

Предложение 1.1. Пусть R —антисингулярное справа кольцо, причем $w. gl. \dim(R) \leq 1$. Тогда равносильны следующие условия:

- (а) кольцо R дистрибутивно справа;
- (б) все максимальные правые идеалы и все замкнутые правые идеалы кольца R являются идеалами, для любого вполне первичного идеала P множество $R \setminus P$ является правым множеством Ore .

Доказательство. Импликация (а) \Rightarrow (б) вытекает из леммы 1.2(в), (г) и леммы 1.4 (б). Докажем импликацию (б) \Rightarrow (а). По лемме 1.1 (а) R —редуцированное кольцо. Пусть M —произвольный максимальный правый идеал кольца R . По условию M —идеал кольца и следовательно, вполне первичен, поскольку RM —тело. Тогда по условию $T = R \setminus M$ —правое множество Ore . По лемме 1.1 (з), (к) правое кольцо частных R_M существует и является локальным кольцом. Пусть $Q = R_M$. Так как $w. gl. \dim(Q) \leq w. gl. \dim(R) \leq 1$ [10, с. 230, 232], то все правые идеалы кольца Q являются плоскими модулями. Пусть D —правый идеал кольца Q , порожденный двумя произвольными ненулевыми элементами a, b кольца Q . Так как D_Q —конечно-порожденный плоский модуль над локальным кольцом Q , то модуль D_Q свободен [11, с. 131], откуда следует, что Q —область. Докажем, что D —главный правый идеал. В наших условиях для этого достаточно показать, что Q —правая область Ore . Обозначим через $f: R \rightarrow Q$ канонический гомоморфизм, а через \bar{R} —фактор-кольцо R/P , где $P = \text{Ker}(f)$. Тогда идеал P вполне первичен, поскольку кольцо \bar{R} изоморфно подкольцу области Q . Так как по условию $R \setminus P$ —правое множество Ore , то \bar{R} —правая область Ore . Поэтому Q —правая область Ore , поскольку кольцо Q изоморфно правому кольцу частных правой области Ore \bar{R} относительно множества $\bar{R} \setminus (M/P)$. Поэтому D_Q —циклический модуль над локальным кольцом Q и, следовательно, все его собственные подмодули малы в нем. Тогда, учитывая равенство $D = aQ + bQ$, получаем, что либо $aQ = D \cong bQ$, либо $bQ = D \cong aQ$. Поэтому Q —цепное справа кольцо. По лемме 1.5 кольцо R дистрибутивно справа.

Следствие 1.1. Пусть R —инвариантное справа полупервичное кольцо, причем $w. gl. \dim(R) \leq 1$. Тогда кольцо R дистрибутивно справа.

Доказательство. По леммам 1.6 (а) и 1.1 (д) кольцо R антисингулярно. Теперь применяем лемму 1.1 (ж) и предложение 1.1.

Лемма 1.7. Для дистрибутивного справа кольца R равносильны следующие условия:

(а) R —рикартово справа кольцо;

(б) R —антисингулярное справа кольцо и правый идеал $r(a)$ конечно-порожден для любого элемента $a \in R$.

Доказательство. Импликация (а) \Rightarrow (б) следует из леммы 1.1 (б). Докажем импликацию (б) \Rightarrow (а). Пусть $a \in R$. Так как $aR \cong R/r(a)$, то модуль aR конечно представим и, кроме того, является по лемме 1.5 плоским модулем. Следовательно модуль aR проективен [11, с. 48].

Предложение 1.2. Пусть R —дистрибутивное справа кольцо, обладающее классическим правым кольцом частных Q . Тогда равносильны следующие условия:

(а) R —антисингулярное справа кольцо и правый идеал $r(a)$ конечно-порожден для любого элемента $a \in R$;

(б) R —рикартово справа кольцо;

(в) Q —строго регулярное кольцо, все идемпотенты которого содержатся в кольце R .

Доказательство. Эквивалентность условий (а) и (б) доказана в лемме 1.7. В [12] доказано что для любого нормального кольца R , обладающего классическим правым кольцом частных Q , условия (б) и (в) равносильны. Остается отметить, что все дистрибутивные справа кольца нормальны [2].

Теорема 1.1. Пусть R —полунаследственное справа кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

(а) кольцо R дистрибутивно справа;

(б) все максимальные правые идеалы и все замкнутые правые идеалы кольца R являются идеалами и для любого вполне первичного идеала P кольца R множество $R \setminus P$ является правым множеством Ore.

Доказательство. Так как неравенство $w. gl. dim (R) \leq 1$ равносильно тому, что все конечно-порожденные правые идеалы являются плоскими, причем проективность влечет плоскостность, то $w. gl. dim (R) \leq 1$. Утверждение вытекает теперь из предложения 1.1 и леммы 1.1 (б).

Следствие 1.2. Пусть R —инвариантное справа кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

(а) R —полунаследственное справа кольцо;

(б) R —дистрибутивное справа кольцо, обладающее регулярным классическим правым кольцом частных;

(в) R —дистрибутивное справа полупервичное кольцо и $r(a)$ —конечно-порожденный правый идеал для любого элемента $a \in R$.

Доказательство. Эквивалентность условий (а) и (б) доказана в [7] в предположении редуцированности кольца R , которое является излишним по леммам 1.1 (в) и 1.6. Эквивалентность условий (б) и (в) вытекает из предложения 1.2.

Лемма 1.8 Пусть N_R —модуль над дистрибутивным инвариантным кольцом R . Тогда модуль N является плоским тогда и только тогда, когда N —модуль без кручения по Хаттори.

Доказательство. Так как над любым кольцом R модуль является плоским тогда и только тогда, когда N_R —модуль без кручения по Хаттори и $NX \cap NY = N(X \cap Y)$ для любых левых идеалов X, Y кольца R [13], то достаточно доказать, что $NX \cap NY = N(X \cap Y)$ для любых идеалов X, Y инвариантного кольца R . Достаточно доказать включение $NX \cap NY \subseteq N(X \cap Y)$. Пусть $d = \sum_{i=1}^k m_i a_i = \sum_{j=1}^l n_j b_j \in NX \cap NY$; $m_i, n_j \in N$, $a_i \in X, b_j \in Y$; $A = \sum_{i=1}^k a_i R$, $B = \sum_{j=1}^l b_j R$. Так как A, B —конечно-порожденные правые идеалы дистрибутивного инвариантного кольца R , то по лемме 1.3 $R = (B : A) + (A : B)$. Поэтому $1 = u + v$ для некоторых $u \in (B : A)$, $v \in (A : B)$. Тогда $d = du + dv = \sum m_i a_i u + \sum n_j b_j v$; $a_i u \in A \cap B$, $b_j v \in A \cap B$ ($\forall i, j$); $d \in N(A \cap B) \subseteq N(X \cap Y)$; $NX \cap NY \subseteq N(X \cap Y)$.

Лемма 1.9. Для кольца R равносильны следующие условия:

(а) все фактор-кольца кольца R являются целозамкнутыми кольцами, причем все левые и все правые аннуляторы элементов из R являются идеалами;

(б) R —дистрибутивное инвариантное кольцо.

Доказательство. Импликация (а) \Rightarrow (б) доказана в предложении 4.2 (б) из [8]. Докажем импликацию (б) \Rightarrow (а). Так как все фактор-кольца R дистрибутивны и инвариантны, то достаточно доказать, что кольцо R целозамкнуто слева. Нам потребуются следующие известные факты: (1) [8, лемма 4.7] если кольцо R инвариантно слева и ${}_R M$ —конечно-порожденный дистрибутивный левый R -модуль, то все подмодули из ${}_R M$ вполне инвариантны в ${}_R M$; (2) [15, с. 230] кольцо R обладает дистрибутивной структурой двусторонних идеалов тогда и только тогда, когда для любых идеалов A_1, \dots, A_n кольца R и произвольных элементов $x_1, \dots, x_n \in R$ таких, что $x_i - x_j \in A_i + A_j$, найдется такой элемент $x \in R$, что $x - x_i \in A_i$ ($1 \leq i, j \leq n$). Пусть M —конечно-порожденный левый идеал кольца R ; $f \in \text{End}({}_R M)$; $M = \sum_{i=1}^n R a_i$; $A_i = r(a_i) = r(a_i R)$. В силу (1) $f(R a_i) \subseteq R a_i$ для всех i . Тогда найдутся такие элементы $x_1, \dots, x_n \in R$, что $f(a_i) = a_i x_i \in a_i R = R a_i$. Поэтому для всех i, j верно равенство $0 = (R a_i \cap R a_j)(x_i - x_j)$. Из леммы 1.3 [см. условие (д)], инвариантности кольца R следует, что $x_i - x_j \in (0 : (a_i R \cap a_j R)) = (0 : a_i R) + (0 : a_j R) = A_i + A_j$. В силу (2) найдется такой элемент $x \in R$, что $x - x_i \in A_i$. Правилom $g(y) = yx$ задается продолжение на весь модуль ${}_R R$ гомоморфизма f .

Теорема 1.2. Для кольца R равносильны следующие условия: (а) R —редуцированное кольцо, все фактор-кольца которого целозамкнуты;

(б) R —дистрибутивное инвариантное полупервичное кольцо;

(в) $w. gl. dim (R) \leq 1$ и R —инвариантное полупервичное кольцо.

Доказательство. Эквивалентность условий (а) и (б) вытекает из лемм 1.9, 1.1 (г) и 1.6 (а). Импликация (в) \Rightarrow (б) вытекает из следствия 1.1. Докажем импликацию (б) \Rightarrow (в). По леммам 1.6 (а) и 1.5 R — pf -кольцо. Так как над pf -кольцом класс всех модулей без кручения по Хаттори замкнут относительно перехода к подмодулям [14], то по лемме 1.8 все подмодули плоских R -модулей являются плоскими модулями и, следовательно, $w. gl. dim (R) \leq 1$.

Лемма 1.10. Пусть R —дистрибутивное справа кольцо, обладающее классическим левым кольцом частных Q ; q —элемент кольца Q , удовлетворяющий равенству $q^{n+1} = \sum_{i=0}^n q^i a_i$ для некоторого натурального числа n и центральных элементов a_0, \dots, a_n из R . Тогда $q \in R$ и $qX \subseteq X$ для любого правого идеала X из R . В частности, R содержит все идемпотентные и все нильпотентные элементы кольца Q . Кроме того, модуль Q_R дистрибутивен.

Доказательство. Модуль Q_R дистрибутивен [2]. Пусть f —эндоморфизм модуля Q_R , задаваемый правилом $f(y) = qy$ при $y \in Q$. В [2] доказан следующий результат (теорема 3.2 [2]): если f —эндоморфизм дистрибутивного модуля M , $X \in L(M)$, причем $f^{n+1}(X) \subseteq \sum_{i=0}^n f^i(X)$ для некоторого натурального n , то $f(X) \subseteq X$. Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

Лемма 1.11. Пусть R —дистрибутивное справа кольцо с полиномиальным тождеством. Тогда:

(а) если кольцо R первично, то R —область Оре;

(б) если кольцо R полупервично, то R —редуцированное кольцо.

Доказательство. Так как по теореме Познера первичное PI -кольцо обладает классическим кольцом частных, которое является кольцом матриц над телом, то пункт (а) вытекает из леммы 1.10. Пункт (б) вытекает из пункта (а) и того, что дистрибутивное справа полупервичное PI -кольцо является подпрямым произведением дистрибутивных справа первичных PI -колец, являющихся по пункту (а) областями.

Лемма 1.12. Пусть A —конечно-порожденный собственный правый идеал дистрибутивной справа области R . Тогда $A \neq A^2$.

Доказательство. Допустим, что $A = A^2$. Пусть M —максимальный правый идеал, содержащий A . Тогда по лемме 1.5

M —идеал, правое кольцо частных R_M существует и является цепным справа кольцом. Тогда A_M —собственный идемпотентный конечно-порожденный правый идеал локального кольца R_M , чего по лемме Накаямы быть не может.

Теорема 1.3. Пусть R —дистрибутивное первичное кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром D . Тогда R —полунаследственная область Оре; D —прюферова область и кольцо R является максимальным D -порядком.

Доказательство. По лемме 1.11 (а) R —область Оре, не содержащая по лемме 1.12 идемпотентных собственных конечно-порожденных правых идеалов. Тогда по теоремам 1.19 и 2.4 работы [17] достаточно доказать, что если m —произвольный максимальный идеал центра D кольца R , то R —полунаследственное кольцо. Так как R_m —кольцо частных дистрибутивной области R относительно центрального мультипликативного множества $D \setminus m$, то R_m —дистрибутивная область [2], являющаяся к тому же конечно-порожденным модулем над локальным кольцом D_m . Тогда R_m —дистрибутивная полулокальная область и, следовательно, R_m —область Бэзу [5]. В частности, R_m —полунаследственное кольцо.

§ 2. Дистрибутивные кольца с условиями максимальности

Лемма 2.1. Пусть R —дистрибутивное справа кольцо, обладающее вполне первичным идеалом N , лежащим в радикале $J(R)$. Тогда:

- (а) идеал N сравним по включению с любым правым идеалом кольца R ;
- (б) либо R —область, либо N —существенный правый идеал;
- (в) $aN=N$ для любого элемента $a \in R \setminus N$;
- (г) если R —кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то идеал N содержит все левые делители нуля кольца R .

Доказательство. Пункт (а) доказан в [2]. Пункт (б) вытекает из того, что если $N \neq 0$, то по пункту (а) для любого ненулевого $a \in R$ либо $aR \cap N = N \neq 0$, либо $aR \cap N = aR \neq 0$. Докажем пункт (в). По пункту (а) $aR \supset N$. Так как N —идеал, то $aN \subseteq N$. Остается доказать, что если $b \in N$, то $b \in aN$. Поскольку $N \subset aR$, то $b = ad$ для некоторого $d \in R$. Так как идеал N вполне первичен и $ad \in N$, то $d \in N$. Поэтому $b \in aN$. Докажем пункт (г). Пусть $a \in R \setminus N$, $d \in r(a)$. Надо доказать, что $d = 0$. Так как идеал N вполне первичен, то $d \in N$. По условию найдется такое натуральное число n , что $r(a^n) = r(a^{n+1})$. Так как по пункту (в) $aN = N$, то $a^n N = N$ и, следовательно, $d = a^n b$ для

некоторого $b \in N$. Поскольку $ad=0$, то $b \in r(a^{n+1})=r(a^n)$. Поэтому $d=a^n b=0$.

Лемма 2.2. Пусть R —дистрибутивное справа неразложимое кольцо; N —его первичный радикал. Тогда:

- (а) R/N —кольцо без нетривиальных идемпотентов;
- (б) если R/N —либо кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, либо конечномерное справа антисингулярное справа кольцо, то N —вполне первичный идеал и $aN=N$ для любого элемента $a \in R \setminus N$.

Доказательство. Пункт (а) вытекает из того, что все идемпотенты кольца R/N поднимаются по модулю ниль-идеала N до идемпотентов кольца R , которые обязаны быть в дистрибутивном справа кольце R центральными [2]. Докажем пункт (б). По пункту (а) и условию R/N —дистрибутивное справа неразложимое кольцо, являющееся либо полупервичным кольцом с условием максимальности для правых аннуляторов, либо конечномерным справа антисингулярным справа кольцом. Тогда R/N —область [8] и применима лемма 2.1.

Лемма 2.3. Пусть R —дистрибутивное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов. Тогда первичный радикал $N(R)$ нильпотентен и совпадает с правым сингулярным идеалом $Z(R_R)$, причем $R/N(R)$ —редуцированное кольцо.

Доказательство. Так как R —кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то $Z(R_R)$ —нильпотентный идеал [10, с. 56]. Поэтому $Z(R_R) \subseteq N(R)$. Кроме того, $N(R) \subseteq Z(R_R)$, поскольку по лемме 1.4 (а) идеал $Z(R_R)$ содержит все нильпотентные элементы кольца R . Кроме того, по лемме 1.4 (а) $R/Z(R_R)$ —редуцированное кольцо.

Лемма 2.4. Пусть R —дистрибутивное справа неразложимое кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, причем фактор-кольцо $R/N(R)$ либо не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов, либо удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов. Тогда $N(R)$ —вполне первичный идеал, содержащий все левые делители нуля, причем $aN=N$ для всех $a \in R \setminus N$.

Доказательство. Так как конечномерность модуля равносильна отсутствию бесконечных прямых сумм ненулевых замкнутых подмодулей, то правая конечномерность дистрибутивного справа кольца $R/N(R)$ равносильна по лемме 1.2 (г) отсутствию в этом кольце бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов. Утверждение вытекает теперь из лемм 2.2 (б) и 2.1 (г).

Лемма 2.5. Пусть R —дистрибутивное справа неразложимое кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, не

содержащее бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов. Тогда:

- (а) $N(R)$ —вполне первичный идеал, содержащий все левые делители нуля, причем $aN(R)=N(R)$ для всех $a \in R \setminus N(R)$;
 (б) если все правые регулярные элементы кольца R регулярны, то R обладает цепным справа артиново справа классическим правым кольцом частных.

Доказательство. Из леммы 1.2 (г) следует, что R —конечномерное справа кольцо. Тогда $R/Z(R_R)$ —кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов [18]. Так как по лемме 2.3 $N(R)=Z(R_R)$, то пункт (а) вытекает из леммы 2.4. Докажем пункт (б). Из пункта (а) и условия следует, что множество T всех регулярных элементов кольца R имеет вид $T=R \setminus N$, где $N=N(R)$ —вполне первичный идеал. Тогда по лемме 1.4 (в) правое кольцо частных R_N существует и является цепным справа кольцом. Ясно, что $Q=R_N$ —классическое правое кольцо частных кольца R и $J(Q)=N_N$. Так как по лемме 2.3 идеал N нильпотентен, то Q —цепное справа полупримарное кольцо. Поэтому Q —артиново справа кольцо.

Лемма 2.6. Пусть R —дистрибутивное справа кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов. Тогда R —конечномерное справа кольцо.

Доказательство. Допустим противное. Тогда кольцо R содержит правый идеал A вида $A=\bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i R$, где $a_i \neq 0$ всех для i . Пусть $b_j = \sum_{i=1}^j a_i$. Тогда $r(b_j) \supseteq r(b_{j+1})$ для любого j , поскольку модули $a_i R$ образуют прямую сумму. По условию $r(b_n) = r(b_{n+1})$ для некоторого числа n . Тогда $b_n R \cong R r(b_n) \cong b_{n+1} R$. Пусть $f: b_n R \rightarrow b_{n+1} R$ —изоморфизм; $h: b_n R \oplus a_{n+1} R \rightarrow a_{n+1} R$ —проекция с ядром $b_n R$. Так как $b_n R \cap a_{n+1} R = 0$, то $\text{Hom}(b_n R, a_{n+1} R) = 0$ по лемме 1.2 (б). Поэтому $hf=0$, откуда $b_{n+1} R = f(b_n R) \subseteq b_n R$. Поэтому $a_{n+1} = b_{n+1} - b_n \in b_n R$ и получено противоречие.

Теорема 2.1. Для кольца R равносильны следующие условия:

- (а) R —дистрибутивное кольцо с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов;
 (б) R —конечное прямое произведение колец $R_i (i=1, \dots, n)$, обладающих цепными артиновыми классическими кольцами частных $Q_i (i=1, \dots, n)$ и содержащих радикалы $N(Q_i)$ колец Q_i , причем все кольца $R_i/N(Q_i)$ являются дистрибутивными областями.

Доказательство. (а) \Rightarrow (б). Можно без ограничения общности считать, что R —неразложимое кольцо. По лемме 2.6 R —конечномерное кольцо. По лемме 2.5 (а) $N(R)$ —вполне первичный идеал, содержащий все левые и все правые делители

нуля. По лемме 2.5 (б) кольцо R обладает цепным артиновым классическим кольцом частных Q . По лемме 1.10 кольцо R содержит радикал $N(Q)$.

(б) \Rightarrow (а). Можно без ограничения общности считать, что кольцо R обладает цепным артиновым кольцом частных Q , причем $N=N(Q)=N(R)\subseteq R$ и $\bar{R}=R/N$ — дистрибутивная область. Тогда тело $\bar{Q}=Q/N$ является классическим телом частных области \bar{R} . Рассмотрим следующие три условия на произвольный модуль M над любым кольцом D : (1) M — дистрибутивный модуль; (2) никакой подмодуль модуля M не обладает фактор-модулем, изоморфным модулю $T\oplus T$, где T — простой модуль; (3) для любого конечно-порожденного подмодуля L модуля M верно, что $L/LN(D)$ — дистрибутивный модуль над кольцом $D/N(D)$. Эквивалентность условий (1) и (2) доказана в [3]. Учитывая это, непосредственно проверяется, что условия (1) и (3) тоже эквивалентны. Поэтому нам достаточно доказать, что если $0\neq A$ — произвольный конечно-порожденный правый идеал кольца R , то $\bar{A}=A/AN$ — дистрибутивный \bar{R} -модуль. Так как Q — кольцо главных правых идеалов, то AQ — ненулевой главный правый идеал кольца Q и, следовательно, AQ/AN — ненулевой циклический модуль над телом \bar{Q} . Поэтому \bar{Q} -модули AQ/AN и \bar{Q} изоморфны. Тогда \bar{R} -модуль \bar{A} вкладывается в \bar{R} -модуль \bar{Q} , который по лемме 1.10 дистрибутивен. Поэтому \bar{R} -модуль \bar{A} дистрибутивен и все доказано.

Следствие 2.1. Пусть R — такое кольцо, что фактор-кольцо $R/N(R)$ инвариантно. Тогда равносильны следующие условия:

(а) R — дистрибутивное кольцо с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов;

(б) R — конечное прямое произведение колец $R_i (1\leq i\leq n)$, обладающих цепными артиновыми классическими кольцами частных $Q_i (1\leq i\leq n)$ и содержащих радикалы $N(Q_i)$ колец Q_i , причем все кольца $R_i/N(Q_i)$ являются полунаследственными областями.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 2.1 и следствия 1.2.

Следствие 2.2. Для кольца R равносильны следующие условия:

(а) R — дистрибутивное кольцо с условиями максимальности для правых и левых аннуляторов, причем $R/N(R)$ — нетерово кольцо;

(б) R — конечное прямое произведение колец $R_i (1\leq i\leq n)$, обладающих цепными артиновыми классическими кольцами частных $Q_i (1\leq i\leq n)$ и содержащих радикалы $N(Q_i)$ колец Q_i , причем

все кольца $R_i/N(Q_i)$ являются инвариантными наследственными нетеровыми областями.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 2.1 и полученного в [6] полного описания дистрибутивных нетеровых колец.

Следствие 2.3. Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда равносильны следующие условия: †

(а) R — дистрибутивное кольцо с условием максимальности для иннуляторов;

(б) R — конечное прямое произведение колец $R_i (1 \leq i \leq n)$, обладающих цепными артиновыми кольцами частных $Q_i (2 \leq i \leq n)$ и содержащих радикалы $N(Q_i)$, причем все $R_i/N(Q_i)$ — прюферовы области. †

Доказательство. Утверждение следует из следствия 2.1.

§ 3. Дистрибутивные кольца, конечно-порожденные над центром

Лемма 3.1. Пусть A — модуль над кольцом R ; D — центр кольца R . Тогда:

(а) дистрибутивность модуля A_R равносильна тому, что для любого максимального идеала m кольца D модуль A_m является дистрибутивным модулем над кольцом R_m .

(б) если кольцо R является конечно-порожденным D -модулем, то дистрибутивность модуля A_R равносильна тому, что для любого максимального идеала m кольца D модуль A_m является дистрибутивным модулем Безу над кольцом R_m .

Доказательство. Пункт (а) доказывается точно так же, как и в случае коммутативного кольца R [19]. Так как для любого максимального идеала m кольца D в случае, когда R_D конечно-порожденный модуль, кольцо R_m^* полулокально, то пункт (б) вытекает из пункта (а) и того, что дистрибутивный модуль над полулокальным кольцом является модулем Безу [5].

Теорема 3.1. Пусть R — кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром D . Тогда правая дистрибутивность кольца R равносильна тому, что для любого максимального идеала m кольца D кольцо R_m является самобазисным полулокальным правым кольцом Безу.

Доказательство. Так как для любого максимального идеала m кольца D кольцо R_m полулокально, то утверждение вытекает из леммы 3.1 (б) и того, что правая дистрибутивность полулокального кольца равносильна тому, что это кольцо является самобазисным правым кольцом Безу.

Лемма 3.2. Для кольца R равносильны следующие условия:

(а) R —дистрибутивное справа антисингулярное справа полулокальное кольцо;

(б) R —антисингулярное справа самоазисное правое кольцо Безу;

(в) R —конечное прямое произведение самоазисных правых областей Безу.

Доказательство. Эквивалентность условий (а), (б) вытекает из результатов работы [5]. Импликация (в) \Rightarrow (б) тривиальна. Докажем импликацию (б) \Rightarrow (в). По лемме 8 (а) из [5] дистрибутивное справа полулокальное кольцо R конечномерно справа. Тогда дистрибутивное справа антисингулярное справа конечномерное справа кольцо R обязано быть конечным прямым произведением дистрибутивных справа областей [8]. Теперь пользуемся тем, что условия (а) и (б) равносильны.

Теорема 3.2. Пусть R —полупервичное кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром D . Тогда правая дистрибутивность кольца R равносильна тому, что для любого максимального идеала m кольца D кольцо R_m является конечным прямым произведением самоазисных полулокальных областей Безу.

Доказательство. По теореме 3.1, леммам 3.2 и 1.11 (а) утверждение можно считать доказанным. Следует только учесть, что область Ope , являющаяся правой областью Безу, обязана быть и левой областью Безу (этот результат получен из предложения 1.3 § 1.1 [1]).

Следствие 3.1. Правая дистрибутивность полупервичного кольца, являющегося конечно-порожденным модулем над своим центром, эквивалентна его левой дистрибутивности.

Лемма 3.3. Пусть R —дистрибутивное справа кольцо, не содержащее бесконечного множества ортогональных идемпотентов, причем $r(a)$ —конечно-порожденный правый идеал для любого $a \in R$. Тогда:

(а) если R —антисингулярное справа кольцо, то R —конечное прямое произведение областей;

(б) если R —полупервичное кольцо с полиномиальным тождеством, то R —конечное прямое произведение дистрибутивных справа областей Ope .

Доказательство. Можно считать, что R —неразложимое кольцо, являющееся по леммам 1.5 и 1.11 (б) редуцированным кольцом. По леммам 1.7 и 1.1 (д) кольцо R является риккартовым справа кольцом. Так как дистрибутивное справа кольцо нормально [2], то из неразложимости R вытекает, что кольцо R не содержит нетривиальных идемпотентов. Тогда R —область, поскольку если $a \in R$, $r(a) \neq 0$, то $r(a) = eR$, $0 \neq e = e^2 \in R$. В случае,

когда R —кольцо с полиномиальным тождеством, R —область Оре по лемме 1.11 (а). \square

Предложение 3.1. Пусть R —полупервичное дистрибутивное справа кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром, причем $r(a)$ —конечно-порожденный правый идеал для любого $a \in R$ и кольцо R не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов. Тогда $R = R_1 \times \dots \times R_n$, где все R_i —полунаследственные области Оре с центрами D_i , являющиеся максимальными D_i -порядками, а все D_i —прюферовы области.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3.6 (б), следствия 3.1 и теоремы 1.3.

Замечание 3.1. Пусть R —регулярное по фон Нейману кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром. Тогда дистрибутивность R -модуля A равносильна тому, что для любого максимального идеала m центра D кольца R модуль A_m является конечной прямой суммой попарно не изоморфных простых R_m -модулей.

Доказательство. Так как все кольца R_m полулокальны и регулярны и являются поэтому полупростыми артиновыми кольцами, то утверждение вытекает из леммы 3.1 и того, что дистрибутивность модуля над полупростым артиновым кольцом эквивалентна, как легко видеть, его разложению в конечную прямую сумму попарно не изоморфных простых модулей.

Замечание 3.2. Пусть R_R —нетеров модуль над кольцом R , являющимся конечно-порожденным модулем над своим центром D . Тогда дистрибутивность модуля A_R равносильна тому, что для любого максимального идеала m кольца D модуль A_m является дистрибутивным R_m -модулем, все подмодули которого являются циклическими R_m -модулями.

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 3.1 (б) и нетеровости всех R_m -модулей A_m .

Автор благодарен А. В. Михалеву за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коп П. Свободные кольца и их связи.— М.: Мир, 1975.
2. Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive —Proc. London Math. Soc., 1974, v. 28, № 2, p. 291—310.
3. Camillo V. Distributive modules.— J. Algebra, 1975, v. 36, № 1, p. 16—25.
4. Brungs H. H. Rings with a distributive lattice of right ideals.— J. Algebra, 1976, v. 40, № 2, p. 392—400.
5. Туганбаев А. А. Кольца, над которыми каждый модуль является

- прямой суммой дистрибутивных модулей.—Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., 1980, № 1, с. 61—64.
6. Туганбаев А. А. Дистрибутивные нётеровы кольца.—Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., 1980, № 2, с. 30—35.
 7. Туганбаев А. А. Дистрибутивные модули.—Успехи мат. наук, 1980, т. 35, № 5, с. 245—246.
 8. Туганбаев А. А. Целозамкнутые кольца.—Мат. сб., 1981, т. 115, № 4, с. 544—559.
 9. Туганбаев А. А. Целозамкнутые нётеровы кольца.—Успехи мат. наук., 1981, т. 36, № 5, с. 195—196.
 10. Stenström B. Rings of quotients.—Berlin e. a.: Springer, 1975.
 11. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра.—М.: Мир, 1971.—707 с.
 12. Hirano Y., Hongan M., Ohori M. On right p. p.-rings.—Math. J. Okayama Univ., 1982, v. 24, № 2, p. 99—109.
 13. Hinohara Y. Note on noncommutative local rings.—Nagoya Math. J., 1969, v. 17, p. 161—166.
 14. Hattori A. A foundation of torsion theory for modules over general rings.—Nagoya Math. J., 1950, v. 17, p. 147—158.
 15. Behrens E.—A Ring theory.—New York: Academic Press, 1972.
 16. Jondrup S. P. P.-rings and finitely generated flat ideals.—Proc. Amer. Math. Soc., 1971, v. 28, N 2, p. 431—435.
 17. Miller D. D. Semiheditary prime algebras.—Commun. Algebra, 1979, v. 7, № 9, p. 885—940.
 18. Shock R. C. The ring of endomorphisms of finitedimensional module.—Israel J. Math., 1972, v. 11, № 3, p. 309—314.
 19. Albu T., Năstăsescu C. Modules arithmétiques.—Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1974, v. 25, № 3—4, p. 299—311.
-

СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КАК ПРЯМЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Л. Б. Хают

Сепарабельные абелевы группы играют, как известно, важную роль в теории абелевых групп. Однако строение сепарабельных групп без кручения изучено еще недостаточно. Как отмечает Л. Фукс в [1, с. 142], до сих пор не известно удовлетворительного структурного описания таких групп (см. также [1, проблема 77]). В частности, нет даже критерия, с помощью которого в классе несчетных сепарабельных групп без кручения можно было бы выделить подкласс вполне разложимых групп. (В счетном случае каждая сепарабельная группа без кручения является, как известно, вполне разложимой.)

В данной работе изучается строение множества всех прямых слагаемых конечного ранга сепарабельной группы без кручения. Этот подход к изучению сепарабельных групп основан на следующем замечании. Если A — произвольная абелева группа без кручения, а $S_A = \{A_i\}_{i \in I}$ — множество всех ее прямых слагаемых конечного ранга, то частичный порядок (отношение включения) на множестве S индуцирует частичный порядок на индексном множестве I . Система групп и гомоморфизмов $\mathbf{A} = \{A_i (i \in I); \pi_{ij}\}$, где $\pi_{ij} : A_i \rightarrow A_j$ — естественное вложение подгруппы A_i в группу A_j при $i \leq j$, оказывается «близкой» к прямому спектру и называется каноническим предспектром группы A .

Свойства канонического предспектра позволяют выделить в классе всех групп без кручения подкласс сепарабельных групп (следствие 1.3).

Предложение 2.4 устанавливает критерий, с помощью которого в классе несчетных сепарабельных групп выделяется подкласс вполне разложимых групп.

Условия, при которых прямой предел прямого спектра вполне разложимых групп без кручения конечного ранга является сепарабельной группой, получены в предложении 3.1 и следствии 3.5. Теоремы 1 и 2 из [2] являются следствиями указанных результатов.

В последующем все группы предполагаются абелевыми, без кручения, а используемые ниже термины и обозначения в основном те же, что и в [1 и 3].

§ 1. Канонический прямой спектр сепарабельной группы

Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество групп; I — частично упорядоченное множество и для всех $i, j \in I$ при $i \leq j$ заданы гомоморфизмы $\pi_{ij}: A_i \rightarrow A_j$.

Определение 1.1. Система групп и гомоморфизмов $\{A_i (i \in I); \pi_{ij}\}$ называется предспектром, если выполнены следующие условия:

1. π_{ii} — тождественный гомоморфизм для всех $i \in I$;
2. $\pi_{jk}\pi_{ij} = \pi_{ik}$ при $i \leq j \leq k$.

Таким образом, предспектр отличается от прямого спектра лишь тем, что индексное множество I не обязано быть направленным.

Определение 1.2. Пусть $\mathbf{A} = \{A_i (i \in I); \pi_{ij}\}$ — прямой спектр. Если $I' \subseteq I$ и I' — направленное множество, то систему $\mathbf{A}' = \{A_i (i \in I'); \pi_{ij}\}$ будем называть подспектром прямого спектра \mathbf{A} .

Определение 1.3. Прямой спектр $\{A_i (i \in I); \pi_{ij}\}$ будем называть *CDF*-спектром, если все группы A_i — вполне разложимые конечного ранга.

Пусть далее A — группа без кручения; $S_A = \{A_i\}_{i \in I}$ — множество всех ее прямых слагаемых конечного ранга; \leq — частичный порядок на множестве I , заданный условием $i \leq j \iff A_i \subseteq A_j$; $\pi_{ij}: A_i \rightarrow A_j$ — естественное вложение подгруппы A_i в группу A_j при $i \leq j$ и $\mathbf{A} = \{A_i (i \in I); \pi_{ij}\}$. Легко проверить, что \mathbf{A} является предспектром. Будем называть этот предспектр каноническим предспектром группы A .

Предложение 1.1. Если группа A сепарабельна, то ее канонический предспектр \mathbf{A} является прямым *CDF*-спектром, а $\lim \mathbf{A} \cong A$.

Доказательство. Пусть A — сепарабельная группа. Тогда все группы A_i из S_A являются, очевидно, вполне разложимыми. Покажем, что канонический предспектр \mathbf{A} является прямым спектром, то есть что множество I является направленным. Действительно, пусть A_i и A_j — любые группы из S_A . Выберем в каждой из них максимальную линейно независимую подсистему и вложим объединение этих подсистем в некоторое вполне разложимое прямое слагаемое A_k группы A . В силу конечности рангов групп A_i и A_j можно считать, что ранг группы A_k также конечен, то есть $A_k \in S_A$. А так как A_k сервантна в A , то $A_i \subseteq A_k$ и

$A_j \subseteq A_k$, то есть $i \leq k$ и $j \leq k$. Таким образом, система A является прямым CDF-спектром.

Пусть теперь $\bar{A} = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — внешняя прямая сумма групп A_i ; B — подгруппа группы \bar{A} , порожденная всеми элементами вида $a_i - \pi_{ij}(a_i)$ при $i \leq j$ [элемент a_i отождествляется с вектором $(\dots, 0, a_i, 0, \dots)$ из \bar{A}] и $A_* = \bar{A}/B$, то есть $A_* = \varinjlim A$.

Пусть далее для каждого $i \in I$ σ_i — естественное вложение группы A_i в группу A , а π_i — канонический гомоморфизм прямого спектра A , то есть $\pi_i: A_i \rightarrow A_*$ по формуле $\pi_i(a_i) = a_i + B$ и при этом коммутативны все диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\pi_{ij}} & A_j \\ \pi_i \downarrow & \swarrow & \searrow \pi_j \\ A_* & & \end{array} \quad (i \leq j).$$

По свойству б) [3, с. 69] такие гомоморфизмы π_i существуют. Зададим теперь гомоморфизм $\rho: A \rightarrow A_*$ формулой $\rho(a) = \pi_i(a)$, рассматривая a как элемент некоторого прямого слагаемого A_i группы A (это возможно, так как A сепарабельна). Заметим, что гомоморфизм ρ определен корректно. Действительно, если A_j — другое прямое слагаемое группы A , содержащее a , то существует такой индекс $k \in I$, что $k \geq i$ и $k \geq j$, то есть A_i и A_j содержатся в A_k . Тогда коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\pi_{ik}} & A_k \\ \pi_i \downarrow & \swarrow & \searrow \pi_k \\ A_* & & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\pi_{jk}} & A_k \\ \pi_j \downarrow & \swarrow & \searrow \pi_k \\ A_* & & \end{array}$$

Значит, $\pi_i(a) = \pi_k \pi_{ik}(a)$ и $\pi_j(a) = \pi_k \pi_{jk}(a)$. А так как π_{ik} и π_{jk} — естественные вложения подгрупп A_i и A_j в группу A_k , то $\pi_{ik}(a) = \pi_{jk}(a)$, то есть $\pi_i(a) = \pi_j(a)$, следовательно, элемент $\rho(a)$ не зависит от выбора прямого слагаемого A_i .

Рассмотрим теперь диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & A_i & \\ \sigma_i \swarrow & | & \pi_i \searrow \\ A & \xrightarrow{\rho} & A_* \end{array} \quad (i \in I). \quad (1.1)$$

Они коммутативны для всех $i \in I$ по выбору гомоморфизмов σ_i , π_i и ρ . С другой стороны, по построению гомоморфизмов π_{ij} и σ_i коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_{ij} & \\
 A_i & \rightarrow & A_j \quad (i \leq j). \\
 & \searrow & \downarrow \sigma_j \\
 \sigma_i & & A
 \end{array}$$

Значит, по [3, теорема 11.1] существует единственный гомоморфизм $\sigma: A_* \rightarrow A$, для которого коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 A_i & & \\
 \pi_i \downarrow & \searrow \sigma_i & \\
 A_* & \rightarrow & A \quad (i \in I).
 \end{array} \quad (1.2)$$

При этом σ действует следующим образом: если $a_* \in A_*$, то по свойству в) [3, с. 69] $a_* = a_i + B$, где $a_i \in A_i$ для некоторого $i \in I$, и тогда $\sigma(a_*) = \sigma_i(a_i)$.

Из коммутативности диаграмм (1.1) и (1.2) следует, что коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & A_i & \\
 \sigma_i \swarrow & & \searrow \sigma_i \\
 & \rho & \sigma \\
 A & \rightarrow & A_* \rightarrow A \quad (i \in I).
 \end{array}$$

А так как подгруппы $\text{Im } \sigma_i$ покрывают группу A , а подгруппы $\text{Im } \pi_i$ покрывают группу A_* , то ρ и σ взаимно обратны, то есть $A \cong A_*$. Предложение доказано.

Определение 1.4. Канонический предспектр \mathbf{A} сепарабельной группы A будем называть каноническим прямым спектром этой группы.

Предложение 1.2. Если канонический предспектр \mathbf{A} группы A является прямым CDF-спектром, то $\lim_{\rightarrow} \mathbf{A}$ — сепарабельная группа.

Доказательство. Обозначим через A' подгруппу группы A , порожденную всеми A_i из S_A , и пусть $S_{A'} = \{A_i\}_{i \in I'}$ — множество всех прямых слагаемых конечного ранга группы A' . Тогда, в силу свойства б) [3, с. 50], каждая группа из S_A является прямым слагаемым группы A' . Значит, $S_A \subseteq S_{A'}$ и $I \subseteq I'$.

Покажем, что группа A' сепарабельна. Действительно, если $g \in A'$, то $g = \sum_{k=1}^m a_k$, где $a_k \in A_{i_k}$; $A_{i_k} \in S_A$, $k=1, 2, \dots, m$. Поскольку

\mathbf{A} — прямой спектр, то I — направленное множество, то есть существует такой индекс $i \in I$, что $i \geq i_k$ для каждого $k=1, 2, \dots, m$. Тогда из определения порядка на множестве I следует, что

$A_{i,k} \subseteq A_i$, где A_i — вполне разложимое прямое слагаемое группы A' . Применяя индукцию, получим, что любое конечное множество элементов g_1, g_2, \dots, g_n из A' можно вложить в некоторое вполне разложимое прямое слагаемое конечного ранга группы A' . Таким образом, A' сепарабельна.

Обозначим теперь через A' канонический прямой спектр группы A' . Ясно, что A является подспектром в A' . Покажем, что A' конфинален A . Пусть A_i — группа из $S_{A'} \setminus S_A$. Тогда ее можно вложить указанным выше способом в некоторое вполне разложимое прямое слагаемое конечного ранга A_k группы A , то есть для каждого $i \in I'$ существует такой индекс $k \in I$, что $k \geq i$. Значит, A' конфинален A и по свойству 3) [3, с. 70] $\varinjlim A' \cong \varinjlim A$. Но по предложению 1.1 $\varinjlim A' \cong A'$. Следовательно, $\varinjlim A$ — сепарабельная группа, что и требовалось доказать.

→ Следствие 1.3. Группа A сепарабельна тогда и только тогда, когда ее канонический предспектр A является прямым CDF -спектром и $\varinjlim A \cong A$.

— Замечание 1.4. Приведем пример такой группы A , для которой выполнены условия предложения 1.2, но $\varinjlim A$ не изоморфен A . Пусть $A = \prod_{a \in \mathbb{N}} R_a$, где R_a — редуцированные рациональные группы одного и того же неидемпотентного типа t . Тогда, с одной стороны, по [1, теорема 96.6] группа не является сепарабельной. С другой стороны, если C — прямое слагаемое конечного ранга группы A , то C — узкая группа и по [1, следствие 94.7] изоморфна некоторому прямому слагаемому прямой суммы конечного числа групп R_a , то есть C является однородной вполне разложимой группой типа t . Следовательно, множество S_A состоит только из вполне разложимых групп. Кроме того, легко проверить, что $\langle S_A \rangle = A(t)$. Из доказательства [1, предложение 87.4] следует, что каждый элемент из $A(t)$ можно вложить в некоторое вполне разложимое прямое слагаемое конечного ранга группы A . Значит, если $A' = \langle S_A \rangle$, то $S_{A'} \subseteq S_A$. А так как включение $S_A \subseteq S_{A'}$ также выполнено (см. доказательство предложения 1.2), то в рассматриваемом случае имеем $S_A = S_{A'}$, следовательно, I — направленное множество. Таким образом, канонический предспектр A группы A является прямым CDF -спектром, но $\varinjlim A$ не изоморфен A .

§ 2. Строение множества всех прямых слагаемых конечного ранга вполне разложимой группы без кручения

Пусть A — сепарабельная группа; $S_A = \{A_i\}_{i \in I}$ — множество всех ее прямых слагаемых конечного ранга. В этом параграфе множество S_A будем рассматривать как частично упорядоченное (отношением включения) множество. В случае, когда A — однородная сепарабельная, система $\langle S_A, \subseteq \rangle$ является решеткой. Действительно, если B и C принадлежат S_A , то по [1, предложение 87.2] подгруппы $B \cap C$ и $\langle B + C \rangle_*$ также принадлежат S_A и, очевидно, $\inf \{B, C\} = B \cap C$, а $\sup \{B, C\} = \langle B + C \rangle_*$. В общем же случае частично упорядоченное множество $\langle S_A, \subseteq \rangle$ решеткой не является. Однако в случае, когда A — вполне разложимая группа, в S_A существует достаточно просто устроенная подрешетка, и этот факт выделяет подкласс вполне разложимых групп в классе всех сепарабельных групп без кручения.

Определение 2.1. Пусть $\langle S, \leq \rangle$ — частично упорядоченное множество. Непустое подмножество L из S будем называть подрешеткой в $\langle S, \leq \rangle$, если частично упорядоченное множество $\langle L, \leq \rangle$ является решеткой.

Примером подрешетки в частично упорядоченном множестве является любая цепь.

В дальнейшем будем считать, что если $\langle S, \leq \rangle$ — частично упорядоченное множество с нулем, то всякая его подрешетка содержит нуль множества S .

Пусть $\langle S, \leq \rangle$ является решеткой. Напомним (см., например [4, § 3]), что подрешетка L из S называется идеалом, если для любых $a \in S$ и $l \in L$ имеем $a \wedge l \in L$. Если H — непустое подмножество из S , то через $[H]$ и (H) будем обозначать соответственно подрешетку и идеал, порожденные подмножеством H в решетке $\langle S, \leq \rangle$.

Лемма 2.1. [4]. Если $\langle S, \leq \rangle$ — решетка, а L и H — непустые подмножества из S , то $L = (H)$ тогда и только тогда, когда L — идеал, $H \subseteq L$ и для любого $l \in L$ существует такое целое число $n \geq 1$ и такие элементы $h_1, h_2, \dots, h_n \in H$, что $l \leq h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_n$.

Следствие 2.2. Если $\langle S, \leq \rangle$ — решетка, то $S = (H)$ тогда и только тогда, когда H — конфинальное подмножество в S .

Доказательство. Вытекает непосредственно из леммы 2.1 и определения конфинального подмножества.

Определение 2.2. Пусть $\langle L, \leq \rangle$ — решетка с нулем, а $\{L_\alpha\}_{\alpha \in m}$ — семейство ее подрешеток. Будем говорить, что L является прямой суммой подрешеток L_α , если:

$$1) L_\alpha \cap \left[\bigcup_{\beta \neq \alpha} L_\beta \right] = 0 \text{ для всех } \alpha \in m;$$

$$2) \left[\bigoplus_{\alpha \in m} U L_{\alpha} \right] = L.$$

Определение 2.3. N -цепью будем называть любую счетную вполне упорядоченную цепь.

Лемма 2.3. Множество S_A всех прямых слагаемых конечно-ранга сепарабельной группы A конфинально N -цепи тогда и только тогда, когда A —счетная группа бесконечного ранга.

Доказательство. 1. Пусть A —счетная сепарабельная группа. Тогда по [1, предложение 87.1], A вполне разложима.

Пусть $A = \bigoplus_{\kappa=1}^{\infty} B_{\kappa}$ —некоторое ее разложение в прямую сумму групп

ранга 1. Положим $L = \{C_k\}_{k \in N}$, где $C_0 = 0$ и $C_k = \bigoplus_{m=1}^{\kappa} B_m$ для всех $k > 0$. Очевидно, что L является N -цепью и L —конфинальная подрешетка из S_A .

2. Пусть S_A конфинально некоторой N -цепи $L = \{C_k\}_{k \in N}$. По свойству б) [1, с. 50] C_k является прямым слагаемым в C_{k+1} для каждого $k \in N$. Пусть $B_1 = C_1$ и при $k > 1$ B_k —некоторое прямое дополнение группы B_{k-1} в группе C_k , то есть $C_k = B_{k-1} \oplus B_k$.

Положим $A' = \bigcup_{\kappa=0}^{\infty} C_{\kappa}$. Тогда, очевидно, $A' = \bigoplus_{\kappa=1}^{\infty} B_{\kappa}$, то есть A' вполне разложима. А так как L —конфинальное подмножество в S_A , то $A \subseteq A'$ и значит, $A = \bigoplus_{\kappa=1}^{\infty} B_{\kappa}$. Лемма доказана.

Предложение 2.4. Сепарабельная группа A бесконечного ранга вполне разложима тогда и только тогда, когда множество S_A всех ее прямых слагаемых конечного ранга конфинально прямой сумме N -цепей.

Доказательство. 1. Пусть группа A вполне разложима и пусть $A = \bigoplus_{\alpha \in m'} B_{\alpha}$, где B_{α} —группы ранга 1. Не умаляя общности,

можно считать, что m' —вполне упорядоченное множество ординалов и $m' = [1, \lambda)$, где λ —первый ординал, удовлетворяющий условию $|A| \leq \lambda$. Обозначим через m множество, содержащее 0 и все предельные ординалы из m' , и для каждого $\alpha \in m$ положим

$\bar{A}_{\alpha} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} B_{\alpha+k}$. Тогда имеем $A = \bigoplus_{\alpha \in m} \bar{A}_{\alpha}$. Обозначим теперь через L_{α}

любую конфинальную N -цепь из $S_{\bar{A}_{\alpha}}$, а через L_A —множество подгрупп из A , каждая из которых порождена конечным числом групп из множества $\bigcup_{\alpha \in m} L_{\alpha}$. Непосредственно проверяется, что

$L_A \subseteq S_A$ и что $\langle L_A, \leq \rangle$ —решетка. Легко проверить также, что

L_A —конфинальное подмножество в S_A , а из равенства $A = \bigoplus_{\alpha \in m} \bar{A}_\alpha$ и определения 2.2 следует, что $L_A = \bigoplus_{\alpha \in m} L_\alpha$.

2. Пусть множество S_A содержит такую конфинальную подрешетку L_A , что $L_A = \bigoplus_{\alpha \in m} L_\alpha$, где L_α — N -цепь из S_A и $L_\alpha = \langle C_{\alpha k} \rangle_{k \in N}$. Положим $\bar{A}_\alpha = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_{\alpha k}$. Ясно, что \bar{A}_α —вполне разложимая группа и что $\sum_{\alpha \in m} \bar{A}_\alpha \subseteq A$. А так как L_A является прямой суммой подрешеток L_α , то $\sum_{\alpha \in m} \bar{A}_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in m} \bar{A}_\alpha$. Наконец, из конфинальности L_A в S_A следует, что $A \subseteq \bigoplus_{\alpha \in m} \bar{A}_\alpha$. Следовательно, A вполне разложима.

Предложение доказано.

Как отмечено выше, в случае, когда A —однородная сепарабельная группа, система $\langle S_A, \leq \rangle$ является решеткой. Будем называть ее канонической решеткой однородной сепарабельной группы A .

Следствие 2.5. Однородная сепарабельная группа A является вполне разложимой тогда и только тогда, когда ее каноническая решетка S_A конфинальна прямой сумме N -цепей.

При этом если $L_A = \bigoplus_{\alpha \in m} L_\alpha$ —указанная конфинальная подрешетка из S_A , то $S_A = (L_A) = \bigoplus_{\alpha \in m} (L_\alpha)$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает непосредственно из предыдущего предложения, а второе — из следствия 2.2 и определения прямой суммы подрешеток.

§ 3. Сепарабельные группы как прямые пределы

Пусть $\mathbf{A} = \{A_i (i \in I); \pi_{ij}\}$ —прямой спектр; $A_* = \varinjlim \mathbf{A}$ и $\pi_i: A_i \rightarrow A_*$ —канонические гомоморфизмы.

Определение 3.1. Прямой спектр \mathbf{A} называется:

- а) точным, если все π_{ij} —мономорфизмы;
- б) чистым, если для всех $i, j \in I$ подгруппа $\pi_{ij}(A_i)$ является прямым слагаемым в группе A_j при $i \leq j$;
- в) однородным типа t , если все группы A_i —однородные, одного и того же типа t .

Предложение 3.1. Если \mathbf{A} —точный чистый CDF -спектр, то $\varinjlim \mathbf{A}$ —сепарабельная группа.

Доказательство. Пусть \mathbf{A} —точный чистый CDF -спектр. Из коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_{ij} & \\
 A_i & \rightarrow & A_j \\
 \pi_i \downarrow & \swarrow & \searrow \pi_j \\
 A_* & &
 \end{array} \quad (i \leq j) \quad (3.1)$$

следует, что $\pi_i(A_i) \subseteq \pi_j(A_j)$ при $i \leq j$. Пусть $A_i' = \pi_i(A_i)$ и $\rho_{ij} : A_i' \rightarrow A_j'$ — естественные вложения. Положим $\mathbf{A}' = \{A_i' (i \in I); \rho_{ij}\}$. Поскольку I — направленное множество, то \mathbf{A}' является прямым спектром. Этот спектр является CDF -спектром, так как из того, что все π_{ij} — мономорфизмы, следует, что все π_i также являются мономорфизмами [3, с. 69, свойство е)], то есть $A_i' \cong A_i$. А так как \mathbf{A} — чистый спектр, то при $i \leq j$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_{ij} & \\
 A_i & \rightarrow & A_j \\
 \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi_j \\
 & \rho_{ij} & \\
 A_i' & \rightarrow & A_j'
 \end{array} \quad (i \leq j).$$

Значит, система гомоморфизмов $\pi = \{\pi_i\}_{i \in I}$ является гомоморфизмом прямых спектров \mathbf{A} и \mathbf{A}' . А так как все π_i — изоморфизмы, то по [3, теорема 11.2] имеем $\lim_{\rightarrow} \mathbf{A} \cong \lim_{\rightarrow} \mathbf{A}'$.

Покажем далее, что A_i' — прямое слагаемое в A_* для каждого $i \in I$. Для этого заметим, что если $\bar{a} \in A_*$, то $\bar{a} = a + B$, где B — подгруппа из $\bigoplus_{i \in I} A_i$, порожденная всеми элементами вида $a_i - \pi_{ij}(a_i)$, а $a \in \bigoplus_{i \in I} A_i$. Пусть $a = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}$, где $a_{i_k} \in A_{i_k}$. Для фиксированного $i \in I$ множество индексов i_1, i_2, \dots, i_n можно разбить на две части, первая из которых содержит все индексы i_s , удовлетворяющие условию $i_s \leq i$, а вторая — все остальные. Допустим для определенности, что $i_1, i_2, \dots, i_r \leq i$, i_{r+1}, \dots, i_n — все остальные. Тогда элемент \bar{a} можно представить в виде $a_i + a_j + B$ для некоторого $j \in I$ и некоторых $a_i \in A_i$ и $a_j \in A_j$ [3, с. 69, свойство в)]. При этом если первое из указанных множество пусто, то $a_i = 0$, а если второе пусто, то $a_j = 0$. Положим теперь $\sigma_i(\bar{a}) = a_i + B$. Из свойств а) и в) [3, с. 69] и чистоты прямого спектра \mathbf{A} следует, что гомоморфизм $\sigma_i : A_* \rightarrow A_i'$ определен корректно. Наконец, через ρ_i обозначим естественное вложение подгруппы A_i' в группу A_* . Тогда коммутативны все диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc}
 & \rho_i & \\
 A_i' & \rightarrow & A_* \\
 \parallel & \swarrow & \searrow \sigma_i \\
 A_i' & &
 \end{array}$$

по [3, предложение 9.2] A_i' — прямое слагаемое в A_* .

Пусть теперь $\mathbf{A}_* = \{A_i' (i \in I_*); \rho_{ij}\}$ — канонический предспектр группы A_* . Покажем, что он является прямым спектром и состоит из вполне разложимых групп. Из доказанного выше следует, что $I \subseteq I_*$. Пусть $i \in I_*$ (то есть A_i' — прямое слагаемое конечного ранга группы A_*) и $\bar{g} \in A_i'$. Тогда $m\bar{g} = m_1\bar{a}_1 + \dots + m_n\bar{a}_n$ для некоторых целых m и m_k , а $\bar{a}_k = a_{i_k} + B$, где $a_{i_k} \in A_{i_k}$, $i_k \in I$. Поскольку I — направленное множество, то существует такой индекс $j \in I$, что $j \geq i_k$ для всех $k=1, 2, \dots, n$, следовательно, смежный класс $m\bar{g}$ можно представить в виде $g' + B$ для некоторого $g' \in A_j$. Тогда $\pi_j(g') = m\bar{g} \in A_i'$ и, в силу сервантности подгруппы A_j' в группе A_* , $\bar{g} \in A_j'$. Таким образом, $A_i' \subseteq A_j'$, то есть I — конфинальное подмножество в I_* . Значит, I_* — направленное множество и, следовательно, \mathbf{A}_* — прямой спектр. Из того, что $A_i' \subseteq A_j'$, а A_i' — прямое слагаемое в A_* получаем, что A_i' — прямое слагаемое в A_j' . А так как $j \in I$, а A' является CDF -спектром, то группа A_i' вполне разложима как прямое слагаемое вполне разложимой группы A_j' . Значит, канонический предспектр \mathbf{A}_* группы A_* является прямым CDF -спектром. Тогда, по предложению 1.6, $\varinjlim \mathbf{A}_*$ — сепарабельная группа. С другой стороны, поскольку прямые спектры \mathbf{A}' и \mathbf{A}_* конфинальны, то имеем $\varinjlim \mathbf{A}_* \varinjlim \mathbf{A}'$. А так как по доказанному выше $\varinjlim \mathbf{A}' \cong \varinjlim \mathbf{A}$, то $\mathbf{A}_* = \varinjlim \mathbf{A} \cong \varinjlim \mathbf{A}_*$. Значит, \mathbf{A}_* — сепарабельная группа, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь для произвольного прямого спектра \mathbf{A} диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Ker } \pi_i & \rightarrow & A_i & \rightarrow & \bar{A}_i \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\pi}_{ij} & & \downarrow \pi_{ij} & & \downarrow \bar{\pi}_{ij} \\ 0 & \rightarrow & \text{Ker } \pi_j & \rightarrow & A_j & \rightarrow & \bar{A}_j \rightarrow 0, \end{array}$$

где $\bar{A}_i = A_i / \text{Ker } \pi_i$. Ее можно достроить до коммутативной гомоморфизмами $\bar{\pi}_{ij}$ и π_{ij} , где $\bar{\pi}_{ij}: \bar{A}_i \rightarrow \bar{A}_j$ по формуле $\bar{\pi}_{ij}(a_i + \text{Ker } \pi_i) = \pi_{ij}(a_i) + \text{Ker } \pi_j$, а $\bar{\pi}_{ij}$ — ограничение гомоморфизма π_{ij} на подгруппу $\text{Ker } \pi_i$. Определение гомоморфизма $\bar{\pi}_{ij}$ корректно, поскольку из коммутативности диаграмм (3.1) следует, что выполнено включение $\pi_{ij}(\text{Ker } \pi_i) \subseteq \text{Ker } \pi_j$. Непосредственно проверяется, что система групп и гомоморфизмов $\bar{\mathbf{A}} = \{\bar{A}_i (i \in I); \bar{\pi}_{ij}\}$ является прямым спектром. Этот спектр назван в [2] ассоциированным с \mathbf{A} .

Лемма 3.2. [2] Если $\bar{\mathbf{A}}$ — прямой спектр, ассоциированный с \mathbf{A} , то $\varinjlim \bar{\mathbf{A}} \cong \varinjlim \mathbf{A}$.

Лемма 3.3. Для любого прямого спектра \mathbf{A} ассоциированный с ним прямой спектр $\bar{\mathbf{A}}$ является точным.

Доказательство. Пусть $\bar{a}_i = a_i + \text{Ker } \pi_i \in A_i$ и $\bar{a}_i \neq 0$, то есть $a_i \notin \text{Ker } \pi_i$. Допустим, что $\bar{\pi}_{ij}(\bar{a}_i) = 0$. Так как $\bar{\pi}_{ij}(\bar{a}_i) = \pi_{ij}(a_i) + \text{Ker } \pi_j$, то $\pi_{ij}(a_i) \in \text{Ker } \pi_j$, то есть $\pi_j \pi_{ij}(a_i) = 0$. Но из коммутативности диаграмм (3) следует, что $\pi_i(a_i) = \pi_j \pi_{ij}(a_i)$. Значит, $\pi_i(a_i) = 0$, то есть $a_i \in \text{Ker } \pi_i$ вопреки предположению. Лемма доказана.

Лемма 3.4. Если \mathbf{A} — чистый CDF -спектр, то ассоциированный с \mathbf{A} прямой спектр $\bar{\mathbf{A}}$ также является чистым CDF -спектром.

Доказательство. По свойству б) [3, с. 69] для всех $i \leq j$ выполняется включение $\text{Ker } \pi_i \subseteq \text{Ker } \pi_j$, а по свойству д) для каждого $i \in I$ существует такой индекс $j \in I$, $j \geq i$, что $\text{Ker } \pi_i \subseteq \text{Ker } \pi_j$. Значит, для каждого $i \in I$ существует такой индекс $j \geq i$, что $A_i / \text{Ker } \pi_i = A_j / \text{Ker } \pi_j$. Но $A_j / \text{Ker } \pi_j \cong \pi_j(A_j)$, а $\pi_j(A_j)$ — прямое слагаемое в A_j и, следовательно, вполне разложимая группа конечного ранга. Таким образом, $\bar{\mathbf{A}}$ является CDF -спектром. Чтобы доказать, что этот прямой спектр является чистым, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \pi_{ij}(A_i) & \xrightarrow{\sigma_{ij}} & A_j \\ \cdot \downarrow \pi_{ij}' & \swarrow \pi_{ij}' \pi_j & \downarrow \pi_j \\ & & \pi_i(A_i) \xrightarrow{\rho_{ij}} \pi_j(A_j) \end{array}$$

в которой σ_{ij} и ρ_{ij} — естественные вложения, а π_{ij}' — ограничение гомоморфизма π_j на прямое слагаемое $\pi_{ij}(A_i)$ группы A_j [определение π_{ij}' корректно, поскольку $\pi_j \pi_{ij}(A_i) = \pi_i(A_i)$ в силу коммутативности диаграмм (3.1)]. Положим $\pi_i = \pi_{ij}' \delta_{ij}$, где $\delta_{ij}: A_j \rightarrow \pi_{ij}(A_i)$ — проекция. Легко проверить, что верхний треугольник в этой диаграмме коммутативен, то есть по [3, предложение 9.2] подгруппа $\pi_i(A_i)$ — прямое слагаемое в $\pi_i(A_j)$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.5. Если \mathbf{A} — чистый CDF -спектр, то группа $\varinjlim \mathbf{A}$ является сепарабельной, а ассоциированный с \mathbf{A} прямой спектр $\bar{\mathbf{A}}$ изоморфен некоторому конфинальному подспектру канонического прямого спектра этой группы.

Доказательство. Из лемм 3.3 и 3.4 следует, что $\bar{\mathbf{A}}$ является точным чистым CDF -спектром. По предложению 3.1 получаем, что группа $\varinjlim \bar{\mathbf{A}}$ сепарабельна. Лемма 3.2 завершает доказательство первой части следствия. Вторая часть следствия

вытекает непосредственно из доказательства предложения 3.1 и предыдущих замечаний об \bar{A} .

В дальнейшем будем считать, что если $A = \{A_i (i \in I); \pi_{ij}\}$ — прямой спектр, то I — частично упорядоченное множество с нулевым элементом. Прямой спектр A будем называть N -цепью, если I является N -цепью. Будем также говорить, что прямой спектр A является прямой суммой своих подспектров $A_\alpha = \{A_i (i \in I_\alpha); \pi_{ij}\}$ $\alpha \in m$, если для каждого $\alpha \in m$ I_α — подрешетка в I и $I = \bigoplus_{\alpha \in m} I_\alpha$.

Следствие 3.6. Если A — чистый CDF -спектр, то группа $\lim_{\rightarrow} A$ является вполне разложимой тогда и только тогда, когда ассоциированный с A прямой спектр \bar{A} конфинален прямой сумме N -цепей.

Доказательство. Вытекает непосредственно из следствия 3.5 и предложения 2.4. Применяя полученные результаты к однородным CDF -спектрам, получаем следующие утверждения.

Следствие 3.7. Если \bar{A} — однородный типа t чистый CDF -спектр, то $\lim_{\rightarrow} A$ — однородная (того же типа t) сепарабельная группа. Если при этом \bar{A} конфинален прямой сумме N -цепей, то группа $\lim_{\rightarrow} A$ является вполне разложимой.

Теорема 2 из [2] получается из этого следствия в случае, когда t — нулевой тип, а множество индексов I является N -цепью. При этих же условиях из предложения 3.2 вытекает теорема 1 из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977, т. 2. — 416 с.
 2. Manley P. L. Direct limits of free abelian groups with finite rank. — Indian J. Math., 1977, v. 19, № 2, p. 99—101.
 3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974, т. 1. — 335 с.
 4. Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982. — 452 с.
-

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, БЛИЗКИХ К КВАЗИСЕРВАНТНО ИНЪЕКТИВНЫМ

А. Р. Чехлов

Одной из интересных задач современной теории абелевых групп является изучение классов групп, достаточно «богатых» эндоморфизмами. К таким классам групп можно отнести классы сервантно инъективных групп, квазисервантно инъективных групп, вполне транзитивных групп без кручения и др. Этим классам групп посвящен ряд работ, опубликованных в последнее время [1, § 5, 7].

Естественным расширением понятия сервантно инъективных групп являются квазисервантно инъективные группы (QPI -группы), т. е. такие группы A , что всякий гомоморфизм любой сервантной подгруппы группы A в саму группу продолжается до эндоморфизма группы A .

Исследование квазисервантно инъективных групп явилось важным вкладом в теорию абелевых групп. Оно дало новые интересные факты о строении довольно широких, но ранее малоизученных классов групп. В этой связи представляется целесообразным изучать классы групп, близкие к квазисервантно инъективным группам.

Все группы в данной статье предполагаются абелевыми без кручения.

Группу A назовем CS -группой, если любая ее замкнутая в Z -адической топологии сервантная подгруппа выделяется в A прямым слагаемым.

В работе рассматриваются CS -группы A , в которых каждый гомоморфизм объединения счетной возрастающей цепи прямых слагаемых группы A в саму группу продолжается до эндоморфизма группы A . Здесь такие группы называются QCS -группами.

Результаты работы показывают тесную связь QCS -групп и QPI -групп. Наряду с алгебраически компактными QCS -группами являются группы из некоторых классов QPI -групп. Охарактеризованные в работе [2] группы, в которых сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми, также входят в класс QCS -групп.

CS-группы и близкие к ним классы групп рассматривались в работе [3].

В дальнейшем R_p будет обозначать класс групп без элементов бесконечной p -высоты. Через $\tau(A)$ ($\tau_m(A)$) обозначим множество всех различных (максимальных) p -типов (см. § 1) элементов группы $A \in R_p$.

Пусть R — класс всех редуцированных групп A таких, что либо $A \in R_p$ для некоторого простого числа p и множество $\tau_m(A)$ непусто, либо $A \notin R_p$ для каждого p , но $\tau_m(A/p^\infty A) \neq \emptyset$ для всех простых p со свойством $pA \neq A$.

Класс R достаточно широк. Все редуцированные сервантно инъективные группы принадлежат этому классу. Вполне транзитивные группы из R_p , у которых в множестве всех различных типов ненулевых элементов данной группы существуют максимальные типы, а также редуцированные группы конечного ранга, входят в R . Все QCS-группы, разложимые в прямые суммы групп из R , сами принадлежат классу R .

Ниже приводятся некоторые результаты из [3], касающиеся CS-групп, а также характеризуются QCS-группы из класса R .

В дальнейшем все рассуждения топологического характера будут касаться Z -адической топологии; G^- — замыкание подгруппы G группы A ; $\Pi(A)$ — множество всех простых чисел p таких, что $pA \neq A$; $\langle G \rangle_*$ — сервантная подгруппа группы A , порожденная некоторым множеством G элементов группы A ; $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A ; $r(A)$, $r_p(A)$ — соответственно ранг; p — ранг группы A ; $\chi_A(a)$, $h_p^A(a)$ — соответственно характеристика, p — высота элемента a в группе A , индекс A иногда будет опускаться.

Группа A называется вполне транзитивной, если для любых ее элементов a, b , таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$, существует $\varphi \in E(A)$ со свойством $\varphi(a) = b$. Через H_0 обозначим счетное кардинальное число.

§ 1. CS-группы

Обозначим через J_p группу целых p -адических чисел. Напомним понятие p -характеристики элемента $a \in A \in R_p$, введенное в работе [4].

Если $J_p \ni \xi = r_0 + r_1 p + \dots$, то через $s_n(\xi)$ будем обозначать n -ю частичную сумму числа ξ . Если a_1, a_2, \dots — последовательность элементов группы $A \in R_p$, сходящаяся в p -адической топологии группы A к некоторому элементу $b \in A$, то будем писать $b = \lim_A \{a_n\}$. На каждой группе $A \in R_p$ определим частичную операцию умножения на целые p -адические числа: если $\xi \in J_p$, $a \in A$ и существует $b \in A$ такой, что $b = \lim_A \{s_n(\xi) a\}$, то положим

$\xi * a = b$. Множество $H_A(a) = \{\xi \mid \xi \in J_p \text{ и } \xi * a \text{ определено}\}$ будем называть p -характеристикой элемента a в группе A .

Будем говорить, что две p -характеристики H_1 и H_2 квазиравны, если существуют натуральные числа n, m такие, что $nH_1 \subseteq H_2$ и $mH_2 \subseteq H_1$. Запись $H_1 \leq H_2$ ($H_1 \geq H_2$) означает, что $nH_1 \subseteq H_2$ ($nH_2 \subseteq H_1$) для некоторого натурального n . Квазиравенство определяет в множестве всех p -характеристик отношение эквивалентности. Класс эквивалентности в этом множестве будем называть p -типом. Если $H_A(a)$ принадлежит p -типу T , будем писать $T_A(a) = T$ или, для простоты, $T(a) = T$. Запись $T_1 \geq T_2$ ($T_1 \leq T_2$) означает, что существуют p -характеристики H_1, H_2 , принадлежащие p -типам T_1, T_2 такие, что $H_1 \geq H_2$ ($H_1 \leq H_2$). Если $H_1 \in T_1, H_2 \in T_2$ и $H_2 \geq H_1, H_2 \not\leq H_1$, то будем писать $T_1 < T_2$.

Ниже сформулируем утверждения, доказанные в [3] и касающиеся CS -групп. Некоторые из этих результатов являются следствием соответствующих утверждений о более широких классах групп. Эти результаты будут использованы в следующем параграфе.

Лемма 1.1. 1) прямое слагаемое CS -группы является CS -группой;

2) группа A является CS -группой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть есть CS -группа.

Доказательство. 1) Пусть A — CS -группа и $A = B \oplus G$. Если H — замкнутая сервантная подгруппа группы B , то так как A — группа без кручения, $H \oplus G^1$ — замкнутая сервантная подгруппа группы A , где $G^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nG$. Следовательно, $A = H \oplus G^1 \oplus E$

для некоторой подгруппы $E \subset A$. Отсюда $B = H \oplus (G^1 \oplus E) \cap B$.

2) Необходимость следует из 1). Достаточность. Пусть $A = D \oplus R$ — CS -группа, где D — ее делимая часть. Если теперь H — замкнутая сервантная подгруппа группы A , то $D \subseteq H$ и $H = D \oplus R \cap H$, где $R \cap H$ — замкнутая сервантная подгруппа группы R . Отсюда $R = R \cap H \oplus B$ для некоторой подгруппы $B \subset R$ и, значит, $A = (D \oplus R \cap H) \oplus B$.

Лемма 1.2. Связная группа $A \in R$ тогда и только тогда, когда все ее эндоморфизмы являются целыми кратными автоморфизмов.

Доказательство. Заметим, что если $A \in R_p, n = h_p^A(a) \leq h_p^A(b), H_A(a) \not\leq H_A(b)$, то поскольку $p^{-n}a$ является образующим группы A [4, доказательство теоремы 3, п. в) $\Rightarrow a$], существует $\varphi \in E(A)$ со свойством $\varphi(p^{-n}a) = p^{-n}b$ [4, лемма 7] и, следовательно, $\varphi(a) = b$. Так как A — связная группа, то $r_p(A) \leq 1$ для каждого простого числа p . Пусть теперь $T \in \tau_m(A)$. Тогда $A(T) =$

$=\{b | b \in A, T_A(b) \geq T\}$ — минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа группы A . Существование такой подгруппы в A заканчивает доказательство необходимости [5, доказательство импликации 1) \Rightarrow 2) теоремы 1].

Достаточность. Так как эндоморфизмы группы A есть целые кратные автоморфизмов, то по теореме 1 из [5] в A существует минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа $G \neq 0$. В силу сказанного выше $T_A(g) \in \tau_m(A)$ для любого $0 \neq g \in G$.

Группу $A \in R_p$ будем называть p -однородной, если $T_A(a) = T_A(b)$ для любых ее элементов a, b .

Следствие 1.1. Связная группа $A \in R$ либо p -однородна, либо множество $\tau(A)$ состоит из попарно несравнимых p -типов.

Доказательство. Предположим, что $T_A(a) \leq T_A(b)$, $a, b \in A$. Тогда существуют $\varphi \in E(A)$, натуральное n такие, что $\varphi(a) = nb$. Поскольку φ — целое кратное автоморфизма группы A , то φ сохраняет p -типы элементов. Отсюда $T(a) = T(\varphi(a)) = T(b)$.

Теорема 1.1. [3, теорема 3.1]. Редуцированное прямое произведение A связных групп из класса R является CS -группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $A = \prod A_i$, где $\prod (A_i) \cap \prod (A_j) = \emptyset$ для любых $i \neq j$, $i, j \in I$;
- 2) $A_i = \prod_{j \in J_i} A_{ij}$, где A_{ij} связные группы и если $|J_i| \geq H_0$, то $A_{ij} \cong A_{ik}$ ($j, k \in J_i$) и A_{ij} — связные однородные вполне транзитивные группы.

для некоторого простого p ; если же $1 < |J_i| < H_0$, то $A_{ij} \cong A_{ik}$ ($j, k \in J_i$) и A_{ij} — связные однородные вполне транзитивные группы.

Доказательство. Необходимость. Предположим сначала, что $A = B \oplus G$, где B и G — связные группы из класса R_p , причем $G \in R$. Покажем, что существуют ненулевые гомоморфизмы $\varphi: B \rightarrow G$, $\psi: G \rightarrow B$. Если $\tau(B) \cap \tau(G) \neq \emptyset$, то из замечания в доказательстве леммы 1.2 следует, что такие гомоморфизмы существуют. Пусть теперь $\tau(B) \cap \tau(G) = \emptyset$ и $b \in B$, $g \in G$, $h_p(b) = h_p(g) = 0$. Так как $h_p(pb+g) = h_p(b)$, $H(pb+g) \subseteq H(g)$ и замыкание $\langle pb+g \rangle^*$ в p -адической топологии группы A подгруппы $\langle pb+g \rangle^*$ выделяется прямым слагаемым в A , то существует $\varphi \in E(A)$ со свойством $\varphi(pb+g) = b$. Пусть $\varphi(g) = b_1 + g_1$, $\varphi(pb) = b_2 + g_2$, где $b_1, b_2 \in B$, $g_1, g_2 \in G$. Допустим, что $b_1 \neq 0$. Так как $T(b_1) \geq T(\varphi(g)) \geq T(g)$, $\tau(B) \cap \tau(G) = \emptyset$, то $T(b_1) > T(g)$. Из следствия 1.1 и из $T(g) \leq T(\varphi(g)) \leq T(g_1)$ следует, что $T(g) = T(g_1)$. Далее, $g_1 = -g_2$ и $T(b) \leq T(\varphi(b)) \leq T(g_2)$. Отсюда $T(b) < T(g_1) = T(g)$. Таким образом, $T(b) < T(g) < T(b_1)$, откуда вытекает существование искомого гомоморфизмов. Если же $b_1 = 0$, то $b = b_2$, $\varphi(pb) = p\varphi(b) = b + g_2$ и, значит, $h_p(b) > 0$. Противоречие.

Пусть теперь $A = B \oplus G$, где B и G — те же группы, что и

выше, причем $B \in \mathcal{R}$, а φ, ψ — указанные гомоморфизмы. В силу связности групп B, G имеем $0 \neq \varphi\psi \in E(G)$, $0 \neq \psi\varphi \in E(B)$. Далее, $\psi\varphi(B) \subseteq \psi(G)$, $\varphi\psi(G) \subseteq \varphi(B)$. Так как эндоморфизмы групп B и G есть целые кратные автоморфизмов, то найдутся натуральные числа n, m такие, что $nB \subseteq \psi(G) \subseteq B$, $mG \subseteq \varphi(B) \subseteq G$. Учитывая, что квазиморфизм связанных групп влечет их изоморфизм, получаем $B \cong \varphi(B) \cong G$.

Предположим, что $b \in B, g \in G, T(b)$ и $T(g)$ не сравнимы и $h_p(b) = h_p(g) = 0$. Поскольку $H(pb+g) \subseteq H(b)$, $h_p(pb+g) = h_p(b)$, то существует $\varphi \in E(A)$ такой, что $\varphi(pb+g) = b$. Пусть $\varphi(g) = b_1 + g_1$, $\varphi(pb) = b_2 + g_2$, $b_1, b_2 \in B, g_1, g_2 \in G$. Имеем $b_1 + b_2 = b, g_1 = -g_2$. Если $b_1 \neq 0$, то в силу следствия 1.1 и изоморфизма $B \cong G$ имеем $T(b_1) = T(\varphi(g)) = T(g)$, $T(b_2) = T(\varphi(pb)) = T(b)$. Поскольку $T(b)$ и $T(g)$ не сравнимы, то $T(b_1)$ и $T(b_2)$ не сравнимы. Отсюда $T(b_1 + b_2) \neq T(b_2) = T(b)$. Это противоречит тому, что $b = b_1 + b_2$. Итак, $b_1 = 0, b_2 = b$. Откуда $\varphi(pb) = p\varphi(b) = b + g_2$ и, значит, $h_p(b) > 0$. Противоречие.

Таким образом, все p -типы элементов групп B и G сравнимы. Из изоморфизма $B \cong G$ и следствия 1.1 вытекает, что группы B и G p -однородны одинакового p -типа, а значит, и группа A p -однородна. Из определения p -однородности и из связности группы B вытекает, что для любых $x, y \in B$ существует $\varphi \in E(B)$ и натуральное n такие, что $\varphi(x) = nu$. Пусть $\varphi = m\psi$, где ψ — автоморфизм группы B . Если теперь $\chi_B(x) \leq \chi_B(y)$, то $m\psi(x) = nu$. Так как $\chi_B(\psi(x)) = \chi_B(x)$, то m делит n . Следовательно, существует $f \in E(B)$ со свойством $f(x) = y$. Таким образом, B — однородная вполне транзитивная группа.

Предположим теперь, что $A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \cong A_i$ — связные группы из класса \mathcal{R} . Известно, что $H = \prod_{i=1}^{\infty} A_i / \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ — алгебраически компактная группа, причем, так как $A_i \cong A_i$ ($i = 1, 2, \dots$), H не делима. Поэтому замыкание $B = (\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i)^-$ — собственное прямое слагаемое группы A , скажем $\hat{A} = B \bigoplus G$. Так как $G \cong A/B$ и A/B изоморфна редуцированной части алгебраически компактной группы H , то для некоторого простого числа p группа G имеет прямое слагаемое, изоморфное J_p .

Поскольку прямые слагаемые CS -группы являются CS -группами, то ясно, что наша рассматриваемая в теореме группа A имеет прямое слагаемое, изоморфное группе $A_1 \bigoplus J_p$. По доказанному $A_1 \cong J_p$.

Заметим теперь, что поскольку A_i — связные группы, то $A_i \in \mathcal{R}_p$ для каждого $p \in \Pi(A_i)$ ($i = 1, 2, \dots$). Далее, так как эн-

доморфизмы не понижают p -типы элементов, то если множество всех максимальных p -типов элементов группы A_i непусто для некоторого $p \in \Pi(A_i)$, то и для любого $q \in \Pi(A_i)$ множество максимальных q -типов элементов группы A_i также непусто. Поэтому необходимость п. 1) вытекает из доказанной части теоремы.

Достаточность. Отметим, что в условиях теоремы каждая группа A_i является связной или разложимой однородной QPI -группой [6, следствие 3.2, теоремы 1.8, 1.9]. Разложимая однородная QPI -группа A является либо сервантно инъективной, либо изоморфна конечной прямой сумме изоморфных связных вполне транзитивных групп. Связные и сервантно инъективные группы являются CS -группами. В любой разложимой однородной QPI -группе каждый ее элемент g содержится в связном прямом слагаемом G [6, теорема 2.2], скажем $A = G \oplus B$. Пусть теперь H — замкнутая сервантная подгруппа в A , $g \in H$. Тогда $H = G \oplus H \cap B$, где $H \cap B$ — замкнутая сервантная подгруппа в B . Прямое слагаемое QPI -группы является QPI -группой, поэтому если A не сервантно инъективна, то в силу конечности ее p -ранга этот процесс конечен и ясно, что H служит прямым слагаемым для A . Для завершения доказательства осталось заметить, что если G — замкнута в A , то $G = \prod_{i \in I} G \cap A_i$.

§ 2. QCS-группы

Отметим, что для QCS -групп справедлив аналог леммы 1.1. Предложение 2.1. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$) — редуцированная группа, где $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ ($i, j \in I$). A является QCS -группой тогда и только тогда, когда каждая A_i является QCS -группой.

Доказательство вытекает из того, что A_i — вполне характеристические подгруппы группы A , для каждой замкнутой сервантной подгруппы G группы A имеем $G = \bigoplus_{i \in I} G \cap A_i$ ($G = \prod_{i \in I} G \cap A_i$), и если $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ — последовательность прямых слагаемых группы A , то $G = \bigoplus_{i \in I} (\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_i \cap G_n))$ ($G = \prod_{i \in I} (\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_i \cap G_n))$), где $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

Лемма 2.1. Пусть A — QCS -группа; G — группа ранга 1. Тогда если $A(\alpha) = \{a \mid a \in A, t(a) \geq \alpha\}$ — прямое слагаемое в A , то $\text{Hom}(G, A)$ — QCS -группа, где $\alpha = t(G)$.

Доказательство. Пусть \bar{M}_i — прямые слагаемые в $H = \text{Hom}(G, A)$; $\bar{M}_i \subseteq \bar{M}_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots$). Зафиксируем $0 \neq g \in G$ и положим $M_i = \langle \{f(g) \mid f \in \bar{M}_i\} \rangle_*$. Имеем $\bar{M}_i = \text{Hom}(G, M_i)$. Для любого $a \in A(\alpha)$ существуют $b_a \in G$ и $f_a \in H$ такие, что $a = f_a(b_a)$.

Покажем, что M_i — замкнутая подгруппа в A . Для этого до-

статочно показать, что $M_i(\chi)$ — замкнутая подгруппа в $A(\chi) = \{a | a \in A, \chi_A(a) \geq \chi\}$, где $\chi = \chi_G(g)$. Действительно, $M_i^-/M_i \subseteq (M_i + A(\chi))/M_i \cong A(\chi)/M_i(\chi)$, где M_i^- — замыкание подгруппы M_i . Поэтому, если $M_i(\chi)$ замкнута в $A(\chi)$, то $A(\chi)/M_i(\chi)$ — редуцированная группа и, значит, $M_i^- = M_i$. Предположим теперь, что $a = x_n + na_n \in A$ ($x_n \in M_i(\chi)$, $a_n \in A(\chi)$, n — натуральное число). Пусть $x_n = f_n(g)$; $a_n = \eta_n(g)$, где $f_n \in \bar{M}$; $\eta_n \in H$. Тогда $a = (f_n + n\eta_n)(g)$. Отсюда вытекает, что $\eta = f_n + n\eta_n$ принадлежит замыканию подгруппы M_i . Таким образом, $\eta \in \bar{M}_i$, т. е. $a = \eta(g) \in M_i$. Следовательно, M_i замкнута в A и, значит, M_i — прямое слагаемое в A . Пусть $\psi \in \text{Hom}(\bar{M}', H)$, где $\bar{M}' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{M}_i$. Для любого $a \in A(x)$ существуют $b_a \in G$ и $f_a \in H$ такие, что $a = f_a(b_a)$. Пусть теперь $x, y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Положим $\varphi(x) = \psi(f_x)(b_x)$. Пусть $x = f_1(b_1) = f_2(b_2)$; $f_1, f_2 \in \bar{M}'$; $b_1, b_2 \in G$. Тогда существуют целые m, n , $(m, n) = 1$, для которых $mb_1 = nb_2$ и $nf_1(b_1/n) = mf_2(b_2/m)$, поэтому $nf_1 = mf_2$. Из того, что $n\psi(f_1) = m\psi(f_2)$, получаем $\psi(f_1)(b_1) = \psi(f_2)(b_2)$, т. е. отображение φ задано корректно. Существует $b \in G$ такой, что $f'_x(b) = x$, $f'_y(b) = y$, $f'_x, f'_y \in \bar{M}'$. Имеем $\varphi(x) = \psi(f_{x+y})(b_{x+y}) = \psi(f'_x + f'_y)(b) = \psi(f'_x)(b) + \psi(f'_y)(b) = \psi(f_x)(b_x) + \psi(f_y)(b_y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, т. е. φ — гомоморфизм. Пусть $\bar{\varphi}$ — эндоморфизм группы A , продолжающий φ . Зададим $\bar{\psi} \in E(H)$ следующим образом: $\bar{\psi}(f) = \bar{\varphi} \cdot f$. Пусть $f \in \bar{M}'$. Тогда для любого $b \in G$ имеем $\bar{\psi}(f)(b) = \bar{\varphi} \cdot f(b) = \varphi \cdot f(b) = \psi(f)(b)$, т. е. $\bar{\psi}$ — продолжение ψ .

Теорема 2.1. Пусть A — p -однородная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) A — QCS-группа;
- 2) если A — разложимая группа, то A — однородная QPI-группа, если A — неразложимая, то A — связная.

Доказательство. 2) \Rightarrow 1) вытекает из доказательства достаточности теоремы 1.1.

1) \Rightarrow 2). Каждый элемент группы A можно вложить в связанное прямое слагаемое, из p -однородности A и из замечания в доказательстве леммы 1.2 вытекает, что для любых элементов $a, b \in A$ существуют $\varphi \in E(A)$ и натуральное n такие, что $\varphi(a) = nb$. Поскольку гомоморфизмы не понижают типы элементов, то A однородна. Пусть H — сервантная подгруппа в A , $r(H) = 1$, $B = \text{Hom}(H, A)$. По лемме 2.1 B является QCS-группой. Поэтому если $r_p(B) \geq n$, то имеем $B = \bigoplus_{i=1}^n A_i \oplus B_n$, где A_i — связные изо-

морфные вполне транзитивные группы (теорема 1.1). Если $r_p(B) = n < H_0$, то $B = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, и из [6, теорема 1.9, следствие 1.4] вытекает, что в этом случае B и A — QPI -группы. Если же $r_p(B)$ бесконечен, то, так как гомоморфизмы группы $\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ в B продолжаютя до эндоморфизмов группы B , из [6, теорема 3.1] вытекает, что B — сервантно инъективная группа. Отсюда $B \cong G$ [6, доказательство теоремы 3.1].

Отметим, что не всякая однородная группа является p -однородной, но, например, всякая однородная вполне транзитивная из класса R_p группа p -однородна.

Группу G называют сильно однородной, если для любых ее сервантных подгрупп ранга 1 A и B существует автоморфизм φ группы G со свойством $\varphi(A) = B$.

Следствие 2.1. p -однородная QCS -группа A сильно однородна.

Доказательство. Если A — QPI -группа, то утверждение вытекает из следствия 3.3 работы [6]. Любая же связная однородная вполне транзитивная группа — сильно однородна [5, следствие 2].

Лемма 2.2. Пусть A — CS -группа из класса R . Тогда $A = A_p \oplus G$, где $A_p \in R_p$; $\Pi(A_p) \cap \Pi(G) = \emptyset$, причем либо A_p — p -однородная, либо связная группа.

Доказательство. Поскольку $p^w A$ — замкнутая сервантная подгруппа группы A , то по определению CS -группы имеем $A = A_p \oplus p^w A$. Так как $A_p \cong A/p^w A$, то $A_p \in R_p$. Как прямое слагаемое CS -группы A_p есть CS -группа. Если $a \in A_p$, то $A_p = A_1 \oplus A'_p$, где $A_1 = \langle a \rangle_{\cdot}$ — замыкание в p -адической топологии подгруппы $\langle a \rangle_*$. Так как A_1 — CS -группа, то, поскольку $r_p(A_1) = 1$, $A_p \in R_p$, A_1 — связная. Если $A'_p = 0$, то лемма доказана. Предположим теперь, что $A'_p \neq 0$ и $\tau_m(A_1) = \emptyset$. Пусть $b \in A_p$, $T(b) \in \tau_m(A_p)$, $b = a_1 + a_2$, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A'_p$. Так как $T(b) \leq T(a_1)$, то $a_1 = 0$, т. е. $b \in A'_p$. Пусть $A'_p = A_2 \oplus A'$, где $A_2 = \langle b \rangle_{\cdot}$. $A_1 \oplus A_2$ — CS -группа. Поскольку $A_2 \in R$, то из доказательства теоремы 1.1 вытекает существование ненулевого гомоморфизма $\varphi: A_2 \rightarrow A_1$. Поскольку A_2 связна, то $0 \neq \varphi(b) \in A_1$. Имеем $T_{A_1}(\varphi(b)) = T_A(\varphi(b)) \geq T_A(b) \in \tau_m(A_p)$. Противоречие. Таким образом, $A_1 \in R$, причем A_1 содержит элемент a со свойством $T(a) \in \tau_m(A_p)$.

По доказанному выше любой элемент группы A'_p содержится в связном прямом слагаемом B из класса $[R$. В силу теоремы 1.1 $A_1 \oplus B$ является p -однородной группой. Таким образом, для

любых $x, y \in A_p$ имеем $T(x) = T(y) = T(a)$, т. е. A_p — p -однородна.

Покажем, что $\Pi(A_p) \cap \Pi(p^w A) = \emptyset$. Допустим противное, пусть $a \in A_p \setminus qA, q \in p^w A \setminus qA$ для некоторого простого $q \neq p$. Имеем $A_p = A_p \cap q^w A \oplus A'_p, p^w A = p^w A \cap q^w A \oplus A'_q, A = (A'_p \oplus A'_q) \oplus (A_p \cap q^w A \oplus p^w A \cap q^w A)$, где $A_p \cap q^w A \oplus p^w A \cap q^w A = q^w A$. Так как $A'_p, A'_q \neq 0$, то $A_q = A'_p \oplus A'_q$ — разложимая группа и, следовательно, A_q — q -однородна. Пусть $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$, где $a_1 \in A_p \cap q^w A; a_2 \in A'_p; b_1 \in p^w A \cap q^w A; b_2 \in A'_q$. Так как $h_q(a) = h_q(b) = 0$, то $0 \neq a_2, b_2 \in A_q$. Поскольку A_q — q -однородна, то существуют $\varphi \in E(A_q)$, натуральное n такие, что $\varphi(b_2) = na_2$. Однако $\infty = h_p(b_2) = h_p(\varphi(b_2)) \neq h_p(na_2) < \infty$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2.2. Если $A \in R$, то A является QCS-группой тогда и только тогда, когда $\bigoplus_{i \in I} A_i \subseteq A \subseteq \Pi A_i, A$ — сервантная вполне характеристическая подгруппа в $\Pi A_i, \Pi(A_i) \cap \Pi(A_i) = \emptyset$ для любых $i \neq j$, каждая группа A_i либо связна, либо является p -однородной QCS-группой.

Доказательство. Достаточность. По предложению 2.1 ΠA_i — QCS-группа. Покажем, что если G — прямое слагаемое в A , скажем $A = G \oplus B$, то любой гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow A$ продолжается до гомоморфизма $G \rightarrow \Pi A_i$.

Пусть $I = J \cup I \setminus J$, где A_i — QPI-группы для $i \in I \setminus J$ и A_j — связные для $j \in J$. В силу вполне характеристичности подгрупп A_i найдется подмножество $J' \subseteq J$ такое, что $A_j \subseteq G$ для $j \in J'$ и $A_j \subseteq B$ для $j \in J \setminus J'$. Если теперь $\Pi A_i = G \oplus H$, то $G = \Pi A_j \oplus \bigoplus_{i \in I} G_i, H = \Pi A_j \oplus H'$ для некоторых подгрупп G_i и H' . Так как A — вполне характеристическая подгруппа, то $A = (\Pi A_j) \cap A \oplus \bigoplus_{i \in J'} G_i \cap A \oplus H' \cap A$. Тогда $\varphi: (\Pi A_j) \cap A \rightarrow \Pi A_j, \varphi: \bigoplus_{i \in J'} G_i \cap A \rightarrow \bigoplus_{i \in J'} G_i \oplus H'$. Поскольку $G_1 \oplus H' = \Pi A_i$ — QPI-группа, то $\varphi|_{G_1 \cap A}$ продолжается до некоторого $\psi \in E(\Pi A_j)$. Если теперь $g = (\dots, a_j, \dots)$, где $a_j \in A_j (j \in J')$, то положим $\eta(g) = (\dots, \varphi(a_j), \dots)$. Ясно, что $\eta \in E(\Pi A_j)$, причем $\psi|_{G'} = \eta$. Считая, что ψ, η действуют на дополнительные прямые слагаемые как нулевые эндоморфизмы, получаем, что $(\psi + \eta): G \rightarrow \Pi A_i$ является гомоморфизмом, продолжающим φ .

Пусть теперь $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ — последовательность прямых сла-

гаемых группы A . Тогда $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ — последовательность прямых слагаемых группы $\prod_{i \in I} A_i$. Пусть $G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^-$. Имеем $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = A \cap G'$. Если теперь $\varphi: G \rightarrow A$, то $\varphi_n = \varphi|_{G_n^-}$ продолжаются до гомоморфизмов $\psi_n: G_n^- \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$. Причем $\psi_{n+1}|_{G_n^-} = \psi_n$. Для каждого $g \in G'$ найдется n такое, что $g \in G_n^-$. Положим $\psi(g) = \psi_n(g)$. Ясно, что ψ есть гомоморфизм $\psi: G' \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$. Пусть $E(\prod_{i \in I} A_i) \cong \bar{\psi}$ — продолжение ψ . Так как A — вполне характеристическая подгруппа в $\prod_{i \in I} A_i$, то $\bar{\psi}|_A \in E(A)$, причем $\bar{\psi}|_G = \varphi$.

Необходимость. Обозначим через S подгруппу группы A , порожденную $\bigcup_p A_p$. Из леммы 2.2 вытекает, что $S = \bigoplus_p A_p$, причем $A = A_p \oplus p^w A$, $\prod(A_p) \cap \prod(p^w A) = \emptyset$ для каждого простого числа p . Так как A — редуцированная группа, то отображение $A \rightarrow \prod_p A_p$ осуществляет вложение A в $\prod_p A_p$. отождествим A с ее образом при указанном вложении. Покажем, что A вполне характеристична в $\prod_p A_p$. Пусть $\varphi \in E(\prod_p A_p)$. Имеем $\varphi(S) \subseteq S$. Так как A — QCS-группа, то существует $\psi \in E(A)$, $\psi|_S = \varphi|_S$. Поскольку A/S делима, то $\psi = \varphi|_A$. Далее, S сервантна в $\prod_p A_p$, A/S сервантна в $\prod_p A/S$. Следовательно, A сервантна в $\prod_p A_p$.

Из теорем 2.1, 2.2 и теоремы 5.1 из [6] вытекает

Следствие 2.2. Если все группы A_i в условии теоремы 2.2 являются разложимыми, то QCS-группа $A \in R$ является QPI-группой.

Отметим, что хотя класс R не замкнут относительно взятия прямых сумм, но, учитывая теоремы 2.1, 2.2, свойство сервантно инъективной группы содержать прямое слагаемое, изоморфное J_p , получаем, что QCS-группа, разложимая в прямую сумму групп из класса R , принадлежит классу R .

В [6] изучался класс L редуцированных групп такой, что для каждой группы $A \in L$ тип любого её элемента меньше либо равен некоторому максимальному типу среди множества всех различных типов ненулевых элементов группы A . Так как связанные вполне транзитивные группы являются QPI-группами, то в силу теорем 2.1, 2.2 и теоремы 5.1 из [6] справедливо.

Следствие 2.3. Для группы $A \in L$ следующие условия эквивалентны:

- 1) A — вполне транзитивная QCS-группа;

2) A — QPI -группа такая, что $A/p^\infty A$ либо разложимая, либо связная группа для каждого простого числа p .

ЛИТЕРАТУРА

1. Мишина А. П. Абелевы группы.— В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). М., 1979, т. 17, с. 3—63.
2. Черников С. Н. Группы с системами дополняемых подгрупп.— Матем. сб., 1954, т. 35, с. 93—128.
3. Чехлов А. Р. Об абелевых группах без кручения, близких к вполне транзитивным.— Томск, 1982.—35 с.—Рукопись представлена Томск. ун-том. Деп. в ВИНТИ 3 авг. 1982, № 4214-82 Деп.
4. Иванов А. М. Об одном свойстве p -сервантных подгрупп группы целых p -адических чисел.— Мат. заметки, 1980, т. 27, № 6, с. 859—867.
5. Крылов П. А. Абелевы группы без кручения с циклическими p -базисными подгруппами.— Мат. заметки, 1976, т. 20, № 6, с. 805—13.
6. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск, 1980, с. 45—69.

КОНЕЧНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А. З. Шляфер

В работах [1]—[5] (см. также [6, § 116]) J. T. Hallett и К. А. Hirsch полностью описали конечные группы, которые являются группами всех автоморфизмов абелевых групп без кручения. В направлении описания конечных групп всех автоморфизмов произвольных, в том числе, и смешанных абелевых групп (назовем такие конические группы f -группами), сделано еще мало. В [7] указаны все f -группы порядка ≤ 8 . Конечные абелевы, симметрические, знакопеременные, диэдральные группы и обобщенные группы кватернионов, являющиеся группами всех автоморфизмов смешанных абелевых групп, найдены в [8]. В настоящей работе описаны гамильтоновы f -группы (теорема 1), а также структура абелевой группы с конечной гамильтоновой группой автоморфизмов (следствие 2). Введем несколько определений.

Определение 1. Конечную группу G назовем f -группой, если существует абелева группа A , для которой $G \cong \text{Aut } A$.

Определение 2. Конечную группу G назовем fh -группой, если существует абелева группа без кручения A такая, что $G \cong \text{Aut } A$.

Определение 3. Абелеву группу с конечной гамильтоновой группой автоморфизмов назовем H -группой.

В [9] доказано, что периодические элементы группы A с конечной группой автоморфизмов $\text{Aut } A$ образуют в A конечную подгруппу. В рассматриваемом случае, когда группа A абелева, непосредственно доказывается следующее уточнение этого факта.

Лемма 1. Пусть A — абелева группа. Группа $\text{Aut } A$ конечна тогда и только тогда, когда $A = F \oplus T$, где F — абелева группа без кручения, а группы T , $\text{Aut } F$ и $\text{Hom}(F, T)$ конечны.

Следующая лемма непосредственно следует из [6, с. 295].

Лемма 2. Пусть A — абелева группа, группа $\text{Aut } A$ конечна, $A = F \oplus T$ — прямое разложение A из леммы 1. Тогда группа $\text{Aut } A$ — полупрямое произведение стабилизатора $\Sigma \cong \text{Hom}(F, T)$ це-

почки $0 \subseteq T \subseteq A$ и подгруппы $\text{Aut } F \times \text{Aut } T$, $\text{Aut } A = \Sigma \lambda (\text{Aut } F \times \text{Aut } T)$.

Следующее предложение показывает, что если группа $\text{Aut } A$ всех автоморфизмов абелевой группы A гамильтонова, то A — бесконечная группа.

Предложение 1. Группа всех автоморфизмов конечной абелевой группы не может быть гамильтоновой.

Доказательство. Пусть A — конечная абелева группа. Предположим, что группа $\text{Aut } A$ гамильтонова. A является прямой суммой своих примарных компонент, $A = \bigoplus_p A_p$, где p пробегает

множество простых чисел. При этом $\text{Aut } A = \prod_p \text{Aut } A_p$. Так как

группа $\text{Aut } A$ гамильтонова, а любая подгруппа гамильтоновой группы либо гамильтонова, либо абелева, то каждая из групп

$\text{Aut } A_p$ является либо гамильтоновой, либо абелевой, причем хотя бы одна из групп $\text{Aut } A_p$ непременно гамильтонова (если все $\text{Aut } A_p$ абелевы, то и их декартово произведение $\text{Aut } A = \prod_p \text{Aut } A_p$ — абелева группа, что противоречит гамильтоновости

$\text{Aut } A$). Выберем такое простое число p , что $\text{Aut } A_p$ — гамильтонова группа. Конечная абелева p -группа A_p является прямой суммой циклических p -групп.

Предположим сначала, что в этом прямом разложении A_p имеются по крайней мере два нетривиальных слагаемых B и C , то есть, что A_p содержит прямое слагаемое $B \oplus C$, где $B \cong Z(p^m)$, $C \cong Z(p^n)$ — циклические группы порядков p^m и p^n соответственно. Для определенности считаем, что $m \leq n$. Рассмотрим три возможных случая. Здесь и в дальнейшем используем матричное представление автоморфизмов прямой суммы абелевых групп (см. напр. [6]), при этом предполагаем, что морфизмы действуют на элементы групп справа, а в композиции морфизмов первым действует морфизм, записанный левее.

1. B не изоморфна Z (2). В этом случае существует нетождественный автоморфизм $\beta \in \text{Aut } B$. В матричном представлении ему соответствует автоморфизм $\bar{\beta} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix} \in \text{Aut } A_p$, где 1_C — тождественный автоморфизм группы C . Отметим, что здесь и далее отождествляются автоморфизмы абелевой группы $B \oplus C$ и соответствующие им автоморфизмы абелевой группы A_p , доопределенные тождественным автоморфизмом на некотором произвольном выбранном, но фиксированном прямом дополнении к $B \oplus C$ в A_p . Пусть $\alpha: B \rightarrow C$ — мономорфизм. Ему соответствует автоморфизм $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 1_B & \alpha \\ 0 & 1_C \end{pmatrix} \in \text{Aut } A_p$. Далее имеем

$$\bar{x}^{-1}\bar{\beta}\bar{x} = \begin{pmatrix} 1_B & x \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_B & x \\ 0 & 1_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta x - x \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}.$$

Здесь $\beta \neq 1_B$, поэтому $\beta - 1_B \neq 0$, а значит, $\beta x - x = (\beta - 1_B)x \neq 0$, так как x — мономорфизм. Следовательно, $\bar{x}^{-1}\bar{\beta}\bar{x} \notin \text{Aut } B$ (элементам $\text{Aut } B$ в матричном представлении соответствуют элементы вида $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}$, где $\beta \in \text{Aut } B$). Таким образом, $\text{Aut } B$ не является нормальной подгруппой группы $\text{Aut } A_p$, поэтому группа $\text{Aut } A_p$ не является гамильтоновой.

2. $B \cong Z(2)$, $C \cong Z(2^n)$, где $n > 1$. Пусть $x: B \rightarrow C$ — мономорфизм; $\pi: C \rightarrow B$ — эпиморфизм. Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1_B & 0 \\ \pi & 1_C \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_B & x \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\alpha, \beta \in \text{Aut } A_p$. Далее, $\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1_B & 0 \\ 2\pi & 1_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_B & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix} = 1_{A_p}$, то есть $\{1, \alpha\}$ — подгруппа группы $\text{Aut } A_p$. Но ввиду $x\pi = 0$ $\beta^{-1}\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1_B & 0 \\ \pi & \pi x + 1 \end{pmatrix} \notin \{1, \alpha\}$, так как $\pi x \neq 0$. Значит, подгруппа $\{1, \alpha\}$ группы $\text{Aut } A_p$ не является в ней нормальной, откуда заключаем, что группа $\text{Aut } A_p$ не является гамильтоновой.

3. $B \cong Z(2)$, $C \cong Z(2)$. В этом случае группа $\text{Aut } A_p \cong \text{Aut}(Z(2) \oplus Z(2))$ — симметрическая группа третьей степени — также не является гамильтоновой.

Итак, в любом из трех разобранных случаев группа $\text{Aut } A_p$ не может быть гамильтоновой. Поэтому абелева группа A неразложима и, значит, циклическая. Но группа автоморфизмов циклической группы абелева, а следовательно, не является гамильтоновой. Полученное противоречие гамильтоновости группы $\text{Aut } A_p$ завершает доказательство предложения.

Следствие 1. Группа всех автоморфизмов периодической абелевой группы не может быть конечной гамильтоновой группой.

Действительно, пусть A — такая абелева группа, что $\text{Aut } A$ — конечная гамильтонова группа. Согласно предложению 1 группа A бесконечна. Допустим, что A — периодическая группа. Но если группа автоморфизмов $\text{Aut } A$ периодической группы A конечна, то и сама группа A конечна [10], что противоречит бесконечности группы A .

Теперь может быть доказана основная

Теорема 1. Для конечной группы G следующие условия эквивалентны:

(1) G — гамильтонова f -группа;

(2) G —гамильтонова fh —группа;

(3) $G \cong Q \times \prod_m Z(2) \times \prod_n Z(3)$, где $Q = \langle \alpha, \beta, \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 \rangle$ —

группа кватернионов, а $m \geq 0, n \geq 0$ — целые числа, причем если $n > 0$, то $m > 0$.

Если G удовлетворяет условиям (1)—(3) и $G \cong \text{Aut } A$ для абелевой группы A , то $A = F \oplus T$, где F —ненулевая группа без кручения, а $|T| \leq 2$.

Доказательство проводим по схеме

(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3).

(2) \Rightarrow (3). Известно (см. напр. [11, с. 213]), что группа G является гамильтоновой группой тогда и только тогда, когда G представима в виде прямого произведения $G = Q \times U \times V$ группы кватернионов Q , группы U показателя 2 и абелевой группы V , каждый элемент которой конечного нечетного порядка. Ясно, что $U \cong \prod_m Z(2)$ для некоторого целого числа $m \geq 0$.

Пусть G — гамильтонова fh —группа. В [1] (см. также [6, § 116]) установлены следующие свойства fh —групп.

(А) Порядки всех элементов fh —группы делят 12. В частности, элементы нечетного порядка имеют порядок 3.

(В) Всякая fh —группа G содержит хотя бы один элемент порядка 2, который не является шестой степенью элемента G порядка 12.

По свойству (А) декартов множитель V из разложения $G = Q \times U \times V$ группы G является прямым произведением конечного числа копий циклической группы $Z(3)$ порядка 3, то есть $V \cong \prod_n Z(3)$ для некоторого целого числа $n \geq 0$.

Таким образом, любая fh —группа разложима в прямое произведение вида $G \cong Q \times \prod_m Z(2) \times \prod_n Z(3)$. Учитывая условие (В),

получаем, что $m > 0$, если $n > 0$. Действительно, если $n > 0$, но $m = 0$, то в G имеется единственный элемент порядка 2—это единственный элемент второго порядка группы кватернионов Q . Обозначим этот элемент группы Q через q . В группе кватернионов он является квадратом элемента порядка 4. Пусть, например, $q = \omega^2$, $\omega \in Q$, и пусть v —произвольный ненулевой элемент группы $U \cong \prod_n Z(3)$. Тогда элемент $(q, 0)$ группы $G \cong Q \times \prod_n Z(3)$ —единственный элемент порядка 2 в этой группе, и он является шестой степенью элемента $(\omega, v) \in G$ порядка 12, что противоречит условию (В). Итак, (3) доказано.

(3) \Rightarrow (2). Обратное, пусть выполнено (3). Тогда (2) вытекает из следующего результата [5]. Группа G является fh —группой тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условию (В) и изо-

морфна некоторой подгруппе прямого произведения конечного числа групп следующих типов: циклических групп $Z(2)$, $Z(3)$, $Z(4)$ порядков 2, 3 и 4; группы кватернионов Q ; дициклической группы $DC_{12} = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 \rangle$ порядка 12; бинарной группы тетраэдра $BT_{24} = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 \rangle$ порядка 24. В нашем случае группа вида (3) является даже произведением конечного числа групп вида $Z(2)$, $Z(3)$ и Q , а условие (B) проверяется непосредственно.

Импликация (2) \Rightarrow (1) очевидна.

(1) \Rightarrow (2). Пусть A — такая абелева группа, что группа $G = \text{Aut } A$ — конечная гамильтонова. Воспользуемся разложением $A = F \oplus T$ из леммы 1. Ввиду следствия 1 $F \neq 0$. Так как согласно лемме 2 $\text{Aut } A$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы $\Sigma \cong \text{Hom}(F, T)$ и подгруппы $\text{Aut } F \times \text{Aut } T$, а группа $\text{Aut } A$ гамильтонова, то фактически $\text{Aut } A$ — прямое произведение своих нормальных подгрупп Σ и $\text{Aut } F \times \text{Aut } T$. Итак, $\text{Aut } A \cong \text{Hom}(F, T) \times \text{Aut } F \times \text{Aut } T$. В частности, $\text{Hom}(F, T)$ и $\text{Aut } T$ коммутируют поэлементно, то есть для любых $\theta \in \text{Hom}(F, T)$ и $\beta \in \text{Aut } T$ имеем $\bar{\beta}^{-1} \bar{\theta} \bar{\beta} = \bar{\theta}$ (здесь $\bar{\beta}$, $\bar{\theta}$ — автоморфизмы группы A , соответствующие β и θ). В матричном представлении

$$\begin{aligned} \bar{\beta}^{-1} \bar{\theta} \bar{\beta} &= \begin{pmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_F & \theta \\ 0 & 1_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1_F & \theta_\beta \\ 0 & 1_T \end{pmatrix}; \quad \bar{\theta} = \begin{pmatrix} 1_F & \theta \\ 0 & 1_T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда $\theta\beta = \theta$ для любых $\theta \in \text{Hom}(F, T)$, $\beta \in \text{Aut } T$.

Покажем теперь, что для любого $x \in T$ найдутся такие $\theta \in \text{Hom}(F, T)$ и $u \in F$, что $x = u\theta$. Так как $\text{Hom}(F, T)$ разлагается в прямую сумму своих подгрупп $\text{Hom}(F, T_p)$, где для каждого простого числа p T_p — p -компонента абелевой группы T , $\text{Hom}(F, T) = \bigoplus_p \text{Hom}(F, T_p)$, с покомпонентным действием на F ,

то достаточно показать, что для любого $x \in T_p$, где p — фиксированное простое число, существуют такие $\theta \in \text{Hom}(F, T_p)$ и $u \in F$, что $x = u\theta$. Пусть $C = \langle x \rangle$ — циклическая подгруппа группы T_p , порожденная элементом x . Пусть $|C| = p^k$. Если бы $F/p^k F = 0$, то умножение на p^k являлось бы автоморфизмом бесконечного порядка абелевой группы F , что невозможно, так как, ввиду леммы 4, $\text{Aut } F$ — конечная группа. Значит, $F/p^k F$ — ненулевая абелева группа показателя p^k . Поэтому существует эпиморфизм $\theta_1: F/p^k F \rightarrow C$. Последовательное действие канонического эпиморфизма $\theta_0: F \rightarrow F/p^k F$, эпиморфизма θ_1 и вложения $\theta_2: C$ в T_p дает искомым гомоморфизм $\theta = \theta_0 \theta_1 \theta_2$, для кото-

рого ввиду $x \in C = \text{im } \theta$ найдется такой элемент $y \in F$, что $x = y\theta$.

Рассмотрим теперь произвольные элементы $\beta \in \text{Aut } T$ и $x \in T$. Пусть $\theta \in \text{Hom}(F, T)$ и $y \in F$ таковы, что $x = y\theta$. Согласно доказанному $\theta\beta = \theta$, откуда $x\beta = y\theta\beta = y\theta = x$, то есть β действует на T тождественно. Итак, группа $\text{Aut } T$ тривиальна, то есть состоит из одного элемента. Поэтому либо $T = 0$, либо $T \cong Z(2)$. Этим доказывается последнее утверждение теоремы.

Далее, если $T = 0$, то A — абелева группа без кручения, значит, $\text{Aut } A$ — fh -группа, что доказывает (2). Пусть теперь $T \cong Z(2)$. Тогда $\text{Aut } A \cong \text{Aut } F \times \text{Hom}(F, T) \cong \text{Aut } F \times \prod_{\kappa} Z(2)$, где $\kappa = \dim_{GF(2)}(F/2F)$. Так как $\text{Aut } F$ — конечна, то $\text{Aut } F$ — fh -группа. Но приведенная выше характеристика fh -групп [5] показывает, что прямое произведение fh -группы и конечной элементарной 2-группы есть fh -группа. Поэтому $\text{Aut } A$ — fh -группа и (2) доказано. Этим доказательство теоремы закончено.

Следствие 2. H -группа A является прямой суммой ненулевой H -группы без кручения и группы T с $|T| \leq 2$.

Ввиду последнего утверждения теоремы 1, остается доказать лишь гамильтоновость группы $\text{Aut } F$. Но $\text{Aut } F$ — подгруппа $\text{Aut } A$, а любая подгруппа гамильтоновой группы гамильтонова или абелева. Если бы $\text{Aut } F$ была абелевой, то и $\text{Aut } A \cong \text{Aut } F \times \text{Hom}(F, T)$ была бы абелевой как прямая сумма абелевых групп, что противоречит гамильтоновости группы $\text{Aut } A$. Значит, группа $\text{Aut } F$ гамильтонова.

Возникает вопрос, верно ли обращение следствия 2 (то есть всегда ли прямая сумма H -группы без кручения и циклической группы $Z(2)$ порядка 2 является H -группой)? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий пример абелевой группы A , не являющейся H -группой, но разложимой в прямую сумму H -группы без кручения F и группы $Z(2)$.

Пример 1. Для построения группы A воспользуемся примером абелевой группы без кручения F , использованным в [6, с. 320] в качестве примера абелевой группы без кручения с $\text{Aut } F \cong Q$, где Q — группа кватернионов. Напомним построение этой группы.

Пусть $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ — два непересекающихся бесконечных множества нечетных простых чисел, для которых найдутся такие целые числа k_i и l_i , что $k_i^2 \equiv -1 \pmod{p_i}$ и $l_i^2 \equiv -1 \pmod{q_i}$. Группу F определим как подгруппу делимой оболочки D свободной абелевой группы H с образующими a, b, c, d , порожденную элементами $a, b, c, d, p_i^{-1}(a+k_i b), p_i^{-1}(d+k_i c), q_i^{-1}(a+l_i c), q_i^{-1}(b+l_i d)$ при всех i . В [6, с. 320] показано, что $\text{Aut } F \cong Q$ и (это понадобится в дальнейших рассуждениях) существует такой $\alpha \in \text{Aut } F$, что $\alpha a = b$.

Покажем теперь, что группа автоморфизмов $\text{Aut } A$ группы $A = F \oplus Z(2)$ не гамильтонова. Для этого достаточно доказать, что (при очевидном отождествлении) подгруппа $\text{Aut } F$ группы $\text{Aut } A$ не является нормальной в $\text{Aut } A$. Непосредственно проверяется, что $a \notin 2F$, $b \notin 2F$ и $a - b \notin 2F$, то есть элементы a и b принадлежат различным смежным классам группы F по подгруппе $2F$. Так как фактор-группа $F/2F$ — элементарная 2-группа, то существует такой $\theta \in \text{Hom}(F, Z(2))$, что $a\theta = 0$, $b\theta \neq 0$. Докажем, что $\bar{\theta}^{-1}\alpha\bar{\theta} \notin \text{Aut } F$, где $\bar{\theta}$ — автоморфизм группы A , соответствующий гомоморфизму θ . Используя матричное представление автоморфизмов прямой суммы $A = F \oplus Z(2)$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^{-1}\alpha\bar{\theta} &= \begin{pmatrix} 1_F & \theta \\ 0 & 1_{Z(2)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1_{Z(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_F & \theta \\ 0 & 1_{Z(2)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\theta - \theta \\ 0 & 1_{Z(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проверим, как гомоморфизм $\alpha\theta - \theta \in \text{Hom}(F, Z(2))$ действует на элемент $a \in F$:

$$a(\alpha\theta - \theta) = (\alpha a)\theta - a\theta = b\theta - a\theta = b\theta \neq 0.$$

Этим доказывается, что $\bar{\theta}^{-1}\alpha\bar{\theta} \notin \text{Aut } F$. Значит, сопряжение элемента $\alpha \in \text{Aut } F$ элементом $\bar{\theta} \in \text{Aut } A$ не принадлежит $\text{Aut } F$. Таким образом, $\text{Aut } F$ не является нормальной подгруппой группы $\text{Aut } A$, откуда заключаем, что группа $\text{Aut } A$ не является гамильтоновой.

Итак, $A = F \oplus Z(2)$, $\text{Aut } F \cong Q$ — конечная гамильтонова группа, то есть F — H -группа, но A не является H -группой. Построение примера завершено.

Автор благодарит И. Х. Беккера за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hallett J. T., Hirsch K. A. Torstion-free groups having finite automorphism groups. — J. Algebra, 1965, v. 2, p. 287—298.
2. Hallett J. T., Hirsch K. A. Die Konstruktion von Gruppen mit vorgeschriebenen Automorphismengruppen. — J. reine angew. Math., 1970, v. 239/240, p. 32—46.
3. Hallett J. T., Hirsch K. A. Groups of exponent 4 as automorphism groups. — Math. Z., 1970, v. 117, p. 183—188.
4. Hallett J. T., Hirsch K. A. Finite groups of exponent 4 as automorphism groups. — Math. Z., 1973, v. 131, p. 1—10.
5. Hallett J. T., Hirsch K. A. Finite groups of exponent 12 as automorphism groups. — Math. Z., 1977, v. 155, p. 43—53.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы — М.: Мир, 1977, т. 2. — 416 с.

7. Vries H., Miranda A. B. Groups with finite number of automorphisms.—Math. Z., 1958, v. 68, p. 450—464.
 8. Fournelle T. A. Finite groups of automorphisms of infinite groups. II.—J. Algebra, 1983, v. 80, p. 106—112.
 9. Нагребцкий В. Т. О периодической части группы с конечным числом автоморфизмов.—ДАН, 1972, т. 205, с. 519—521.
 10. Baer R. Finite extensions of abelian groups with minimum condition.—Trans. Amer. Math. Soc., 1955, v. 79, p. 521—540.
 11. Холл М. Теория групп.—М.: ИЛ, 1962.— 468 с.
-

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

УДК 512.55

Балаба И. Н. Эквивалентности Мориты категорий градуированных модулей.—В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 3—10.

Описаны эквивалентности полных подкатегорий градуированных модулей, которые в неградуированном варианте дают теоремы Мориты в форме Отаке (обобщающие результаты Фуллера и Като), а в градуированном содержат в себе градуированные теоремы Мориты, полученные автором, и независимо Гордоном и Грином.

Библ. 9.

УДК 512.55

Бовди А. А. Унитарность мультипликативной группы группового кольца над конечным простым полем.—В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 11—19.

Пусть KG —групповое кольцо произвольной группы G над конечным простым полем K и f —гомоморфизм группы G в мультипликативную группу поля K . Если $x = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ —элемент кольца KG , то обозначим через x^f элемент $\sum_{a \in G} \alpha_a g^{-1}$.

Элемент u мультипликативной группы $U(KG)$ группового кольца KG называется f -унитарным, если обратный элемент u^{-1} совпадает с элементом εu^f , где ε —обратимый элемент кольца K . Все f -унитарные элементы группы $U(KG)$ образуют подгруппу $U_f(KG)$, которая называется f -унитарной подгруппой группы $U(KG)$. Если $U(KG) = U_f(KG)$, то группа $U(KG)$ называется f -унитарной. Основной результат работы—необходимые условия f -унитарности группы $U(KG)$. Рассматривается вопрос о достаточности этих условий.

Библ. 5.

УДК 512.55

Борисенко В. В. О матричных представлениях свободных алгебр многообразий.—В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 20—30.

Ассоциативная алгебра над полем F называется представимой, если ее можно вложить в алгебру матриц над расширением F . Изучается вопрос о представимости относительно свободных алгебр. Относительно свободной (свободной в многообразии \mathfrak{m}) алгеброй называется фактор-алгебра свободной алгебры по некоторому T -идеалу (идеалу тождеств \mathfrak{m}). Основные результаты относятся к случаю поля характеристики 0. Показывается, что бесконечно-порожденная свободная в многообразии \mathfrak{m} алгебра представима тогда и только тогда, когда \mathfrak{m} порождается конечномерной над основным полем алгеброй. Такие многообразия называются свободно представимыми.

Пусть \mathfrak{m} — многообразие алгебр с 1 над полем характеристики 0, в котором для некоторого m выполняются тождества $[[x_1, \dots, x_m][y_1, \dots, y_m], z] = 0$ и $S_m(x_1, \dots, x_m) = 0$, где $S_m(x_1, \dots, x_m)$ — стандартный полином. Тогда \mathfrak{m} свободно представимо.

Библ. 10.

УДК 512.541

Добрусин Ю. Б. **О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, II.** — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 31—41.

Абелева группа G без кручения называется транзитивной (вполне транзитивной), если для любых $a, b \in G$, характеристики $\chi_G(a)$ и $\chi_G(b)$ которых совпадают (соответственно удовлетворяют неравенству $\chi_G(a) < \chi_G(b)$), a переводится в b некоторым автоморфизмом (эндоморфизмом) G . Такие группы в работе охарактеризованы в тех случаях, когда они получаются из групп, все ненулевые эндоморфизмы которых — мономорфизмы, при помощи конструкций прямой суммы, прямого произведения и близких конструкций. Описаны, в частности, транзитивные и вполне транзитивные абелевы группы без кручения конечного ранга, а также указанные сепарабельные, векторные и другие группы. Построен пример транзитивной группы без кручения, не являющейся вполне транзитивной.

Библ. 13.

УДК 512.541

Кожухов С. Ф. **Почти вполне разложимые абелевы группы без кручения с примарными факторами.** — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 42—55.

Изучается класс таких почти вполне разложимых абелевых групп G без кручения с полным квазиразложением $A = \bigoplus_{j=1}^{\kappa} A_j$, у которых фиксированы множество T типов подгрупп A_j ранга 1, состоящее из попарно несравнимых типов, и фактор-группа $G/A \cong P$, являющаяся конечной p -группой. Такие группы называются (T, P) -группами. Вводится понятие (T, P) -матрицы и дается полное описание (T, P) -групп с точностью до изоморфизма на языке (T, P) -матриц.

Библ. 7.

УДК 512.541

Крылов П. А. **Об абелевых группах без кручения, II.** — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 56—79.

Изучается абелева группа G без кручения, для которой $R \times Q$ -модуль $G \times Q$ является однородным вполне приводимым (R — кольцо эндоморфизмов

группы G). Исследование такой группы G во многом сводится к случаю неприводимой группы, то есть группы, у которой указанный модуль неприводим. В произвольной минимальной сервантной вполне характеристической подгруппе группы G выбирается ненулевой циклический R -модуль F . Как группа F —неприводимая эндодиклическая группа. Пусть $C = \text{End}_R F$. Тогда C —область целостности, а F —правый C -модуль, всякий ненулевой подмодуль конечного C -ранга которого квазиизоморфен свободному C -модулю. Канонический гомоморфизм колец $R \rightarrow \text{End}_C F$ является вложением. В теореме 1 выясняется, когда он будет изоморфизмом. Затем доказывается (теорема 2), что при подходящих условиях существует изоморфизм между категорией всех подмодулей C -модуля F и категорией определенных подгрупп группы G . Пусть A —группа без кручения, кольцо квазиэндоморфизмов которой есть тело, а G —локально A -свободная группа. Тогда $R \times Q$ -модуль $G \times Q$ —однородный вполне приводимый (теорема 3). Из теорем 2 и 3 получается теорема 4. Категория всех подгрупп P локально A -свободных групп со свойством $S_P(A) = P$ эквивалентна категории всех подмодулей локально свободных $E(A)$ -модулей при условии, что $IA \neq A$ для любого собственного правого идеала I кольца $E(A)$ ($S_P(A)$ —след группы A в группе P).

Библ. 8.

УДК 512.553

Росошек С. К. **Чисто полупростые кольца и модули. I.**—В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 80—87.

Изучаются чистые аналоги различных классов модулей. Особое внимание уделяется чисто полупростым модулям. Показано, что чисто полупростые и чисто вполне приводимые модули, вообще говоря, различные классы модулей, причем любой чисто вполне приводимый модуль чисто полупрост. Установлен ряд новых характеристик чисто полупростых колец. Получено описание класса колец, над которыми любой инъективный модуль чисто вполне приводим, а также класса колец, над которыми любой плоский модуль чисто вполне приводим.

Библ. 12.

УДК 512.55

Туганбаев А. А. **Кольца с дистрибутивной структурой идеалов.**—В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 88—104.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей. Кольцо R называется дистрибутивным, если дистрибутивны структуры его правых и левых идеалов.

Теорема 1.1. Пусть R —полунаследственное справа кольцо. Тогда равносильны следующие условия: а) кольцо R дистрибутивно справа; б) все максимальные правые идеалы и все замкнутые правые идеалы кольца R являются идеалами и для любого вполне первичного идеала P кольца R множество $R \setminus P$ является правым множеством Ore. Теорема 1.2. Для кольца R равносильны следующие условия: а) R —редуцированное кольцо, все факторкольца которого целозамкнуты; б) R —дистрибутивное инвариантное полупервичное кольцо; в) $w. gl. \dim(R) < 1$ и R —инвариантное полупервичное кольцо. В теореме 1.3 доказано, что дистрибутивное первичное кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром, обязано быть полунаслед-

ственным максимальным порядком над проферовой областью. Получены также и другие результаты.

Библ. 19.

УДК 512.541

Хаят Л. Б. Сепарабельные абелевы группы без кручения как прямые пределы.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с 105—116.

Изучается связь между строением множества $S_A = \{A_i\}_{i \in I}$ всех прямых слагаемых конечного ранга абелевой группы A без кручения и свойствами этой группы. Показано, что группа A сепарабельна тогда и только тогда, когда система $A = \{A_i (i \in I); \pi_{ij}\}$, где $\pi_{ij}: A_i \rightarrow A_j$ — естественное вложение A_i в A_j при $A_i \subseteq A_j$, является прямым спектром, состоящим из вполне разложимых групп конечного ранга (CDF -спектром) и $\lim_{\rightarrow} A \cong A$. Описано строение множества S_A в случае, когда A — вполне разложимая группа. Получены условия, при которых предел прямого CDF -спектра является сепарабельной группой, а также необходимые и достаточные для того, чтобы этот предел был вполне разложимой группой.

Библ. 4.

УДК 512.541

Чехлов А. Р. Об абелевых группах без кручения, близких к квазисервантно инъективным.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 117—127.

Рассматриваются группы, в которых замкнутые в Z -адической топологии сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми и каждый гомоморфизм объединения счетной возрастающей цепи прямых слагаемых в данную группу продолжается до ее эндоморфизма. Указанные группы изучаются в выделенном классе абелевых групп без кручения, где они характеризуются как сервантные вполне характеристические подгруппы групп $\prod_{i \in I} A_i$, содержащие $\bigoplus_{i \in I} A_i$ — одно-

значно определяемые группы, удовлетворяющие ряду условий.

Библ. 6.

УДК 512.541

Шляфер А. З. Конечные гамильтоновы группы автоморфизмов абелевых групп.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985, с. 128—135.

Теорема. Для конечной группы G следующие условия эквивалентны:

(1) группа G гамильтонова и существует такая абелева группа A , что $\text{Aut } A \cong G$;

(2) группа G гамильтонова и существует такая абелева группа без кручения A , что $\text{Aut } A \cong G$;

(3) $G \cong Q \times \prod_{m} Z(2) \times \prod_{n} Z(3)$, где $Q = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 \rangle$ — группа кватерниона; $Z(2)$ и $Z(3)$ — циклические группы порядков 2 и 3, а $m \geq 0, n \geq 0$ — целые числа, причем если $n > 0$, то $m > 0$.

Библ. 11.

СОДЕРЖАНИЕ

И. Н. Балаба. Эквивалентности Мориты градуированных модулей	3
А. А. Бовди. Унитарность мультипликативной группы группового кольца над конечным простым полем	11
В. В. Борисенко. О матричных представлениях свободных алгебр многообразий	20
Ю. Б. Добрусин. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, II	31
С. Ф. Кожухов. Почти вполне разложимые абелевы группы без кручения с примарными факторами	42
П. А. Крылов. Об абелевых группах без кручения, II	56
С. К. Росошек. Чисто полупростые кольца и модули, I	80
А. А. Туганбаев. Кольца с дистрибутивной структурой идеалов	88
Л. Б. Хаят. Сепарабельные абелевы группы без кручения как прямые пределы	105
А. Р. Чехлов. Об абелевых группах без кручения, близких к квази-сервантно инъективным	117
А. З. Шляфер. Конечные гамильтоновы группы автоморфизмов абелевых групп	128
Рефераты на опубликованные статьи	136

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

ИБ 1484

Редактор Е. С. Юзефович
Технический редактор Р. А. Прошенкина
Корректор Г. Г. Иванова

Сдано в набор 03.07.84. Подписано в печать 12.03.85. КЗ 02039. Формат
60×84¹/₁₆. Бумага типографская № 3. Гарнитура Литературная. Печать высокая.
Печ. л. 9. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 8,8. Тираж 500 экз. Заказ 6447.
Цена 1 р. 40 к. Издательство ТГУ, 634029, Томск ул. Никитина, 4.

1-584462K

1 р. 40 к.

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00931793