

**АБЕЛЕВЫ
ГРУППЫ
И МОДУЛИ**

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1984

Абелевы группы и модули: Сборник статей/Под ред. Л. А. Скорнякова.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984.— 8,7 л.— 1 р. 40 к. 500 экз. 1702050000.

Публикуются работы, относящиеся к различным вопросам теорий абелевых групп и модулей.

Для научных работников, аспирантов, студентов, интересующихся проблемами современной алгебры.

Рецензент — С. К. Росошек

Редакционная коллегия: Л. А. Скорняков (отв. ред.), А. П. Мишина, А. В. Михалев, Ю. М. Рябухин, И. Х. Беккер (зам. отв. ред.), С. Ф. Кожухов, П. А. Крылов

А $\frac{1702050000}{177(012)-84}$ — 69—83

О ДИСТРИБУТИВНОСТИ РЕШЕТКИ ПРЕДКРУЧЕНИЙ

И. Д. БУНУ, Е. И. ТЭБЫРЦЭ

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и $\mathcal{R}m$ — категория всех унитарных левых R -модулей. Напомним, что в категории $\mathcal{R}m$ задан предрадикал r , если выполнены следующие условия:

K1. Каждому модулю $M \in \mathcal{R}m$ ставится в соответствие подмодуль $r(M)$.

K2. Если $f: M \rightarrow N$ — R -гомоморфизм, то $f(r(M)) \subseteq r(N)$.

Предрадикал r называется предкручением, если для любого модуля M и произвольного его подмодуля N выполнено условие

K3. $r(N) = N \cap r(M)$.

Обозначим через $K(R)$ совокупность всех предкручений категории $\mathcal{R}m$. Отметим, что $K(R)$ является множеством ввиду существования взаимно-однозначного соответствия между предкручениями и непустыми семействами F левых идеалов кольца R , удовлетворяющими следующим условиям:

f 1. Если $I \in F$ и $I \subseteq J$, то $J \in F$.

f 2. Если $I \in F$ и $x \in R$, то $(I : x) \in F$, где $(I : x) = \{\lambda \in R \mid \lambda x \in I\}$.

f 3. Если $I \in F$ и $J \in F$, то $I \cap J \in F$.

Такие семейства называются фильтрами предкручения. Скажем, что предкручение r меньше или равно предкручению s (обозначается $r \leq s$), если $r(M) \subseteq s(M)$ для любого модуля M . Непосредственно проверяется, что указанное отношение является частичным порядком. Кроме того, $r \leq s \iff R(r) \subseteq R(s) \iff F(r) \subseteq F(s)$, где

$R(r) = \{M \in R\text{м} \mid r(M) = M\}$ — радикальный класс, а $F(r) = \{I \subseteq R \mid r(R/I) = R/I\}$ — фильтр предкручения r .

Если $\{r_i \mid i \in \Omega\}$ — семейство предкручений, то определим пересечение этого семейства соотношением $t \leq \bigwedge_{i \in \Omega} r_i$

$r_i \leq t \iff t \leq r_i$ для всех $i \in \Omega$. Легко проверяется, что $(\bigwedge_{i \in \Omega} r_i)(M) = \bigcap_{i \in \Omega} r_i(M)$ для любого модуля M .

Сумма $r + s$ предкручений r и s определяется следующим образом: $(r + s)(M) = r(M) + s(M)$ для любого модуля M . Очевидно, что $r + s$ удовлетворяет условиям K1 и K2 и поэтому является предрадикалом.

Для произвольного предрадикала r можно определить наследственное замыкание $\hat{r}$ по правилу $\hat{r}(M) = M \cap r(\hat{M})$, где $\hat{M}$ — инъективная оболочка модуля M . Известно, что r — наименьшее предкручение, содержащее предрадикал r [1, предл. 3.1]. Таким образом,

если r и s — предкручения, то равенство $r \vee s = \bigwedge (r + s)$ определяет объединение этих предкручений. В силу вышесказанного легко проверить, что множество предкручений $K(R)$ относительно определенных операций пересечения „ $\wedge$ “ и объединения „ $\vee$ “ является полной решеткой с нулем 0 ($0(M) = 0$) и единицей ε ($\varepsilon(M) = M$).

Изучение решетки предкручений $K(R)$ начато в [2], где, в частности, показано, что она модулярна. В данной заметке рассматривается вопрос о дистрибутивности этой решетки. Покажем, что решетка $K(R)$ не всегда дистрибутивна, а также укажем необходимые и достаточные условия для выполнения этого свойства (теорема 4).

Пусть I — двусторонний идеал кольца R и F_I — совокупность левых идеалов J кольца R , содержащих I . Непосредственно проверяется, что множество F_I является фильтром предкручения. Соответствующее предкручение обозначим через r_I и назовем его идеальным. Легко проверить, что для любого модуля M равенство $r_I(M) = M$ равносильно $IM = 0$.

Предложение 1. Множество $I(R)$ идеальных предкручений является подрешеткой решетки $K(R)$

всех предкручений, антиизоморфной решетки двусторонних идеалов кольца R .

Доказательство. Пусть r_I и r_J — произвольные идеальные предкручения. Легко проверить, что $r_I \leq r_J \Leftrightarrow J \supseteq I$, причем $r_I = r_J \Leftrightarrow I = J$. Теперь покажем, что предкручения $r_I \wedge r_J$ и $r_I \vee r_J$ являются идеальными. Действительно, из включений $I \subseteq (I + J)$ и $J \subseteq (I + J)$ следует, что $r_I \geq r_{(I+J)}$ и $r_J \geq r_{(I+J)}$. Если s — другое предкручение, меньше каждого из предкручений r_I , r_J , и L — произвольный левый идеал из фильтра $F(s)$, то $L \in F(r_I) \cap F(r_J)$. Отсюда имеем $L \supseteq I$ и $L \supseteq J$, поэтому $L \supseteq (I + J)$. Так как $(I + J) \in F(r_{(I+J)})$, то по свойству $f1$ левый идеал L принадлежит фильтру $F(r_{(I+J)})$. Это означает, что $F(s) \subseteq F(r_{(I+J)})$, т. е. $\leq r_{(I+J)}$. Следовательно, $r_{(I+J)}$ — наибольшее предкручение, меньшее r_I и r_J , поэтому $r_I \wedge r_J = r_{(I+J)}$.

Докажем теперь, что объединение двух идеальных предкручений является идеальным предкручением. Из включения $I \cap J \subseteq I$ и $I \cap J \subseteq J$ следует, что $r_I \leq r_{(I \cap J)}$ и $r_J \leq r_{(I \cap J)}$. Если предкручение $s \geq r_I$ и $s \geq r_J$, то $F(r_I) \subseteq F(s)$ и $F(r_J) \subseteq F(s)$. Отсюда и из включений $I \in F(r_I)$ и $J \in F(r_J)$ получим, что $I \in F(s)$ и $J \in F(s)$. В силу $f3$ $I \cap J \in F(s)$. Поэтому $F(r_{(I \cap J)}) \subseteq F(s)$ и, следовательно, $r_{(I \cap J)} \leq s$. По определению это означает, что $r_I \vee r_J = r_{(I \cap J)}$. Таким образом, множество идеальных предкручений является подрешеткой решетки $K(R)$ всех предкручений. В заключение заметим, что соответствие $I \leftrightarrow r_I$ является антиизоморфизмом решеток $I(R)$ идеальных предкручений и двусторонних идеалов кольца R . Предложение доказано.

Кольцо R называется арифметическим, если решетка его двусторонних идеалов дистрибутивна.

Следствие 2. Решетка $I(R)$ идеальных предкручений дистрибутивна тогда и только тогда, когда кольцо R является арифметическим. Это с очевидностью вытекает из предложения 1, так как решетка, антиизоморфная дистрибутивной, сама дистрибутивна [3, IV.6.1].

Замечание. Существуют кольца, над которыми решетка предкручений не дистрибутивна.

Действительно, это очевидно, так как существуют не арифметические кольца.

Л е м м а 3. Решетка предкручений $K(R)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любого инъективного модуля M и произвольных предкручений r, s и t из $K(R)$ верно равенство

$$r[s(M) + t(M)] = r[s(M)] + r[t(M)].$$

Доказательство. Предположим, что решетка $K(R)$ дистрибутивна, т. е. для любых предкручений r, s и t верно равенство $r \wedge (s \vee t) = (r \wedge s) \vee (r \wedge t)$. Пусть M — произвольный инъективный модуль. Так как $r(M) = \hat{r}(M)$ для любого предрадикала r , то из определения операции объединения „ $\vee$ “ в $K(R)$ имеем, с одной

$$\begin{aligned} \text{стороны, } [r \wedge (s \vee t)](M) &= [r \wedge (s + t)](M) = r(M) \cap \\ &\cap s + t(M) = r(M) \cap (s + t)(M) = r(M) \cap [s(M) + t(M)] = \\ &= r[s(M) + t(M)], \text{ с другой стороны,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [r \wedge s] \vee [r \wedge t](M) &= (r \vee s) + (r \wedge t)(M) = [(r \wedge s) + \\ &+ (r \wedge t)](M) = (r \wedge s)(M) + (r \wedge t)(M) = [r(M) \cap s(M)] + \\ &+ [r(M) \cap t(M)] = r[s(M)] + r[t(M)]. \end{aligned}$$

Отсюда и из дистрибутивности решетки $K(R)$ получим $r[s(M) + t(M)] = r[s(M)] + r[t(M)]$.

Обратно, пусть $r[s(M) + t(M)] = r[s(M)] + r[t(M)]$ для каждого инъективного модуля M и любых предкручений r, s и t . Рассмотрим произвольный модуль A и докажем, что $(r \wedge (s \vee t))(A) = ((r \wedge s) \vee (r \wedge t))(A)$. Действительно, как было показано выше, $(r \wedge (s \vee t))$

$$\begin{aligned} (\hat{A}) &= r[s(\hat{A}) + t(\hat{A})], ((r \wedge s) \vee (r \wedge t))(\hat{A}) = r[s(\hat{A})] + \\ &+ r[t(\hat{A})]. \text{ Тогда по допущению } (r \wedge (s \vee t))(\hat{A}) = \\ &= ((r \wedge s) \vee (r \wedge t))(\hat{A}). \text{ Но тогда } [r \wedge (s \vee t)](A) = \\ &= A \cap [r \wedge (s \vee t)](\hat{A}) = A \cap [(r \wedge s) \vee (r \wedge t)](\hat{A}) = [(r \wedge s) \vee \\ &\vee (r \wedge t)](A). \text{ Ввиду произвольности модуля } A \text{ полу-} \\ &\text{чим, что } r \wedge (s \vee t) = (r \wedge s) \vee (r \wedge t). \text{ Лемма доказана.} \end{aligned}$$

Для фиксированного модуля M определим предрадикал r^M по правилу: для любого модуля N $r^M(N) = \sum \text{Im } \varphi$ по всем гомоморфизмам $\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$. Как

показал Бичи, левый идеал $I \in F(r^M)$ тогда и только тогда, когда $I \supseteq \bigcap_{i=1}^n (0 : m_i)$ для подходящих элементов $m_1, m_2, \dots, m_n$ модуля M [4, предл. 1.6].

Теорема 4. Решетка предкручений $K(R)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда для произвольного инъективного модуля M и любых двух его элементов m и n существуют такие элементы $x, y \in M$ и элементы $a_i, b_i, c_i, d_i \in R, i = 1, 2, \dots, \kappa$, что выполняются следующие условия: 1) $m + n = x + y$; 2) $\bigcap_{i=1}^{\kappa}$

$$(0 : a_i m) + \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : b_i (m + n)) \subseteq (0 : x); \quad 3) \quad \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : c_i n) + \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : d_i (m + n)) \subseteq (0 : y).$$

Доказательство. Пусть решетка предкручений $K(R)$ дистрибутивна, а m и n — любые элементы произвольного инъективного модуля M . Рассмотрим пред-

кручения $r = \widehat{r^{R(m+n)}}$, $s = \widehat{r^{Rm}}$ и $t = \widehat{r^{Rn}}$. По допущению согласно лемме 3 верно равенство $r[s(M) + t(M)] = r[s(M)] + r[t(M)] (*)$. Легко проверить, что элемент $m + n \in r[s(M) + t(M)]$. Тогда из равенства (*) имеем $m + n \in r[s(M)] + r[t(M)]$. Поэтому существуют такие элементы $x \in r[s(M)] = s(M) \cap r(M)$ и $y \in r[t(M)] = r(M) \cap t(M)$, что $m + n = x + y$. Из условия $x \in s(M) \cap r(M)$ имеем $x \in s(M)$ и $x \in r(M)$, т. е.

$x \in \widehat{r^{Rm}}(M)$ и $x \in \widehat{r^{R(m+n)}}(M)$. Согласно предложению 1.6 [4] существуют элементы $a_1, a_2, \dots, a_{\kappa} \in R$ и $b_1, b_2, \dots,$

$b_p \in R$ такие, что $(0 : x) \supseteq \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : a_i m)$ и $(0 : x) \supseteq \bigcap_{i=1}^p (0 : b_i (m + n))$. Отсюда имеем $\bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : a_i m) + \bigcap_{i=1}^p (0 : b_i (m + n)) \subseteq$

$\subseteq (0 : x)$. Аналогично для элемента $y \in M$ существуют элементы $c_1, c_2, \dots, c_q \in R$ и $d_1, d_2, \dots, d_l \in R$ такие, что

$(0 : y) \supseteq \bigcap_{i=1}^q (0 : c_i n)$ и $(0 : y) \supseteq \bigcap_{i=1}^l (0 : d_i (m + n))$, откуда

$\bigcap_{i=1}^q (0 : c_i n) + \bigcap_{i=1}^l (0 : d_i (m + n)) \subseteq (0 : y)$. Без ограничения

общности можно предположить, что $\kappa = \max(\kappa, p, q, l)$. Если $p, q, l \neq \kappa$, то, полагая $b_i = 1, c_i = 1, d_i = 1$ для всех $p < i \leq \kappa, q < i \leq \kappa$ и $l < i \leq \kappa$, соответственно получим указанные в теореме условия (2) — (3).

Обратно, пусть для произвольного инъективного модуля M и для любых двух его элементов m и n выполняются условия (1) — (3) теоремы. Докажем, что решетка $K(R)$ дистрибутивна. Действительно, согласно лемме 3 достаточно доказать выполнение равенства $r[s(M) + t(M)] = r[s(M)] + r[t(M)]$ для любого инъективного модуля M и произвольных предкручений r, s и t . Пусть a — ненулевой элемент модуля $r[s(M) + t(M)]$. Тогда $a = m + n$, где $m \in s(M)$ и $n \in t(M)$, причем $(m + n) \in r(M)$. По допущению $m + n = x + y$, $\bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : a_i m) + \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : b_i (m + n)) \subseteq (0 : x)$ и $\bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : c_i n) + \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : d_i (m + n)) \subseteq (0 : y)$. Из первого включения имеем $\bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : a_i m) \subseteq (0 : x), \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : b_i (m + n)) \subseteq (0 : x)$. Так как $m \in s(M)$, то $(0 : m) \in F(s)$, поэтому согласно свойству $f2$ $(0 : a_i m) \in F(s)$ для любого $i = 1, 2, \dots, \kappa$. Тогда по свойству $f3$ $\bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : a_i m) \in F(s)$. Из включения $\bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : a_i m) \subseteq (0 : x)$ и по свойству $f1$ имеем $(0 : x) \in F(s)$, т. е. $x \in s(M)$. Аналогично из включения $\bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : b_i (m + n)) \subseteq (0 : x)$ и из того, что $(m + n) \in r(M)$, следует, что $x \in r(M)$. Таким образом, $x \in s(M) \cap r(M) = r[s(M)]$. Также можно показать, что из условия (3) получим $y \in r[t(M)]$. Поэтому $a = m + n = x + y \in r[s(M)] + r[t(M)]$. Ввиду произвольности элемента a имеем $r[s(M) + t(M)] = r[s(M)] + r[t(M)]$. Обратное включение очевидно и поэтому теорема доказана.

Следствие 5. Над артиновым слева кольцом R следующие условия равносильны:

(1) R — арифметическое кольцо; (2) решетка $K(R)$ дистрибутивна; (3) для произвольного инъективного модуля M и любых двух его элементов m и n существуют такие элементы x и y из M , что $m + n =$

$$= x + y, (0 : Rm) + (0 : R(m + n)) \subseteq (0 : x) \text{ и } (0 : Rn) + (0 : R(m + n)) \subseteq (0 : y).$$

Доказательство. Импликация $(2) \Rightarrow (1)$ следует из следствия 2, а импликация $(1) \Rightarrow (2)$ — из следствия 2 и из теоремы работы [5], так как над артиновым слева кольцом все предкручения идеальны. Эквивалентность утверждений (2) и (3) следует из теоремы 4, поскольку над артиновым слева кольцом $(0 : Rm) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (0 : a_i m) = \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : a_i m)$ для подходящих элементов $a_i \in R, i = 1, 2, \dots, \kappa$. Аналогично для $(0 : Rn)$ и $(0 : R(m + n))$.

Очевидным результатом согласно теореме 4 является

Следствие 6. Если для произвольного инъективного модуля M и любых двух его элементов m и n , таких, что $m + n \neq 0$, выполняется равенство $(0 : (m + n)) = (0 : m) \cap (0 : n)$, то решетка $K(R)$ дистрибутивна.

Следствие 7 (см. [6]). Над коммутативным кольцом R решетка $K(R)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда для произвольного инъективного модуля M и любых двух его элементов m и n существуют элементы $x, y \in M$, удовлетворяющие условиям: 1) $m + n = x + y$; 2) $(0 : m) + (0 : (m + n)) \subseteq (0 : x)$ и $(0 : n) \subseteq (0 : y)$.

Действительно, заметим, во-первых, что в силу коммутативности кольца R имеем $(0 : m) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : a_i m)$,

$$(a : n) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : c_i n) \text{ и } (0 : (m + n)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : b_i (m + n)), (0 : (m + n)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\kappa} (0 : d_i (m + n)),$$

во-вторых, что из равенства $m + n = x + y$ и из включения $(0 : (m + n)) \subseteq (0 : x)$ следует $(0 : (m + n)) \subseteq (0 : y)$. В самом деле, если $\lambda \in (0 : (m + n))$, то $\lambda(m + n) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = 0$. Отсюда и из включения $(0 : (m + n)) \subseteq (0 : x)$ имеем $\lambda y = 0$, т. е. $\lambda \in (0 : y)$. Поэтому $(0 : (m + n)) \subseteq (0 : y)$. Теперь остается только применить теорему 4.

Следствие 8. Если над коммутативным кольцом R решетка $K(R)$ дистрибутивна, то для любых элементов m и n произвольного простого модуля M , таких, что $m + n \neq 0$, выполняется равенство $(0 : (m + n)) = (0 : m) \cap (0 : n)$

Действительно, по следствию 7 $(0 : (m+n)) = (0 : (x+y)) = (0 : x) \cap (0 : y)$. Кроме того, из включения $(0 : m) \subseteq (0 : x)$ и $(0 : n) \subseteq (0 : y)$ и из максимальности идеалов $(0 : m)$ и $(0 : n)$ получим, что $(0 : m) = (0 : x)$ и $(0 : n) = (0 : y)$. Поэтому $(0 : (m+n)) = (0 : m) \cap (0 : n)$.

ЛИТЕРАТУРА

V

1. Bican L., Jambor P., Kepka T., Nemc P. Hereditary and cohereditary preradicals. Czechosl. Math. J., 1976, 26 (101), p. 192—206.
2. Буну И. Д., Тэбырцэ Е. И. Решетка предкручений и классически полупростые кольца.— В сб.: Теоретико-кольцевые конструкции. Мат. исследования. Кишинев: Штиинца, 1979, вып. 49, с. 35—49.
3. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре.— М.: Наука, 1973.— с. 399.
4. Beachy J. A. A generalization of injectivity.— Pacif. J. Math., 1972, v. 41, N 2, p. 313—327.
5. Буну И. Д. Кольца, над которыми все предкручения — идеальны. XVI Всесоюзная алгебраическая конференция. Ленинград, 1981, ч. 2, с. 20.
6. Буну И. Д., Тэбырцэ Е. И. О дистрибутивности решетки предкручений.— Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщений. Кишинев, 1980, с. 13—14.

О РАСЩЕПЛЯЮЩИХСЯ КВАЗИСЕРВАНТНО ИНЪЕКТИВНЫХ ГРУППАХ

Ю. Б. ДОБРУСИН

Внимание ряда авторов недавно привлекла [2] проблема 17 а Л. Фукса [3] об исследовании квазисервантно инъективных групп (сокращенно QPI -групп). Под QPI -группой понимается абелева группа, все частичные эндоморфизмы которой, заданные на сервантных подгруппах, продолжаются до эндоморфизмов данной группы. Были полностью описаны периодические QPI -группы [5, 6, 9], получено описание довольно широкого класса QPI -групп без кручения [9, 10], рассмотрены некоторые обобщения на модули [7, 8]. Данная работа посвящена вопросу о том, когда прямая сумма периодической QPI -группы T и QPI -группы A без кручения будет снова QPI -группой. Ответы на этот вопрос в случае, когда T обладает лишь конечным множеством p -компонент, таких, что $pA \neq A$, либо в случае, когда A — некоторая из групп, описанных в [10], получены в § 2 (теоремы 2.1, 2.4). В § 1, 2 рассматривается также вспомогательный, но представляющий и самостоятельный интерес вопрос о сервантной совместности группы без кручения и периодической группы.

Определение. Упорядоченную пару групп (A, B) назовем сервантно совместной, если любой гомоморфизм всякой сервантной подгруппы A в группу B может быть продолжен до гомоморфизма A в B .

§ 1. Сервантная совместность

Все группы в работе предполагаются абелевыми. Основные обозначения и терминология взяты из [3 4].

Введем некоторые обозначения, используемые во всей работе. Обозначим через π множество всех простых чисел. Пусть $p \in \pi$; X — p -группа. Если группа X ограничена, то через $e(X)$ обозначим максимальную из экспонент $e(t)$ элементов $t \in X$, в противном случае по определению положим $e(X) = \infty$. Через T_p обозначим p -компоненту периодической группы T . Через $E(G)$, $r_p(G)$, $h_p^G(x)$ — соответственно кольцо всех эндоморфизмов, ранг p -базисной подгруппы группы G , p -высоту элемента x в группе G . Сервантную подгруппу группы G без кручения, порожденную подмножеством $B \subseteq G$, обозначим $\langle B \rangle_*^G$. Символы $\oplus$ и $\sum^*$ используем для обозначения прямых сумм и прямых произведений соответственно; Q_p — кольцо целых p -адических чисел; Q_p — кольцо всех рациональных чисел со знаменателями, не делящимися на p . Для любой группы G полагаем

$$G^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nG, \quad \pi(G) = \{p \in \pi \mid pG \neq G\}.$$

Поскольку задача изучения QPI -групп легко сводится к редуцированному случаю, то и при исследовании расщепляющихся QPI -групп ограничимся редуцированными группами. Под периодически полной группой, следуя [4], понимаем периодическую группу, все примарные компоненты которой периодически полны (замкнуты). Ввиду следующего результата нас в основном интересуют группы с периодически полными периодическими частями.

Теорема 1.1 [5, 6, 9]. Редуцированная периодическая группа является QPI -группой тогда и только тогда, когда она периодически полна.

Прямое слагаемое QPI -группы, очевидно, снова QPI -группа. Поэтому периодическая часть T расщепляющейся QPI -группы G является QPI -группой, а также G/T — QPI -группа.

Предложение 1.2. Пусть A — QPI -группа без кручения; T — периодическая QPI -группа. Группа $A \oplus T$ является QPI -группой тогда и только тогда, когда пара групп (A, T) сервантно совместна.

Для доказательства понадобится вспомогательная

Лемма 1.3. Пусть H, F — подгруппы G ; $\varphi \in \text{Hom}(H, G)$; $\varphi(H \cap F) \subseteq F$ и пусть существует $\eta \in E(F)$ та-

кой, что $\eta|_{H \cap F} = \varphi|_{H \cap F}$. Тогда φ можно продолжить до гомоморфизма $H + F$ в G .

Доказательство. Определим искомый гомоморфизм $\psi: H + F \rightarrow G$, полагая

$$\psi(h + f) = \varphi(h) + \eta(f)$$

для всех $h \in H, f \in F$. Данное определение корректно, так как если $h, h' \in H, f, f' \in F$ таковы, что $h + f = h' + f'$, то $(h - h') = (f' - f) \in H \cap F$ и $\varphi(h - h') = \eta(f' - f)$, т. е. $\psi(h + f) = \psi(h' + f')$. Следовательно, $\psi \in \text{Hom}(H + F, G)$, $\psi|_H = \varphi$.

Следствие 1.4. Пусть H — сервантная подгруппа группы G ; $\varphi \in \text{Hom}(H, G)$; D и T — соответственно делимая и периодическая части группы G . Тогда подгруппы $H + D, H + T, H \cap T$ сервантны в группе G и справедливы утверждения:

а) если $G^1 = D$, то φ можно продолжить до гомоморфизма $H + D$ в G ;

б) если группа T периодически полна, то φ можно продолжить до гомоморфизма $H + T$ в G .

Доказательство. Докажем сервантность подгруппы $H + T$ в группе G . Пусть $h \in H; t \in T; h + t = nx$ для некоторого $x \in G$ и целого числа $n \neq 0$. Тогда $mh = mn x$ для некоторого целого числа $m=0$. Так как $h \in H$, то существует $y \in H$ такой, что $mh = mny$. Следовательно, $x - y \in T, x \in H + T$. Сервантность подгрупп $H + D$ и $H \cap T$ в группе G проверяется непосредственно по определению. Так как $H \cap D \subseteq H^1, \varphi(H^1) \subseteq G^1$ и группа D инъективна, то утверждение а) вытекает из леммы 1.3 при $F = D$. Так как $\varphi(H \cap T) \subseteq T$, то утверждение б) вытекает из теоремы 1.1 и леммы 1.3 при $F = T$.

Доказательство предложения 1.2. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть данная по условию пара групп (A, T) сервантно совместна; $G = A \oplus T$; H — сервантная подгруппа группы G ; $\varphi \in \text{Hom}(H, G)$. Нужно доказать, что φ продолжается до эндоморфизма G . Учитывая 1.1, 1.4, можно считать, что $T \subseteq H$. Тогда $H = (H \cap A) \oplus T$, подгруппа $H \cap A$ сервантна в группе G . По условию и предположению существуют $\eta \in \text{Hom}(A, T), \delta \in E(A)$ такие, что $(\delta + \eta)|_{H \cap A} = \varphi|_{H \cap A}$. Пусть $\xi \in E(G)$; $\xi|_A = \delta + \eta$; $\xi|_T = \varphi|_T$. Тогда если $h \in H, h = t + a$, где $t \in T; a \in H \cap A$, то $\xi(h) = (\delta + \eta)(a) + \varphi(t) = \varphi(h)$, т. е. $\xi|_H = \varphi$.

Теорема 1.5. Для любой группы A без кручения и p -группы T , не содержащей ненулевых элементов бесконечной p -высоты, пара групп (A, T) сервантно совместна тогда и только тогда, когда выполнено условие: если $r_p(A) \geq \omega_0$, то группа T ограничена.

Доказательство. Необходимость. Пусть данная пара (A, T) сервантно совместна и $r_p(A) \geq \omega_0$. Тогда в группе A есть свободная p -сервантная подгруппа B ранга ω_0 . Пусть F — сервантная подгруппа группы B . Тогда группа F свободна и является p -сервантной подгруппой группы A , поэтому группу $H = \langle F \rangle^A$ можно рассматривать как подгруппу группы $X = \bigoplus_{i \in J} (Q_p \varepsilon_i)_*$, где $\{\varepsilon_i | i \in J\}$ — система свободных образующих группы F .

Рассматривая X как свободный Q_p -модуль и учитывая, что группа T является Q_p -модулем, заключаем, что всякий гомоморфизм группы F в группу T продолжается до гомоморфизма X и T , в частности до гомоморфизма H в T , который по допущению индуцируется некоторым гомоморфизмом A в T . Следовательно, пара групп (B, T) сервантно совместна. Согласно [7, предложение 1.2] группа T алгебраически компактна, т. е. ограничена.

Докажем достаточность. Пусть данные по условию группы A, T таковы, что если $r_p(A) \geq \omega_0$, то T ограничена. Пусть H — сервантная подгруппа группы A ; $\varphi \in \text{Hom}(H, T)$. Допустим, что $r_p(A) < \omega_0$, тогда ранг p -базисной подгруппы B группы H конечен. Так как группа T сепарабельна, то $\varphi(B) \subseteq C$, где C — ограниченное прямое слагаемое группы T . Тогда $\varphi(H) \subseteq C$. Действительно, ясно, что существует $\delta \in \text{Hom}(H, C)$, для которого $\delta|_B = \varphi|_B$. Так как $B \subseteq \text{Ker}(\delta - \varphi)$, то $H/\text{Ker}(\delta - \varphi) \cong \text{Im}(\delta - \varphi)$ — p -делимая подгруппа группы T , по условию теоремы $\delta = \varphi$, $\varphi(H) \subseteq C$. Группа C алгебраически компактна, поэтому существует $\psi \in \text{Hom}(A, C)$ такой, что $\psi|_H = \varphi$. Если $r_p(A) \geq \omega_0$, то группа T ограничена, поэтому она алгебраически компактна и пара (A, T) сервантно совместна. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 1.5 и [3, теорема 8.2] вытекает

Следствие 1.6. Пусть A — группа без кручения; T — периодическая группа и $T^1 = 0$. Пара групп

$A, \sum_{p \in \Pi}^* T_p$) сервантно совместна тогда и только тогда когда выполняется условие (i) следующей теоремы 2.1.

§ 2. Расщепляющиеся QPI -группы

Теорема 2.1. Пусть T — периодически полная группа; A — QPI -группа без кручения и множество $\Pi(T) \cap \Pi(A)$ конечно. Группа $T \oplus A$ является QPI -группой тогда и только тогда, когда выполняется условие: (i) группа T_p ограничена для всех тех простых чисел p , для которых $r_p(A) \geq \omega_0$.

Доказательство. Необходимость вытекает из 1.2, 1.5. Докажем достаточность. Пусть верно (i). Согласно 1.6 пара $(A, \sum_{p \in \Pi}^* T_p)$ сервантно совместна. Положим $P = \Pi(T) \cap \Pi(A)$. По условию $|P| < \omega_0$, поэтому для любого $\psi \in \text{Hom}(A, \sum_{p \in \Pi}^* T_p)$ имеем

$$\psi(A) \subseteq \sum_{p \in P}^* T_p = \bigoplus_{p \in P} T_p \subseteq T.$$

Следовательно, пара (A, T) сервантно совместна. По предположению 1.2, теореме 1.1 $A \oplus T$ — QPI -группа. Теорема доказана.

Значительно более жесткие ограничения требуются для того, чтобы (в обозначениях теоремы 2.1) группа $A \oplus T$ была QPI -группой при $|\Pi(A) \cap \Pi(T)| = \omega_0$. Для изучения этой ситуации уже необходимы более глубокие сведения о QPI -группе A без кручения. Исследуем случай, когда A — определенная группа из класса L , введенного в [10].

Под классом L понимаем класс всех редуцированных групп G без кручения, таких, что для любого $\alpha \in F(\bar{G})$ существует элемент β_α , максимальный в $F(G)$ и такой, что $\alpha \leq \beta_\alpha$. Через $F(G)$ здесь и далее обозначаем множество всех различных типов ненулевых элементов группы G . В [10] описаны все однородные QPI -группы без кручения, неразложимые QPI -группы из L . Центральным результатом этой работы является

Теорема 2.2 [10, теорема 5.1]. Группа A является QPI -группой из класса L тогда и только тогда, когда она представима в виде сервантной вполне характерис-

тической межпрямой суммы (единственного) семейства подгрупп $\{A_j | j \in J\}$, состоящего лишь из однородных QPI -групп без кручения и неоднородных неразложимых QPI -групп из L , причем $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \emptyset$ для всех различных $i, j \in J$.

Указанные подгруппы A_j назовем квазиоднородными компонентами группы A (группы A_j квазиоднородны в смысле [10]). Семейство всех квазиоднородных компонент A обозначим через $Q(A)$.

Кроме данной теоремы далее используется ее

Следствие 2.3 (см. также [9]). Сепарабельная (соответственно векторная) редуцированная группа A без кручения является QPI -группой тогда и только тогда когда $A = \bigoplus_{j \in J} A_j$ (соответственно $A = \sum_{j \in J}^* A_j$), где все группы $A_j, j \in J$ являются однородными вполне разложимыми группами конечного ранга и $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \emptyset$ для всех различных $i, j \in J$.

Следуя [4], под связной группой понимаем группу, все фактор-группы по ненулевым сервантным подгруппам которой делимы. Во многих случаях неразложимые прямые слагаемые QPI -групп из L оказываются связными. Этим свойством обладают, например, все группы, указанные в 2.3, все алгебраически компактные группы без кручения.

Пусть $W = \{V_i | i \in J\}$ — семейство непустых множеств. Выборкой из семейства W назовем всякое отображение $f: W \rightarrow \bigcup_{i \in J} V_i$, такое, что $f(V_i) \in V_i$ для всех $i \in J$.

Теорема 2.4. Пусть T — периодически полная группа; A — QPI -группа из класса L и все неразложимые квазиоднородные компоненты A связны. Группа $T \oplus A$ является QPI -группой тогда и только тогда, когда выполнено условие (i) теоремы 2.1 и следующие условия:

(ii) для любой неоднородной группы $K \in Q(A)$ и любой выборки f из семейства $\{T_p | p \in \Pi\}$ подгруппа

$$\{x \in K | h_p^K(x) \geq e(f(T_p))\} \text{ для всех } p \in \Pi$$

является (в зависимости от K и f) либо нулевой, либо существенной подгруппой группы K ;

(iii) для любого элемента $a \in A \setminus \left(\bigoplus_{K \in Q(A)} K \right)$ и любой

выборки φ из семейства $\{\Pi(K) | K \in Q(A)\}$, где $\varphi(\Pi(K)) = p_K, K \in Q(A)$, неравенство

$$h_{pK}^A(a) \geq e(T_{pK})$$

верно для всех $K \in Q(A)$ за исключением, быть может, конечного числа.

Получим результаты, необходимые для доказательства. Следуя [1], под кольцом универсальных чисел (обозначение Z^*) понимаем прямое произведение колец Q_p^* , взятых по одному для каждого $p \in \Pi$.

Лемма 2.5. Пусть U — аддитивная группа кольца Z^* ; T — редуцированная периодическая группа; $T^* = \sum_{p \in \Pi}^* T_p$ и $\varphi \in \text{Hom}(U, T^*)$. Тогда

$$\varphi^{-1}(T) = \langle \{x \in U \mid h_p^U(x) \geq e(t_p) \text{ для всех } p \in \Pi\} \rangle^U,$$

где $(..., \#_p, ...)_{p \in \Pi} = \varphi(\varepsilon)$, $t_p \in T_p$; ε — единица кольца Z^* .

Доказательство. Так как группа T_p является Q_p^* -модулем, то группу T^* можно, естественно, рассматривать как Z^* -модуль. Легко видеть, что $\varphi \in \text{Hom}_{Z^*}(U, T^*)$. Пусть

$$\varphi(\varepsilon) = (..., t_p, ...)_{p \in \Pi}; \quad t_p \in T_p; \quad x \in U; \quad x = (..., x_p, ...)_{p \in \Pi};$$

$$x_p \in Q_p^*; \quad \varphi(x) = (..., x_p t_p, ...)_{p \in \Pi}.$$

Заметим, что $x_p = (p^{h_p^U(x)}) \cdot \delta_p$, где δ_p — обратимый элемент кольца Q_p^* . Причем $\varphi(x) \in T$ в точности, если найдется такое целое число $n \neq 0$, что $n\varphi(x) = \varphi(nx) = 0$. Последнее эквивалентно тому, что $h_p^U(nx) \geq e(t_p)$ для всех $p \in \Pi$.

Предложение 2.6. Пусть K — связная группа без кручения; T — периодическая группа $T^1 = 0$. Пара групп (K, T) сервантно совместна тогда и только тогда; когда для любой выборки f из семейства $\{T_p \mid p \in \Pi\}$ подгруппа

$$K[f] = \{x \in K \mid h_p^K(x) \geq e(f(T_p)) \text{ для всех } p \in \Pi\}$$

является (в зависимости от f) либо нулевой, либо существенной подгруппой группы K . В частности, если группа K однородна, то пара (K, T) сервантно совместна.

Доказательство. Пусть данная пара (K, T) сервантно совместна; f — произвольная выборка из семейства $\{T_p \mid p \in \Pi\}$; $f(T_p) = t_p$. Допустим, что $K[f] \neq 0$. Докажем, что тогда $K[f]$ — существенная подгруппа



группы K . Положим $X = \langle K[f] \rangle^K$. Будем рассматривать K как сервантную подгруппу аддитивной группы U кольца Z^* , пусть ε — единица этого кольца. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: U \rightarrow T^*$ такой, что $\varphi(\varepsilon) = (\dots, t_p, \dots)_{p \in \pi}$, где $T^* = \sum_{p \in \pi} T_p$. По лемме 2.5 $\varphi(x) \subseteq T$, поэтому существует $\psi \in \text{Hom}(K, T)$ такой, что $\psi|_X = \varphi|_X$. Так как группа K связна, фактор-группа K/X делима, откуда легко вывести, что $(\psi - \varphi)(K) = 0$. Следовательно, $\varphi(K) \subseteq T$. По лемме 2.5 $K \subseteq X$, т. е. $K[f]$ — существенная подгруппа группы K .

Обратно, пусть данные группы K, T удовлетворяют указанному в предложении условию. Докажем, что пара групп (K, T) сервантно совместна. Пусть $0 \neq H$ — сервантная подгруппа группы K , $\eta \in \text{Hom}(H, T)$. По-прежнему считаем K сервантной подгруппой группы U . Так как $r_p(U) = 1$ для всех $p \in \Pi$, то по следствию 1.6 существует $\varphi \in \text{Hom}(U, T^*)$ такой, что $\varphi|_H = \eta$. Пусть $\varphi(\varepsilon) = (\dots, t_p, \dots)_{p \in \Pi}$, $t_p \in \Pi$ и пусть f — такая выборка из семейства $\{T_p | p \in \Pi\}$, что $f(T_p) = t_p$ для всех $p \in \Pi$. Так как $\varphi(H) \subseteq T$, то по лемме 2.5 $H \subseteq \langle K[f] \rangle^K$, $K[f] \neq 0$. Поэтому $K[f]$ — существенная подгруппа группы K , т. е. $K = \langle K[f] \rangle^K$. По лемме 2.5 $\varphi(K) \subseteq T$, т. е. пара (K, T) сервантно совместна.

Очевидно, необходимое и достаточное условие, указанное в предложении, всегда выполнено, если группа K однородна.

Лемма 2.7. Пусть A — редуцированная однородная разложимая QPI -группа без кручения, такая, что $r_p(A) < \omega_0$ для всех $p \in \Pi(A)$; T — периодическая группа и $T^1 = 0$. Тогда пара групп (A, T) сервантно совместна.

Доказательство. Пусть $0 \neq H$ — сервантная подгруппа группы A ; $\varphi \in \text{Hom}(H, T)$. Докажем, что φ продолжается до гомоморфизма A в T . Рассмотрим максимальное c -подмножество L группы H в смысле [8]. Так как $|L| \leq r_p(A)$ для любого $p \in \Pi(A)$, то по условию $|L| = n < \omega_0$, пусть $L = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Считая, что L включено в максимальное c -подмножество всей группы A , и применяя [8, лемма 1.3], получим, что

$$A = A' \oplus A'', \quad A' = \bigoplus_{i=1}^n A_i,$$

причем L (соответственно $\{h_i\}$) является максимальным s -подмножеством группы A' (соответственно группы A_i). Группы A_i неразложимы для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Так как проекция A на A' действует тождественно на множестве L , то согласно [8, теорема 1.10] $H \subseteq A'$. Поэтому для доказательства леммы достаточно установить продолжаемость φ до гомоморфизма A' в T . Так как группа A разложима, то согласно [8, теорема 3.2] все группы A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, связны. По предложению 2.6, для любого $i = 1, 2, \dots, n$ существует $\psi_i \in \text{Hom}(A_i, T)$ такой, что $\psi_i|_{H \cap A_i} = \varphi|_{H \cap A_i}$. Пусть $\psi \in \text{Hom}(A', T)$; $\psi|_{A_i} = \psi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Положим $\eta = \psi|_H$. Тогда $X \subseteq \text{Ker}(\eta - \varphi)$, где $X = \langle L \rangle^A$. Так как группы A_i связны, то фактор-группа A'/X делима, поэтому делима ее сервантная подгруппа H/X и подавно делима группа $H/\text{Ker}(\eta - \varphi)$, изоморфная $\text{Im}(\eta - \varphi)$. По условию группа T редуцирована, поэтому $\eta = \varphi$.

Лемма 2.8. Пусть A — группа без кручения ранга 1; $0 \neq a \in A$; $p \in \Pi(A)$; T — p -группа; $t \in T$. Гомоморфизм $\varphi \in \text{Hom}(A, T)$ такой, что $\varphi(a) = t$ существует тогда и только тогда, когда $h_p^A(a) \leq h_p^T(t)$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть для указанных a , t справедливо неравенство $h_p^A(a) \leq h_p^T(t)$. Так как $h_p^A(a) = n < \infty$, то группа A является подгруппой группы $X = Q_p\left(\frac{a}{p^n}\right)$. Группа X является свободным Q_p -модулем с базисом $\left\{\frac{a}{p^n}\right\}$, группа T является Q_p -модулем.

Поэтому существует $\varphi \in \text{Hom}(X, T)$ такой, что $\varphi\left(\frac{a}{p^n}\right) = \tau$, $p^n \tau = t$, т. е. $\varphi(a) = t$.

Доказательство теоремы 2.4. Пусть A, T — данные по условию группы. Учитывая теорему 2.2, будем рассматривать группу как сервантную вполне характеристическую межпрямую сумму семейства $Q(A) = \{A_j | j \in J\}$ всех ее квазиоднородных компонент. Введем следующие обозначения: $\Pi_j = \Pi(A_j)$, $T_j = \bigoplus_{p \in \Pi_j} T_p$, $A^* = \sum_{j \in J}^* A_j$, $T^* = \sum_{j \in J}^* T_j$, ν_j (соответственно) μ_j — естест-

являющаяся проекция группы A^* (группы T^*) на группу A_j (на группу T_j). Так как $\Pi_i \cap \Pi_\kappa = \emptyset$ для всех различных $i, \kappa \in J$, то для всех $a \in A, j \in J, p \in \Pi_j$ справедливы соотношения:

$$h_p^A(a - v_j(a)) = \infty, h_p^A(a) = h_p^{A_j}(v_j(a)). \quad (1)$$

Пусть $A \oplus T$ — QPI-группа. Согласно 1.2, 1.5, 2.6 тогда выполнены условия (i), (ii). Докажем, что (iii) также выполнено. Пусть $a \in A \setminus \bigoplus_{j \in J} A_j$; φ — произвольная выборка из семейства $\{\Pi_j | j \in J\}$; $\varphi(\Pi_j) = p_j$. Положим $J' = \{j \in J | h_{p_j}^A(a) < e(T_{p_j})\}$, $X_j = \langle v_j(a) \rangle_{*}^{A_j}$. Согласно (1) и лемме 2.8 существуют $\varphi_j \in \text{Hom}(X_j, T_{p_j})$ такие, что $\varphi_j v_j(a) \neq 0$ для всех $j \in J'$. Так как $\bigoplus_{j \in J'} X_j$ — сервантная подгруппа группы A и $A \oplus T$ — QPI-группа, то существует $\psi \in \text{Hom}(A, T)$ такой, что $\psi|_{X_j} = \varphi_j$ для всех $j \in J'$. Из (1) и того, что $T^1 = 0$, следует, что $\mu_j(\psi(a - v_j(a))) = 0$ для всех $j \in J'$, поэтому $\mu_j \psi(a) = \varphi_j v_j(a) \neq 0$ для всех $j \in J'$. Так как $\psi(a) \in \bigoplus_{j \in J} T_j$, то $|J'| < \omega_0$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполняются условия (i) — (iii). Докажем, что $A \oplus T$ — QPI-группа. По предложению 1.2 достаточно установить, что пара (A, T) сервантно совместна. Пусть H — сервантная подгруппа группы A ; $\varphi \in \text{Hom}(H, T)$. Докажем, что φ продолжается до гомоморфизма A в T . Положим $H_j = \langle v_j(H) \rangle_{*}^{A_j}$ для всех $j \in J$. Согласно (1) $v_j(H)$ является p -сервантной подгруппой группы H_j для всех $p \in \Pi_j, j \in J$. Поэтому для всех $j \in J$ любой элемент $b \in H_j$ представим (вообще говоря, неоднозначно) в виде

$$b = \frac{1}{n} v_j(h), \quad (2)$$

где $h \in H$; n — целое число, взаимно простое со всеми $p \in \Pi_j$. Заметим, что в группе T_j деление на указанные целые числа n определено и притом однозначно. Зададим отображение $\phi_j: H_j \rightarrow T_j$, полагая

$$\phi_j(b) = \frac{1}{n} \mu_j \varphi(h)$$

для всех $b \in H_j$, представленных в виде (2), и всех $j \in J$. Ввиду неоднозначности представления (2) проверим корректность данного определения. Пусть для некоторого $b \in H_j$, $j \in J$, кроме (2), верно также равенство

$$b = \frac{1}{m} v_j(h'), \text{ где } h' \in H; m - \text{целое число, взаимно}$$

простое со всеми $p \in \Pi_j$. Тогда $v_j(nh' - mh) = 0$ и по условию $h_p^A(nh' - mh) = \infty$ для всех $p \in \Pi_j$. Поэтому $h_p^T(\varphi(nh' - mh)) = \infty$ для всех $p \in \Pi_j$. Так как $T' = 0$, то

$$\mu_j \varphi(nh' - mh) = 0, \quad \frac{1}{n} \mu_j \varphi(h) = \frac{1}{m} \mu_j \varphi(h'),$$

отображение ψ_j корректно. Если $b_1, b_2 \in H_j$, $b_i = \frac{1}{n_i} v_j(h_i)$, $i = 1, 2$ — представления типа (2), то из

доказанной корректности ψ_j вытекает, что

$$\psi_j(b_1 + b_2) = \frac{1}{n_1 n_2} \mu_j \varphi(n_2 h_1 + n_1 h_2) = \psi_j(b_1) + \psi_j(b_2),$$

т. е. $\psi_j \in \text{Hom}(H_j, T_j)$ для всех $j \in J$.

По условию и согласно [10] группа A_j , $j \in J$, может быть либо неразложимой связной группой, либо разложимой однородной QPI -группой, такой, что $r_p(A_j) < \infty$ для всех $p \in \Pi_j$, либо p -адической алгебраически компактной группой для некоторого простого числа p . Соответственно в каждом из трех указанных случаев из 2.6, 2.7, 2.1 вытекает, что пара групп (A_j, T) сервантно совместна. Поэтому существуют $\eta_j \in \text{Hom}(A_j, T_j)$ такие, что $\eta_j|_{H_j} = \psi_j$. Пусть $\eta \in \text{Hom}(A^*, T^*)$; $\eta|_{A_j} = \eta_j$ для всех $j \in J$. Проверим, что $\eta(A) \subseteq T$. Ясно, что $\eta(\bigoplus_{j \in J} A_j) \subseteq T$. Пусть $a \in A \setminus \bigoplus_{j \in J} A_j$. Допустим, что $\eta(a) \notin T$. Тогда множество $J' = \{j \in J \mid \mu_j \eta(a) \neq 0\}$ бесконечно. Для каждого $j \in J$ найдется простое число $p_j \in \Pi_j$ такое, что проекция t_j элемента $\eta(a)$ на группу T_{p_j} отлична от нуля. Тогда $h_{p_j}^A(a) \leq h_{p_j}^T(t_j) < e(T_{p_j})$ для всех $j \in J'$, что противоречит условию (iii). Следовательно, $\eta(A) \subseteq T$. Так как $T^1 = 0$, то $\varphi(H) \subseteq \bigoplus_{p \in \Pi(H)} T_p \subseteq \bigoplus_{j \in J} T_j \subseteq T^*$. Поэтому для любого $h \in H$ имеем

$$\eta(h) = (\dots, \psi_j v_j(h), \dots)_{j \in J} = (\dots, \mu_j \varphi(h), \dots)_{j \in J} = \varphi(h).$$

Таким образом, $\eta|_H = \varphi$. Теорема доказана.

Следствие 2.9. Для периодически полной группы T и редуцированной QPI -группы A без кручения справедливы следующие утверждения.

а. Если группа A сепарабельна, то $A \oplus T$ — QPI -группа.

б. Если A — векторная группа и $A = \sum_{j \in J}^* A_j$ — ее представление, указанное в следствии 2.3, то группа $A \oplus T$ является QPI -группой тогда и только тогда, когда существует конечное подмножество I множества J такое, что $(\Pi(A) \cap \Pi(T)) \subseteq \bigcup_{j \in J} \Pi(A_j)$.

в. Если группа A алгебраически компактна, то группа $A \oplus T$ является QPI -группой тогда и только тогда, когда $|\Pi(A) \cap \Pi(T)| < \omega_0$ и выполнено условие (i) теоремы 2.1.

Доказательство. Если выполняется посылка одного из утверждений а), б), в), то A является QPI -группой из L , всякая ее квазиоднородная компонента однородна и в случае неразложимости является связной группой (либо-группой ранга 1, либо аддитивной группой кольца Q_p^*). То есть для доказательства следствия можно применить теорему 2.4, причем ее условие (ii) в данном случае всегда выполнено. Если A — QPI -группа из L такая, что $A = \sum_{K \in Q(A)}^* K$, то хорошо вид-

но, что условие (iii) равносильно следующему условию:
(3) существует конечное подмножество Q' множества $Q(A)$ такое, что $(\Pi(A) \cap \Pi(T)) \subseteq \bigcup_{K \in Q'} \Pi(K)$.

Если группа A сепарабельна, то по следствию 2.3 $A = \bigoplus_{K \in Q(A)} K$ и $r_p(A) < \omega_0$ для всех $p \in \Pi$, т. е. выполнены условия (i), (iii). По теореме 2.4 справедливо а).

Если A — векторная группа, то по следствию 2.3 $A = \sum_{K \in Q(A)}^* K$ и $r_p(A) < \omega_0$ для всех $p \in \Pi$, т. е. выполнено условие (i), а условие (iii) эквивалентно условию (3). Согласно теореме 2.4 верно утверждение б).

Если A — алгебраически компактная группа, то $A = \sum_{K \in Q(A)}^* K$, причем каждая группа K является p -адической алгебраически компактной группой. Поэтому $|\Pi(K)| = 1$ для всех $K \in Q(A)$ и равносильные условия

(iii) и (3) эквивалентны тому, что $|\Pi(A) \cap \Pi(K)| < \omega_0$. Согласно теореме 2.4 верно утверждение в). Следствие доказано.

Отметим в заключение, что, учитывая последнее следствие и результаты [10], можно на примерах проверить независимость условий (i) — (iii) теоремы 2.4. В то же время ряд QPI -групп $A \in L$ (например, все редуцированные QPI -группы без кручения конечного ранга [10]) разложимы в прямую сумму своих квазиоднородных компонент. Для таких групп A , очевидно, излишним является условие (iii) теоремы 2.4. Условие (ii) излишне для групп A с однородными квазиоднородными компонентами, примеры этих групп содержатся в последнем следствии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Л. Я. Универсально полные абелевы группы. — В кн.: Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. М., 1956, с. 26—28.
2. Мишина А. П. Абелевы группы. — В кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М., 1979, т. 17, с. 3—64.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974, т. 1—336 с.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977. — 416 с.
5. Benabdallah K., Laroche A. Sur le probleme 17 de L. Fuchs. — Ann. Sci. Math. Qubec, 1977, v. 1, N 1, p. 63—65.
6. Berlinghoff W., Reid J. Quasi-pure-projective and injective groups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1977, v. 65, N 2, p. 189—193.
7. Добрусин Ю. Б. Об абелевых группах и модулях, близких к алгебраически компактным. — Томск, 1981. — 14 с. — Рукопись представлена Томским ун-том. Деп. в ВИНТИ 18 июня 1981, № 2922-81.
8. Добрусин Ю. Б. Модули над дедекиндовыми коммутативными областями, близкие к алгебраически компактным. — Томск, 1979. — 71 с. — Рукопись представлена Томским ун-том. Деп. в ВИНТИ 13 дек. 1979, № 4237-79.
9. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно-инъективные группы. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 45—63.
10. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1980, с. 45—69.

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ N -ВЫСОКИХ ПОДГРУПП

А. А. КРАВЧЕНКО

Дж. Ирвином была поставлена проблема описания тех подгрупп N абелевой группы A , для которых все N -высокие подгруппы изоморфны [1, проблема 3]. В данной работе исследуется класс α абелевых групп A , у которых для произвольной подгруппы N все N -высокие подгруппы изоморфны.

Получено описание отдельно для случая периодических групп из α (теорема 3), для случая групп без кручения (теорема 10 и 11) и для случая смешанных групп (теорема 14 и 16). При этом при описании групп несчетного ранга без кручения из α предполагается выполненной обобщенная гипотеза континуума.

Кроме того, показано, что класс групп α в точности совпадает с классом таких групп A , у которых для любых двух слабо сервантных подгрупп H_1 и H_2 из $r(H_1) = r(H_2)$ и $r(A/H_1) = r(A/H_2)$ следует $H_1 \cong H_2$.

Обозначения используются в основном такие же, как в [1 и 2]. Под $r(H_1) = r(H_2)$ понимается $r_0(H_1) = r_0(H_2)$ и $r_p(H_1) = r_p(H_2)$ для любого p (здесь $r_0(H)$ — ранг без кручения; $r_p(H) = \dim_{GF(p)} H[p]$).

Лемма 1. Подгруппа C группы A является N -высокой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: 1) $C \cap N = 0$; 2) C — слабо сервантная подгруппа в A ; 3) $C \oplus N$ — существенная подгруппа в A .

Доказательство легко следует из [1, лемма 9.8].

Теорема 2. $A \in \alpha$ тогда и только тогда, когда для любых слабо сервантных подгрупп H_1 и H_2 в A из $r(H_1) = r(H_2)$, $r(A/H_1) = r(A/H_2)$ следует $H_1 \cong H_2$.

Доказательство. Если H_1 и H_2 — N -высокие подгруппы в A и N_0 — слабо сервантная оболочка N , то $(H_i + N_0)/N_0$ — существенная подгруппа в A/N_0 ; $(N_0 + H_i)/H_i$ — существенная подгруппа в A/H_i , поэтому $r(H_1) = r(A/N_0) = r(H_2)$, $r(A/H_1) = r(N_0) = r(A/N_2)$. Следовательно, наши условия достаточны.

Покажем их необходимость. Для этого построим такую подгруппу $S \subseteq A$, что H_i и S — N_i -высокие подгруппы в A для некоторых подгрупп N_i ($i = 1, 2$).

Пусть S_i — $H_1 \cap H_2$ -высокие подгруппы в H_i ; H_0 и K_i — слабо сервантные оболочки в A подгрупп $H_1 \cap H_2$ и $S_i \oplus H_0$ соответственно. Так как $K_i \cap H_i$ — существенная подгруппа в K_i и в H_i , то K_i является N_i -высокой подгруппой в A тогда и только тогда, когда H_i — N_i -высокая подгруппа. Поэтому вместо H_i достаточно рассматривать группы K_i . У последних же $K_1 \cap K_2 = H_0$ — слабо сервантная подгруппа. Кроме того, $r(K_1) = r(H_1) = r(H_2) = r(K_2)$, аналогично $r(A/K_1) = r(A/K_2)$.

Зафиксируем теперь $p \geq 0$. Возможны два случая:

1. $r_p(K_1/K_1 \cap K_2) = r_p(K_2/K_1 \cap K_2)$. Здесь положим $S(p) = (tK_1)_p$ в случае простого p , а в случае $p = 0$ пусть $S(0)$ будет tK_1 -высокой подгруппой в K_1 .

2. Например, $r_p(K_1/K_1 \cap K_2) < r_p(K_2/K_1 \cap K_2)$. Так как $K_1 \cap K_2 = H_0$ — слабо сервантная подгруппа, то $r_p \times (K_1/K_1 \cap K_2) + r_p(K_1 \cap K_2) = r_p(K_1) = r_p(K_2) = r_p \times (K_2/K_1 \cap K_2) + r_p(K_1 \cap K_2)$. Отсюда $r_p(K_1 \cap K_2) = r_p(K_1) \geq \omega_0$, $r_p(K_1 \cap K_2) \geq r_p(K_2/K_1 \cap K_2)$, (*) S_i — $K_1 \cap K_2$ -высокие подгруппы в K_i . Покажем, что S_1 — K_2 -высокая подгруппа в $K_1 + K_2$, а S_2 — K_1 -высокая подгруппа в $K_1 + K_2$. В самом деле, $S_1 \cap K_2 = S_1 \cap K_1 \cap K_2$ и по лемме 1 нам достаточно убедиться в существенности $S_1 \oplus K_2$ в $K_1 + K_2$. Но это эквивалентно существенности $(S_1 \oplus K_2)/K_1 \cap K_2$ в $(K_1 + K_2)/K_1 \cap K_2$, затем существенности $(S_1 + K_1 \cap K_2)/K_1 \cap K_2 \oplus K_2/K_1 \cap K_2$ в $K_1/K_1 \cap K_2 \oplus K_2/K_1 \cap K_2$ и, наконец, существенности $S_1 + K_1 \cap K_2$ в K_1 . Но последнее верно, так как S_1 — $K_1 \cap K_2$ -высокая подгруппа в K_1 .

Если теперь T — $K_1 + K_2$ -высокая подгруппа, то $T \oplus S_1 \oplus K_2$ — существенная подгруппа в A , поэтому $r_p(T \oplus S_1) = r_p(T) + r_p S_1 = r_p(A/K_2) = r_p(A/K_1) = r_p(T) + r_p(S_2)$. Учитывая, что S_i — $K_1 \cap K_2$ -высокая подгруппа в K_i , получаем $r_p(S_i) = r_p(K_i/K_1 \cap K_2)$ и в силу условия 2) имеем $r_p(T) = r_p(A/K_1) \geq \omega_0$, $r_p(T) \geq$

$\geq r_p(K_2/K_1 \cap K_2)$ (**). (*) и (**) дают нам возможность выбрать слабо сервантные p -подгруппы (подгруппы без кручения при $p=0$) $F^1(p)$ со свойствами $F^1(p) \subset K_1 \cap K_2$, $r_p(F^1(p)) = r_p(K_1)$, $r_p(K_1 \cap K_2/F^1(p)) = \max \times \{\omega_0, r_p(K_2/K_1 \cap K_2)\}$ и $F^2(p) \subseteq I$, $r_p(F^2(p)) = \max \times \{\omega_0, r_p(K_2/K_1 \cap K_2)\}$, $r_p(T/F^2(p)) = r_p(A/K_1)$.

Если теперь $S(p)$ — слабо сервантная оболочка $F^1(p) \oplus F^2(p)$, то $r_p(S(p)) = r_p(F^1(p)) + r_p(F^2(p)) = r_p(K_1)$ (у нас $r_p(K_1) \geq \omega_0$ в силу (*)), $r_p(K_i/K_i \cap S(p)) = r_p(K_i/F^1(p)) = r_p(K_i/K_1 \cap K_2) + r_p(K_1 \cap K_2/F^1(p)) = \max \{\omega_0, r_p(K_2/K_1 \cap K_2)\} = r_p(F^2(p)) = r_p(S(p)/K_i \cap S(p))$ и, наконец, $r_p(A/S(p)) \leq r_p(A/F^1(p)) = r_p(A/K_1) + r_p(K_1/K_1 \cap K_2) + r_p(K_1 \cap K_2/F^1(p)) = r_p(A/K_1)$ (в силу (**)). С другой стороны, $T/F^2(p)$ вкладывается в $A/S(p)$ и поэтому $r_p(A/S(p)) \geq r_p(A/K_1)$. Следовательно, $r_p(A/S(p)) = r_p(A/K_1)$.

Пусть теперь L_i — слабо сервантная оболочка в A подгруппы $\bigoplus_{p>0} S(p)$, содержащая слабо сервантную оболочку в K_i подгруппы $(\bigoplus_{p>0} S(p)) \cap K_i$. Тогда $L_i \cap L_2$ — существенная подгруппа в L_i и $L_i \cap K_i$ — слабо сервантная подгруппа в A . Кроме того, $tL_i = \bigoplus_{p \neq 0} S(p)$ в силу слабой сервантности $S(p)$ и $\bigoplus_{p>0} S(p) \cap K_i$ — существенная подгруппа в $(\bigoplus_{p>0} S(p)) \cap K_i$ и в $L_i \cap K_i$.

Теперь мы имеем $r(L_i) = r(K_i)$; $r_p(A/L_i) = r_p(A/S \times (p)) = r_p(A/K_i)$; $r_0(L_i/L_i \cap K_i) = r_0(L_i/S(0) \cap K_i) = r_0 \times (S(0)/S(0) \cap K_i) = r_0(K_i/K_i \cap S(0)) = r_0(K_i/K_i \cap L_i)$, а при $p \neq 0$ в силу слабой сервантности $L_i \cap K_i$ получаем

$$\begin{aligned} r_p(L_i/L_i \cap K_i) &= r_p(L_i/t(L_i \cap K_i)_p) = r_p(L_i/S(p) \cap K_i) = \\ &= r_p(S(p)/S(p) \cap K_i) = r_p(K_i/K_i \cap S(p)) = \\ &= r_p(K_i/K_i \cap L_i). \end{aligned}$$

Далее построим такие подгруппы N_i в A , что K_i и $L_i - N_i$ — высокие подгруппы. Для этого в $K_i \cap L_i$ — высоких подгруппах групп K_i и L_i выберем существенные подгруппы P_i и R_i соответственно в виде $P_i = \bigoplus_{p>0} P_i(p)$, $R_i = \bigoplus_{p>0} R_i(p)$, где $P_i(0)$, $R_i(0)$ — свободные, а $P_i(p)$, $R_i(p)$ — элементарные группы при $p > 0$.

Пусть $P_i(p) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{n}_p^i} \langle \alpha x_p^i \rangle$; $R_i(p) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{m}_p^i} \langle \alpha y_p^i \rangle$ ($i=1, 2$; $p \geq 0$). У нас $|\mathfrak{n}_p^i| = |\mathfrak{m}_p^i|$ в силу $r_p(L_i/L_i \cap K_i) = r_p(K_i/K_i \cap L_i)$, поэтому считаем $\mathfrak{n}_p^i = \mathfrak{m}_p^i$. Если теперь $T_i - K_i + L_i$ -высокие подгруппы в A и $N_i = T \oplus \bigoplus_{p>0} (\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{n}_p^i} \langle \alpha x_p^i + \alpha y_p^i \rangle)$, то K_i и $L_i - N_i$ -высокие подгруп-

пы. Так как $L_1 \cap L_2$ — существенная подгруппа в L_i , то $S = L_1$ является N_i -высокой подгруппой для $i=1, 2$. Но тогда H_i и S также N_i -высокие подгруппы, поэтому $H_1 \cong S \cong H_2$.

Ясно, что периодическая группа $A \in \mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда $tA_p \in \mathfrak{a}$ для любого p .

Теорема 3. p -группа $A \in \mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда $A \cong \bigoplus Z(p^n)$, где $n \leq \infty$ фиксировано*.

Доказательство. По теореме 2 в группе A любые две сервантные подгруппы ранга 1 изоморфны и поэтому в $A[p]$ все элементы имеют одинаковую высоту, то есть A имеет нужный нам вид. С другой стороны, если H_1 и H_2 слабо сервантные подгруппы в $\bigoplus Z(p^n)$ одинакового ранга, то H_1 и H_2 — изоморфные сервантные подгруппы [6] и $A \in \mathfrak{a}$ по теореме 2.

Определение. Пусть $p_1, \dots, p_n, \dots$ — все различные простые числа, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ — целые неотрицательные числа, $\lambda = (\lambda_1, \dots)$. Для любой группы H положим $\lambda H = \bigcap p_i^{\lambda_i} H$. Группа $G \supseteq H$ называется λ -расширением группы H (обозначение $G = \lambda^{-1}H$), если H — существенная подгруппа в G и $\lambda G = H$.

Лемма 4. Для любой группы H и любого вектора λ существует λ -расширение $\lambda^{-1}H$, причем любые два λ -расширения G_1 и G_2 изоморфны над H . Более того, любое вложение G_1 в G_2 над H является изоморфизмом G_1 на G_2 . Если $H = \bigoplus H_i$, то существует изоморфизм $\lambda^{-1}H$ на $\bigoplus \lambda^{-1}H_i$ над H .

Доказательство. Делимая оболочка D группы H содержит единственное λ -расширение группы H : $\lambda^{-1}H = \langle g \in D \mid \exists i: p_i^{\lambda_i} g \in H \rangle$.

* Другим способом этот результат был получен С. К. Скоблинским (не опубликован).

Лемма 5. Пусть H — подгруппа в G , $H \subseteq \lambda G$. Тогда H имеет λ -расширение в G . Если H — существенная подгруппа в G , то такое λ -расширение единственно.

Предложение 6. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots)$, Группа $A \in \alpha$ в том и только в том случае, если $\lambda^{-1}A \in \alpha$.

Доказательство. Допустим, $A \in \alpha$; B_1 и B_2 — N -высокие подгруппы в $\lambda^{-1}A$. Покажем, что $\lambda B_i = A \cap B_i$. Очевидно, $\lambda B_i \subseteq \lambda(\lambda^{-1}A) \cap B_i = A \cap B_i$. С другой стороны, если $d \in A \cap B_i$, то $h_{p_j}^{\lambda^{-1}A}(d) \geq \lambda_j$, поэтому $h_{p_j}^{B_i}(d) \geq \lambda_j$ по лемме 7 (см. ниже), то есть $d \in \lambda B_i$, $\lambda B_i = A \cap B_i$. Группа A существенна в $\lambda^{-1}A$ и поэтому $\lambda B_i = A \cap B_i$ — слабо сервантная подгруппа в A , существенная в B_i . Тогда $\lambda B_i \oplus N \cap A$ — существенная подгруппа в A и по лемме 1 у нас $\lambda B_i - N \cap A$ — высокие подгруппы в A . Так как $A \in \alpha$, то $\lambda B_1 \cong \lambda B_2$ и поэтому $B_1 \cong \lambda^{-1}(\lambda B_1) \cong \lambda^{-1}(\lambda B_2) \cong B_2$, $\lambda^{-1}A \in \alpha$.

Допустим теперь, $\lambda^{-1}A \in \alpha$, B_1 и B_2 — N -высокие подгруппы в A . Пусть $\lambda^{-1}B_i$ — некоторые λ -расширения B_i в $\lambda^{-1}A$; L_i — слабо сервантные оболочки $\lambda^{-1}B_i$ в $\lambda^{-1}A$. По лемме 5, если $L_i \supset \lambda^{-1}B_i$, то $\lambda L_i \supset B_i$, $\neq$ $\neq$ и так как по доказанному ранее $\lambda L_i = A \cap L_i \subseteq A$, то B_i имеет собственное существенное расширение λL_i в A . Этого быть не может в силу слабой сервантности B_i в A . Итак, $\lambda^{-1}B_i$ — слабо сервантные подгруппы в $\lambda^{-1}A$ и тогда $\lambda^{-1}B_i$ — N -высокие подгруппы в $\lambda^{-1}A$, $B_1 = \lambda(\lambda^{-1}B_1) \cong \lambda(\lambda^{-1}B_2) = B_2$, $A \in \alpha$.

Лемма 7. Допустим, $h_p(a) \geq \alpha$ для любого $a \in A[p]$. Тогда если B — p -слабо сервантная подгруппа в A и $h_p^A(b) \geq \kappa$ для некоторого $b \in B$, $\kappa \leq \alpha + 1$, то $h_p^B(b) \geq \kappa$.

Доказательство. Если $b = p^k h$, $\kappa > 0$, то $b = p b_1$ для некоторого $b_1 \in B$, $p^{\kappa-1}h - b_1 \in A[p]$ и поэтому $h_p(b_1) \geq \kappa - 1$. Продолжая таким образом, убеждаемся в справедливости леммы.

Займемся теперь группами $A \in \alpha$ без кручения.

Лемма 8. Пусть $A \in \alpha$ без кручения; H — сервантная подгруппа в A ранга $n < \infty$. Тогда если существует гомоморфизм $\varphi: H \rightarrow A$ с нетривиальным ядром, то любая сервантная подгруппа в A ранга, не большего n , вполне разложима.

Доказательство. Проведем индукцию по n . По теореме 2 у нас A — однородная группа и поэтому если

$n = 2$, то H (а тогда и любая сервантная подгруппа ранга 2) вполне разложима.

Допустим, все уже доказано для $n - 1$. Выберем тогда в H такую сервантную подгруппу H_1 , что $r_0(H_1) = n - 1$ и $\varphi|_{H_1}$ имеет нетривиальное ядро. По предположению индукции все сервантные подгруппы группы A ранга, не большего $n - 1$, вполне разложимы. Но тогда $\text{Ker } \varphi$ и $\text{Im } \varphi$ вполне разложимы и H вполне разложима по [2, пример 86.5].

Следствие. Если $A \in \mathfrak{a}$ — группа без кручения конечного ранга n ; B — сервантная подгруппа в A и $r_0 \text{Hom}(B, A) > n$, то B вполне разложима.

Доказательство. Если H — подгруппа в B ранга 1, то в силу точности последовательности $0 \rightarrow \text{Hom}(B/H, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A) \rightarrow \text{Hom}(H, A)$ и $r_0 \text{Hom}(B, A) > n \geq r_0 \text{Hom}(H, A)$ имеем $(B/H, A) \neq 0$ и применима лемма 8.

Лемма 9. Пусть $A \in \mathfrak{a}$ без кручения конечного ранга $n \geq 3$; H — сервантная подгруппа в A ранга $n - 1$. Тогда $r_0 \text{Hom}(H, A) \geq n - 1 + \kappa$, где $\kappa = r_0(\text{End } H)$.

Доказательство. В силу леммы 8 можно считать, что любой $0 \neq \varphi \in \text{Hom}(H, A)$ является мономорфизмом. Выберем базисы $a_1, \dots, a_n$ в A и $h_1, \dots, h_{n-1}$ в H . Положим $C_1 = \langle a_2, \dots, a_n \rangle_*$ и возьмем в качестве φ_1 изоморфизм H на $C_1 \subseteq A$ (см. теорему 2). Допустим, что мы уже выбрали независимые гомоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ группы H в A , где $1 \leq m - 1 \leq n - 1$. В выбранных базисах гомоморфизмы φ_i будут иметь $n \times (n - 1)$ матрицы $[\varphi_i]$ ($i \leq m - 1$) с рациональными элементами. Мы утверждаем, что путем изменения базиса $a_1, \dots, a_n$ мы можем добиться линейной независимости m -х строк матриц $[\varphi_i]$ ($i \leq m - 1$). В самом деле, допустим противное. В частности, это означает, что если мы в матрицах $[\varphi_i]$ заменим m -е строки линейной комбинацией первых m строк с коэффициентами c_j ($j \leq m, c_m \neq 0$), то полученные m -е строки будут линейно-зависимы для любого такого набора $\{c_j\}$. Приведем это к противоречию. Для начала заменим m -е строки наших матриц такой линейной комбинацией первых m строк, чтобы среди полученных m -х строк было максимальное число линейно-независимых. При фиксированном j , затем из j -х строк новых матриц

формируем $(n-1) \times (m-1)$ матрицу (j -е строки располагаем в ней по столбцам), которую интерпретируем как матрицу линейного отображения ψ_j $(m-1)$ -мерного линейного пространства L над Q в $(n-1)$ -мерное линейное пространство C . Нам также известно, что для любого набора целых чисел $\{c_j | j \leq m, c_m \neq 0\}$ отображение

$\sum_{j=1}^m c_j \psi_j$ имеет ненулевое ядро, причем в силу нашего

выбора m -х строк $\dim \text{Im} \psi_m \geq \dim \text{Im} \sum c_j \psi_j$. Докажем, что в этом случае $\dim \langle \psi_j(b) | j \leq m \rangle_Q \leq m-2$ для некоторого $0 \neq b \in L$. Тогда это будет означать, что у некоторой нетривиальной линейной комбинации строк матриц $[\varphi_i]$ среди первых m строк будет не более $m-2$ линейно-независимых. Тем самым, для некоторого $0 \neq \varphi \in \text{Hom}(H, A)$ у нас $r_0(\varphi(A) \cap \langle a_1, \dots, a_m \rangle) \leq m-2$, $r_0(\varphi(A)) \leq n-2$, $\text{Ker} \varphi \neq 0$.

Если подходящим образом выбрать базис $b_1, \dots, b_{m-1}$ в L и базис в C , то матрица $[\psi_m]$ отображения ψ_m будет иметь вид (a_{ij}^m) , где первые p элементов главной диагонали ($p < m-1$) равны 1, а остальные элементы матрицы нулевые. Для любого $0 \neq \lambda \in Z$ и $l \leq m$ имеем $\dim \text{Im}(\psi_l - \lambda \psi_m) \leq \dim \text{Im} \psi_m = p$ и поэтому определитель любого минора порядка $p+1$ матрицы $[\psi_l - \lambda \psi_m]$ должен равняться нулю. Но определитель является полиномом от λ и поэтому все его коэффициенты должны быть нулевыми. Если $[\psi_l] = (a_{ij}^l)$, то отсюда $a_{ij}^l = 0$ при $l \leq m, i > p, j > p$, так как эти элементы служат коэффициентами при λ^p в определителях подходящим образом выбранных миноров порядка $p+1$ матрицы $[\psi_l - \lambda \psi_m]$. Но тогда $\dim \langle \psi_j(b_{m-1}) | j \leq m \rangle_Q \leq p < m-1$, что и требовалось.

Итак, в некотором базисе $d_1, \dots, d_n$ группы A матрицы $[\varphi_i]$ ($i \leq m-1$) будут иметь линейно-независимые m -е строки. В качестве ψ_m возьмем изоморфизм H на $\langle d_1, \dots, d_{m-1}, d_{m+1}, \dots \rangle_* = C_m$. Если же $m = n$, то из $r_0 \text{End } H = \kappa$ и $H \cong C_n$ следует $r_0 \text{Hom}(H, C_n) = \kappa$ и мы можем выбрать в $\text{Hom}(H, C_n)$ κ линейно-независимых элементов $\beta_1, \dots, \beta_\kappa$. Так как в базисе $d_1, \dots, d_n$ у нас n -е строки матриц $[\beta_i]$ нулевые, то элементы $\{\beta_i\}$ и $\{\varphi_j\}$ линейно независимы и тем самым $r_0 \text{Hom}(H, A) \geq n-1 + \kappa$.

Теорема 10. Допустим, A — группа без кручения конечного ранга $n > 1$. Тогда $A \in \alpha$ в том и только в том случае, если либо A однородная группа, в которой любая сервантная подгруппа ранга $n-1$ вполне разложима, либо A сильно однородная группа, в которой любая сервантная подгруппа ранга $n-2$ вполне разложима.

Доказательство. Пусть $A \in \alpha$. По теореме 2 тогда A однородная группа. Покажем сначала, что любая сервантная подгруппа $H \subseteq A$ ранга $n-2$ вполне разложима. Доказательство проведем от противного. Вложим H в сервантную подгруппу C_1 ранга $n-1$. Как и в доказательстве леммы 9, мы можем построить базис $b_1, \dots, b_{n-1}$ в C_1 и в H , в которых элементы $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \in \text{Hom}(H, C_1)$ будут иметь матрицы $[\varphi_i]$ с линейно-независимыми $n-1$ -ми строками. Если теперь $b_1, \dots, b_{n-1}, b_n$ — базис в A и $C_2 = \langle b_1, \dots, b_{n-2}, b_n \rangle_*$, то любой ненулевой элемент из $\text{Hom}(H, C_2)$ линейно не зависит от $\{\varphi_i\}$. Следовательно, $r_0 \text{Hom}(H, A) \geq n-2 + r_0 \text{Hom}(H, C_2) \geq n-2 + n-1$. Так как H не вполне разложима, то $r_0 A > 3$ и поэтому $r_0 \text{Hom}(H, A) > n$. По следствию после леммы 8 группа H вполне разложима. Противоречие.

Теперь нам следует рассмотреть случай, когда в группе A не все сервантные подгруппы ранга $n-1$ вполне разложимы. Докажем сначала, что тогда любой эндоморфизм $0 \neq \varphi$ группы A — некоторое кратное автоморфизма. Заметим, что φ — мономорфизм по лемме 8. В силу однородности группы A наше утверждение будет доказанным, если мы покажем, что для произвольных элементов $0 \neq a, b \in A$ с одинаковыми характеристиками $\chi(a) = \chi(b)$ у нас $\chi(\varphi(a)) = \chi(\varphi(b))$. Но, в самом деле, элементы a, b лежат в некоторой сервантной подгруппе H ранга $n-1$. Так как H не вполне разложима, то $r_0 \text{Hom}(H, A) \leq n$ по следствию после леммы 8 и $r_0 \text{End} H = 1$ в силу леммы 9. Поэтому $r_0 \text{Hom}(H, \varphi(H)_*) = 1$ и если ψ — изоморфизм H на $\varphi(H)_*$, то $m\psi|_H = n\varphi$ для некоторых $0 \neq m, n \in \mathbb{Z}$. Так как $\chi(\psi(a)) = \chi(\psi(b))$, то отсюда $\chi(\varphi(a)) = \chi(\varphi(b))$.

Далее, если $\tau(A) \ni (\tau_1, \dots, \tau_n, \dots)$ и $\lambda = (\lambda_1, \dots)$, где $\lambda_i = \tau_i$ при $\tau_i < \infty$ и $\lambda_i = 0$ при $\tau_i = \infty$, то $\tau(\lambda A)$ идемпотентен и потому в силу предложения 6 без ограничения общности считаем, что сама группа A имеет идемпотентный тип. Покажем, что A — сильно однородная группа. Зафиксируем в группе A сервантные подгруп-

пы $N \subseteq H$ рангов 1 и $n-1$ соответственно. По лемме 8 у нас $\text{Hom}(H/N, A) = 0$ и поэтому последовательность $0 \rightarrow \text{Hom}(H, A) \rightarrow \text{Hom}(N, A) \cong A \rightarrow 0$ точна слева. Покажем ее точность справа. Пусть $0 \neq \varphi \in \text{Hom}(N, A)$. Так как $r_0 \text{Hom}(H, A) \geq n$ по лемме 9, то $m\varphi = \varphi_1|_N$ для некоторых $0 \neq m \in \mathbb{Z}$, $\varphi_1 \in \text{Hom}(H, A)$. Если ψ — изоморфизм H на $(\varphi_1(H))_*$, то из $r_0 \text{End} H = 1$ следует линейная зависимость ψ и φ_1 и тогда $\kappa\psi|_N = l\varphi$, $(\kappa, l) = 1$. Так как $\text{Im } \psi|_N$ — сервантная подгруппа в A , то в ней можно делить на l , откуда (учитывая однородность A) имеем $(\kappa/l)\psi \in \text{Hom}(H, A)$ и $(\kappa/l)\psi|_N = \varphi$, что и требовалось.

Теперь если $R = \text{End } A$, то $R = \text{Hom}(A, A) \cong \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(H, A)) \cong \text{Hom}(A \otimes H, A) \cong \text{Hom}(H, R)$ и $\text{Hom}(H, R) \neq 0$. Если $0 \neq a \in A$, то отображение $\varphi \rightarrow \varphi(a)$ осуществляет вложение R в A . Поэтому если $0 \neq \varphi \in \text{Hom}(H, R)$, то $r_0\varphi(H) = n-1$ по лемме 8, $r_0R \geq n-1$. Так как $Q \otimes A$ — модуль над телом $Q \otimes R$, то r_0R делит r_0A и потому $r_0R = n$.

Точность последовательности $0 \rightarrow \text{Hom}(A, A) \rightarrow \rightarrow \text{Hom}(N, A) \rightarrow 0$ слева следует из леммы 8. Если же $0 \neq \varphi \in \text{Hom}(N, A)$, то $m\varphi = s\psi|_N$, где $(m, s) = 1$; ψ — автоморфизм A . Тогда $(s/m)\psi \in \text{End } A$, $\varphi = (s/m)\psi|_N$, наша последовательность точна справа.

Теперь если $0 \neq b \in N$, $0 \neq a \in N$ — два произвольных элемента одинаковой характеристики, то $\psi(b) = a$ для некоторого $\psi \in \text{End} A$. Тогда ψ не просто кратен автоморфизму, а сам есть автоморфизм. Следовательно, A — сильно однородная группа.

Докажем теперь достаточность наших условий. В силу предложения 6 без ограничения общности считаем тип $\tau(A)$ идемпотентным. Если A разложимая сильно однородная группа, то из [3, следствие 2] получаем $A \cong \bigoplus A_i$, где A_i — попарно изоморфны. Тогда $r_0A_i \leq n-2$ и потому A_i (а тогда и A) вполне разложимы. Но тогда в силу теоремы 2 и [2, теорема 86.6] имеем $A \in \mathfrak{a}$. Если же A однородная группа, в которой любая сервантная подгруппа ранга $n-1$ вполне разложима, то снова $A \in \mathfrak{a}$ по теореме 2 и [2, теорема 86.6].

Итак, считаем, что A — неразложимая сильно однородная группа идемпотентного типа. Нам нужно показать, что любые две сервантные подгруппы ранга $n-1$ изоморфны. В силу [3, теорема 1] у нас $A \cong$

$\cong R = \text{End } A$, где R — коммутативное кольцо, в котором любой элемент — некоторое кратное обратимого элемента. Для некоторого $a \in R$ имеем $Q \otimes R = Q(a)$ то есть $\langle 1, a, a^{n-1} \rangle_* = R (n = r_0 A)$. Пусть $H = \langle 1, a, \dots, a^{n-2} \rangle_*$ и N — произвольная сервантная подгруппа в R ранга $n-1$. Покажем, что $H \cong N$. Выберем базис $b_1, \dots, b_{n-1}$ в N , $b_i = \sum c_j^i a^j$ ($c_j^i \in Q$). Так как любой элемент из R — некоторое кратное обратимого элемента, то нам достаточно найти такой элемент $0 \neq b \in R$, что $bN \subseteq H$. Запишем элемент b в виде $b = \sum_{i=0}^{n-1} x_i a^i$. $bN \subseteq H$ означает, что $b \cdot b_i \in H$ ($i = 1, \dots, n-1$).

Если мы выразим произведение $b \cdot b_i$ через $1, a, \dots, a^{n-1}$, то мы должны получить нулевые коэффициенты при a^{n-1} . Так как мы имеем $n-1$ элемент b_i , то тем самым получим $n-1$ линейное однородное уравнение для x_i ($i = 0, \dots, n-1$). Следовательно, всегда найдется ненулевое целочисленное решение $x_0, \dots, x_{n-1}$ и $\sum x_i a^i = b$ будет искомым элементом.

Теорема 11. Группа A без кручения бесконечного ранга лежит в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда A — однородная вполне разложимая группа.

Доказательство. Достаточность наших условий очевидна в силу теоремы 2 и [2, теорема 86.6]. Покажем их необходимость.

Напомним, что подмножество $\{c_\alpha\}_{\alpha \in L}$ в A называется сервантно независимым, если оно независимо и $\bigoplus_L \langle c_\alpha \rangle_* = (\bigoplus_L \langle c_\alpha \rangle)_*$. Пусть $\{c_\alpha\}_{\alpha \in L}$ — максимальное сервантно независимое подмножество; $n = |L|$; $m = |A|$. Покажем, что $m^n \geq 2^m$. Достаточно рассмотреть случай $n < m$. Пусть $S = \bigoplus \langle c_\alpha \rangle_*$; $S \leq H$; $H = H_*$; $r_0(A/H) = 1$; $c \notin H$. Выберем в H базис $\{h_j | j \in \mathfrak{a}\}$. Если b_j — это либо h_j , либо $h_j + c$ ($j \in \mathfrak{a}$), то тем самым мы можем получить 2^m различных сервантных подгрупп $H_\gamma = \langle b_j | j \in \mathfrak{a} \rangle_*$. Так как все $H_\gamma - \langle c \rangle$ — высокие подгруппы, то $H \cong H_\gamma$ и тем самым $|\text{Hom}(H, A)| \geq 2^m$. С другой стороны, из [2, предложение 86.5] у нас $\tau(\bar{a}) > \tau(A)$ для любого $\bar{a} \in H/S$ и тем самым точна последовательность $0 \rightarrow \text{Hom}(H, A) \rightarrow \text{Hom}(S, A)$; $2^m \leq |\text{Hom}(S, A)| = m^n$. Если теперь $m = \omega_0$, то $n = \omega_0$ и в A существует сервантная вполне разложимая под-

группа счетного ранга. Отсюда по теореме 2 любая сервантная подгруппа конечного ранга вполне разложима и тем самым A вполне разложима. В несчетном же случае из [4, теорема 2. 5] следует $n^{m_0} \geq m$ и тогда $2^m \leq m^n \leq n^n = 2^n$, откуда при выполнении обобщенной гипотезы континуума $m = n$. Далее строим цепь сервантных подгрупп $\{L_i | i < \omega\}$ с условием $L_1 \subseteq S$, $L_i \subseteq L_{i+1}$, $|L_i| = |A/L_i| = m$, $\bigcup L_i = A$. По теореме 2 у нас $L_1 \cong L_i$, так как $L_1 \subseteq S$ — вполне разложимая однородная группа, то группы L_i вполне разложимы. Тогда так же, как в [7], можно доказать, что A вполне разложима. (В [7] рассматривается случай, когда $\tau(A) \ni (0, \dots, 0, \dots)$, но это ограничение несущественно.)

Определение. Для произвольной группы A через $T(A)$ обозначим тип, содержащий характеристику $(\lambda_1, \dots)$, где $\lambda_n = \inf (h_{p_n}(a) + 1)$ по всем $a \in A[p_n]$ (считаем $\infty + 1 = \infty$).

Лемма 12. Пусть $A \in \mathfrak{a}$; H — слабо сервантная подгруппа в A . Тогда $H, (A/\bigoplus_L A_p) \in \mathfrak{a}$.

Доказательство легко проводится с помощью теоремы 2.

Лемма 13. Если $A \in \mathfrak{a}$ и $a \notin tA$, то $\tau(a) \leq T(A)$.

Доказательство. Пусть $\chi(a) = (\alpha_1, \dots)$; $(tA)_{p_i} \cong \bigoplus \bigoplus Z(p_i^{k_i})$ (см. теорему 3). Допустим, $\alpha_i > \lambda_i > 0$ при $i \in I$. Тогда $\lambda_i < \infty$ при $i \in I$. Предположим, что $\alpha_j = \infty$ при некотором $j \in I$. У нас $A = H \bigoplus (tA)_{p_j}$. Так как $0 \neq \lambda_j < \infty$, то выберем $c \in (tA)_{p_j}$, $h_{p_j}(c) = 0$. Для некоторого n у нас $0 \neq na \in H$. Слабо сервантная оболочка элемента na в H является p_j -делимой и поэтому не может быть изоморфной слабо сервантной оболочке элемента $a + c$.

Итак, $\alpha_i < \infty$ при $i \in I$. Для $i \in I$ выберем такие $z_i \in (tA)_{p_i}$, $b_i \in A$, что $p_i^{2i}b_i = a$, $h_{p_i}(z_i) = 0$. Пусть N_1, N_2 — слабо сервантные оболочки подгрупп $\langle b_i | i \in I \rangle$ и $\langle p_i^{2i-\lambda_i}b_i + z_i | i \in I \rangle$ соответственно. Так как элементы b_i соответствуют различным p_i , то N_i — группы без кручения ранга 1 и $N_1 \cong N_2$ по теореме 2. Но $h_{p_i}^{N_2}(a) = \lambda_i$ и $h_{p_i}^{N_1}(a) = \alpha_i$ при $i \in I$. Поэтому из $\lambda_i > \alpha_i$ ($i \in I$) и $N_1 \cong N_2$ следует конечность I .

Теорема 14. Пусть $r_0 A = 1$. Тогда $A \in \mathfrak{a}$ в том и только в том случае, если $tA \in \mathfrak{a}$ и выполнены следующие условия: 1) $N = \bigoplus_I (tA)_{p_i}$ — прямое слагаемое в A для $I = \{i | r_{p_i}(A_{p_i}) > 1\}$; 2) если $(tA)_p$ не делимая группа, то A/tA — не p -делимая группа; 3) для некоторого (а тогда и для любого) $a \in A \setminus tA$ выполнено $\tau(a) \leq T(A)$.

Доказательство. Допустим, $A \in \mathfrak{a}$. Тогда 2) следует из леммы 15 (см. ниже), а 3) — из леммы 13. Докажем теперь 1): $tA = N \oplus N_1$, $A/N_1 \in \mathfrak{a}$ по лемме 12. Поэтому без ограничения общности здесь можно считать, что $tA = N$. Пусть $a \in A \setminus tA$; $\chi_{A/tA}(a + tA) = (\lambda_1, \dots)$, $0 \neq (tA)_{p_i} = \bigoplus Z(p_i^{\kappa_i})$ (теорема 3), $\kappa_i < \infty$ при $i \in L \subseteq I$. Тогда $\lambda_i < \infty$ при $i \in L$ по лемме 15. Найдутся такие $b_i \in A$, $c_i \in (tA)_{p_i}$, что $a = p_i^{\lambda_i} b_i + c_i$, $i \in L$. Для каждого $i \in L$ выберем такие элементы d_i , что $h_{p_i}(d_i) = 0$ и $c_i \in \langle d_i \rangle$. Тогда если $D = \bigoplus_L \langle d_i \rangle$, то $tA = D \oplus F$. По [5, теорема 3] группа A/D расщепляется и поэтому $A = K \oplus F$, где $D = tK$. У нас $r_{p_i}(tA)_{p_i} \geq 2$ и поэтому F содержит прямое слагаемое $D_1 \cong D$. Если теперь K_1 — слабо сервантная оболочка $\langle a, D_1 \rangle$, то $K_1 \cong K$ по теореме 2. Но так как K_1 расщепляется, то расщепляется K , а тогда и A .

Покажем теперь достаточность наших условий. Пусть H_1 и H_2 — слабо сервантные подгруппы в A и $r(H_1) = r(H_2)$. По теореме 2 нам достаточно показать, что $H_1 \cong H_2$. Так как $tA = \bigoplus_p (\bigoplus Z(p^{\kappa}))$, то $tH_1 \cong \bigoplus_p Z(p^{\kappa}) \cong tH_2$. Поэтому если H_i — периодические группы, то $H_1 \cong H_2$. Считаем поэтому, что $r_0(H_i) = 1$. Тогда $H_i = N_i \oplus \bigoplus_j (tH_i)_{p_j}$ ($i = 1, 2$). Последнее верно в силу того, что $\bigoplus_j (tA)_{p_j}$ — прямое слагаемое в A . Нам нужно показать, что $N_1 \cong N_2$. Выберем $b \in N_1 \cap N_2$, $0(b) = \infty$. Ясно, что $\tau(b) = \tau(a)$ (у нас $r_0 A = 1$ и выполнен пункт 2). По элементу b строим высотные матрицы M, M_1, M_2 для групп A, N_1, N_2 . В силу [2, следствие 104.4] нам нужно показать, что M_1 и M_2 эквивалентны. Пусть $J = \{j | (tN_1)_{p_j} \neq 0\}$. По построению N_i у нас $J \cap I = \emptyset$ и тогда в силу $r_{p_j}(A) = 1$ при $j \notin I$ и слабой сервант-

ности $(tN_i)_{p_j}$ у нас $(tA)_{p_j} = (tN_i)_{p_j}$ ($j \in J$). Так как $\tau(b) \leq T(A)$, то $\tau_{N_1}(b) = \tau(b) = \tau_{N_2}(b)$ по лемме 7. Заметим далее, что $(tN_i)_{p_k} = 0$ при $k \notin J$ и поэтому k -строки матриц M_1 и M_2 не имеют скачков при $k \in J$. Из $\tau_{N_1}(b) = \tau_{N_2}(b)$ получаем, что для $k \notin J$ лишь конечное число строк может отличаться на некоторые сдвиги. Если же $k \in J$, то $(tN_i)_{p_k} = (tA)_{p_k}$ и поэтому $N_i - p_x$ -сервантные подгруппы в A . Но тогда k -строки матриц M , M_1 , M_2 совпадают при $k \in J$.

Лемма 15. Пусть $A \in \mathfrak{a}$; $r_0 A = n < \infty$; $(tA)_p$ — не делимая группа для некоторого p . Тогда p -ранг группы A/tA равен n .

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что $A = K \oplus A_p$. По лемме 12 $A/tK \in \mathfrak{a}$ и поэтому без ограничения общности считаем $tK = 0$. Пусть теперь $B - p$ -базисная подгруппа в K . Допустим, $r_0 B = m < n$. Положим тогда $F = B_* \subset K$ и выберем элементы $a \in K \setminus F$ и $0 \neq b \in A_p$. Если теперь N_1 и N_2 — слабо сервантные оболочки $\langle a, F \rangle$ и $\langle a + b, F \rangle$ соответственно, причем N_1 выбрана в K , то $N_1 \cong N_2$ по теореме 2. Но это невозможно, так как p -ранг N_1 равен m , а p -ранг N_2 равен $m + 1$ (N_2/F не p -делимая группа).

Теорема 16. Допустим, $r_0 A > 1$. Тогда $A \in \mathfrak{a}$ в том и только в том случае, если $tA \in \mathfrak{a}$, $A = tA \oplus N$ и выполнено одно из условий:

- 1) tA делимая группа и $N \in \mathfrak{a}$;
- 2) N — вполне разложимая однородная группа, причем $\tau(N) \leq T(A)$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{a}$. Если tA делимая группа, то $A = tA \oplus N$ и $N \in \mathfrak{a}$ по лемме 12. Будем поэтому считать, что tA — неделимая группа. Рассмотрим сначала случай $tA \cong \bigoplus Z(p^k)$, где $0 < k < \infty$, p и k фиксированы и $r_0 A = n < \infty$. В этом случае $A = tA \oplus N$, $N \in \mathfrak{a}$. Покажем, что N — однородная вполне разложимая группа. По следствию после леммы 8 для этого достаточно убедиться в том, что $r_0 \text{End } N > n$.

Пусть $\bar{N} = N/pN$. Для $a \in N$ положим $\bar{a} = a + pN \in \bar{N}$. По лемме 15 у нас $r_p \bar{N} = n$. Если $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ — базис в $\bar{N}$, то $a_1, \dots, a_n$ — базис p -базисной подгруппы группы N . Допустим, π — проекция A на N и $c \in tA$, $h_p(c) = 0$. Легко видеть, что $K = \langle p^2 N, pa_1 + c, a_2, \dots, a_n \rangle - tA$ -высокая подгруппа. Так как $A \in \mathfrak{a}$, то $N \cong$

$\cong K \cong \pi(K) = \langle p^2 N, pa_1, a_2, \dots, a_n \rangle \subseteq N$, причем $pN \subseteq \pi(K)$. Если $\psi \in \text{End } N$, $\psi(N) = \pi(K)$, то существует $\bar{\psi}^{-1} \in \text{End } (Q \otimes N)$, причем $\varphi = p\bar{\psi}^{-1}(N) \subseteq N \subseteq Q \otimes N$, то есть $\varphi \in \text{End } N$. Пусть $\bar{\varphi}$ — индуцированный φ элемент из $\text{End } \bar{N}$. Если $\bar{\varphi}(\bar{x}) = 0$, то $\varphi(x) \in pN$, $\psi^{-1}(x) \in N$, $x = \psi(y)$ для некоторого $y \in N$, $\bar{x} \in \text{Im } \bar{\psi}$. Верно и обратное. Таким образом, $\text{Ker } \bar{\varphi} = \text{Im } \bar{\psi} = \langle \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \rangle$.

Через G обозначим подкольцо в $\text{End } \bar{N}$, порожденное элементами из $\text{End } N$. В силу произвольности выбора базиса $\{\bar{a}_i\}$ в $\bar{N}$ нами показано, что для любого подпространства $\bar{M} \subseteq \bar{N}$ размерности $n-1$ у нас $\text{Ker } \bar{f} = \bar{M}$ для некоторого $\bar{f} \in G$. Если мы покажем, что $\dim G > n$, то получим $r_0 \text{End } N > n$.

Пусть $\bar{f}_i \in G$ таковы, что $\text{Ker } \bar{f}_i = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \dots \rangle$. Тогда $\bar{f}_i$ независимы. Если $\bar{\varepsilon}$ — тождественный эндоморфизм из G и $\bar{\varepsilon}$ не зависит от $\{\bar{f}_i\}$, то все в порядке. В противном случае $\bar{\varepsilon} = \sum c_i \bar{f}_i$, $\bar{a}_j = \sum c_i \bar{f}_i \times (\bar{a}_j) = c_j \bar{f}_j(\bar{a}_j)$, $\bar{f}_j(\bar{a}_j) = \alpha_j \bar{a}_j$. Если теперь $\text{Ker } \bar{\psi} = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-1} - \bar{a}_n \rangle$, то $\bar{\psi}$ не зависит от $\{\bar{f}_i\}$. В самом деле, из $\bar{\psi} = \sum c_i \bar{f}_i$ следует $\bar{\psi}(\bar{a}_{n-1}) = c_{n-1} \times \bar{f}_{n-1}(\bar{a}_{n-1}) = \beta_{n-1} \bar{a}_{n-1}$ и аналогично $\bar{\psi}(\bar{a}_n) = \beta_n \bar{a}_n$. Но $\bar{\psi}(\bar{a}_{n-1}) = \bar{\psi}(\bar{a}_n)$ и поэтому $\bar{\psi}(\bar{a}_n) = 0$, $\bar{\psi} = 0$. Противоречие.

Теперь рассмотрим общий случай и докажем, что A/tA — однородная вполне разложимая группа $A/tA \in \mathfrak{a}$ по лемме 12. Так как tA — неделимая группа, то $(tA)_p$ — неделимая группа для некоторого p . Пусть $A = K \oplus \oplus (tA)_p$. Если $r_0 A = \infty$, то из $A/tA \in \mathfrak{a}$ и теоремы 11 получаем, что A/tA вполне разложима. В противном случае заметим, что $A/tK \cong K/tK \oplus (tA)_p \in \mathfrak{a}$ по лемме 12, и по ранее доказанному $K/tK \cong A/tA$ вполне разложима.

Итак, у нас $A = K \oplus A_p$, $K/tK \cong A/tA$ — вполне разложимая однородная группа. Чтобы завершить доказательство, нам в силу [5, теорема 3] достаточно убедиться в том, что $\tau_{K/tK}(a + tK) = \tau(a)$, $\tau(a) \leq T(A)$ для любого $a \in K/tK$. Но $\tau(a) \leq T(A)$ по лемме 13. Пусть $N \subseteq K$ — слабо сервантная подгруппа без кручения ранга 2, $a \in N$. По лемме 12 у нас $N \oplus (tA)_p \in \mathfrak{a}$ и

тогда по ранее доказанному N — вполне разложимая однородная группа. Поэтому $N = N_1 \oplus N_2$, $r(N_i) = 1$ и N_1 можно выбрать, содержащей a [2, лемма 86, 8]. Из $\tau(a) \leq T(A)$ и леммы 7 получаем $\tau(a) = \tau_{N_1}(a)$. Выберем $0 \neq b \in N_2$. Тогда аналогично $\tau(b) = \tau_{N_2}(b) = \tau(a)$. Пусть $\chi_{N_i}(a) = (\alpha_1, \dots)$, $\chi_{A/tA}(a + tA) = (\lambda_1, \dots)$ и $\lambda_i > \alpha_i$ при $i \in I$. Тогда при $i \in I$ у нас $(tA)_{p_i}$ неделимая группа. $A = K_i \oplus (tA)_{p_i}$, $A/tK_i \cong K_i/tK_i \oplus (tA)_{p_i} \in \mathfrak{a}$, поэтому $A/tA \cong K_i/tK_i$ — не p_i -делимая группа ($i \in I$) в силу леммы 13. Таким образом, $\lambda_i < \infty$ при $i \in I$.

Найдутся $b_i \in A$, $c_i \in (tA)_{p_i}$ такие, что $a = p_i^{\lambda_i} b_i + c_i$ ($i \in I$). Тогда $h_{p_i}(a) = h_{p_i}(c_i) = \alpha_i < \lambda_i$. Для некоторых $d_i \in (tA)_{p_i}$ у нас $c_i = p_i^{\alpha_i} d_i$, $h_{p_i}(d_i) = 0$. Тогда $D = \bigoplus_{i \in I} \langle d_i \rangle$ — сервантная подгруппа в A . Пусть H_1 и H_2 — слабо сервантные оболочки подгрупп $\langle D, b_i | i \in I \rangle$ и $\langle b, D \rangle$ соответственно. Так как $\langle b_i | i \in I \rangle$ — группа без кручения ранга 1, то $r_0(H_1) = r_0(H_2)$, $D = tH_i$

и $H_1 \cong H_2$ по теореме 2. Следовательно, $(H_1/D) \cong (H_2/D)$ и потому при почти всех $i \in I$ (обозначим это множество через J) $b = p_i^{\lambda_i} g_i + c_i^*$, где $c_i^* \in D_{p_i} = \langle d_i \rangle$; $h_{p_i}(c_i^*) = h_{p_i}(b) = \alpha_i$ (последнее в силу $\tau(a) = \tau(b)$). Таким образом, $h_{p_i}(c_i) = h_{p_i}(c_i^*)$ для $i \in J$ и найдутся такие $l_i \in \mathbb{Z}$, что $c_i = l_i c_i^*$. Но тогда $c_i = l_i c_i^* = l_i(b - p_i^{\lambda_i} g_i)$, $a = p_i^{\lambda_i} b_i + l_i b - l_i p_i^{\lambda_i} g_i$ и если $K_1 = \langle N_2, b_i - l_i g_i | i \in J \rangle$, то K_1 -группа без кручения ранга 2. В самом деле, $K_1 \supseteq \langle a \rangle \oplus N_2$, а K_1/N_2 задается следующими образующими и соотношениями: $\langle a, d_i, p_i^{\lambda_i} d_i = a | i \in J \rangle$. Пусть K — слабосервантная оболочка K_1 . Тогда $K \cong N = N_1 \oplus N_2$ по теореме 2; N_2 — прямое слагаемое в K [2, лемма 86, 8]; $N_1 \cong K/N_2$. Так как $h_{p_i}^{K/N_2}(a + N_2) \geq \lambda_i$ при $i \in J$ и $K/N_2 \cong N_1$, то $h_{p_i}(a) \geq \lambda_i$ для почти всех $i \in J$. Учитывая, что $\lambda_i > \alpha_i = h_{p_i}(a)$ при $i \in J$, получаем конечность J и I , что и требовалось.

Покажем теперь достаточность наших условий. Пусть B_1 и B_2 — слабо сервантные подгруппы в A , $r(B_1) = r(B_2)$. Тогда tB_i — сервантные подгруппы в tA и потому tB_i — прямые слагаемые в tA и B_i . Если $B_i = N_i \oplus tB_i$, то $tB_1 \cong tB_2$ в силу $r(tB_1) = r(tB_2)$ и $tA \in \mathfrak{a}$. Для любого $0 \neq a \in N_i$ в силу наших условий и

леммы 7 у нас $\tau(a) = \tau_{N_i}(a) = \tau(N)$. Поэтому N_i — однородные группы типа $\tau(N)$. Группы N_i вкладываются в $A/tA \cong N$, в случае, когда N — вполне разложимая группа, группы N_i также вполне разложимы [2, теорема 86. 6], причем $N_1 \cong N_2$. Если N не вполне разложима, то $r_0 N < \infty$, tA делимая группа и N_i вкладывается в $A/tA \cong N$ в качестве сервантных подгрупп. Из $N \in \alpha$ снова $N_1 \cong N_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1974, т. 1.— 335 с.
 2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1977, т. 2.— 416 с.
 3. Arnold D. M. Strongly homogeneous torsion free abelian groups of finite rank. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, v. 56, N 4, p. 67—72.
 4. Griffith P. A. Decomposition of pure subgroups of torsion free groups III. J. Math., 1968, v. 12, N 3, p. 433—438.
 5. Bican L. Mixed abelian groups of torsion free rank one. Czechosl. Math. J., 1970, v. 20, N 2, p. 232—242.
 6. Rangaswamy K. M. Groups with special properties. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1965 (1966), v. 31, N 6, p. 513—526.
 7. Hill P. On the freeness of abelian groups a generalization of Pontryagin's theorem Bull. Amer. Math. Soc., 1970, v. 76, N 5, p. 1118—1120.
-

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, I

П. А. КРЫЛОВ

В этой работе для различных классов абелевых групп без кручения доказываются некоторые структурные теоремы. Рассматриваются также прямые разложения и прямые суммы групп из этих классов, кольца эндоморфизмов, вполне характеристические подгруппы и другие вопросы.

К группам, изучающимся в работе, можно подойти со следующей единой точки зрения. Если G — абелева группа без кручения; $E(G)$ — кольцо всех ее эндоморфизмов, то рациональное векторное пространство $V = G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ естественным образом можно рассматривать как левый $(E(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ -модуль. Для групп, исследующихся в работе, этот модуль, как правило, вполне приводим (в частности, неприводим или является однородным вполне приводимым).

Работа состоит условно из 4 частей. Первая часть носит, с одной стороны, вспомогательный характер по отношению к другим. В то же время ее результаты представляют самостоятельный интерес. Для произвольной группы G без кручения доказывается, что определенные ее подгруппы обладают некоторыми квазиразложениями (§ 2). Аналогичные результаты были известны ранее для групп конечного ранга [1, 2]. Получен также ряд фактов о кольцах квазиэндоморфизмов. Особо рассматривается случай группы G конечного ранга (§ 3). Доказательства основываются на применении теорем плотности для неприводимых и вполне приводимых модулей.

В общем случае никаких структурных фактов о группе G с вполне приводимым модулем V получить нельзя

ввиду необозримости класса таких групп. В частях 2, 3 и 4 накладываются некоторые дополнительные условия на группу G . Именно предполагается или оказывается, что минимальные сервантные вполне характеристические подгруппы группы G (они соответствуют минимальным подмодулям модуля V) являются циклическими модулями над кольцом эндоморфизмов $E(G)$ или близки к ним. Такие группы G и их кольца эндоморфизмов допускают уже более детальное изучение. Идея исследования их состоит в том, что квазиразложения, полученные в § 2—3, в некоторых случаях удастся заменить прямыми разложениями.

Во 2-й части изучается группа G без кручения с неприводимым модулем V . Такие группы называются неприводимыми. Исследуются неприводимые эндоциклические группы, в частности однородные вполне транзитивные и однородные транзитивные (или, что то же, сильно однородные) группы. По существу, все основные идеи и результаты этой части содержатся в [3 и 4]. Изучаются также кольца эндоморфизмов и вполне характеристические подгруппы неприводимых эндоциклических групп.

В 3-й части рассматривается случай группы G с однородным вполне приводимым модулем V . Описываются группы без кручения, кольца эндоморфизмов которых являются кольцами матриц над сильно однородными кольцами. В 4-й части изучается группа G с произвольным вполне приводимым модулем V .

Данная работа включает указанную выше 1-ю часть (§ 2—3) и один раздел 4-й части (§ 4—6), посвященный вполне транзитивным и транзитивным группам без кручения, совпадающим со своим псевдооколом (т. е. модуль V для таких групп вполне приводим). Доказана структурная теорема, включающая некоторое каноническое прямое разложение (теорема 4.2). Изучение таких групп сведено к однородному случаю. Так как строение счетных вполне транзитивных и транзитивных однородных групп известно [3], то известно также строение счетных вполне транзитивных и транзитивных групп, совпадающих с псевдооколом. Этим группам посвящен § 6.

Группы, изучающиеся во всей работе, кратко можно назвать «группами с достаточно большим числом эндоморфизмов».

Под словом «группа» в работе понимается абелева группа. Групповая терминология и обозначения взяты из [5 и 6]. Так, Z обозначает кольцо целых чисел; Q — поле рациональных чисел. Через ω_0 обозначается счетное кардинальное число.

§ 1. Некоторые определения

Определение 1.1 [6, § 92]. Будем говорить, что:

1) группа G без кручения квазисодержится в группе без кручения H ($G \leqslant H$), если $nG \subseteq H$ для некоторого натурального числа n ;

2) группа G квазиравна группе H ($G \dot{=} H$), если $G \leqslant H$ и $H \leqslant G$;

3) группа G квазиизоморфна группе H ($G \sim H$), если существуют подгруппы G' и H' и такие натуральные числа n и m , что $nG \leqslant G' \leqslant G$, $mH \leqslant H' \leqslant H$ и $G' \cong H'$.

Определение 1.2. Под (конечным) квазиразложением группы G понимается семейство групп A_i ($i = 1, \dots, n$) таких, что $G \doteq \sum_{i=1}^n \oplus A_i$. При этом группы A_i

называются квазислагаемыми группы G . Группа G называется сильно неразложимой, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями.

Всякая группа G без кручения может быть вложена в минимальную делимую группу, которая является векторным пространством над Q . Эту минимальную делимую группу можно получить, взяв $V = G \otimes_z Q$. Будем отождествлять G с ее образом при каноническом мономорфизме $G \rightarrow Q \otimes_z G$. Положим $E(G) = E(G) \otimes_z Q$. Также отождествляем $E(G)$ с его образом при вложении $E(G) \rightarrow E(G) \otimes_z Q$. Пространство V превращается в $E(G)$ — модуль, если положить $(\alpha \otimes r) \times (a \otimes s) = \alpha a \otimes rs$, $\alpha \in E(G)$, $a \in G$, $r, s \in Q$. Для каждого такого $\alpha \otimes r$ действие его на V является линейным преобразованием Q -пространства V . Можно считать, что $E(G)$ содержится в кольце $L(V)$ всех линейных преобразований пространства V . Тогда $E(G) = \{\alpha \in L(V) \mid n\alpha \in E(G) \text{ для некоторого натурального числа } n\}$. Кольцо $E(G)$ называется кольцом (или алгеброй) квазиэндоморфизмов группы G .

Лемма 1.3 [1, предложение 2.3]. Если $G_1 \doteq G_2$, то $E(G_1) = E(G_2)$. Если $G_1 \sim G_2$, то $E(G_1) \cong E(G_2)$.

Лемма 1.4 [1, теорема 3.1]. Пусть $E(G) = \sum_{i=1}^n \oplus e_i E(G)$ — разложение кольца $E(G)$ в прямую сумму правых идеалов ($e_i, i = 1, \dots, n$ — полная система ортогональных идемпотентов). Тогда имеем квазиразложение $G \doteq \sum_{i=1}^n \oplus e_i G$. Кроме того, $E(e_i(G)) \cong e_i E(G) e_i$

и $e_i G$ — сильно неразложимая группа тогда и только тогда, когда $e_i E(G)$ — неразложимый $E(G)$ -модуль. Наконец, если e и f — идемпотенты кольца $E(G)$, то $eG \sim fG$ тогда и только тогда, когда $eE(G)$ и $fE(G)$ изоморфны как $E(G)$ -модули.

Правильный подход к рассмотрению квазиизоморфизмов — это представлять их как изоморфизмы в некоторой фактор-категории. Именно пусть A — категория всех абелевых групп; B — класс всех ограниченных абелевых групп и A/B — фактор-категория. Из определения A/B следует [7], что две группы без кручения квазиизоморфны тогда и только тогда, когда они изоморфны в A/B . Квазиэндоморфизмы квазиразложения есть эндоморфизмы разложения в категории A/B . В частности, кольцо квазиэндоморфизмов $E(G)$ группы G без кручения есть кольцо эндоморфизмов объекта G в A/B . Сильная неразложимость группы G равносильна неразложимости объекта G в A/B . Определим еще категорию A_Q следующим образом. Объекты в A_Q те же, что и в A . Группа $\text{Hom}_{A_Q}(G, H)$ есть $\text{Hom}(G, H) \otimes_{\mathbb{Z}} Q$. Тогда категории A_Q и A/B эквивалентны [7, теорема 3.1].

Пусть G — группа без кручения; пространство $V = G \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ рассматриваем как левый $E(G)$ -модуль.

Лемма 1.5 [1, лемма 5.3]. Соответствия $H \rightarrow H^*$ (H^* — подпространство, порожденное H в V), $W \rightarrow W \cap G$ являются взаимно обратными соответствиями между сервантными вполне характеристическими подгруппами группы G и подмодулями $E(G)$ -модуля V .

Таким образом, минимальным подмодулям $E(G)$ -модуля V соответствуют минимальные pfi -подгруппы (сервантные вполне характеристические подгруппы) группы G . Цоколю модуля V соответствует сервантная подгруппа в G , порожденная всеми ее минимальными pfi -под-

группами. Следуя [1], будем называть эту подгруппу псевдоцоклем группы G и обозначать $\text{Soc } G$. В частности, если модуль V неприводим, то группа G не имеет собственных pfi -подгрупп, и наоборот. Такую группу будем называть неприводимой [1, определение 5.1].

§ 2. Группы без кручения произвольного ранга

Дж. Рейд доказал [1], что если G — неприводимая группа без кручения конечного ранга, то $G = \sum_{i=1}^n \oplus G_i$,

где все G_i попарно квазиизоморфны и являются неприводимыми сильно неразложимыми группами. В [2] получены аналогичные факты для группы G конечного ранга такой, что $G = \text{Soc } G$. В этом параграфе рассматривается произвольная группа G и доказывается, что некоторые ее подгруппы, лежащие в $\text{Soc } G$, обладают подобными квазиразложениями, отмеченными выше.

Пусть G — группа без кручения; A — подгруппа в G . Положим $M(A) = \{\alpha \in E(G) \mid \alpha A \subseteq A\}$; $N(A) = \{\alpha \in E(G) \mid \alpha A = 0\}$. Далее положим $\bar{R} = E(G)$; $S = R \otimes_Z Q$; $V = G \otimes_Z Q$ и $K = \text{End}_S V$. Считаем, что S действует на V слева, а K — справа.

Предположим, что цокль S -модуля V отличен от нуля и пусть M — некоторая однородная компонента этого цокля. Тогда $M = \sum_{i \in I} \oplus M_i$, где все M_i — неприводимые попарно изоморфные S -модули. Если $j \in I$ — некоторый индекс и $T = \text{Ann}_S M$, то M_j является точным неприводимым $\bar{S}$ -модулем, где $\bar{S} = S/T$. Далее по лемме Шура $D = \text{End}_{\bar{S}} M_j$ — тело; M_j является векторным пространством над D , а по теореме плотности для неприводимых модулей [8, с. 49] $\bar{S}$ — плотное кольцо линейных преобразований пространства M_j над D .

Зафиксируем теперь некоторое непустое подмножество $J \subseteq I$ и некоторый индекс $j \in J$. Положим $\bar{M} = \sum_{i \in J} \oplus M_i$. Пусть P — некоторое D -подпространство в M_j размерности n ; $W = PK$ — K -подмодуль в V , порожденный P . Далее запишем $P = \sum_{i=1}^n \oplus P_i$, где $\dim_D P_i =$

$= 1$ ($l = 1, \dots, n$). Пусть $W_l = P_l K$ — K -подмодуль в V , порожденный P_l . Тогда $W = \sum_{l=1}^n \oplus W_l$. Определим $A = (W \cap G) \cap \bar{M}$ и $A_l = (W_l \cap G) \cap \bar{M}$, $l = 1, \dots, n$.

Пусть $\bar{M}^{(1)}, \dots, M^{(k)}$ — некоторые однородные компоненты цокля S -модуля V . Построим, исходя из них, некоторые K -подмодули $W^{(1)}, \dots, W^{(k)}$ так, как построили выше W для M (число n может быть различным). Положим $H = (\sum_{m=1}^k \oplus W^{(m)}) \cap G$ и $H_m = W^{(m)} \cap G$, $m = 1, \dots, k$.

Теорема 2.1. В обозначениях, введенных выше, имеют место соотношения:

- 1) $M(A)/N(A) \cong D_n$;
- 2) $A \doteq A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$, $A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_n$;
- 3) $H \doteq H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$.

Доказательство. 1. Положим $M(P) = \{\alpha \in S \mid \alpha P \subseteq P\}$ и $N(P) = \{\alpha \in S \mid \alpha P = 0\}$. Из теоремы плотности вытекает, что $M(P)/N(P) \cong D_n$. Покажем, что $M(A) = M(P)$ и $N(A) = N(P)$.

Заметим прежде, что $A \otimes_Z Q = W \cap \bar{M}$ ($A \otimes_Z Q$ отождествляем с ее образом при каноническом мономорфизме $A \otimes_Z Q \rightarrow G \otimes_Z Q$; так же поступаем и в аналогичных ситуациях). Если $w \in W \cap \bar{M}$, то $nw \in G$ для некоторого натурального n . Значит, $nw \in A$ и $w \in A \otimes_Z Q$, т. е. $W \cap \bar{M} \subseteq A \otimes_Z Q$. Обратное включение вытекает из того, что $A \otimes_Z Q$ есть Q -подпространство в V , порожденное A , а $W \cap \bar{M}$ является Q -подпространством, содержащим A .

Пусть $\alpha \in M(A)$. Значит, $\alpha A \subseteq A$. Отсюда, учитывая равенство $W \cap \bar{M} = A \otimes_Z Q$, получаем $\alpha(W \cap \bar{M}) \subseteq W \cap \bar{M}$. Далее, так как $(W \cap \bar{M}) \cap M_j = P$ и M_j является S -модулем, то $\alpha P \subseteq P$ и $\alpha \in M(P)$. Обратно, если $\alpha \in M(P)$, то $\alpha W = \alpha(PK) = (\alpha P)K \subseteq PK = W$. Поскольку $\alpha G \subseteq G$ и $\alpha \bar{M} \subseteq \bar{M}$, то имеем $\alpha A = \alpha(W \cap G \cap \bar{M}) \subseteq (W \cap G) \cap \bar{M} = A$ и $\alpha \in M(A)$. Второе равенство очевидно в силу проведенных рассуждений. Получили $M(A)/N(A) = M(P)/N(P) \cong D_n$.

2. Предположим, что утверждение о том, что $A \doteq \sum_{i=1}^n \oplus A_i$ справедливо для всех чисел, меньших n . За-

пишем $W = W_1 \oplus W'$, где $W' = \sum_{i=2}^n \oplus W_i$. Так как кольцо

$\bar{S} = S / \text{Ann}_S M$ плотно в $\text{End}_D M_j$, то существует $r \in S$, действующий тождественно на W_1 и аннулирующий W' .

Выберем натуральное число m , для которого $mr \in E(G)$.

Покажем, что $mA \subseteq A_1 \oplus B$, где $B = (W' \cap G) \cap \bar{M}$. Так как,

очевидно, $\sum_{i=1}^n \oplus A_i \subseteq A$, то в силу индуктивного предположения доказательство будет закончено.

Пусть $a \in A$. Тогда $ma = r(ma) + (ma - r(ma))$.

Ввиду выбора r имеем $r(ma) \in (W_1 \cap G) \cap \bar{M} = A_1$. Далее

снова по определению r имеем $r(ma - r(ma)) = r(ma) -$

$- r(ma) = 0$. Отсюда $ma - r(ma) \in W'$, $ma - r(ma) \in$

$(W' \cap G) \cap \bar{M} = B$. Таким образом, $ma \in A_1 \oplus B$ и $mA \subseteq$

$\subseteq A_1 \oplus B$.

Докажем, $A_1 \sim A_2$. Напомним, что $A_i = (W_i \cap G) \cap \bar{M}$ и $W_i = P_i K$ ($i = 1, 2$). Отсюда ясно, что $A_i \cap P_i \neq 0$,

$i = 1, 2$. Зафиксируем некоторые элементы $0 \neq a \in A_1 \cap$

$\cap P_1$ и $0 \neq b \in A_2 \cap P_2$. Так как P_1 и P_2 лежат в неприводимом S -модуле M_j , то $\alpha a = b$ и $\beta b = a$ для некото-

рых $\alpha, \beta \in S$. Поскольку P_1 и P_2 являются D -подпространствами размерности 1, то $\alpha P_1 = P_2$, $\beta P_2 = P_1$. Сле-

довательно, также $\alpha W_1 = W_2$ и $\beta W_2 = W_1$. Равенства

$(\beta \alpha) a = a$ и $(\alpha \beta) b = b$ показывают, что $(\beta \alpha)|_{W_1} = 1_{W_1}$

и $(\alpha \beta)|_{W_2} = 1_{W_2}$. Проверим, что $\alpha A_1 \doteq A_2$. Пусть натуральные числа s и t таковы, что $s\alpha, t\beta \in E(G)$. Тогда

$s(\alpha A_1) = (s\alpha) A_1 \subseteq (W_2 \cap G) \cap \bar{M} = A_2$. С другой стороны,

$tA_2 = (\alpha \beta)(tA_2) = \alpha(t\beta) A_2 \subseteq \alpha(W_1 \cap G \cap \bar{M}) = \alpha A_1$. Итак,

$s(\alpha A_1) \subseteq A_2$ и $tA_2 \subseteq \alpha A_1$, т. е. $\alpha A_1 \doteq A_2$. Из равенства

$(\beta \alpha)|_{W_1} = 1_{W_1}$ вытекает, что $\alpha|_{A_1}$ — мономорфизм. Следова-

тельно, $A_1 \cong \alpha A_1 \doteq A_2$ и $A_1 \sim A_2$.

3. Пусть утверждение пункта 3) верно для всех чисел, меньших k . Положим $U = \text{Soc } V$; $\text{Ann } U =$

$= \{r \in S \mid rU = 0\}$. Тогда U является точным вполне

приводимым S_1 -модулем, где $S_1 = S/\text{Ann } U$. Пусть $K_1 =$

$= \text{End}_{S_1} U = \text{End}_S U$. По теореме плотности для вполне

приводимых модулей [8] S_1 есть плотное подкольцо

в $\text{End}_{K_1} U$. Поэтому найдется элемент $r \in S$, действующий

щий тождественно на $W^{(1)}$ и аннулирующий $\sum_{s=2}^{\kappa} W^{(s)}$.

Выберем натуральное число m , для которого $mr \in E(G)$. Тогда так же, как в 2), можно показать, что $mH \subseteq H_1 \oplus H'$, где $H' = (\sum_{s=2}^{\kappa} W^{(s)}) \cap G$. То есть $H \doteq H_1 \oplus H'$.

По предположению индукции можно считать, что $H' \doteq \sum_{s=2}^{\kappa} H_s$. Таким образом, $H \doteq \sum_{s=1}^{\kappa} H_s$. Теорема доказана.

В теореме 2.1, естественно, выделяются два основных случая: 1) $J = I$, значит, $\bar{M} = M$ и $A = W \cap G$, $A_l = W_l \cap G$, $l = 1, \dots, n$; 2) J состоит из одного элемента, т. е. рассматривается одна минимальная *pfi*-подгруппа. Рассмотрим особо эти случаи, так как только они будут появляться дальше.

Следствие 2.2. В обозначениях теоремы 2.1:

1. Пусть M — некоторый неприводимый S -подмодуль в V ; $D = \text{End}_S M$. Если W — циклический K -подмодуль в V , порожденный некоторым ненулевым элементом из M , и $A = W \cap G$, то $M(A) / N(A) \cong D$.

2. Если $W_1, \dots, W_n$ — циклические K -подмодули в V , порожденные некоторыми ненулевыми элементами из M , причем система $\{W_1, \dots, W_n\}$ независима и $A = \sum_{i=1}^n (W_i \cap G)$, $A_i = W_i \cap G$ ($i = 1, \dots, n$), то $A_1 \sim A_2$ и $A \doteq \sum_{i=1}^n A_i$.

3. Пусть $M_1, \dots, M_k$ — некоторые однородные компоненты цокля S -модуля V и $W^{(1)}, \dots, W^{(\kappa)}$ — некоторые конечно-порожденные K -подмодули модулей $M_1, \dots, M_k$ соответственно. Если $H = (\sum_{j=1}^{\kappa} W^{(j)}) \cap G$; $H_j = W^{(j)} \cap G$ ($j = 1, \dots, \kappa$), то $H \doteq \sum_{j=1}^{\kappa} H_j$.

Пусть подмножество J состоит из одного элемента j . Тогда $\bar{M} = M_j$. Так как $W \cap M_j = P$, то $A = (W \cap G) \cap \bar{M} = P \cap G$ и $A_l = P_l \cap G$. Запишем сразу следствие не для минимальной *pfi*-подгруппы, а для неприводимой группы.

Следствие 2.3. Пусть G — неприводимая группа без кручения; $V = G \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ и $S = E(G) \otimes_{\mathbb{Z}} Q$. Тогда $D =$

$= \text{End}_S V$ — тело и V является векторным пространством над D . Если W — некоторое D -подпространство в V размерности n , то группа $A = W \cap G$ неприводима и $M(A)/N(A) \cong D_n$. Далее, если $W = \sum_{i=1}^n \oplus W_i$, $\dim_D W_i = 1$ и $A_i = W_i \cap G$ ($i = 1, \dots, n$), то $A = \sum_{i=1}^n \oplus A_i$ и $A_1 \sim \dots \sim A_n$.

Доказательство. Отображение ограничения $\alpha \rightarrow \alpha|_A$, $\alpha \in M(A)$ является гомоморфизмом колец $M(A) \rightarrow F(A) = E(A) \otimes_Z Q$ с ядром, равным $N(A)$. Таким образом, $E(A)$ содержит подкольцо, изоморфное кольцу матриц D_n . Так как $A \otimes_Z Q$ есть D -подпространство размерности n , то, очевидно, $A \otimes_Z Q$ является неприводимым $E(A)$ -модулем. Следовательно, A — неприводимая группа.

Докажем лемму, которая будет использоваться дальше.

Лемма 2.4. Пусть G — группа без кручения и $G = \text{Soc } G$, т. е. S -модуль V вполне приводим. Пусть ненулевые элементы a_1 и a_2 принадлежат некоторым неприводим подмодулям одной однородной компоненты S -модуля V . Положим $W_i = a_i K$ и $A_i = W_i \cap G$ ($i = 1, 2$). Тогда если $\alpha \in E(G)$ и $0 \neq \alpha \in A_2$ для некоторого элемента $a \in A_1$, то $\alpha A_1 \subseteq A_2$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить, что $\alpha W_1 \subseteq W_2$. Пусть $a = a_1 k$, $k \in K$. Тогда $\alpha(a_1 k) = a_2 k_1$ для некоторого $k_1 \in K$. Рассмотрение вполне приводимого S -модуля V показывает, что существует $k_2 \in K$ со свойством $(a_1 k) k_2 = a_1$. Отсюда $\alpha a_1 = \alpha((a_1 k) k_2) = (\alpha(a_1 k)) k_2 = (a_2 k_1) k_2 = a_2 (k_1 k_2) \in W_2$. Теперь $\alpha W_1 = \alpha(a_1 K) = (\alpha a_1) K \subseteq W_2 K = W_2$.

§ 3. Группы без кручения конечного ранга

Для групп конечного ранга можно получить намного больше, чем для произвольных групп. Алгебра квазиэндоморфизмов $E(G)$ группы G без кручения конечного ранга конечномерна и $E(G)$ является двусторонне артиновым кольцом.

Теорема 3.1 [2]. Пусть G — группа без кручения конечного ранга; $V = G \otimes_{\mathbb{Z}} Q$; $S = E(G)$. Эквивалентны следующие утверждения:

1) S -модуль V вполне приводим, т. е. $G = \text{Soc } G$;

2) кольцо S классически полупросто;

3) группа G квазиизоморфна некоторой группе $A = \sum_{i=1}^n \oplus A_i$, где каждая группа A_i вполне характеристична в A , $A_i = \sum_{j=1}^{n_i} \oplus A_{ij}$, $A_{ij} \sim A_{ik}$ и $E(A_{ij})$ — тело ($i = 1, \dots, n$; $j, k = 1, \dots, n_i$).

Доказательство. Достаточно проверить $2) \Rightarrow 3)$. Существует лишь конечное число неизоморфных неприводимых S -модулей. Поэтому можно записать $V = \sum_{i=1}^n \oplus V_i$, где V_i — однородная компонента модуля V .

Выберем некоторый неприводимый подмодуль M_i модуля V_i . Модуль M_i является точным неприводимым $\bar{S}$ -модулем, где $\bar{S} = S / \text{Ann}_S M_i$. Далее, $D_i = \text{End}_{\bar{S}} M_i$ — тело и $\bar{S}$ является плотным кольцом в $\text{End}_{D_i} M_i$.

На самом деле, $\bar{S} = \text{End}_{D_i} M_i$ ввиду артиновости кольца $\bar{S}$. Отсюда $\dim_{D_i} M_i = n_i < \omega_0$. Запишем $M_i = \sum_{j=1}^{n_i} \oplus M_{ij}$,

где $\dim_{D_i} M_{ij} = 1$, и положим $W_{ij} = M_{ij}K$ ($j = 1, \dots, n_i$), где $K = \text{End}_S V$. Каждый W_{ij} является циклическим подмодулем K -модуля V . А так как $V_i = M_i K = \sum_{j=1}^{n_i} \oplus M_{ij}K = \sum_{j=1}^{n_i} \oplus W_{ij}$, то каждый V_i — конечно-порожденный K -подмодуль в V . Отсюда по следствию 2.2

$G \doteq \sum_{i=1}^n \oplus (V_i \cap G)$. Положим $A_i = V_i \cap G$ ($i = 1, \dots, n$)

и $A = \sum_{i=1}^n \oplus A_i$. Тогда $G \doteq A = \sum_{i=1}^n \oplus A_i$. Так как $E(G) = E(A)$ (лемма 1.3), то для всякого $\alpha \in E(A)$ выполняется $\alpha A_i \subseteq \alpha V_i \subseteq V_i$ и $\alpha A_i \subseteq V_i \cap G = A_i$. Следовательно, каждая подгруппа A_i вполне характеристична в A .

Зафиксируем некоторый индекс i и возьмем равенство $V_i = \sum_{j=1}^{n_i} \oplus W_{ij}$. Напомним, что все W_{ij} — цикличес-

кие подмодули K -модуля V . Поэтому, полагая $A_{ij} = W_{ij} \cap G$ ($j = 1, \dots, n_i$), по следствию 2.2 можно написать $A_i \doteq \sum_{j=1}^{n_i} \oplus A_{ij}$ и $A_{ij} \sim A_{ik}$ для всех $j, k = 1, \dots, n_i$.

Осталось показать, что $E(A_{ij})$ — тело. Действительно, отображение ограничения $\alpha \rightarrow \alpha_{A_{ij}}$, $\alpha \in M(A_{ij})$ является гомоморфизмом $M(A_{ij}) \rightarrow E(A_j)$ с ядром $N(A_{ij})$. Если $\beta \in E(A_{ij})$, то очевидным образом β продолжается до некоторого квазиэндоморфизма $\alpha \in E(A)$. Но $E(A) = E(G)$. Таким образом, $\alpha \in M(A_{ij})$ и $\alpha|_{A_{ij}} = \beta$, т. е. рассматриваемое отображение — эпиморфизм. Отсюда $M(A_{ij})/N(A_{ij}) \cong E(A_{ij})$. Первое фактор-кольцо в этом изоморфизме по следствию 2.2 изоморфно телу D_i . Теорема доказана.

Важным специальным случаем теоремы 3.1 является случай простого кольца $E(G)$. Рассмотрим более общую ситуацию, когда $E(G)/N$ — простое кольцо. Здесь N — наибольший нильпотентный идеал кольца $E(G)$.

Теорема 3.2. Пусть G — группа без кручения конечного ранга; $E(G)/N$ — простое кольцо. Тогда $G \sim \sum_{i=1}^n \oplus A_i$; $A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_n$ и $E(A_i)$ — локальное кольцо, т. е. группа A_i сильно неразложима.

Доказательство. Выберем некоторую полную систему ортогональных идемпотентов $\bar{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$) кольца S/N ($S = E(G)$). Эту систему можно поднять до полной системы ортогональных идемпотентов e_i ($i = 1, \dots, n$) кольца S . Тогда по лемме 1.4 $G \doteq \sum_{i=1}^n \oplus A_i$, где $A_i = e_i G$, $i = 1, \dots, n$. По этой же лемме $A_i \sim A_j$, если $e_i S \cong e_j S$ (изоморфизм S -модулей). Но $e_i S \cong e_j S$, если $e_i S/e_i N \cong e_j S/e_j N$ (изоморфизм S/N -модулей) [9, с. 85]. Установим последний изоморфизм. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{e_i S}{e_i N} &= \frac{e_i S}{e_i S \cap N} \cong \frac{e_i S + N}{N} = (e_i + N) \frac{S}{N} = \bar{e}_i \frac{S}{N} \cong \\ &\cong \bar{e}_j \frac{S}{N} = (e_j + N) \frac{S}{N} = \frac{e_j S + N}{N} \cong \frac{e_j S}{e_j S \cap N} = \frac{e_j S}{e_j N}. \end{aligned}$$

Отсюда $e_i S \cong e_j S$ и $A_i \sim A_j$ для любых $i, j = 1, \dots, n$.

Положим $L = E(A_1)$. Тогда, учитывая лемму 1.3, $E(G) \simeq L_n$ и $N = (J(L))_n$, где $J(L)$ — наибольший нильпотентный идеал кольца L (он совпадает с радикалом Джекобсона этого кольца). Отсюда $E(G)/N \cong (L/J(L))_n$ и, следовательно, $L/J(L)$ является телом, т. е. $E(A_1)$ — локальное кольцо. Группа A_1 сильно неразложима, так как локальное кольцо $E(A_1)$ неразложимо в прямую сумму правых идеалов (лемма 1.4). Теорема доказана.

Следствие 3.3 [2]. Для группы G без кручения конечного ранга эквивалентны следующие утверждения:

- 1) V — однородный вполне приводимый S -модуль;
- 2) S — простое кольцо;
- 3) $G \sim \sum_{i=1}^n \oplus_i A_i$, где $A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_n$ и $E(A_1)$ — тело.

Следствие 3.4 [1]. Эквивалентны следующие утверждения:

- 1) V — неприводимый S -модуль, т. е. G — неприводимая группа;

- 2) $G \sim \sum_{i=1}^n \oplus_i A_i$, $A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_n$ и все A_i — неприводимые сильно неразложимые группы.

§ 4. Вполне транзитивные и транзитивные группы без кручения, совпадающие со своими псевдоколями

Если G — группа без кручения; p — простое число, то $h_p(a)$ ($\chi(a)$) обозначает p -высоту (характеристику) элемента $a \in G$. Группа G , все ненулевые элементы которой имеют один и тот же тип, называется однородной. Этот общий тип называется типом группы G .

В работе автора [10] по аналогии с вполне транзитивными и транзитивными модулями над полным кольцом дискретного нормирования [11] были определены вполне транзитивные и транзитивные группы без кручения.

Определение 4.1. Группа G без кручения называется вполне транзитивной (транзитивной), если для любых элементов $0 \neq a, b \in G$, таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$ ($\chi(a) = \chi(b)$), существует эндоморфизм (автоморфизм) α группы G со свойством $aa = b$.

Вполне транзитивные и транзитивные группы без кручения рассматривались в [12, 13]. Вполне характеристическим подгруппам таких групп посвящены работы [10, 14].

Сформулируем основной результат. Его доказательство существенно использует теорему 2.1.

Теорема 4.2. Пусть G — вполне транзитивная (транзитивная) группа без кручения и G совпадает со своим псевдоцоклем. Тогда $G = \sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$, где для любых различных $i, j \in I$ выполняется: если $pG_i \neq G_i$, то $pG_j = G_j$. Каждая G_i либо однородная вполне транзитивная (транзитивная) группа, либо G_i такая неоднородная вполне транзитивная (транзитивная) группа, что ее кольцо квазиэндоморфизмов $E(G_i)$ есть тело.

Доказательство. Примем обозначения теоремы 2.1.

Пусть $V = G \otimes_z Q$; $S = E(G)$; $K = \text{End}_S V$. По предположению S -модуль V вполне приводим, т. е. $V = \sum_{i \in I}^{\oplus} V_i$, где V_i — однородные компоненты модуля V .

Положим $G_i = V_i \cap G$, $i \in I$.

Возьмем два различных индекса $i, j \in I$ и допустим что $qG_i \neq G_i$ и $qG_j \neq G_j$ для некоторого простого числа q . Выберем некоторый элемент нулевой q -высоты в G_i и обозначим через W_i K -подмодуль в V_i , порожденный этим элементом. Причем можно считать, что этот элемент лежит в каком-либо неприводимом подмодуле S -модуля V_i . Действительно, модуль V_i равен сумме всех своих неприводимых подмодулей. Поэтому фактор-группа группы G_i по сумме пересечений каждого такого неприводимого подмодуля с группой G_i периодична. Отсюда заключаем, что некоторое такое пересечение не делится на q . В противном случае делилась бы группа G_i , что противоречит предположению. Также возьмем K -подмодуль W_j в V_j , порожденный некоторым элементом из G_j нулевой q -высоты и лежащий в каком-то неприводимом подмодуле S -модуля V_j . Положим $A = W_i \cap G$, $B = W_j \cap G$ и $C = (W_i + W_j) \cap G$. Тогда по следствию 2.2 $C \doteq A \oplus B$, т. е. $mC \subseteq A \oplus B$ для некоторого натурального числа m .

Проверим, что $qA \neq A$ и $qB \neq B$. Здесь нужно учесть, что пересечения циклических подмодулей K -модуля V_i ,

образующие которых лежат в неприводимых подмодулях S -модуля V_i , с группой G попарно квазиизоморфны по следствию 2.2. Фактор-группа группы G_i по сумме всех этих пересечений периодична. Если предположить, что $qA = A$, то все рассматриваемые пересечения в силу квазиизоморфизма также будут делиться на q . Учитывая периодичность фактор-группы группы G_i по сумме всех пересечений, получаем, что q -делимой будет и группа G_i . Противоречие с тем, что $qG_i \neq G_i$. Таким образом, $qA \neq A$ и аналогично $qB \neq B$.

Выберем элементы $x \in A$ и $y \in B$ так, что $h_q(x) = h_q(y) = 0$. Рассмотрим теперь элементы $x + qy$ и $qx + y$. Ясно, что $h_q(x + qy) = h_q(qx + y) = 0$ и характеристики этих элементов в группе $A \oplus B$ совпадают. Ввиду $mC \subseteq A \oplus B$ p -высоты элементов $x + qy$ и $qx + y$ в группе C , следовательно, и в G (C сервантна в G) совпадают для всех p , не делящих m . p -высоты могут лишь отличаться для простых чисел $p|m$, причем $|h_p(x + qy) - h_p(qx + y)| \leq s$, где s — максимальный показатель, для которого $p^s|m$. Таким образом, можно выбрать натуральные числа s, t так, что $(t, q) = 1$ и $\chi(sx + sqy) = \chi(tqx + ty)$. В силу вполне транзитивности (соответственно транзитивности) группы G найдется $\alpha \in E(G)$ со свойством $\alpha(sx + sqy) = \alpha(sx) + \alpha(sqy) = tyx + ty$. Так как $\alpha(sx), tqx \in V_i$, а $\alpha(sqy), ty \in V_j$, то получаем $ty = \alpha(sqy) = q(say)$. Откуда $h_q(ty) > 0$. Так как $(t, q) = 1$, то $h_q(y) = h_q(ty) > 0$. Противоречие с выбором элемента y .

Мы установили, что для любых различных i и j и любого простого числа p выполняется: если $pG \neq \cong G_i$, то $pG_j = G_j$. Подгруппа $\sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$ — такова, что $G/\sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$ — периодическая группа. Возьмем некоторый элемент $z \in G$ и выберем минимальное натуральное число n , для которого $nz \in \sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$. Тогда $nz = x_{i_1} + \dots + x_{i_k}$, где $x_{i_j} \in G_{i_j}$ ($j = 1, \dots, k$). Пусть простое число $p|n$ и $n = pm$. Если $pG_{i_j} = G_{i_j}$ для всех $j = 1, \dots, k$, то $x_{i_j} = py_j$, где $y_j \in G_{i_j}$ ($j = 1, \dots, k$). Откуда $mz = y_1 + \dots + y_k$, что противоречит минимальности n . Следовательно, $pG_{i_s} \neq G_{i_s}$ для некоторого s . Тогда на основании доказанного выше $pG_{i_j} = G_{i_j}$ при всех $j \neq s$. Как и раньше, $x_{i_j} = py_j$, где $y_j \in G_{i_j}$ и $j \neq s$. Имеем $pmz = p \sum_{j \neq s} y_j + x_{i_s}$ и $x_{i_s} = p(mz - \sum_{j \neq s} y_j)$.

Откуда, учитывая сервантность G_{i_s} в G , $x_{i_s} = py_s$, где $y_s \in G_{i_s}$. Снова получили $pmz = py_1 + \dots + py_k$ и $mz = y_1 + \dots + y_k$, где все $y_j \in G_{i_j}$. Снова противоречие с выбором n . Из проведенного рассуждения следует, что $n = 1$ и $z \in \sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$. Таким образом, $G = \sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$ и если $pG_i \neq G_i$ для некоторого i , то $pG_j = G_j$ для всех остальных индексов $j \in I$.

Из отмеченного выше свойства прямых слагаемых G_i легко вывести, что все они вполне транзитивные (соответственно транзитивные) группы. Это же свойство слагаемых G_i влечет вполне характеристичность их в группе G . Поэтому $S = E(G) = \prod_{i \in I} E(G_i)$. Напомним, что $V = \sum_{i \in I}^{\oplus} V_i$ и $G_i = V^i \cap G$, $i \in I$. Отсюда $V_i = G_i \otimes {}_{\mathbb{Z}} Q$, $i \in I$. Так как каждый V_i есть однородный вполне приводимый S -модуль и произведение колец $\prod_{i \in I} E(G_i)$ действует на сумме $\sum_{i \in I}^{\oplus} V_i$ покомпонентно, то каждый V_i является однородным вполне приводимым $E(G_i)$ -модулем.

Предположим теперь, что некоторая группа G_i неоднородна, и докажем, что ее кольцо квазиэндоморфизмов $E(G_i)$ является телом. В целях упрощения записей будем считать, что сама группа G является неоднородной вполне транзитивной (транзитивной) группой, причем V — однородный вполне приводимый S -модуль. Покажем, что S есть тело.

Выберем в V некоторый циклический K -подмодуль W_1 , порожденный элементом, лежащим в каком-либо неприводимом подмодуле S -модуля V . Если $V \neq W_1$, то V содержит некоторый циклический K -подмодуль W_2 , порожденный элементом из какого-либо неприводимого S -подмодуля в V и такого, что $W_1 \cap W_2 = 0$. Положим $A_i = W_i \cap G$ ($i = 1, 2$) и $A = (W_1 + W_2) \cap G$. По следствию 2.2 $A = A_1 \oplus A_2$ и $\kappa A \subseteq A_1 \oplus A_2$ для некоторого натурального числа κ .

Выберем в S -модуле V два различных неприводимых подмодуля, скажем, V_1 и V_2 . Это можно сделать, поскольку в противоположном случае модуль V был бы неприводимым S -модулем, а группа G соответственно неприводимой группой, в частности однородной. Очевид-

но, пересечения $V_i \cap W_j$ отличны от нуля и, следовательно, отличны от нуля пересечения $V_i \cap A_j$ ($i, j = 1, 2$).

Найдутся ненулевые элементы $x_1 \in V_1 \cap A_1$ и $x_2 \in V_2 \cap A_1$, $y_1 \in V_2 \cap A_2$ и $y_2 \in V_1 \cap A_2$ такие, что, во-первых, $\chi(x_1) = \chi(y_2)$ и $\chi(x_2) = \chi(y_1)$. Это возможно, так как пересечения $V_1 \cap G$ и $V_2 \cap G$ являются минимальными *pfi*-подгруппами в G и, значит, они однородные группы. Во-вторых, существует простое число p , для которого $h_p(x_1) = h_p(x_2) = 0$. Предположение, что такого числа нет для любой пары различных неприводимых S -подмодулей в V , приводит к противоречию. Действительно, запишем $V = \sum_{j \in J}^{\oplus} V_j$, где все V_j — неприводимые S -модули. Полагая $B_j = V_j \cap G$ и учитывая, что каждая B_j — однородная группа, получаем ввиду предположения следующее. Для всякого простого числа p и любых различных $n, m \in J$ выполняется: если $pB_n \neq B_n$, то $pB_m = B_m$. Так как группа $G/\sum_{j \in J}^{\oplus} B_j$ перио-

дична, то, как и выше, получаем $G = \sum_{j \in J}^{\oplus} B_j$, где всякая B_j вполне характеристична в G . Поэтому $S = \prod E(B_j)$. Кольцо S действует на пространстве $V = \sum_{j \in J}^{\oplus} V_j$ покомпонентно. Получили противоречие с тем, что V является однородным вполне приводимым S -модулем. Таким образом, простое число p , для которого $h_p(x_1) = h_p(x_2) = 0$, в самом деле существует.

Рассмотрим теперь элементы $x_1 + py_1$, $x_2 + py_2 \in A_1 \oplus A_2$. Очевидно, $h_p(x_1 + py_1) = h_p(x_2 + py_2)$. Подгруппа A сервантна в G и $\kappa A \subseteq A_1 \oplus A_2$. Поэтому, аналогично первой части доказательства, найдутся натуральные числа s и t такие, что $\chi(sx_1 + spy_1) = \chi(tx_2 + tpy_2)$ и $(t, p) = 1$. В силу вполне транзитивности (транзитивности) группы G можно выбрать $\alpha \in E(G)$ со свойством $\alpha(sx_1 + spy_1) = \alpha(sx_1) + \alpha(spy_1) = tx_2 + tpy_2$. Здесь $\alpha(sx_1), tpy_2 \in V_1$, а $\alpha(spy_1), tx_2 \in V_2$. Поскольку $V_1 \cap V_2 = 0$, то получаем $\alpha(spy_1) = p(szy_1) = tx_2$ и $h_p(tx_2) > 0$. Так как $(t, p) = 1$, то $h_p(x_2) = h_p(tx_2) > 0$, что противоречит выбору элемента x_2 .

Полученное противоречие означает, что модуль V совпадает с W_1 , т. е. порождается как K -модуль каким-то элементом из некоторого неприводимого подмодуля в V .

По следствию 2.2 $M(G)/N(G)$ — тело. Но у нас $N(G) = 0$, а $M(G) = E(G)$. Следовательно, $E(G)$ — тело. Теорема доказана.

Следствие 4.3. Пусть G — вполне транзитивная группа без кручения. Тогда группа $P = \text{Soc } G$ вполне транзитивна и совпадает со своим псевдоцоклем, т. е. $P = \text{Soc } P$. Следовательно, она имеет вид, указанный в теореме 4.2.

Доказательство. Очевидно, pfi -подгруппы вполне транзитивной группы сами вполне транзитивны. Поэтому P — вполне транзитивная группа. Если H — минимальная pfi -подгруппа в G , то H будет минимальной pfi -подгруппой и в P . Действительно, пусть существует $\alpha \in E(P)$ такой, что $\alpha\alpha \notin H$ для некоторого элемента $\alpha \notin H$. Тогда $\chi_P(\alpha) \leq \chi_P(\alpha\alpha)$ (характеристики в P). Отсюда, учитывая сервантность P в G , $\chi_G(\alpha) \leq \chi_G(\alpha\alpha)$.

Следовательно, существует $\beta \in E(G)$, для которого $\beta\alpha = \alpha\alpha \in H$. Противоречие. Получили, что H вполне характеристична в P . И, очевидно, что H — минимальная pfi -подгруппа в P . Таким образом, все минимальные pfi -подгруппы группы G являются минимальными pfi -подгруппами группы P , т. е. P сервантно порождается своими минимальными pfi -подгруппами и $P = \text{Soc } P$.

Группы G_i , появляющиеся в теореме 4.2, определяют однозначно, подобно примарным компонентам периодической группы. А именно, $G_i = \bigcap p^n G$, где n пробегает все натуральные числа, p — все простые числа со свойством $pG_i = G_i$.

Таким образом, изучение вполне транзитивных (транзитивных) групп без кручения, совпадающих со своими псевдоцоклями, распадается на изучение однородных вполне транзитивных (транзитивных) групп и вполне транзитивных (транзитивных) групп с телом в качестве кольца квазиэндоморфизмов. Последние группы допускают удовлетворительное описание. В следующем параграфе рассмотрим их.

§5. Вполне транзитивные группы, кольца квазиэндоморфизмов которых являются телами

Ассоциативное кольцо R с 1 называется сильно однородным, если всякий его элемент есть целое кратное некоторого обратимого в R элемента.

Для группы G положим $\Pi(G) = \{p \mid pG \neq G, \quad p \text{ -- простое число}\}$.

Предложение 5.1. Пусть группа без кручения G такова, что $E(G)$ — тело; $\Pi(A) = \Pi(G)$ для каждой сервантной подгруппы A в G . Следующие утверждения эквивалентны:

1) группа $\text{Aut} G$ действует транзитивно на множестве всех сервантных подгрупп ранга 1 некоторой минимальной pfi -подгруппы группы G ;

2) утверждение 1) с заменой группы $\text{Aut} G$ на группу $\text{Hom}(G, G)$;

3) $E(G)$ — сильно однородное кольцо.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $0 \neq \alpha \in E(G)$. Выберем некоторую сервантную подгруппу A ранга 1 в минимальной pfi -подгруппе, о которой идет речь в 1). Обозначим через B сервантную подгруппу, порожденную образом αA . Ввиду 2) $\beta A = B$ и $\gamma B = A$ для некоторых $\beta, \gamma \in E(G)$. Возьмем некоторый элемент $0 \neq a \in A$. Существуют взаимно простые натуральные числа n и m такие, что $n(\gamma\beta)a = ma$. Отсюда, принимая во внимание, что все ненулевые эндоморфизмы группы G являются мономорфизмами, $n(\gamma\beta) = m \cdot 1_G$. Так как $\chi(a) = \chi((\gamma\beta)a)$, то в силу выбора n и m должно быть $nA = mA = A$. Следовательно, $nG = mG = G$ и умножение на $\frac{m}{n}$ является автоморфизмом группы G .

Поскольку $\gamma\beta = \frac{m}{n} 1_G$, то β — также автоморфизм группы G .

Так как элементы αa и βa лежат в подгруппе B ранга 1, то $\kappa(\alpha a) = l(\beta a)$, причем $(\kappa, l) = 1$. Неравенство $\chi(\beta a) \leq \chi(\alpha a)$ влечет $\kappa B = B$ и, значит, $\kappa G = G$. Как и выше, $\alpha = l\left(\frac{\beta}{\kappa}\right)$, где $\frac{\beta}{\kappa} \in \text{Aut} G$, т. е. α является целым кратным автоморфизма и $E(G)$ — сильно однородное кольцо.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть A и B — сервантные подгруппы ранга 1 некоторой минимальной pfi -подгруппы H группы G . Тогда $H \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ — неприводимый подмодуль $E(G)$ -модуля $G \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ (лемма 1. 5). Если $0 \neq a \in A$, то в силу неприводимости $0 \neq \gamma a \in B$, где $\gamma \in E(G)$. Выберем на-

туральное число n так, что $\alpha = n\gamma \in E(G)$. Имеем $0 \neq \alpha A \subseteq B$. Запишем $\alpha = m\beta$, где $\beta \in \text{Aut } G$; m — натуральное число. Тогда $(m\beta)A \subseteq B$ и, следовательно, $\beta A \subseteq B$ в силу сервантности B . Но β — автоморфизм, поэтому $\beta A = B$ и 1) справедливо.

Теорема 5.2. Пусть G — группа без кручения, кольцо квазиэндоморфизмов которой является телом. Группа G вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий предложения 5.1, $\Pi(A) = \Pi(G)$ для любой сервантной подгруппы A в G и типы различных минимальных *pfi*-подгрупп группы G несравнимы. Кроме того, такая группа G транзитивна.

Доказательство. $\Rightarrow$. Выберем некоторую минимальную *pfi*-подгруппу H в G . Пусть X и Y — сервантные подгруппы в H ранга 1. Так как группа H однородна, то можно выбрать ненулевые элементы $x \in X$ и $y \in Y$ одинаковой характеристики. Пусть $\alpha x = y$, $\alpha \in E(G)$. Ясно, что $\alpha X \subseteq Y$ и поскольку $\chi(x) = \chi(\alpha x)$, то α отображает X на Y , т. е. $\alpha X = Y$. Выполняется условие 2) предложения 5.1.

Пусть A — сервантная подгруппа в G ранга 1. Проверим, что $\Pi(A) = \Pi(G)$. Всегда $\Pi(A) \subseteq \Pi(G)$. Пусть $pA = A$. Тогда A имеет эндоморфизм $\frac{1}{p} 1_A$. Ввиду вполне транзитивности группы G существует $\alpha \in E(G)$, для которого $\alpha|_A = \frac{1}{p} 1_A$ или $p\alpha|_A = 1_A$. Так как всякий ненулевой эндоморфизм группы G является мономорфизмом (действительно, $E(G)$ — тело), то $p\alpha = 1_G$ и $\alpha = \frac{1}{p} 1_G$. Откуда $pG = G$. Получили $\Pi(A) = \Pi(G)$.

Если H_1 и H_2 — две различные минимальные *pfi*-подгруппы в G и тип группы H_1 меньше или равен типу группы H_2 , то $\chi(a) \leq \chi(b)$ для каких-то $0 \neq a \in H_1$ и $0 \neq b \in H_2$. Тогда $\alpha a = b$ для некоторого $\alpha \in E(G)$. Но это противоречит вполне характеристичности подгруппы H_1 (заметим, что $H_1 \cap H_2 = 0$). Следовательно, типы подгрупп H_1 и H_2 несравнимы.

$\Leftarrow$. Пусть a — некоторый элемент группы G . Учитывая то, что всякий эндоморфизм группы G есть целое кратное некоторого ее автоморфизма, можно убедиться в том, что сервантная подгруппа, порожденная орбитой

$O(a)$ элемента a , является минимальной pfi -подгруппой в G .

Если теперь $0 \neq x, y \in G$ и $\chi(x) \leq \chi(y)$, то в силу условия на типы минимальных pfi -подгрупп получаем, что x и y лежат в одной минимальной pfi -подгруппе, скажем H . Пусть X и Y — сервантные подгруппы в G , порожденные элементами x и y соответственно. Тогда $aX = Y$ для некоторого $a \in E(G)$. Выберем натуральные числа n и m так, что $(n, m) = 1$ и $n(ax) = my$. Поскольку $\chi(ax) = \chi(x) \leq \chi(y)$, то $mY = Y$. Но $\Pi(Y) = \Pi(G)$. Значит, $mG = G$ и группа G имеет эндоморфизм $\frac{1}{m} 1_G$. Отсюда $y = \left(\frac{na}{m}\right) x$ и вполне транзитивность группы G установлена.

Осталось показать транзитивность группы G . Если $x, y \in G$, $\chi(x) = \chi(y)$, то в обозначениях, использованных выше, $\chi(ax) = \chi(x) = \chi(y)$, поэтому не только $mY = Y$, но и $nY = Y$. Поэтому группа G обладает также автоморфизмом $n \cdot 1_G$. Таким образом, $y = \left(\frac{na}{m}\right) x$,

где $\frac{na}{m} \in \text{Aut } G$, т. е. G — транзитивная группа. Теорема доказана.

Первый абзац доказательства теоремы 5.2 доказывает также

Следствие 5.3. Кольцо эндоморфизмов транзитивной группы G без кручения такое, что $E(G)$ — тело, сильно однородно.

§ 6. Счетные вполне транзитивные и транзитивные группы без кручения, совпадающие со своими псевдоцоколями

Однородные вполне транзитивные и транзитивные группы подробно изучаются во 2-й части данной работы. Нетрудно убедиться, что однородная транзитивная группа без кручения вполне транзитивна. Уже давно в литературе рассматривались сильно однородные группы. Группа G без кручения называется сильно однородной, если группа $\text{Aut } G$ действует транзитивно на множестве

всех сервантных подгрупп ранга 1 группы G . Сильно однородные группы — это в точности однородные транзитивные группы. В [3] доказано, что если G — однородная вполне транзитивная группа без кручения, то центр C кольца $E(G)$ является сильно однородным кольцом. Далее, $G \cong F \otimes_{\mathbb{Z}} A$, где F — C -модуль без кручения, все подмодули счетного ранга которого свободны; A — группа без кручения ранга 1. Из этого результата получается

Теорема 6.1 [3]. Следующие свойства счетной группы G без кручения эквивалентны:

- 1) G — сильно однородная группа;
- 2) G — однородная вполне транзитивная группа;
- 3) $G \cong F \otimes_{\mathbb{Z}} A$, где F — конечно-или счетно-порожденный свободный модуль над некоторым счетным сильно однородным E -кольцом без кручения; A — группа без кручения ранга 1, причем если p — простое число и $pA = A$, то $pF = F$;

4) $G \cong \sum_{\mathfrak{m}}^{\oplus} H(\mathfrak{m} \leq \omega_0)$, где H — неразложимая сильно однородная группа. E -кольцом называется кольцо, левое регулярное представление которого является изоморфизмом.

Следствие 6.2. Следующие свойства счетной неразложимой группы G без кручения эквивалентны:

- 1) G — сильно однородная группа;
- 2) G — однородная вполне транзитивная группа;
- 3) $G \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} A$, где R — счетное сильно однородное E -кольцо без кручения; A — группа ранга 1 и если $pA = A$, то $pR = R$. В этом случае $E(G) \cong R$.

Сформулированные теорема и следствие вместе с теоремами 4.2 и 5.2 позволяют дать описание групп, указанных в названии параграфа.

Следствие 6.3. Пусть G — счетная группа без кручения и $G = \text{Soc } G$. Группа G вполне транзитивна тогда и только тогда, когда $G = \sum_{i \in I}^{\oplus} G_i$, где $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ и G_i удовлетворяет условиям либо теоремы 6.1, либо 5.2. Кроме того, такая группа G транзитивна.

Доказательство. $\Leftarrow$. Пусть $a, b \in G$ и $\chi(a) \leq \chi(b)$. Пусть $a = \sum_{s=1}^{\kappa} a_{i_s}$ и $b = \sum_{t=1}^m b_{j_t}$ — записи элементов в пря-

мой сумме $G = \sum_{i \in I} \oplus G_i$. Тогда условие $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ влечет, что $\kappa \geq m$ и $j_1 = i_{s_1}, \dots, j_m = i_{s_m}$, где $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_m \leq \kappa$ и $\chi(a_{i_{s_l}}) \leq \chi(b_{j_l})$ ($l = 1, \dots, m$). Отсюда, ввиду вполне транзитивности групп G_i , $\alpha_l(a_{i_{s_l}}) = b_{j_l}$, где $\alpha_l \in E(G_{i_{s_l}})$, $l = 1, \dots, m$. Эндоморфизм группы G , совпадающий на $G_{i_{s_l}}$ с α_l ($l = 1, \dots, m$) и отображающий G_i в 0 при $i \neq i_{s_1}, \dots, i_{s_m}$, переводит элемент a в элемент b , что доказывает вполне транзитивность группы G .

Теперь докажем транзитивность группы G . В силу теорем 6.1 и 5.2 все G_i являются транзитивными группами. Если $a, b \in G$ и $\chi(a) = \chi(b)$, то в тех же обозначениях, что и выше, $\kappa = m$, $i_s = j_s$ и $\chi(a_{i_s}) = \chi(b_{j_s})$ ($s = 1, \dots, \kappa$). Пусть $\alpha_s \in \text{Aut } G_{i_s}$ и $\alpha_s(a_{i_s}) = b_{j_s}$, $s = 1, \dots, \kappa$. Ясно, как построить автоморфизм группы G , отображающий a в b .

Учитывая еще следствие 5.3, получаем

Следствие 6.4. Счетная группа G без кручения такая, что $G = \text{Soc } G$ транзитивна тогда и только тогда, когда $G = \sum_{i \in I} \oplus G_i$, где $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, либо G_i удовлетворяет условиям теоремы 6.1, либо G_i такая неоднородная транзитивная группа, что $E(G_i)$ — тело (следовательно, $E(G_i)$ является сильно однородным кольцом).

Теорема 6.1 и следствия 6.3 и 6.4 справедливы для группы $G = \text{Soc } G$, конечно-или счетно-порожденной над центром своего кольца эндоморфизмов, а также для такой группы G , что K -модуль $V = G \otimes_Z Q$ конечно-или счетно-порожден, где $K = \text{End}_S V$, $S = E(G)$ (для однородной вполне транзитивной группы эти условия равносильны).

Ю. Б. Добрусин построил транзитивную группу G без кручения конечного ранга, не являющуюся вполне транзитивной. Ввиду следствий 6.3 и 6.4, можно считать, что кольцо квазиэндоморфизмов $E(G)$ такой группы G является телом. Пока неизвестно, существует ли вполне транзитивная не транзитивная группа без кручения. Особенно это интересно выяснить в случае однородных групп, так как однородная транзитивная группа всегда

вполне транзитивна. Если такая группа существует, то она должна быть несчетной ввиду теоремы 6.1. Независимость понятий «транзитивность и вполне транзитивность» для примарных групп доказана А. Корнером [15].

Следствие 6.5. Если G — счетная транзитивная группа без кручения и $G = \text{Soc } G$ (в частности, вполне транзитивная группа), то любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными уплотнениями. В частности, всякое прямое слагаемое группы G имеет вид, указанный в следствии 6.4 (соответственно следствию 6.3) и, значит, является транзитивной группой.

Доказательство. По предыдущему следствию группу G можно записать в виде $G = \sum_{k \in K}^{\oplus} G_k \oplus \sum_{m \in M}^{\oplus} G_m$ ($K \cap \bigcap M = \emptyset$), где $E(G_k)$ — сильно однородное кольцо для всех $k \in K$. А для всех $m \in M$ $G_m \cong \sum^{\oplus} H_m$ и $E(H_m)$ — также сильно однородное кольцо. Кроме того, $\bigcap (G_i) \cap \bigcap (G_j) = \emptyset$ при $i \neq j$; $i, j \in K \cup M$. Семейство групп $\{G_k | k \in K\} \cup \{H_m | m \in M\}$ образует полужесткую систему групп [16]. Так как все группы G_k и H_m счетны, а все кольца $E(G_k)$ и $E(H_m)$ являются кольцами главных идеалов, то все вытекает из следствия 4.3 работы [16].

Используя основной результат статьи [10], можно получить, основываясь на теореме 4.2 и следствии 6.4,

Следствие 6.6. а. Следующие свойства вполне транзитивной группы G без кручения, совпадающей с псевдоцоклем, равносильны:

1) группа $\sum_m^{\oplus} G$ вполне транзитивна для любого кардинала $m > 1$;

2) группа $G \oplus G$ вполне транзитивна;

3) всякая вполне характеристическая подгруппа S группы G равна vG для некоторой характеристики v (здесь $vG = \{a \in G | \chi(a) \geq v\}$);

4) G не имеет неоднородных прямых слагаемых H таких, что $E(H)$ — тело;

5) G является прямой суммой однородных вполне транзитивных групп.

б. Для счетной транзитивной группы $G = \text{Soc } G$ эквивалентны утверждения 1) — 5) с заменой слов «вполне транзитивна» на слово «транзитивна».

Относительно следствий 6.5 и 6.6 можно заметить следующее. Нетрудно убедиться, что всякое прямое слагаемое произвольной вполне транзитивной группы без кручения само вполне транзитивно. Неизвестно, справедливо ли подобное утверждение для произвольной транзитивной группы без кручения. С. Я. Гриншпон [14] нашел необходимые и достаточные условия вполне транзитивности прямой суммы вполне транзитивных групп. Как и в случае прямых слагаемых, неизвестно, выполняется ли утверждение пункта б) следствия 6.6 для произвольной транзитивной группы $G = \text{Soc} G$.

Более узкий класс по сравнению с вполне транзитивными группами составляют квазисервантно инъективные группы [5, проблема 17]. Такие группы изучались в ряде работ. Наиболее лучшие результаты получены в [12 и 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Reid J. D. On the ring of quasi-endomorphisms of torsion-free groups.—Topics in abelian groups. Chicago, 1963. p. 51—68.
2. Крылов П. А. Абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов.—Известия вузов. Математика, 1979, № 11, с. 26—33.
3. Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения.—VII Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. Красноярск, 1980, с. 59.
4. Крылов П. А. Изоморфизмы колец эндоморфизмов абелевых групп.—VI Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщений. Кишинев, 1980, с. 58.
5. Фуке Л. Бесконечные абелевы группы.—М.: 1974, т. 1.—335 с.
6. Фуке Л. Бесконечные абелевы группы.—М.: 1977, т. 2.—416 с.
7. Walker E. A. Quotient categories and quasi-isomorphisms of abelian groups.—Proc. Colloq. Abelian groups. Budapest, 1964, p. 147—162.
8. Джекобсон Н. Строение колец.—М.: ИЛ, 1961.—392 с.
9. Басс Х. Алгебраическая K-теория.—М., 1973.—591 с.
10. Крылов П. А. О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения.—Сборник аспирантских работ по математике. Томск, 1973, с. 15—20.
11. Kaplansky I. Infinite abelian groups.—Ann. Arbor. Michigan, 1954.—91 p.
12. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно инъективные группы.—В сб.: Абелевы группы и модули. Томск, 1979, с. 45—63.
13. Добрусин Ю. Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения.—В сб.: Абелевы группы и модули. Томск, 1980, с. 45—69.

14. Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск, 1982, с. 56—92.

15. Corner A. L. S. The independence of Kaplansky's notion of transitivity and full transitivity.— Quart. J. Math., 1976, v. 27, N 105, p. 15—20.

16. Arnold D. M., Murley C. E. Abelian groups A , such that $\text{Hom}(A, -)$ preserves direct sums of copies of A .— Pacif. J. Math., 1975, v. 56, p. 7—20.

МИНИМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ

В. А. КУЗИЧЕВА

В работе исследуются свойства языка первой ступени теории модулей над ассоциативным кольцом с единицей, связанные с определяемыми подмножествами модулей над кольцом. Понятие минимального кольца, введенное при рассмотрении определяемых подмножеств кольца и изложенное в [8], переносится на модули над кольцом. Изучается строение минимальных модулей и колец, над которыми существуют минимальные модули.

1. Условимся под R понимать фиксированное ассоциативное кольцо с единицей, а под M — фиксированный правый R -модуль.

Рассматривается обычный язык первой ступени правых модулей над кольцом, включающий в качестве констант символы всех элементов из M . Все рассматриваемые формулы являются предложениями этого языка. Обозначим через $F_{R, M}$ множество всех формул этого языка с одной свободной переменной.

Пусть $\varphi(x)$ — некоторая формула из $F_{R, M}$ и $m \in M$, тогда говорят, что m удовлетворяет $\varphi(x)$, если высказывание $\varphi(m)$ истинно на M . Множество элементов из M , удовлетворяющих $\varphi(x)$, называется выполняющим $\varphi(x)$ множеством. Подмножество X из M называется определяемым, если оно является выполняющим множеством для некоторой формулы $\varphi(x) \in F_{R, M}$.

Пусть $m_0, \dots, m_n \in M$, тогда для формулы

$$((m_0=x) \vee (m_1=x) \vee \dots \vee (m_n=x))$$

выполняющим множеством является $\{m_0, \dots, m_n\}$. Таким образом, любое конечное подмножество из M является определяемым. Если X является выполняющим множеством для формулы $\varphi(x)$ из $F_{R, M}$, то M/X является выпол-

няющим множеством для формулы $\neg \varphi(x)$ из $F_{R, M}$. Таким образом, любое коконечное подмножество из M является определимым.

Определение 1.1. Модуль M называется минимальным, если он бесконечен и любое определимое подмножество в нем конечно или коконечно.

Лемма 1.1. Пусть M — минимальный модуль. Если $(G, +)$ — бесконечная подгруппа группы $(M, +)$ и G — определимое подмножество модуля M , то G совпадает с M .

Доказательство (совпадает с проведенным в статье [8], лемма 2, с. 195).

Лемма 1.2. Пусть M — минимальный модуль. Тогда для любого элемента r из R имеет место $M \cdot r = M$ или $M \cdot r = \{0\}$.

Доказательство (идейно близко к проведенному в [8], лемма 3, с. 195). Предположим, что $M \cdot r \neq M$. Поскольку множество $M \cdot r$ определяется формулой

$$\varphi(x) = ((\exists y) (y \cdot r = x)),$$

то в силу леммы 1.1 подгруппа $(M \cdot r, +)$ конечна. Следовательно, существует такой элемент c из $M \cdot r$, что множество $H = \{b \mid b \in M, b \cdot r = c\}$ бесконечно. Пусть G — множество, выполняющее формулу $x \cdot r = 0$. Тогда $(G, +)$ — подгруппа группы $(M, +)$. Если $b_0 \in H$, то для каждого $b \in H$ элемент $(b - b_0) \in G$. Так как H — бесконечное множество, то и множество $(b - b_0 \mid b \in M, b \cdot r = c)$ бесконечно, следовательно, множество G бесконечно. Тогда на основании леммы 1.1 $G = M$. Следовательно, $M \cdot r = \{0\}$, что и требовалось доказать.

Если $r \in R$ и M есть R -модуль, то положим $G_r = \{x \mid x \in M, x \cdot r = 0\}$.

Замечание 1.1. Множество $G_r = G_{-r}$ для любого $r \in R$.

Лемма 1.3. Пусть M — произвольный R -модуль и $r \in R$. Тогда если множество G_r коконечно, то оно совпадает с M .

Доказательство. Пусть множество G_r коконечно, но не совпадает с M . Тогда найдется элемент x_0 из M такой что $x_0 \cdot r = m_0$, где $m_0 \neq 0$. Множество решений уравнения $x \cdot r = m_0$ есть $x_0 + G_r$, т. е. оно бесконечно. Следовательно, множество $M \setminus G_r$ бесконечно. Противоречие. Лемма доказана.

Следствие 1.1. Пусть M — минимальный модуль. Тогда для любого $r \in R$ множество G_r либо конечно, либо совпадает с M .

Следствие 1.2. Пусть для модуля M множество G_r для любого $r \in R$ либо конечно, либо совпадает с M . Тогда множество решений любого уравнения вида $x \cdot r = m$, где $m \neq 0$, либо конечно, либо пусто.

Доказательство. Предположим, что существует x_0 из M такой, что $x_0 \cdot r = m$. Тогда множество решений уравнения $x \cdot r = m$ есть $x_0 + G_r$. Элемент $x_0 \notin G_r$. Следовательно, множество G_r , а значит, и множество $x_0 + G_r$ конечны. Следствие доказано.

Теорема 1.1. Теория бесконечных правых модулей над телом R допускает элиминацию кванторов.

Доказательство. Формула называется простой экзистенциальной, если она имеет вид $(\exists x)A$, где A — бескванторная формула [6, с. 130]. В силу [6, лемма 3, с. 130] достаточно доказать, что любая простая экзистенциальная формула эквивалентна бескванторной формуле в теории бесконечных правых модулей над телом R .

Пусть U — простая экзистенциальная формула, т. е.

$$U = (\exists x)A,$$

где A — бескванторная формула и $A = A(x, y_1, \dots, y_n)$, где $y_1, \dots, y_n$ — свободные переменные формулы U . Можем считать, что A имеет дизъюнктивную нормальную форму, т. е.

$$A = \bigvee_{i=1}^l B_i,$$

$B_i = \bigwedge_{j=1}^{t_i} f_{ij}$ и f_{ij} ($i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, t_i$) — атомные формулы или их отрицания. Таким образом

$$U = (\exists x)A = \bigvee_{i=1}^l ((\exists x)B_i).$$

Поскольку из $((\exists x)B_i) \leftrightarrow T_i$, $i = 1, \dots, l$, вытекает $\bigvee_{i=1}^l ((\exists x)B_i) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^l T_i$, то достаточно доказать, что любая формула вида

$$(\exists x) \bigwedge_{i=1}^t f_i, \tag{1}$$

Пусть $f_1, \dots, f_s$ — формулы, зависящие от x , а $f_{s+1}, \dots, f_t$ — не зависят от x . Тогда перепишем (1) в форме

$$(\bigwedge_{i=s+1}^t f_i) \& ((\exists x) (\bigwedge_{i=1}^s f_i(x))),$$

где $\bigwedge_{i=s+1}^t f_i$ — бескванторная формула. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что в формуле (1) все подформулы f_i , $i=1, \dots, t$, зависят от x . В теории правых модулей над телом R атомная формула $f=f(y_1, \dots, y_n, x)$ имеет вид

$$y_1 \cdot r_1 + \dots + y_n \cdot r_n + x \cdot r_{n+1} = 0,$$

где $r_1, \dots, r_{n+1}$ — произвольные элементы тела R . Формула (1) истинна тогда и только тогда, когда совместна следующая система уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} y_1 \cdot r_1^1 + \dots + y_n \cdot r_n^1 + x \cdot r_{n+1}^1 = 0; \\ \vdots \\ y_1 \cdot r_1^K + \dots + y_n \cdot r_n^K + x \cdot r_{n+1}^K = 0; \\ y_1 s_1^1 + \dots + y_n \cdot s_n^1 + x \cdot s_{n+1}^1 \neq 0; \\ \vdots \\ y_1 \cdot s_1^l + \dots + y_n \cdot s_n^l + x \cdot s_{n+1}^l \neq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $r_{n+1}^i \neq 0$, $i = 1, \dots, \kappa$; $s_{n+1}^j \neq 0$, $j = 1, \dots, l$. Положим

$$y_1 \cdot r_1^i + \dots + y_n \cdot r_n^i = -\varphi_i(y_1, \dots, y_n);$$

$$y_1 \cdot s_1^j + \dots + y_n \cdot s_n^j = -\psi_j(y_1, \dots, y_n),$$

где $i = 1, \dots, \kappa$, $j = 1, \dots, l$. Перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} x \cdot r_{n+1}^1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_n); \\ \vdots \\ x \cdot r_{n+1}^\kappa = \varphi_\kappa(y_1, \dots, y_n); \\ x \cdot s_{n+1}^1 \neq \psi_1(y_1, \dots, y_n); \\ \vdots \\ x \cdot s_{n+1}^l \neq \psi_l(y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (3)$$

В любом модуле над телом R уравнение $x \cdot r = m$, где $r \neq 0$, имеет единственное решение $x = m \cdot r^{-1}$. По-

этому если $\kappa \geq 1$, то формула (1) эквивалентна бескванторной формуле, получающейся из B подстановкой вместо x выражения

$$(\varphi_1(y_1, \dots, y_n)) (r_{n+1}^1)^{-1}.$$

Если же $\kappa = 0$, то формула (1) всегда истинна в теории бесконечных правых модулей над телом R , так как она утверждает наличие в бесконечном модуле M элемента, отличного от конечного набора заданных элементов. Следовательно, формула (1) эквивалентна формуле $(c \vee \bigwedge c)$, где c — любая бескванторная формула с переменными $y_1, \dots, y_n$. Теорема доказана.

Выберем в $F_{R, M}$ некоторое исходное множество базисных формул. Под булевой комбинацией базисных формул понимается всякая формула, полученная из базисных в результате их соединения произвольным конечным числом связок $\bigwedge$ и $\&$ [4, с. 67].

Лемма 1.4. Если любое подмножество модуля M , определенное базисной формулой, конечно или коконечно, то подмножество модуля M , определенное булевой комбинацией базисных формул, конечно или коконечно.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ из $F_{R, M}$ является булевой комбинацией базисных формул. Доказательство будем вести индукцией по сложности $\varphi(x)$ как булевой комбинации базисных формул.

1. Пусть $\varphi(x)$ — базисная формула. Для нее утверждение верно по предположению.

2. Пусть $\varphi(x) = \bigwedge \psi(x)$ и для $\psi(x)$ утверждение верно. Пусть A — множество, выполняющее формулу $\psi(x)$. Тогда $(M \setminus A)$ — множество, выполняющее формулу $\varphi(x)$. По предположению, множество A конечно или коконечно, тогда множество $(M \setminus A)$ коконечно или конечно.

3. Пусть $\varphi(x) = \psi_1(x) \& \psi_2(x)$, причем для формул $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ утверждение верно. Пусть множество A_i выполняет формулу $\psi_i(x)$, $i = 1, 2$. Тогда $B = A_1 \cap A_2$ — множество, выполняющее формулу $\varphi(x)$. Если множества A_1 и A_2 коконечны, то множества $(M \setminus A_1)$ и $(M \setminus A_2)$ конечны. Отсюда $(M \setminus B) = (M \setminus A_1) \cup (M \setminus A_2)$ — конечное множество, следовательно, множество B коконечно. Если одно из множеств A_i , $i = 1, 2$, конечно, то и множество B конечно. Лемма доказана.

Теорема 1.2. Любой бесконечный модуль над телом минимален.

Доказательство. Пусть M — фиксированный бесконечный модуль над телом R . Пусть X — определимое подмножество модуля M . Тогда X является выполняющим множеством для формулы $F(x) \in F_{R,M}$. В силу теоремы 1.1, существует бескванторная формула $q(x)$ такая, что в модуле M истинна формула

$$(\forall x) (F(x) \leftrightarrow q(x)).$$

Следовательно, множество X является выполняющим множеством для бескванторной формулы $q(x)$. Любая бескванторная формула является булевой комбинацией атомных формул. Атомные формулы из $F_{R,M}$ имеют вид

$$x \cdot r = m, \quad (4)$$

где $r \in R$, $m \in M$. Если $m=0$ и $r=0$, то любой элемент из M есть решение уравнения (4). Если $m=0$ и $r \neq 0$, то $x=0$ — единственное решение этого уравнения. В силу следствия 1.2, любое подмножество модуля M , определенное атомной формулой из $F_{R,M}$, конечно или коконечно. В силу леммы 1.4, любое подмножество модуля M , определенное бескванторной формулой из $F_{R,M}$, конечно или коконечно. Следовательно, множество X конечно или коконечно. Теорема доказана.

Следствие 1.3. Если тело R бесконечно, то любой ненулевой модуль над ним минимален.

Теорема 1.3. Пусть R — бесконечное кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) R — тело;
- (2) любой ненулевой модуль над R минимален;
- (3) R минимально как модуль над собой.

Доказательство. Импликация (1) $\rightarrow$ (2) следует из следствия 1.3, а (2) $\rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\rightarrow$ (1). В силу леммы 1.2, для любого r из R имеет место $R \cdot r = R$ или $R \cdot r = \{0\}$. Если $r \neq 0$, то $r \in R \cdot r$, так как R — кольцо с единицей. Следовательно, $R \cdot r = R$ для любого $r \neq 0$. Пусть $0 \neq r \in R$, тогда найдется $0 \neq s \in R$ такой, что $s \cdot r = 1$. Но $R \cdot s = R$, отсюда найдется $0 \neq r' \in R$ такой, что $r' \cdot s = 1$. Следовательно

$$r = (r' \cdot s) \cdot r = r' \cdot (s \cdot r) = r'.$$

Таким образом, $s \cdot r = r \cdot s = 1$, т. е. $s = r^{-1}$. Теорема доказана.

2. Пусть I — идеал кольца R такой, что $I \subseteq \text{Ann} M$, где $\text{Ann} M = \{r \in R \mid M \cdot r = \{0\}\}$. Естественным образом M можно рассматривать как модуль над $R_1 = R/I$, обозначив через $[r]$ класс $r + I$ и положив

$$m \cdot [r] = m \cdot r \quad (5)$$

для любого $r \in R$ и $m \in M$. Следовательно, $M \cdot [r] = M \cdot r$.

Предложение 2.1. Модуль M минимален как модуль над R тогда и только тогда, когда он минимален как модуль над $R_1 = R/I$, где $I \subseteq \text{Ann} M$.

Доказательство. Пусть M минимален как R -модуль. Пусть $X \subseteq M$ определяется формулой $\varphi(x) \in F_{R_1, m}$. Тогда $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x, [r_1], \dots, [r_n])$, где $[r_1], \dots, [r_n]$ — все элементы из R_1 , входящие в формулу $\varphi(x)$. Для любого a из M формула $\varphi(a, [r_1], \dots, [r_n])$ истинна на M тогда и только тогда, когда формула $\varphi(a, r_1, \dots, r_n)$, где r_i — любой представитель класса $[r_i]$, $i = 1, \dots, n$, истинна на M , так как $a \cdot [r_i] = a \cdot r_i$ для любого a из модуля M (см. соотношение (1)). Таким образом, X определяется формулой $\varphi(x, r_1, \dots, r_n)$ из $F_{R, m}$. Следовательно, множество X конечно или коконечно, т. е. M минимален как R_1 -модуль. Аналогично доказывается обратное включение.

Лемма 2.1. Пусть $M \neq \{0\}$. Если для любого r из R имеет место $M \cdot r = M$ или $M \cdot r = \{0\}$, то $R_1 = R/\text{Ann} M$ — кольцо без делителей нуля, и $M \cdot r = M$ для любого r из R такого, что $[r] \neq [0]$.

Доказательство. Для каждого $[r] \in R_1$ имеем $M \cdot r = M \cdot [r]$. Следовательно, если $[r] \neq [0]$, то $r \notin \text{Ann} M$, поэтому $M \cdot r = M$. Пусть $[s] \cdot [r] = [0]$, где $s, r \in R$, $[s] \neq [0]$ и $[r] \neq [0]$. Рассмотрим $0 \neq m \in M$. Поскольку $M \cdot [r] = M$, то найдется $m_1 \in M$ такой, что $m_1 \cdot [r] = m$. Аналогично найдется $m_2 \in M$ такой, что $m_2 \cdot [s] = m_1$. Тогда $0 = m_2 \cdot [s \cdot r] = m_1 \cdot [r] = m$. Противоречие. Лемма доказана.

Отсюда и из леммы 1.2 вытекает

Следствие 2.1. Если M — минимальный модуль над R , то $R_1 = R/\text{Ann} M$ — кольцо без делителей нуля.

Теорема 2.1. Пусть $M \neq \{0\}$ и для любого $r \in R$ имеет место $M \cdot r = M$ или $M \cdot r = \{0\}$. Пусть $R_1 = R/\text{Ann} M$ — конечное кольцо. Тогда R_1 — поле, и если модуль M бесконечен, то он минимален.

Доказательство. Поскольку R_1 — конечное кольцо, то R_1 артиново справа и слева. В силу леммы 2.1 R_1 — кольцо без делителей нуля, следовательно, кольцо R_1 классически полупросто [1, теорема 3, с. 195]. Ввиду отсутствия делителей нуля оно оказывается телом. Всякое конечное тело является полем [1, теорема 1, с. 266]. Пусть модуль M бесконечен, тогда в силу теоремы 1.2 он минимален как модуль над R_1 . В силу предложения 2.1 модуль M минимален как R -модуль. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть R — конечное кольцо. Тогда следующие условия на модуль M эквивалентны:

(1) M — минимальный модуль;

(2) M — бесконечный модуль и для любого $r \in R$ имеет место $M \cdot r = M$ или $M \cdot r = \{0\}$.

Доказательство. Импликация (1) $\rightarrow$ (2) следует из определения 1.1 и леммы 1.2, а импликация (2) $\rightarrow$ (1) — из теоремы 2.1.

Теорема 2.3. Пусть R — конечное кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) R — поле;

(2) любой бесконечный R -модуль минимален;

(3) существует свободный минимальный R -модуль.

Доказательство. Импликация (1) $\rightarrow$ (2) следует из теоремы 1.2, а импликация (2) $\rightarrow$ (3) очевидна. (3) $\rightarrow$ (1). Известно, что если M — свободный R -модуль, то $\text{Апп}M = \{0\}$. Утверждение следует из теоремы 2.1.

3. Предложение 3.1. Пусть M — ненулевой модуль над коммутативным кольцом R , для каждого $r \in R$ имеет место $M \cdot r = M$ или $M \cdot r = \{0\}$, кроме того, $G_r = \{0\}$ или $G_r = M$. Тогда кольцо $R_1 = R/\text{Апп}M$ можно вложить в поле K так, что модуль M можно рассматривать как модуль над этим полем, причем подкольцо поля K , изоморфное R_1 , действует на модуль M так же, как и кольцо R_1 .

Доказательство. В силу леммы 2.1 R_1 — кольцо без делителей нуля. Следовательно, его можно вложить в поле частных K (см. [2], с. 77). При этом поле $K = \{(a, b) | a, b \in R_1, b \neq 0\}$, и $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a \cdot d = b \cdot c$. По лемме 2.1 $M \cdot b = M$ для каждого $0 \neq b \in R_1$, следовательно, $G_b = \{0\}$ для каждого $0 \neq b \in R_1$. Таким образом, отображение $h_b: x \rightarrow x \cdot b$ модуля M является автоморфизмом при любом $0 \neq b \in$

(—) R_1 . Как известно [2, с. 80—81], в этом случае модуль M можно рассматривать как модуль над полем K , положив

$$m \cdot (a, b) = (h_b)^{-1} (m \cdot a)$$

для любого $m \in M$ и любого элемента $(a, b) \in K$. При этом подкольцо поля K , изоморфное R_1 , действует на модуль M так же, как и кольцо R_1 . Предложение доказано.

Следствие 3.1. Пусть M — минимальный модуль над коммутативным кольцом R такой, что для любого $r \in R$ имеет место $G_r = \{0\}$ или $G_r = M$. Тогда кольцо $R_1 = R/\text{Ann} M$ можно вложить в поле K так, что модуль M можно рассматривать как модуль над этим полем, причем подкольцо поля K , изоморфное R_1 , действует на модуль M так же, как и кольцо R_1 .

Доказательство следует из определения 1.1, леммы 1.2 и предложения 3.1.

Теорема 3.1. Пусть M — модуль над коммутативным кольцом R такой, что для любого $r \in R$ имеет место $G_r = \{0\}$ или $G_r = M$. Тогда следующие условия на модуль M эквивалентны:

(1) M минимален;

(2) M бесконечен и для любого $r \in R$ имеет место $M \cdot r = M$ или $M \cdot r = \{0\}$.

Доказательство. Импликация (1) $\rightarrow$ (2) следует из определения 1.1 и леммы 1.2.

(2) $\rightarrow$ (1). В силу предложения 3.1 R_1 -модуль M можно рассматривать как модуль над полем K . В силу теоремы 1.2 M минимален как модуль над полем K . Пусть $X \subseteq M$ определяется формулой $\varphi(x) \in F_{R_1, M}$. Заметим, что $F_{R_1, M} \subseteq F_{K, M}$, а именно $F_{R_1, M}$ — формулы из множества $F_{K, M}$, в записи которых участвовали только элементы вида $(a, 1)$, где $a \in R_1$. Следовательно, множество X конечно или коконечно, т. е. M минимален как модуль над R_1 . Теорема вытекает из предложения 2.1.

Следствие 3.2. Бесконечный модуль без кручения [3, с. 163] над коммутативным кольцом минимален тогда и только тогда, когда он делим.

4. Всюду ниже под M понимается фиксированная абелева группа, которая рассматривается как модуль над кольцом Z .

Л е м м а 4.1. Пусть M — ненулевая абелева группа, и для любого $n \in Z$ имеет место $M \cdot n = M$ или $M \cdot n = \{0\}$. Тогда для группы M выполняется одно из двух условий:

- (1) M — делимая абелева группа;
- (2) M — элементарная p -группа для некоторого фиксированного простого числа p .

Доказательство. Если $M \cdot n = M$ для любого $0 \neq n \in Z$, то M — делимая абелева группа. Если же существует $0 \neq n \in Z$ такой, что $M \cdot n = \{0\}$, то M — ограниченная абелева группа. Пусть n — наименьшее положительное число, для которого $M \cdot n = \{0\}$. Предположим, что $n = p \cdot q$, где $p, q \neq 1$. Тогда $M \cdot p = M$ и $M \cdot q = M$, отсюда $\{0\} = M \cdot n = (M \cdot p) \cdot q = M \cdot q = M$. Противоречие. Следовательно, n — простое число, положив $n = p$, видим, что M — элементарная p -группа. Лемма доказана.

Т е о р е м а 4.1. Ограниченная абелева группа минимальна тогда и только тогда, когда она является бесконечной элементарной p -группой для некоторого фиксированного простого числа p .

Доказательство. Пусть ограниченная абелева группа M минимальна. Тогда она бесконечна и в силу леммы 1.2 для любого $n \in Z$ имеем $M \cdot n = M$ или $M \cdot n = \{0\}$. Теперь требуемое утверждение следует из леммы 4.1.

Предположим, что M — бесконечная элементарная p -группа для некоторого фиксированного простого числа p . Тогда группа M является прямой суммой циклических групп порядка p [5, теорема 8.5, с. 56]: $M = \sum_{i \in I} \bigoplus_{p(M)} Z(p)$. Тогда $\text{Ann } M = Z \cdot p$. Кольцо $R_1 = Z/pZ = Z(p)$ является полем. В силу теоремы 1.2 любой бесконечный модуль над полем минимален. В силу предложения 2.1 M — минимальная абелева группа. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4.1. Пусть M — делимая абелева группа. Тогда

$$M \cong \bigoplus_{r_0(M)} Q \oplus \bigoplus_p \bigoplus_{r_p(M)} [\bigoplus Z(p^\infty)], \quad (6)$$

где $r_0(M)$ — ранг без кручения группы M ; $r_p(M)$ — p -ранг группы M (p — простое число) [5, теорема 23.1, с. 124]. Ранги $r_0(M)$ и $r_p(M)$ однозначно определяются группой M и образуют полную систему инвариантов группы M .

Лемма 4.2. Для квазициклической группы $Z(p^\infty)$ множество G_m конечно для любого $0 \neq m \in Z$. Если $\text{НОД}(m, p) = 1$, то $G_m = \{0\}$.

Доказательство. Квазициклическая группа $Z(p^\infty)$ порождается элементами $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, где $p \cdot c_1 = 0$; $p \cdot c_2 = c_1, \dots, p \cdot c_{n+1} = c_n, \dots$ [5, с. 26]. Если $m \neq 0$, то множество G_m является собственной подгруппой группы $Z(p^\infty)$, так как $Z(p^\infty) \cdot m = Z(p^\infty)$. Любая собственная подгруппа группы $Z(p^\infty)$ конечна [5, с. 26]. Следовательно, множество G_m конечно для любого $0 \neq m \in Z$. Если $c_n \in G_m$ для некоторого $m \neq 0$, то $m = p^n \cdot s$, так как элемент c_n имеет порядок p^n . Следовательно, если $\text{НОД}(m, p) = 1$, то $c_n \in G_m$ ($n = 1, 2, \dots$), т. е. $G_m = \{0\}$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. Пусть группа $M = \bigoplus Z(p^\infty)$. Тогда множество G_m конечно для любого $0 \neq m \in Z$ тогда и только тогда, когда $r_p(M)$ — конечное число. Если $r_p(M)$ бесконечно, то для некоторого $0 \neq m \in Z$ множество G_m бесконечно, но не коконечно.

Доказательство. Пусть $r_p(M)$ — конечное число. Элемент x является решением уравнения $x \cdot m = 0$ тогда и только тогда, когда каждая компонента элемента x является решением этого уравнения. Поскольку число компонент конечно, то в силу леммы 4.2 число решений этого уравнения конечно, т. е. множество G_m конечно.

Пусть $r_p(M)$ бесконечно. Рассмотрим множество G_p . Записывая элементы группы M в виде бесконечных строчек, замечаем, что каждый из элементов:

$$(c_1, 0, \dots, 0, \dots),$$

$$(0, c_1, \dots, 0, \dots),$$

$$(0, 0, \dots, c_1, \dots),$$

$$\dots$$

принадлежит множеству G_p . Так как элемент $(c_2, 0, \dots, 0, \dots)$ группы M не принадлежит множеству G_p , то в силу леммы 1.3 множество G_p бесконечно, но не коконечно. Лемма доказана.

Замечание 4.2. Делимая абелева группа без кручения минимальна и множество $G_m = \{0\}$ для любого $0 \neq m \in Z$.

Доказательство вытекает из замечания 4.1, следствия 3.2 и определения группы без кручения.

Предложение 4.1. Пусть M — делимая абелева группа. Тогда множество G_m конечно для любого $0 \neq m \in Z$ тогда и только тогда, когда $r_p(M)$ — конечное число для любого простого p , где $r_p(M)$ — p -ранг группы M . Если хотя бы одно из $r_p(M)$ бесконечно, то для некоторого $0 \neq m \in Z$ множество G_m бесконечно, но не коконечно.

Доказательство. Рассмотрим разложение (1) группы M из замечания 4.1. Пусть все $r_p(M)$ — конечные числа. Пусть $0 \neq m \in Z$, в силу замечания 1.1 можно считать, что $m > 0$. Если НОД $(m, p) = 1$ для всех p , встречающихся в разложении группы M , то в силу леммы 4.2 и замечания 4.2 множество $G_m = \{0\}$. Если $m = p_1^{l(1)} \dots p_\kappa^{l(\kappa)} \cdot s$, где p_i , $i = 1, \dots, \kappa$, встречаются в разложении (1) группы M , а НОД $(s, p) = 1$ для всех p , встречающихся в разложении группы M , то для $p \neq p_{ij}$, $j = 1, \dots, \kappa$, и для $r_0(M)$ соответствующая компонента решения уравнения $x \cdot m = 0$ равна нулю. На местах, соответствующих числам $p_{i1}, \dots, p_{i\kappa}$, стоят решения уравнения $x \cdot m = 0$. В силу леммы 4.3 для каждого p_{ij} , $j = 1, \dots, \kappa$, множество решений этого уравнения конечно, так как $r_{ij}(M)$ — конечное число. Число компонент конечно и равно κ , следовательно, уравнение $x \cdot m = 0$ имеет конечное множество решений, т. е. множество G_m конечно.

Пусть одно из $r_p(M)$ бесконечно. В силу леммы 4.3 для некоторого $0 \neq m \in Z$ множество G_m бесконечно, но не коконечно. Предложение доказано.

Условимся под $T(AB)$ понимать теорию абелевых групп, рассматриваемых как Z -модули.

Всюду ниже под словом предложение будет пониматься формула без свободных переменных. Все рассматриваемые формулы и предложения являются высказываниями языка первой степени Z -модулей.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется d -формулой, если она имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i \cdot x_i = 0$$

или

$$(\exists y) (p^\kappa \cdot y = \sum_{i=1}^n \kappa_i \cdot x_i)$$

для некоторого простого p , натурального k и целых k_i , $i=1, \dots, n$ [7, с. 69].

Теорема 4.2. Пусть M — ненулевая делимая абелева группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) M — минимальна;
- (2) множество G_m конечно для любого $0 \neq m \in Z$;
- (3) $r_p(M)$ — конечное число для любого простого p , где $r_p(M)$ — p -ранг группы M .

Доказательство. Импликации $(2) \rightarrow (3)$ и $(3) \rightarrow (2)$ следуют из предложения 4.1, а импликация $(1) \rightarrow (2)$ — из следствия 1.1.

$(2) \rightarrow (1)$. Известно, что любая формула в языке Z -модулей эквивалентна по отношению к теории Z -модулей булевой комбинации $\forall\exists$ -предложений и d -формул [7, с. 69].

Пусть $\varphi(x, z_1, \dots, z_n) \in F_{Z, M}$, где $z_1, \dots, z_n$ — константы из группы M , входящие в формулу $\varphi(x)$. В теории $T(AB)$ выводима формула

$$T(AB) \models (\forall x) (\forall z_1) \dots (\forall z_n) (\varphi(x, z_1, \dots, z_n) \leftrightarrow \psi(x, z_1, \dots, z_n)),$$

где $z_1, \dots, z_n$ рассматриваются как свободные переменные, а $\psi(x, z_1, \dots, z_n)$ — булева комбинация $\forall\exists$ -предложений и d -формул, причем $\forall\exists$ -предложения не зависят от $x, z, \dots, z_n$. Пусть $T'(AB)$ получена из $T(AB)$ добавлением новых констант $z_1, \dots, z_n$. Тогда

$$T'(AB) \models (\forall x) (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$$

[6, теорема о константах, с. 57].

В силу леммы 1.4 достаточно доказать конечность или коконечность подмножеств $X \subseteq M$, определяемых $\forall\exists$ -предложениями и d -формулами. Рассмотрим $\forall\exists$ -предложение

$$(\forall u_1) \dots (\forall u_n) (\exists v_1) \dots (\exists v_k) (g(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_k)), \quad (7)$$

где $g(u_1, \dots, u_n; v_1, \dots, v_k)$ — бескванторная формула. Истинность предложения (7) не зависит от x . Поэтому предложение (7) определяет множество M , если оно истинно на M , и $\emptyset$, если оно ложно на M . Таким образом, подмножества $X \subseteq M$, определяемые $\forall\exists$ -предложениями

ми, конечны или коконечны. Пусть $X \subseteq M$ определяется d -формулой $\varphi(x)$. Возможны два случая:

$$а) \varphi(x) = (k \cdot x = m),$$

где m — константа из группы M , и

$$б) \varphi(x) = (\exists y) (p^l \cdot y + s = k \cdot x),$$

где s — константа из группы M . В случае а) допустим, что $k \neq 0$. Абелева группа M делима, следовательно, любое уравнение $k \cdot x = m$ имеет решение. В силу следствия 1.2 множество решений уравнения $k \cdot x = m$ конечно. Если же $k = 0$, то $X = M$ или $X = \emptyset$, в зависимости от того $m = 0$ или $m \neq 0$. Переходя к случаю б), замечаем, что поскольку абелева группа M делима, то для любого $x \in M$ уравнение $p^l \cdot y + s = k \cdot x$ разрешимо. Таким образом, множество, определяемое формулой $\varphi(x)$, совпадает с M . Теорема доказана.

Используя полученные результаты, можно описать все минимальные абелевы группы: в классе всех абелевых групп выделим два подкласса:

(А) все бесконечные элементарные p -группы (p — простое число);

(Б) все ненулевые делимые абелевы группы, у которых p -ранг $r_p(M)$ конечен для любого простого p .

Теорема 4.3. Пусть M — абелева группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) M минимальна;
- (2) M бесконечна, для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место:
 - а) $M \cdot n = M$ или $M \cdot n = \{0\}$,
 - б) множество G_n конечно или равно M ;
- (3) M принадлежит объединению классов (А) и (Б): $M \in ((A) \cup (B))$.

Доказательство. (1) $\rightarrow$ (2). Следует учесть определение 1.1, лемму 1.2 и следствие 1.1.

(2) $\rightarrow$ (1). Так как для каждого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место $M \cdot n = M$ или $M \cdot n = \{0\}$, то в силу леммы 4.1 нам достаточно рассматривать только делимые абелевы группы или элементарные p -группы, где p — простое число. Для делимых абелевых групп утверждение следует из теоремы 4.2, а для элементарных p -групп — из теоремы 4.1.

(1) $\leftrightarrow$ (3). Утверждение вытекает из определения 1.1, лемм 1.2 и 4.1, теорем 4.1 и 4.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. — М.: Наука, 1966.— 555 с.
 2. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра.— М.: Мир, 1971.— 707 с.
 3. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М., 1960.— 510 с.
 4. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей.— М.: Мир, 1977.— 614 с.
 5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1974, т. 1.— 335 с.
 6. Шенфилд Дж. Математическая логика.— М.: Наука, 1975.— 527 с.
 7. Baug W. Elimination of quantifiers for modules, Israel J. Math., 1976, v. 25, N 1—2, p. 64—70.
 8. Podewski K. P. Minimale Ringe, Math.—Phys. Semesterberichte, 1975, v. 22, N 2, p. 193—197.
-

О КОНЕЧНОЙ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ РАДИКАЛЬНЫХ И ПОЛУПРОСТЫХ КЛАССОВ МОДУЛЕЙ

Р. Б. ПОПОВИЧ

Вводится идемпотентный радикал, связанный с произвольным непустым множеством элементов кольца, обобщающий понятие I -радикала [1]. Решается вопрос об аксиоматизируемости радикального класса такого радикала. Рассматриваются идемпотентные радикалы, порожденные некоторым классом циклических модулей, обобщающие понятие кручения. Описаны радикалы указанного типа с аксиоматизируемым полупростым классом. Этим обобщаются некоторые результаты из работ [2, 3].

Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а все модули — правыми и унитарными. Категорию правых R -модулей будем обозначать через $\text{Mod-}R$. Под предрадикалом в $\text{Mod-}R$ будем понимать подфунктор тождественного функтора на $\text{Mod-}R$. С каждым предрадикалом r связываются два класса модулей: класс r -радикальных модулей $T_r = \{M | r(M) = M\}$ и класс r -полупростых модулей $F_r = \{M | r(M) = 0\}$. Если $r(M/r(M)) = 0$ для каждого $M \in \text{Mod-}R$, то r называют радикалом, а если $r(r(M)) = r(M)$ для каждого $M \in \text{Mod-}R$, то r называется идемпотентным предрадикалом. Идемпотентный предрадикал однозначно задается своим радикальным классом, а радикал — полупростым классом [4]. Предрадикал, являющийся одновременно идемпотентным и радикалом, называют идемпотентным радикалом. Если класс T_r идемпотентного радикала r замкнут относительно подмодулей, то r называют кручением [5] (используется также термин «наследственный радикал» [4]).

Основные определения и факты, связанные с аксиоматизируемостью произвольного класса модулей, содержатся в работе [6].

Пусть S — произвольное непустое множество элементов кольца R . Рассмотрим такие модули M , для которых $MS = M$, т. е. для любого $m \in M$ найдутся такие $m_1, \dots, m_n \in M$ и $s_1, \dots, s_n \in S$, что

$$m = \sum_{k=1}^n m_k s_k. \quad (1)$$

Представление элемента m в виде (1) будем называть разложением элемента m над множеством S . Если в разложении элемента m все выписанные в (1) слагаемые отличны от нуля, то разложение называем нетривиальным. В дальнейшем будем рассматривать только нетривиальные разложения.

Покажем, что класс модулей $T_S = \{M \mid MS = M\}$ замкнут относительно расширений. Действительно, пусть $L \in T_S$ и $M/L \in T_S$. Тогда для каждого $\bar{m} \in M/L$ имеет место разложение $\bar{m} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k s_k$, где $\bar{m}_k \in M/L$;

$s_k \in S$ ($k = \overline{1, n}$). Так как $m = \sum_{k=1}^n m_k s_k \in L$, то $m = \sum_{k=1}^n m_k s_k = \sum_{t=1}^{n'} l_t s'_t$, где $l_t \in L$; $s'_t \in S$ ($t = \overline{1, n'}$). Поэтому $m = \sum_{k=1}^n m_k s_k + \sum_{t=1}^{n'} l_t s'_t$, значит, $M \in T_S$. Замкнутость T_S

относительно фактор-модулей и прямых сумм очевидна. Таким образом, множество S задает некоторый идемпотентный радикал r_S с радикальным классом T_S . Легко видеть, что имеет место совпадение классов $T_S = T_{RS}$ и включение $T_S \subseteq T_{SR}$ (под $RS(SR)$ понимаем левый (правый) идеал, порожденный множеством S).

Покажем, что предыдущее включение может быть строгим. Пусть R — некоммутативная простая область Оре. Положим $S = \{i\}$, где i — ненулевой необратимый слева элемент из R . Тогда класс T_S содержит все делимые модули и, очевидно, $R \notin T_S$. Таким образом, радикал r_S нетривиален. Поскольку $T_{SR} = T_{R \cdot \{i\} \cdot R} = T_R$, то радикал r_{SR} тривиален. Следовательно, $T_S \subset T_{SR}$.

Заметим, что если R коммутативно, то всегда $T_S = T_{SR}$.

Теорема 1. Пусть I — двусторонний идеал в R и S — непустое множество элементов из I . Тогда класс T_I совпадает с T_S в том и только в том случае, если для произвольной последовательности $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ элементов из I существует такое натуральное n , что $a_n a_{n-1} \dots a_1 \in RS$.

Доказательство. Необходимость. Пусть F — свободный модуль с базисом $x_1, x_2, \dots$ и пусть G — его подмодуль, порожденный элементами $x_1 - x_2 a_1, x_2 - x_3 a_2, \dots$, где $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность элементов идеала I . Тогда по построению модуль $A = F/G$ принадлежит классу T_I . Поскольку $T_I = T_S$, то $A \in T_S$. Поэтому для элемента $\bar{x}_1 \in A$ существует разложение $\bar{x}_1 = \sum_k \bar{y}_k s_k$, где $\bar{y}_k \in A$; $s_k \in S$. Далее, поскольку $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ — образующие модуля A , то каждый элемент $\bar{y}_k$ представляется в виде $\bar{y}_k = \sum_{l_k} \bar{x}_{l_k} \cdot r_{l_k}$, где $r_{l_k} \in R$.

Подставляя эти выражения для $\bar{y}_k$ в предыдущее равенство, получаем, что $\bar{x}_1 = \sum_m \bar{x}_m s'_m$, где $s'_m \in RS$. Учитывая равенства $\bar{x}_j = \overline{x_{j+1} a_j}$ ($j = 1, 2, \dots$), будем иметь $\bar{x}_1 = \bar{x}_p s$ для некоторых натурального p и $s \in RS$. Так как $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 a_1 = \dots = \bar{x}_p a_{p-1} \dots a_1$, то $\bar{x}_p (a_{p-1} \dots a_1 - s) = 0$. Тогда существуют такие $b_1, \dots, b_{n-1} \in R$, что $\bar{x}_p (a_{p-1} \dots a_1 - s) = (x_1 - x_2 a_1) b_1 + \dots + (x_{n-1} - x_n a_{n-1}) b_{n-1}$. Дальнейшие рассуждения проведем для двух случаев: $p < n$ и $p \geq n$. Если $p < n$, то последнее равенство переписывается в виде

$$\begin{aligned} x_p (a_{p-1} \dots a_1 - s) &= (x_1 - x_2 a_1) b_1 + (x_2 - x_3 a_2) b_2 + \dots + \\ &+ (x_{p-1} - x_p a_{p-1}) b_{p-1} + (x_p - x_{p+1} a_p) b_p + \\ &+ \dots + (x_{n-1} - x_n a_{n-1}) b_{n-1}. \end{aligned}$$

Так как $x_1, \dots, x_n$ — элементы базиса модуля F , то получаем, что $b_1 = b_2 = \dots = b_{p-1} = 0$, $b_p = a_{p-1} \dots a_1 - s, \dots, b_{n-2} = a_{n-2} \dots a_p (a_{p-1} \dots a_1 - s)$, $a_{n-1} \dots a_p (a_{p-1} \dots a_1 - s) = 0$, т. е. $a_{n-1} \dots a_1 = a_{n-1} \dots a_p s \in RS$. Если $p \geq n$, то $b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$, $a_{n-1} b_{n-1} = 0$ и $a_{p-1} \dots a_1 - s = 0$,

т. е. $a_{p-1} \dots a_1 = s \in RS$. Тем самым необходимость доказана.

Перейдем к доказательству достаточности нашего условия. Пусть $M \in T_I$ и $M \notin T_{RS}$. Тогда существует такой ненулевой элемент $m_1 \in M$, что $m_1 = \sum_{\kappa_1} m_{\kappa_1}^{(1)} a_{\kappa_1}^{(1)}$, где $m_{\kappa_1}^{(1)} \in M$, $a_{\kappa_1}^{(1)} \in I$, и хотя бы для одного слагаемого в сумме, скажем первого, $m_1^{(1)} a_1^{(1)} \notin MS$. Пусть элемент $m_1^{(1)}$ разлагается над I следующим образом: $m_1^{(1)} = \sum_{\kappa_2} m_{\kappa_2}^{(2)} a_{\kappa_2}^{(2)}$. Тогда $m_1^{(1)} a_1^{(1)} = \sum_{\kappa_2} m_{\kappa_2}^{(2)} a_{\kappa_2}^{(2)} a_1^{(1)}$ и для некоторого слагаемого, скажем первого, $m_1^{(2)} a_1^{(2)} a_1^{(1)} \notin MS$. Таким образом строим последовательность элементов $\{m_1^{(j)} a_1^{(j)} \dots a_1^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$, которые не принадлежат MS . Но согласно условию существует такое натуральное n , что $a_1^{(n)} \dots a_1^{(1)} \in RS$. Поэтому имеем $m_1^{(n)} a_1^{(n)} \dots a_1^{(1)} \in MS$ и получаем противоречие. Таким образом, $T_I \subseteq T_S$. Так как $S \subseteq I$, то включение $T_S \subseteq T_I$ очевидно и имеем равенство $T_I = T_S$. Теорема доказана.

Теорема 2. Для произвольного непустого множества S элементов кольца R следующие утверждения эквивалентны:

- 1) класс T_S конечно аксиоматизируем;
- 2) класс T_S аксиоматизируем;
- 3) класс T_S элементарно замкнут;
- 4) класс T_S замкнут относительно прямых произведений;
- 5) $T_S = T_U$ для некоторого конечного множества U элементов из S ;
- 6) T_S является классом моделей формулы

$$(\forall x) (\exists x_1, \dots, x_n) (x = x_1 s_1 + \dots + x_n s_n),$$

где $\{s_1, \dots, s_n\}$ — фиксированное конечное подмножество в S .

Доказательство. Импликации $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$ очевидны. Импликация $3) \Rightarrow 4)$ вытекает из замкнутости класса T_S относительно прямых сумм и того факта, что прямая сумма и прямое произведение произвольного семейства модулей элементарно эквивалентны [7, 8].

$4) \Rightarrow 5)$: Предположим, что $T_S \neq T_U$ для каждого конечного множества U элементов из S . Пусть S^F — множество всех конечных наборов элементов из S , т. е.

$$S^F = \{a = (s_1, \dots, s_n) \mid s_1, \dots, s_n \in S\}.$$

Скажем, что элемент m модуля M обладает свойством $^*(s_1, \dots, s_n)$, если для любых $m_1, \dots, m_n \in M$ выполняется следующее условие: $m \neq m_1 s_1 + \dots + m_n s_n$. Для каждого ненулевого $a = (s_1, \dots, s_n) \in S^F$ найдется модуль $M_a \in T_S$ с элементом m_a , обладающим свойством $^*(s_1, \dots, s_n)$, ибо в противном случае $T_S = T_U$, где $U = \{s_1, \dots, s_n\}$.

Рассмотрим прямое произведение $M = \prod_{a \in S^F} M_a$. Так как класс T_S замкнут относительно прямых произведений, то $M \in T_S$. Тогда для элемента $m = (m_a)_{a \in S^F}$, принадлежащего M , должно существовать хотя бы одно разложение над S : $m = \sum_{\kappa=1}^l n_\kappa s_\kappa$, где $n_\kappa = (n_a^{(\kappa)})_{a \in S^F}$, $s_\kappa \in S$ ($\kappa = \overline{1, l}$). В частности, получаем, что $m_a = \sum_{\kappa=1}^l n_a^{(\kappa)} s_\kappa$, где $a = (s_1, \dots, s_l)$. Это противоречит тому, что элемент m_a обладает свойством $^*(s_1, \dots, s_l)$. Импликации $5) \Rightarrow 6) \Rightarrow 1)$ тривиальны.

Из теорем 2 и 1 вытекает

Следствие 3. Пусть I — произвольный двусторонний идеал кольца R . Тогда класс T_I аксиоматизируем в том и только в том случае, если существует такое конечное множество $U \subseteq I$, что для произвольной последовательности $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ элементов из I выполняется условие $a_n a_{n-1} \dots a_1 \in RU$ для некоторого натурального n .

Теорема 4. Для двустороннего идеала I кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1) класс $F_I = \{N \mid \text{Hom}_R(M, N) = 0 \text{ для всех } M \in T_I\}$ конечно аксиоматизируем;

2) $r_I = r_J$, где $J = Ri_1 R + \dots + Ri_\kappa R \subseteq I$ и $J^2 = J$;

3) существует такой двусторонний идемпотентный идеал $J = Ri_1 R + \dots + Ri_\kappa R \subseteq I$, что для любой последовательности $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ элементов из I $a_n a_{n-1} \dots a_1 \in J$ при некотором натуральном n .

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2): Так как класс F_I аксиоматизируем, то согласно [9] существует такой двусторонний идемпотентный идеал $K \subseteq I$, что $r_I = r_K$. Таким образом, I можно считать идемпотентным. Тогда класс F_I состоит из моделей системы аксиом

$$\{L_i\}_I : \{(\forall x) (xi = 0) \mid i \in I\}.$$

По условию класс F_I можно задать конечной системой аксиом H . Понятно, что аксиомы системы H могут быть выведены из системы $\{L_i\}_I$ с использованием лишь конечного числа последних, скажем $L_{i_1}, \dots, L_{i_k}$. Значит, в I можно выбрать конечное число элементов $i_1, \dots, i_k$ таких, что $NI=0$ в том и только в том случае, когда $Ni_l=0$ для всех $l=\overline{1, k}$. Обозначим идеал $Ri_1R + \dots + Ri_kR$ через J и рассмотрим радикал t_J такой, что $t_J(M) = MJ$ для каждого $M \in \text{Mod-}R$. Имеет место совпадение классов $F_{t_J} = \{N \mid NJ=0\} = \{N \mid NI=0\} = F_I$. Так как каждый радикал однозначно задается своим полупростым классом, то радикалы r_I и t_J совпадают. Из идемпотентности радикала r_J вытекает, что t_J также идемпотентный. Отсюда получаем, что идеал J должен быть идемпотентным. Поэтому радикал r_J совпадает с t_J , а следовательно, и с r_I .

2) $\Rightarrow$ 1): Модуль N принадлежит к классу F_I тогда и только тогда, когда он является моделью формулы

$$(\forall x) (xi_1=0 \& \dots \& xi_k=0) \dots$$

Эквивалентность условий 2) и 3) вытекает из теоремы 1. Теорема доказана.

В работе [2] показано, что если радикальный класс T_σ кручения σ аксиоматизируем, то σ является радикально-полупростым, т. е. в соответствующем ему радикальном фильтре имеется наименьший идеал I . Известно, что идеал I — двусторонний идемпотентный [5]. В этом случае T_σ совпадает с определенным выше классом $F_I = \{N \mid NI=0\}$. Применяя к нему теорему 4, получаем

Следствие 5. Радикальный класс T_σ кручения σ конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда σ является радикально-полупростым и наименьший идеал I из его радикального фильтра удовлетворяет условию: существует такой двусторонний идемпотентный идеал $J = Ri_1R + \dots + Ri_kR \subseteq I$, что для любой последовательности $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ элементов из I $a_n a_{n-1} \dots a_1 \in J$ при некотором натуральном n .

Пусть r — предрадикал в $\text{Mod-}R$. С ним связывается следующее множество правых идеалов: $E_r = \{I \mid r(R/I) = R/I\}$. Из замкнутости класса T_r относительно фактормодулей вытекает, что выполняется следующее условие:

если $I \in E_r$ и $J \supseteq I$, то $J \in E_r$. Будем говорить, что E_r имеет базис из конечно-порожденных правых идеалов, если для каждого $I \in E_r$ найдется такой конечно-порожденный правый идеал $K_I \in E_r$, что $K_I \subseteq I$.

Лемма 6. Пусть r — предрадикал в $\text{Mod-}R$; $I \in E_r$ и в I не существует такого конечно-порожденного правого идеала K_I , что $K_I \in E_r$. Тогда существует предельное трансфинитное число α_0 и такая трансфинитная последовательность $\{I_\gamma\}_{\gamma \in (0, \alpha_0)}$ правых идеалов, содержащихся в I , что выполняются условия:

$$1) R/I_\gamma \notin T_r \text{ для } \gamma \in [0, \alpha_0];$$

$$2) R/I_{\alpha_0} \in T_r, \text{ где } I_{\alpha_0} = \bigcup_{\gamma < \alpha_0} I_\gamma;$$

$$3) I_\gamma = \begin{cases} I_{\gamma-1} + e_{\gamma-1}R, & \text{где } e_{\gamma-1} \in I \setminus I_{\gamma-1}; \text{ если } \gamma - \text{не} \\ \text{предельное;} \bigcup_{\beta < \gamma} I_\beta, & \text{если } \gamma - \text{предельное тран-} \\ & \text{сфинитное число.} \end{cases}$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству предложения 1 работы [2].

Теорема 7. Пусть r — радикал в $\text{Mod-}R$. Если класс F_r аксиоматизируем, то E_r имеет базис из конечно-порожденных правых идеалов.

Доказательство. Предположим, что $I \in E_r$ и в I не содержится ни один конечно-порожденный правый идеал K_I из E_r . По лемме 6 строим трансфинитную последовательность $\{I_\gamma\}_{\gamma \in [0, \alpha_0]}$ таких правых идеалов, содержащихся в I , что выполняются условия 1), 2), 3). Далее, аналогично построению в доказательстве теоремы 1 из [2] строим ультрапроизведение M r -полупростых модулей с таким элементом $x \neq 0$, что $\text{Ann } x \supseteq I_{\alpha_0}$. Тогда $xR \in T_r$ и модуль M не является r -полупростым, а это противоречит замкнутости класса F_r относительно ультрапроизведений. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Пусть A — некоторый класс циклических модулей. A порождает идемпотентный радикал $r(A)$ следующим образом:

$$F_{r(A)} = \{N \mid \text{Hom}_R(R/I, N) = 0 \text{ для всех } R/I \in A\},$$

$$T_{r(A)} = \{M \mid \text{Hom}_R(M, N) = 0 \text{ для всех } N \in F_{r(A)}\}.$$

Известно, что каждое кручение порождается в указанном смысле классом всех своих радикальных циклических модулей [4].

Имеет место следующая, вытекающая из определенных

Лемма 8. Пусть r — идемпотентный радикал, порожденный классом циклических модулей A . Тогда $N \in F_{r(A)}$ в том и только в том случае, если для каждого $h \in N$ и $R/I \in A$ из условия $hI=0$ вытекает $h=0$.

Следующий очевидный пример показывает, что идемпотентный радикал, порожденный классом циклических модулей, не обязан быть кручением. Пусть S — мультипликативно замкнутое множество элементов кольца R . Определим идемпотентный радикал t_S следующим образом: $t_S(N)=0 \iff$ для произвольных $h \in N$ и $s \in S$ из того, что $hs=0$, вытекает $h=0$. В общем случае t_S не кручение [10]. Согласно лемме 8 t_S является идемпотентным радикалом, порожденным классом циклических модулей $\{R/sR\}_{s \in S}$.

Предложение 9. Над коммутативным кольцом каждый идемпотентный радикал, порожденный классом циклических модулей, является кручением.

Доказательство. Рассмотрим сначала идемпотентный радикал, порожденный циклическим модулем R/I . Согласно лемме 8 $N \in F_{r(R/I)} \iff$ для любого $n \in N$ из $nI=0$ вытекает $n=0$. Пусть $\hat{N}$ — инъективная оболочка модуля N . Предположим, что $0 \neq n^* \in \hat{N}$ и $n^*I=0$. Найдется такое $r \in R$, что $0 \neq n^*r \in N$. Тогда выполняется $n^*rI \subseteq n^*I=0$ и получаем противоречие. Таким образом, $F_{r(R/I)}$ замкнут относительно инъективных оболочек.

Если $r(A)$ — идемпотентный радикал, порожденный классом циклических модулей $A=\{R/I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, то $F_{r(A)} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_{r(R/I_\lambda)}$ замкнут относительно инъективных оболочек, так как каждый из классов $F_{r(R/I_\lambda)}$ обладает этим свойством. Предложение доказано.

Теорема 10. Для произвольного класса A циклических модулей следующие утверждения эквивалентны:

- 1) класс $F_{r(A)}$ аксиоматизируем;
- 2) $E_{r(A)}$ имеет базис из конечно-порожденных правых идеалов;

3) класс $F_{r(A)}$ задается всеми аксиомами вида

$$(\forall x) (xi_1=0 \& \dots \& xi_n=0 \rightarrow x=0),$$

где $i_1, \dots, i_n \in R$ и $i_1R + \dots + i_nR \in E_{r(A)}$.

Доказательство. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ вытекает из теоремы 7. Импликация $2) \Rightarrow 3)$ является следствием леммы 8. Импликация $3) \Rightarrow 1)$ очевидна.

Кручение σ называем кручением конечного типа, если E_σ имеет базис из конечно-порожденных правых идеалов.

Следствие 11 [2, 3]. Полупростой класс кручения σ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда σ — кручение конечного типа.

Построенный выше пример радикала t_S показывает, что полупростой класс идемпотентного радикала, порожденного классом циклических модулей, может быть аксиоматизируем, даже если этот радикал не является кручением. Это интересно в связи с тем, что в случае коммутативной дедекиндовой области полупростой класс идемпотентного радикала аксиоматизируем лишь тогда, когда радикал является кручением.

Лемма 12. Пусть $r(A)$ — идемпотентный радикал, порожденный классом циклических модулей A . Тогда $I \in E_{r(A)}$ в том и только в том случае, если для любого $K \supseteq I$ найдется такой правый идеал I_K , что $R/I_K \in A$ и множество $(K : I_K) = \{r \mid r \in R, rI_K \subseteq K\}$ ненулевое.

Доказательство. Пусть A' — класс всевозможных фактор-модулей циклических модулей, принадлежащих к A . Понятно, что радикалы $r(A)$ и $r(A')$ совпадают. Согласно утверждению VI. 2. 5 из [4] класс $T_{r(A')}$ состоит из всех модулей, каждый ненулевой фактор-модуль которых имеет ненулевой подмодуль из A' . Поэтому $R/I \in T_{r(A)}$ тогда и только тогда, когда для любого $K \supseteq I$ существует такой $0 \neq \bar{r} \in R/K$, что $\bar{r}I_K = 0$, где $R/I_K \in A$. Легко видеть, что последнее условие равносильно сформулированному в лемме.

Предложение 13. Пусть A — некоторый класс циклических модулей. Полупростой класс $F_{r(A)}$ конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда существует такое конечное множество конечно-порожденных правых идеалов $B \subseteq E_{r(A)}$, что каждый $I \in E_{r(A)}$ удовлетворяет условию: если $K \supseteq I$, то $(K : I_K) \neq 0$ для некоторого $I_K \in B$.

Доказательство. Необходимость. Так как $F_{r(A)}$ аксиоматизируем, то согласно теореме 10 $E_{r(A)}$ имеет базис B' из конечно-порожденных правых идеалов.

При этом $F_{r(A)}$ задается всеми аксиомами вида

$$L_{i_1, \dots, i_n} : (\forall x) (xi_1 = 0 \& \dots \& xi_n = 0 \rightarrow x = 0),$$

где $i_1 R + \dots + i_n R \in B'$. Из конечной аксиоматизируемости класса $F_{r(A)}$ вытекает существование такого конечного множества правых идеалов $B \subseteq B'$, что аксиомы системы $\{L_{i_1, \dots, i_n}\}_{B'}$ можно вывести из аксиом системы $\{L_{i_1, \dots, i_n}\}_B$. Значит, $F_{r(A)}$ является классом моделей всех формул $L_{i_1, \dots, i_n}$, где $i_1 R + \dots + i_n R \in B$. Последнее означает, что радикал $r(A)$ совпадает с радикалом $r(A')$, где $A' = \{R/J \mid J \in B\}$. Предположим, что $J \in E_{r(A)}$. Применяя лемму 12, получим, что выполняется следующее условие: если $K \supseteq I$, то $(K : I_K) \neq 0$ для некоторого $I_K \in B$. Достаточность предложения является следствием леммы 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачук Е. Л. О кручениях в модулях.— Укр. мат. журнал, 1973, т. 25, № 4, с. 517—523.
2. Комарницкий Н. Я. Об аксиоматизируемости некоторых классов модулей, связанных с кручением.— В сб.: Алгебраические структуры (Мат. исслед.). Кишинев, 1980, вып. 56, с. 92—110.
3. Prest M. Some model-theoretic aspects of torsion theories. J. Pure and Appl. Algebra, 1978, v. 12, N 3, p. 295—310.
4. Stenström B. Rings of Quotients. Springer.— Berlin—New York, 1975.— 310 p.
5. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули.— М.: Наука, 1969.— 151 с.
6. Мальцев А. И. Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.— 392 с.
7. Sabbagh G. Aspects logiques des la purete dans les modules. C. R. Acad. Sc.— Paris, 1970, v. 271, p. 909—912.
8. Скорняков Л. А. Аксиоматизируемость класса инъективных полигонов.— Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1978, № 4, с. 233—239.
9. Горбачук Е. Л., Комарницкий Н. Я. Об аксиоматизируемости некоторых классов модулей и абелевых групп.— Укр. мат. журнал, 1982, т. 34, № 2, с. 151—157.
10. Levy L. Torsion-free and divisible modules over non-integral domains.— Canad. J. Math., 1963, v. 15, p. 132—151.

Е-КОРРЕКТНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

И. А. ПРИХОДЬКО

В [5] И. Капланский поставил тестовую проблему: если абелева группа G изоморфна прямому слагаемому абелевой группы H , а H изоморфна прямому слагаемому группы G , следует ли тогда, что $G \cong H$?

В работе [2] приведен пример: существуют две примарные абелевы группы без элементов бесконечной высоты K и L такие, что $K \cong L \oplus L \oplus K$, но K не изоморфна $L \oplus K$.

Этот пример показывает, что тестовая проблема И. Капланского в классе всех абелевых групп решается отрицательно. Однако для частного случая, когда рассматриваются редуцированные счетные абелевы p -группы, эта проблема решается в [5] положительно.

В дальнейшем все рассматриваемые группы будем считать абелевыми. Будем называть группы G и H : 1) эквивалентными по погруппам, $G \sim H$; 2) эквивалентными по сервантным подгруппам, $G^c H$; 3) эквивалентными по слабо сервантным подгруппам, $G^{c.c} \rightarrow H$; 4) эквивалентными по E -чистым подгруппам, $C^E \rightarrow H$ [1], если группа G (соответственно группа H) изоморфна: 1) подгруппе; 2) сервантной подгруппе; 3) слабо сервантной подгруппе; 4) E -чистой подгруппе группы H (соответственно группы G).

Циклическую группу порядка p^k с образующим a будем обозначать $\langle a \rangle_{p^k}$. Слабо сервантную подгруппу A группы B будем обозначать $A \leq_{c.c} B$. Остальные обозначения взяты из [3].

Подгруппа A группы B называется E -чистой в B , если для любого простого числа p задан (конечный или бесконечный, зависящий от p) набор $E = (\kappa_1, \kappa_2, \dots)$ натуральных чисел такой, что $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots$ и из $a = p^{\kappa} b$,

где $a \in A$, $b \in B$, $\kappa = \kappa_i$ при некотором i , всегда следует, что $a = p^\kappa a_1$ для некоторого $a_1 \in A$.

В дальнейшем будем рассматривать только группы, являющиеся прямыми суммами циклических p -групп, где p фиксировано. В этом частном случае тестовая проблема И. Капланского решается положительно даже при более слабом условии эквивалентности не по прямым слагаемым, а по сервантным подгруппам.

Отбросим требование сервантности. Рассмотрим эквивалентность по подгруппам. Тогда не для любой группы H из того, что $H \sim G$, следует, что $G \cong H$. Имеет место

Утверждение 1*. Любая группа H , $H \sim G$, будет изоморфна группе G тогда и только тогда, когда

$$G = \sum_{i=1}^n \sum_{a_i} \langle a_{i\alpha} \rangle_{p^i} \oplus \sum_{j=n+1}^m \sum_{a_j} \langle a_{j\alpha} \rangle_{p^j}, \quad (1)$$

где a_i — некоторые множества, причем $|a_1| > |a_2| > \dots > |a_n| \geq \omega_0$, $m < \infty$ и $|a_j| < \omega_0$ для любого $j = n+1, \dots, m$. Через ω_0 обозначается счетное кардинальное число.

Доказательство. 1) Необходимость непосредственно следует из того, что группы $G = \sum_{i \in a_i} \langle a_{i\alpha} \rangle_{p^i} \oplus$

$\oplus \sum_{j \in a_j} \langle a_{j\alpha} \rangle_{p^j}$, где $i < j$; $0 < |a_i| < |a_j| \geq \omega_0$, и $H = \sum_{j \in a_j} \langle b_{j\alpha} \rangle_{p^j}$ эквивалентны по подгруппам, но не

изоморфны, то же верно для групп $G = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{m_i} \langle a_{i\kappa} \rangle_{p^{r_i}}$,

$1 \leq m_i < \omega_0$, $r_1 < r_2 < \dots$ и $H = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{m_i} \langle b_{i\kappa} \rangle_{p^{r_i}} \oplus \langle b_{1,m_1+1} \rangle_{p^{r_1}}$.

2) Достаточность доказывается аналогично доказательству теоремы 1, п. в).

Возьмем промежуточный случай слабо сервантной эквивалентности групп. Скажем, что группа G корректна, если всякая группа H такая, что $H^{c-c} \sim G$ будет изоморфна группе G . Посмотрим, какие прямые суммы циклических p -групп являются корректными группами.

* Этот результат был впервые получен Т. Рецкер (не опубликован).

Теорема 1. Для корректности группы G необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$G = \sum_{i=1}^m \sum_{\kappa=1}^{m_i} \langle a_{i\kappa} \rangle_{p^i} \oplus \sum_{i=m+1}^{m+l} \sum_{j_\alpha \in a_i} \langle a_{i_\alpha} \rangle_{p^i} \oplus \sum_{i=m+l+1}^{m+s} \sum_{j_\alpha \in a_i} \langle a_{i_\alpha} \rangle_{p^i} \oplus \sum_{i=m+s+1}^{m+s+t} \sum_{\kappa=1}^{m_i} \langle a_{i\kappa} \rangle_{p^i}, \quad (2)$$

причем $0 \leq m \leq \omega_0$, если нижний индекс суммирования больше верхнего, то соответствующие циклические слагаемые будут отсутствовать, при $m = \omega_0$ всегда $l = s = t = 0$, $0 \leq l \leq \omega_0$, при $l = \omega_0$ следующие суммы отсутствуют: $\omega_0 \leq |a_i| < |a_j|$ при $m+1 \leq i < j \leq m+l$, $s \geq l$; $|a_i| > |a_j| \geq \omega_0$ при $m+l+1 \leq i < j \leq m+s$, $\leq t < \omega_0$.

Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $G = \sum_{i_\alpha \in a_i} \langle a_{i_\alpha} \rangle_{p^i} \oplus \sum_{s_\alpha \in a_s} \langle a_{s_\alpha} \rangle_{p^s} \oplus \sum_{j_\alpha \in a_j} \langle a_{j_\alpha} \rangle_{p^j}$, где $i < s < j$, причем $0 \leq |a_s| \leq |a_j|$, $|a_s| \leq |a_i|$ и $|a_\kappa| = \min(|a_i|, |a_j|) \geq \omega_0$. Тогда существует группа H такая, что $G \sim_{c.c} H$, но G не изоморфна H .

Доказательство. а) Пусть сначала $0 \leq |a_s| < |a_\kappa|$. Тогда положим $H = \sum_{i_\alpha \in a_i} \langle b_{i_\alpha} \rangle_{p^i} \oplus \sum_{\kappa_\alpha \in a_\kappa} \langle b_{\kappa_\alpha} \rangle_{p^s} \oplus \sum_{j_\alpha \in a_j} \langle b_{j_\alpha} \rangle_{p^j}$. В группе H содержится прямое слагаемое, изоморфное группе G . С другой стороны, возьмем в G подгруппу $A = \sum_{\alpha_\kappa} \langle a_{i_{\alpha s}} + p^{j-s} a_{j_{\alpha s}} \rangle_{p^s}$, где $i_{\alpha s} \in$

$\alpha'_i \subset a_i$; $|\alpha'_i| = |\alpha_\kappa|$; $|a_i \setminus \alpha'_i| = |a_i|$; $j_{\alpha s} \in \alpha'_j \subset a_j$; $|\alpha'_j| = |\alpha_\kappa|$; $|a_j \setminus \alpha'_j| = |a_j|$. Очевидно, A слабо сервантна в G . В G возьмем подгруппу

$$M = \sum_{i_{\alpha'} \in a_i \setminus \alpha'_i} \langle a_{i_{\alpha'}} \rangle_{p^i} \oplus A \oplus \sum_{j_{\alpha'} \in a_j \setminus \alpha'_j} \langle a_{j_{\alpha'}} \rangle_{p^j}.$$

M тоже слабо сервантна в G . $M \cong H$, но G не изоморфна H , так как разложение группы в прямую сумму циклических единственно с точностью до изоморфизма.

б) Если $|a_s| = |a_\kappa|$, то можно положить

$$H = \sum_{i_\alpha \in a_i} \langle b_{i_\alpha} \rangle_{p^i} \oplus \sum_{j_\alpha \in a_j} \langle b_{j_\alpha} \rangle_{p^j}.$$

Рассмотрев предыдущий случай и поменяв местами группы G и H , получим, что G не изоморфна H , хотя $G \sim^{c.c} H$.

Лемма 2. Пусть $G = \sum_{s_\alpha \in a_s} \langle a_{s_\alpha} \rangle_{p^s} \oplus \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{m_i} \times$
 $\times \langle a_{i\kappa} \rangle_{p^{r_i}}$, где $|a_s| \geq \omega_0$; $1 \leq m_i < \omega_0$; $s < r_1 < r_2 < \dots$

Тогда существует такая группа H , что $H \sim^{c.c} G$, но H не изоморфна G .

Доказательство. Пусть

$$H = \sum_{s_\alpha \in a_s} \langle b_{s_\alpha} \rangle_{p^s} \oplus \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{m_i} \langle b_{i\kappa} \rangle_{p^{r_i}} \oplus \sum_{\kappa=1}^{m_1+1} \langle b_{1,\kappa} \rangle_{p^{r_1}}.$$

Тогда в H существует прямое слагаемое, изоморфное G . Пусть $a'_s \subset a_s$; $|a'_s| = \omega_0$; $|a_s \setminus a'_s| = |a_s|$. Возьмем в G

$$\text{подгруппу } A = \sum_{s''_\alpha \in a_s \setminus a'_s} \langle a_{s''_\alpha} \rangle_{p^s} \oplus \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{m_i-1} \langle a_{i,\kappa} \rangle_{p^{r_i}} \oplus$$

$$\oplus \sum_{\kappa=1}^{m_1} \langle a_{1,\kappa} \rangle \oplus \sum_{i=2}^{\infty} \langle a_{i_{\alpha'}} + p^{r_i - r_{i-1}} a_{i m_i} \rangle_{p^{r_{i-1}}}, \text{ где } i_{\alpha'} \in a'_s.$$

A слабо сервантна в G . $A \cong H$, следовательно, $G \sim^{c.c} H$, но G не изоморфна H .

Лемма 3. Пусть $H = H_0 \oplus H_1$, где $H_0 = \sum_{\alpha_\kappa \in a_\kappa} \langle h_{\alpha_\kappa} \rangle_{p^\kappa}$,

$$H_1 = \sum_{\alpha_{\kappa+1} \in a_{\kappa+1}} \langle h_{\alpha_{\kappa+1}} \rangle_{p^{\kappa+1}} \oplus \dots \text{ Пусть } A - \text{слабо сервант-}$$

$$\text{ная подгруппа в } H, A = A_0 \oplus A_1, A_0 = \sum_{\beta_\kappa \in L_\kappa} \langle a_{\beta_\kappa} \rangle_{p^\kappa};$$

$$A_1 = \sum_{\beta_{\kappa+1} \in L_{\kappa+1}} \langle a_{\beta_{\kappa+1}} \rangle_{p^{\kappa+1}} \oplus \dots \text{ Тогда } A_0 \text{ сервантна в } H.$$

Доказательство. Пусть $a \in A_0$, $a = m_1 a_{\beta_\kappa^{(1)}} + \dots +$
 $+ m_s a_{\beta_\kappa^{(s)}}$, где $(m_i, p) = 1$ для некоторого i . В группе

H $a = h_0 + h_1$, где $h_0 \in H_0$; $h_1 \in H_1$. Покажем, что $h_0 \neq 0$.
 В самом деле, пусть $h_0 = 0$. Тогда $a = h_1$, $h_1 = p \cdot h'_1$,
 так как $h_1 \in H_1$ и $0(a) = p^\kappa$. Получим противоречие со
 слабой сервантностью A_0 в H . Следовательно, $h_0 \neq 0$.

Более того, порядок h_0 равен p^κ , так как иначе $h_0 = ph'_0$ и $h_1 = ph'_1$, что опять дает противоречие. Итак, получено, что если a — элемент нулевой высоты в A , то $a = h_0 + h_1$, где $0(h_0) = p^\kappa$, откуда $h_H(a) = 0$. Пусть $a' \in A_0$; $h_A(a') = \nu$; $a' = m'_1 a_{\beta_\kappa^1} + \dots + m'_l a_{\beta_\kappa^l}$. Из того,

что $h_A(a') = \nu$, следует, что m'_i делится на p^ν , $i = 1, \dots, l$, и $a' = p^\nu (t_1 a_{\beta_\kappa^1} + \dots + t_l a_{\beta_\kappa^l})$, где $(t_i, p) = 1$ для некоторого i . Для $a = t_1 a_{\beta_\kappa^1} + \dots + t_l a_{\beta_\kappa^l}$ было доказано, что $a = h_0 + h_1$, где $0(h_0) = p^\kappa$. Отсюда $a' = p^\nu h_0 + p^\nu h_1$, $p^\nu h_0 \neq 0$, так как $\nu < \kappa$. Так как $0(h_0) = p^\kappa$, высота h_0 равна 0 и высота $p^\nu h_0$ равна ν , следовательно, высота a' в H равна ν и сервантность A_0 доказана.

Лемма 4. Пусть $H = H_0 + H_1$, где $H_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha_i \in \mathfrak{a}_i} \times \times \langle a_{i\alpha_i} \rangle_{p^i}$; $H_1 = \sum_{\alpha_n \in \mathfrak{a}_n} \langle a_{\alpha_n} \rangle_{p^n}$. Пусть $A = \sum_{\alpha'_n \in \mathfrak{a}'_n} \langle a_{\alpha'_n} \rangle_{p^n}$ —

подгруппа в H . Тогда A сервантна в H .

Доказательство. Пусть $a \in A$. Тогда $h_A(a) + e(a) = n \leq h_H(a) + e(a) \leq n$. Отсюда $h_A(a) = h_H(a)$.

Доказательство теоремы 1.

1. Необходимость условий теоремы непосредственно следует из лемм 1 и 2.

II. Докажем достаточность условий теоремы 1.

а) Пусть G имеет вид (2), где $m \leq \omega_0$; $l = s = t = 0$ и $G^{c.c} \sim H = \sum_{\alpha_\kappa \in \mathfrak{a}_\kappa} \langle h_{\alpha_\kappa} \rangle_{p^\kappa} \oplus \sum_{\alpha_{\kappa+1} \in \mathfrak{a}_{\kappa+1}} \langle h_{\alpha_{\kappa+1}} \rangle_{p^{\kappa+1}} \oplus \dots$, где $|\mathfrak{a}_\kappa| > 0$. Запишем $H = H_0 \oplus H_1$, $H_0 = \sum_{\alpha_\kappa \in \mathfrak{a}_\kappa} \langle h_{\alpha_\kappa} \rangle_{p^\kappa}$

$H_1 = \sum_{\alpha_{\kappa+1} \in \mathfrak{a}_{\kappa+1}} \langle h_{\alpha_{\kappa+1}} \rangle_{p^{\kappa+1}} \oplus \dots$. Пусть A — слабо сер-

вантная подгруппа в H такая, что $A \cong G$; B — слабо сервантная подгруппа в G такая, что $B \cong H$. Заметим, что порядки циклических слагаемых минимального порядка в G и в H должны совпадать, иначе получим противоречие со слабой сервантностью A в G или B в H . Запишем $A = A_0 + A_1$:

$$A_0 = \sum_{\beta=1}^n \langle a_\beta \rangle_{p^\kappa}, \quad A_1 = \sum_{i=\kappa+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_i} \langle a_{i_l} \rangle_{p^i}.$$

По лемме 3 подгруппа A_0 сервантна в H . Следовательно, A_0 как ограниченная сервантная подгруппа [3, с. 140] выделяется в H прямым слагаемым. Записав $G = G_0 \oplus G_1$, где $G_0 \cong A_0$, $G_1 \cong A_1$, имеем $|G_0| \leq |H_0|$. Аналогично доказывается обратное неравенство. Следовательно, в G_0 и H_0 одинаковое (конечное) число циклических прямых слагаемых порядка p^k . Теперь имеем $G = G_0 \oplus G_1 \cong A = A_0 \oplus A_1 \subseteq_{\text{с.с}} H = A_0 \oplus H'_1$, где $A_0 \cong G_0$; $A_1 \cong G_1$; $H'_1 \cong H_1$ [3, т. 17. 4], $G_1 \cong G/G_0 \cong A/A_0 \subseteq_{\text{с.с}} H/A_0 \cong H_1$. Аналогично получаем изоморфизм H_1 со слабо сервантной подгруппой группы G_1 . Дальше можем делать следующий шаг индукции. В конце концов получаем $G \cong H$.

б) Пусть теперь $0 \leq m < \omega_0$; $0 < l \leq \omega_0$, и следующие слагаемые в (2) отсутствуют. Ввиду доказательства пункта а) достаточно рассмотреть случай, когда

$$G = \sum_{i=m+1}^N \sum_{\alpha \in a_i} \langle a_{i\alpha} \rangle_{p^i}, \text{ где } N \leq \infty, a_i - \text{бесконечные мно-}$$

$$\text{жества, причем } |a_i| < |a_j| \text{ при } i < j. \text{ Пусть } G = \sum_{i=m+1}^N G_i, \text{ где } G_i = \sum_{\alpha \in a_i} \langle a_{i\alpha} \rangle_{p^i}; H = \sum_i H_i; H_i = \sum_{\beta \in L_i} \langle a_{i\beta} \rangle_{p^i}, L_i -$$

некоторые множества. Необходимо показать, что $|a_i| = |L_i|$. Доказывать будем по индукции. То, что $|a_1| = |L_1|$, доказывается, как в п. а). Пусть верно для $i \leq n$, что $|a_i| = |L_i|$. Покажем, что $|a_{n+1}| = |L_{n+1}|$. Пусть φ — вложение G в H в качестве слабо сервантной подгруппы. Тогда $\varphi(G_{n+1}) = G'_{n+1}$ — слабо сервантная подгруппа в H . Запишем H в виде $H = H_1 \oplus \dots \oplus \oplus H_n \oplus H'$, где $H' = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{\beta \in L_i} \langle a_{i\beta} \rangle_{p^i}$. Пусть ψ — про-

екция H на $H_1 + \dots + H_n$, ψ_0 — сужение ψ на G'_{n+1} . Тогда $|Im \psi_0| < |G'_{n+1}|$, так как $|H_1 \oplus \dots \oplus H_n| < |G_{n+1}|$, т. е. $|Im \psi_0| = |G'_{n+1}/\tilde{G}| < |G'_{n+1}|$, где $\tilde{G} = Ker \psi_0 = G'_{n+1} \cap \cap H'$. Отсюда $|G'_{n+1}| = |\tilde{G}|$. В данном случае найдется прямое слагаемое K в G'_{n+1} такое, что $G'_{n+1} = K \oplus L$, причем $K \subseteq \tilde{G}$ и $|K| = |G'_{n+1}|$. Докажем это. Пусть $G'_{n+1} = \sum_{\alpha \in a} \langle b_\alpha \rangle$. В каждом смежном классе $G'_{n+1}/\tilde{G}$

возьмем по одному представителю $r_s = \sum_{\alpha(s)} l_{\alpha(s)} b_{\alpha(s)}$. Затем в L включим все циклические слагаемые, в которые входят данные $b_{\alpha(s)}$ для любого s . Пусть $L = \sum_{\alpha' \in \alpha' \subset \alpha} \langle b_{\alpha'} \rangle$. Тогда $G'_{n+1} = L \oplus K'$, где $K' = \sum_{\alpha'' \in \alpha''} \langle b_{\alpha''} \rangle$; $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha$; $\alpha' \cap \alpha'' = \emptyset$. Для любого $b_{\alpha''}$ существует элемент $\Sigma d_{\alpha'} b_{\alpha'}$ такой, что $b_{\alpha''} + \tilde{G} = \Sigma d_{\alpha'} b_{\alpha'} + \tilde{G}$. Положим $K = \Sigma \langle b_{\alpha''} - \Sigma d_{\alpha'} b_{\alpha'} \rangle$. Тогда $G'_{n+1} = K \oplus L$; $K \subseteq \tilde{G}$; $|K| = |G'_{n+1}|$ по построению. K , как прямое слагаемое в G'_{n+1} , будет слабо сервантной подгруппой в H' . По лемме 3 подгруппа K будет сервантной в H' , следовательно, выделяется в H' прямым слагаемым [3, с. 140]. Тогда $|G_{n+1}| \leq |H_{n+1}|$. Обратное неравенство доказывается аналогично. Следовательно, $|G_{n+1}| = |H_{n+1}|$.

в) Пусть $0 \leq m < \omega_0$; $0 \leq l < s$; $0 \leq t < \omega_0$. Пользуясь доказательством пунктов а) и б) и используя, где необходимо, лемму 4 вместо леммы 3, легко видеть, что достаточно рассмотреть случай $G = \sum_{i=m+l+1}^{m+s} G_i$, где $G_i = \sum_{\alpha_i} \langle a_{i\alpha} \rangle_{p^i}$; $|\alpha_i| > |\alpha_j| \geq \omega_0$ при $i < j$. Но то, что

в этом случае $G \cong H$, вытекает из доказательства пункта б), если вместо леммы 3 использовать лемму 4 и перенумеровать слагаемые так:

$$G = G_\kappa \oplus G_{\kappa+1} \oplus \dots \oplus G_n, \text{ где } G_i = \sum_{\alpha_{m+s-i+\kappa}} \langle a_{m+s-i+\kappa, \alpha} \rangle_{p^{m+s-i+\kappa}}.$$

Теорема 1 доказана.

Пусть дана произвольная E -чистота; $E = (\kappa_1, \kappa_2, \dots)$. Группу $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots$, где $B_i = \bigoplus \Sigma Z(p^i)$, назовем E -корректной, если $BE \sim C$ влечет $B \cong C$. Пусть $B_1^* = B_1 \oplus \dots \oplus B_{\kappa_1}$; $B_2^* = B_{\kappa_1} \oplus \dots \oplus B_{\kappa_2}, \dots$, $B_n^* = B_{\kappa_{n-1}} \oplus \dots \oplus B_{\kappa_n}, \dots$

Теорема 2. Группа BE -корректна тогда и только тогда, когда:

- если $B_1^* \sim C$, то $B_1^* \cong C$;
- при $i > 1$ группы B_i^* корректны.

I. Доказательство необходимости.

а) Пусть $B_1^* \sim C$. Тогда существуют мономорфизмы $\varphi_1: B_1^* \rightarrow C$; $\varphi_2: C \rightarrow B_1^*$. Заметим, что максимальный

порядок элементов в группе C не больше p^{κ_1} . Следовательно, можно обозначить C через C_1^* . Возьмем группу $K = C_1^* \oplus B_{\kappa_1+1} \oplus B_{\kappa_1+2} \oplus \dots$. Пусть $\bar{\varphi}_1: B \rightarrow K$ — отображение, действующее на B_1^* как φ_1 , а на остальных B_i — как тождественное отображение. $\bar{\varphi}_2: K \rightarrow B$ определяется аналогично. Тогда $B^E \sim K$, откуда $B \cong K$ по условию теоремы. Но тогда $B_1^* \cong C_1^*$ в силу единственности (с точностью до изоморфизма) разложения группы в прямую сумму циклических.

б) Пусть $B_n^* \sim C$, $\varphi_1: B_n^* \rightarrow C$, $\varphi_2: C \rightarrow B_n^*$ — изоморфные отображения на слабо сервантные подгруппы соответственно групп C и B_n^* . Заметим, что из-за того, что $\varphi_2(C)$ — подгруппа в B_n^* , максимальные порядки элементов в C не больше p^{κ_n} , а из слабой сервантности $\varphi_2(C)$ в B_n^* следует, что минимальные порядки циклических слагаемых в C не меньше минимальных порядков циклических слагаемых в B_n^* . Следовательно, можно обозначить C как $C_n^* = C_{\kappa_{n-1}} \oplus \dots \oplus C_{\kappa_n}$. Возьмем $K = B_1 \oplus \dots \oplus B_{\kappa_{n-1}-1} \oplus C_n^* \oplus B_{\kappa_n+1} \oplus B_{\kappa_n+2} \oplus \dots$. Пусть $\bar{\varphi}_1: B \rightarrow K$ действует на B_n^* как φ_1 , а на остальных слагаемых — как тождественное отображение. $\bar{\varphi}_2: K \rightarrow B$ определим аналогично. $\varphi_1(B_n^*) = S$ — слабо сервантная подгруппа в C_n^* . Покажем, что она E -чиста в C_n^* . Действительно, пусть $p^t x = g$; $g \in S$; $x \in C_n^*$; $1 \leq t \leq \kappa_{n-1}$. Тогда $g = pz'$, $z' \in S$ в силу слабой сервантности. $(p^{t-1}x - z')$ — элемент порядка p в C_n^* , следовательно, он имеет высоту не меньше $\kappa_{n-1} - 1$. Тогда $p^{t-1}x - z' = p^{\kappa_{n-1}-1}x_2$, $x_2 \in C_n^*$, $z' = p^{t-1}x_3$, $x_3 \in C_n^*$. Аналогично продолжая, если нужно, дальше, получим $g = p^t z$, $z \in S$. Отсюда S E -чиста в C_n^* , так как для $\kappa_i \geq \kappa_n$ $p^{\kappa_i} x = 0$ для любого $x \in C_n^*$. Следовательно, $B \sim K$, $B \cong K$ и тогда $B_n^* \cong C_n^*$.

II. Доказательство достаточности

Пусть $B \sim C$ и $\varphi_1: B \rightarrow C$, $\varphi_2: C \rightarrow B$ — изоморфные отображения на E -чистые подгруппы. Запишем C в виде

$$C = C_n^{**} \oplus C_n^* \oplus \tilde{C}_n^*, \text{ где } C_n^{**} = C_1 \oplus \dots \oplus C_{\kappa_{n-1}-1},$$

$$C_n^* = C_{\kappa_{n-1}} \oplus \dots \oplus C_{\kappa_n}, \quad \tilde{C}_n^* = C_{\kappa_n+1} \oplus C_{\kappa_n+2} \oplus \dots,$$

C_i — прямая сумма циклических групп порядка p^i . Покажем, что $\varphi_1(B_n^*) \cap \tilde{C}_n^* = 0$. Действительно, пусть в пересечении лежит элемент порядка p , тогда его высота в $\tilde{C}_n^*$ не меньше κ_n . Из E -чистоты подгруппы $\varphi_1(B_n^*)$ в C следует, что его высота в $\varphi_1(B_n^*)$ не меньше κ_n , чего не может быть. Следовательно, $\varphi_1(B_n^*)$ можно вложить в $\tilde{C}_n^*$ -высокую подгруппу M , причем $C = M \oplus \tilde{C}_n^*$, так как $\tilde{C}_n^*$ — абсолютное прямое слагаемое в C [3, с. 64, упражнение 8]. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\varphi_1(B_n^*) \subset \subset C_n^{**} \oplus C_n^*$.

Покажем, что $\varphi_1(B_n^*) \cap C_n^{**} = 0$. Действительно, возьмем элемент порядка p из пересечения, тогда его высота в $\varphi_1(B_n^*)$, т. е. и в C , не меньше $\kappa_{n-1} - 1$. Но высота любого ненулевого элемента в C_n^{**} не больше $\kappa_{n-1} - 2$. Противоречие. Следовательно, $\varphi_1(B_n^*) \cap C_n^{**} = 0$. Пусть π — проекция группы $S = C_n^{**} \oplus C_n^*$ на C_n^* . Так как $\varphi_1(B_n^*) \cap C_n^{**} = 0$, то $\pi\varphi_1(B_n^*) \rightarrow C_n^*$ — мономорфизм. Покажем, что при $n > 1$ подгруппа $A = \pi\varphi_1(B_n^*)$ слабо сервантна в C_n^* . Пусть $\varphi_1(b) = c_1 + pc_2$, где $c_1 \in C_n^*$; $c_2 \in C_n^*$. Тогда $b = pb_1$, $b_1 \in B_n^*$. Действительно, пусть $h_{B_n^*}(b) = 0$. Тогда $\varphi_1(p^{\kappa_{n-1}-1}b) \neq 0$ и $h_S(\varphi_1(p^{\kappa_{n-1}-1}b)) = h_S(p^{\kappa_{n-1}-1}(c_1 + pc_2)) \geq \kappa_{n-1}$. Но $h_{B_n^*}(p^{\kappa_{n-1}-1}b) = \kappa_{n-1} - 1$. Это противоречит тому, что φ_1 — изоморфизм на E -чистую подгруппу $\varphi_1(B_n^*)$. Теперь пусть $\pi\varphi_1(b) = pc$, тогда $b = pb_1$, т. е. подгруппа A слабо сервантна в C_n^* . Аналогично доказывается, что C_n^* изоморфна слабо сервантной подгруппе в B_n^* . Тогда по условию $B_n^* \cong C_n^*$ для любого n . Следовательно, $B \cong C$, т. е. B E -корректна.

Следствие 1. Группа B является E -корректной для $E = (\kappa_1, \kappa_2, \dots)$ тогда и только тогда, когда B_1^* имеет вид (1), B_i^* — вид (2), $i = 2, 3, \dots$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2, утверждения 1 и теоремы 1.

Следствие 2. Если группа G эквивалентна по сервантным подгруппам группе H , то она ей изоморфна.

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 1, так как условиям (1), (2) удовлетворяет любая прямая сумма циклических p -групп при $E = (1, 2, 3, \dots)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мишина А. П., Скорняков Л. А.—Абелевы группы и модули.— М.: Наука, 1969.— 151 с.
2. Grawley P. Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups.— J. Algebra, 1965, v. 2, N 4, p. 413—431.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1974, т. 1.— 335 с.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1977, т. 2.— 416 с.
5. Kaplansky J.—Infinite abelian groups. Univ. of Michigan Press, Ann. Arbor.— Michigan, 1954.— 91 p.

О МАЛОИНЪЕКТИВНЫХ МОДУЛЯХ И КОЛЬЦАХ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, модули — правыми и унитарными. Модуль M называется малоинъективным (квазиинъективным), если для любого подмодуля N из M произвольный гомоморфизм $f: N \rightarrow N$ ($f: N \rightarrow M$) продолжается до эндоморфизма модуля M . Квазиинъективные модули малоинъективны, а кольцо целых чисел является малоинъективным, но не квазиинъективным модулем над собой. Основными результатами работы являются полученные в теоремах 1, 2, 3 в терминах малоинъективных модулей критерии самоинъективности колец.

Приведем ряд необходимых обозначений и определений. Не приведенные здесь определения можно найти в [1]. Через $E(M)$, $Z(M)$, $\text{End}(M)$, $J(M)$ обозначим соответственно инъективную оболочку, сингулярный подмодуль, кольцо эндоморфизмов и радикал Джекобсона модуля M . Через $G(M)$ обозначим радикал Голди модуля M , то есть единственное максимальное существенное расширение в модуле M его сингулярного подмодуля $Z(M)$. Если R — кольцо, то положим $Z(R) = Z(R_R)$, $G(R) = G(R_R)$. Для любого модуля M его подмодули $Z(M)$, $G(M)$ вполне инвариантны в M . Модуль M называется N -инъективным, если любой гомоморфизм $N_1 \rightarrow M$, где N_1 — произвольный подмодуль модуля N , продолжается до гомоморфизма из N в M . Модуль M называется строго малоинъективным, если модуль M малоинъективен и $gM \subseteq M$ для всех гомоморфизмов $g \in \text{End}(E(M))$, ядра которых существенны в $E(M)$. Модуль, не содер-

жащий бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей, называется конечномерным. Модуль называется квазинепрерывным, если все конечные прямые разложения его подмодулей продолжаются до прямых разложений самого модуля. Регулярное редуцированное кольцо называется строго регулярным. Все односторонние идеалы строго регулярного кольца являются идеалами.

Лемма 1. Пусть E — существенное расширение малоинъективного модуля M ; $g \in \text{End} E$; $N = \{m \in M \mid gm \in M\}$. Если $gN \subseteq N$, то $gM \subseteq M$.

Доказательство. Так как $g|N \in \text{End} N$ и модуль M малоинъективен, то найдется такое $h \in \text{End} M$, что $(g-h)N = 0$. Пусть $y \in M$; $x = (g-h)y \in M \cap (g-h)M$. Тогда $gy = x + hy \in M$. Поэтому $y \in N$, откуда $x = (g-h)y = 0$. Следовательно, $M \cap (g-h)M = 0$. Тогда $(g-h)M = 0$, поскольку E — существенное расширение для M . Поэтому $gM = hM \subseteq M$.

Лемма 2. Пусть M — малоинъективный модуль, причем $Z(M)$ — строго малоинъективный модуль. Тогда M — строго малоинъективен.

Доказательство. Пусть $Z = Z(M)$; $E = E(M)$, $g \in \text{End} E$, причем $\text{Ker} g$ — существенный подмодуль модуля E . Необходимо доказать, что $gM \subseteq M$. Докажем сначала, что $gZ \subseteq Z$. Если $Z_1 = Z(E)$, то инъективный модуль E обязан содержать подмодуль $E_1 = E(Z_1)$, откуда $E = E_1 \oplus E_2$. Так как E — существенное расширение для M , то $Z = M \cap Z_1$, причем E_1 — существенное расширение для Z . Поэтому $E_1 = E(Z)$. Пусть $g_1 = g|E_1 : E_1 \rightarrow E$. Так как E_1 — радикал Голди модуля E , то $gE_1 \subseteq E_1$, откуда $g_1 \in \text{End} E_1$, причем $\text{Ker} g_1 = E_1 \cap \text{Ker} g$ — существенный подмодуль модуля E_1 . Тогда $gZ = g_1Z \subseteq Z$, поскольку Z — строго малоинъективный модуль по условию. Пусть $N = \{m \in M \mid gm \in M\}$. Так как фактор-модуль $E/\text{Ker} g$ модуля E по существенному подмодулю $\text{Ker} g$ обязан быть сингулярным, то $gE \subseteq Z_1$, откуда $gN \subseteq M \cap Z_1 = Z$. Поскольку $gZ \subseteq Z \subseteq M$, то $Z \subseteq N$. Тогда $gN \subseteq Z \subseteq N$, откуда $gM \subseteq M$ по лемме 1.

Лемма 3. Пусть M — малоинъективный модуль; $N_1 \oplus N_2$ — подмодуль модуля M . Тогда:

(а) найдется такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $M_1 \supseteq N_1$, $M_2 \supseteq N_2$ (то есть модуль M квазинепрерывен);

(б) модуль M_1 — M_2 -инъективен, а модуль M_2 — M_1 -инъективен;

(в) если M — существенное расширение для $N_1 \oplus N_2$, то M_i — существенное расширение для N_i ($i=1, 2$);

(г) если модули M_1, M_2 квазиинъективны, то M — квазиинъективный модуль.

Доказательство. Пункты (а), (б) доказаны в леммах 2, 4 (б) из [5]. Пункт (в) проверяется непосредственно. Пункт (г) вытекает из пункта (б) и того, что из M_i -инъективности модулей M_j при любых $i, j \in \{1, 2\}$ вытекает $(M_1 \oplus M_2)$ — инъективность модуля $M_1 \oplus M_2$ (см. [6, с. 186, 188]).

Лемма 4. Пусть M — строго малоинъективный модуль. Тогда:

(а) если M — существенное расширение квазиинъективного модуля, то M — квазиинъективный модуль;

(б) если модуль M содержит такой квазиинъективный подмодуль N_1 , что фактор-модуль M/N_1 квазиинъективен, то M — квазиинъективный модуль.

Доказательство. Пункт (а) доказан в [4, лемма 6 (б)]. Докажем пункт (б). Пусть N_2 — такой подмодуль модуля M , что $N_1 \cap N_2 = 0$ и $N_1 \oplus N_2$ — существенный подмодуль модуля M . По лемме 3 (в) найдется такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что M_i — существенное расширение для N_i ($i=1, 2$). Тогда по пункту (а), примененному к модулю M_1 , получаем, что модуль M_1 квазиинъективен. Так как $M/N_1 \simeq M_1/N_1 \oplus M_2$ и модуль M/N_1 квазиинъективен, то M_2 — квазиинъективный модуль. По лемме 3 (г) модуль M квазиинъективен.

Лемма 5 [1, с. 104]. Квазиинъективность модуля M равносильна тому, что M — вполне инвариантный подмодуль модуля $E(M)$.

Из лемм 2 и 5 вытекает

Лемма 6. Пусть M — такой малоинъективный модуль, что $Z(M)$ — квазинъективный модуль. Тогда M — строго малоинъективный модуль.

Лемма 7. Пусть M — малоинъективный модуль. Тогда $M = G(M) \oplus M_1$, где $Z(M_1) = 0$. В частности, модуль $M/G(M)$ малоинъективен и изоморфен прямому слагаемому модуля $M/Z(M)$.

Доказательство. Выберем такой подмодуль N_1 модуля M , что $N_1 \cap Z(M) = 0$ и $Z(M) \oplus N_1$ — существенный подмодуль в M . По лемме 3 найдется прямое разложение

$M = M_1 \oplus M_2$, где M_1 — существенное расширение N_1 ; M_2 — существенное расширение $Z(M)$. Тогда $M_2 = G(M)$. Так как $M_1 \cap Z(M) = 0$, то $Z(M_1) = 0$.

Лемма 8. Пусть M — такой малоинъективный модуль, что $Z(M)$ — квазиинъективный модуль. Тогда:

(а) $M = G(M) \oplus M_1$, $Z(M_1) = 0$ и модуль $G(M)$ квазиинъективен;

(б) если один из модулей $M/Z(M)$, $M/G(M)$ квазиинъективен, то M — квазиинъективный модуль.

Доказательство. По лемме 7 $M = G(M) \oplus M_1$, где $Z(M_1) = 0$. Так как $Z(M) = Z(G(M))$, то по лемме 6 модуль $G(M)$ строго малоинъективен. По лемме 4 (а) модуль $G(M)$ квазиинъективен. Докажем пункт (б). Так как $M_1 \simeq M/G(M)$, $M/Z(M) \simeq G(M)/Z(M) \oplus M_1/G(M)$ и один из модулей $M/Z(M)$, $M/G(M)$ квазиинъективен, то M_1 — квазиинъективный модуль. Поскольку $M = G(M) \oplus M_1$, то по лемме 3 (г) модуль M квазиинъективен.

Лемма 9 [1, с. 126]. Пусть R — самоинъективное справа кольцо. Тогда $Z(R) = J(R)$ и фактор-кольцо $R/Z(R)$ самоинъективно справа и регулярно.

Лемма 10. Пусть R — малоинъективное справа кольцо. Тогда:

(а) если $Z(R)$ — нильдеал, то R — строго малоинъективно справа;

(б) если $Z(R) = 0$, то $R = R_1 \times R_2$, где R_1 — редуцированное (то есть без ненулевых нильпотентных элементов) кольцо; R_2 — самоинъективное справа регулярное кольцо;

(в) если кольцо R регулярно, то R — самоинъективно справа.

Доказательство. Пункт (а) доказан в [4, лемма 10]. Пункт (б) вытекает из леммы 3 (а) и того, что квазинепрерывное справа антисингулярное справа кольцо является прямым произведением редуцированного кольца и самоинъективного справа регулярного кольца (см. [7, следствие 5.9]). Докажем пункт (в). По пункту (б) можно считать, что R — редуцированное регулярное кольцо, откуда R — самоинъективное справа кольцо [5, лемма 6].

Теорема 1. Для кольца R равносильны условия:

(а) R — самоинъективное справа кольцо;

(б) R — малоинъективно справа, $Z(R)$ — квазиинъек-

активный правый идеал, а фактор-кольцо $R/Z(R)$ регулярно;

(в) R — малоинъективно справа, $Z(R)$ — квазиинъективный правый идеал, а фактор-кольцо $R/G(R)$ регулярно;

(г) R — малоинъективно справа, $Z(R)$ — квазиинъективный правый идеал, а фактор-кольцо $R/Z(R)$ самоинъективно справа;

(д) R — малоинъективно справа, $Z(R)$ — квазиинъективный правый идеал, а фактор-кольцо $R/G(R)$ самоинъективно справа.

Доказательство. Импликации $(a) \Rightarrow (б)$, $(a) \Rightarrow (г)$ вытекают из леммы 9 и того, что идеал $Z(R)$, будучи вполне инвариантным подмодулем квазиинъективного модуля R_R , является квазиинъективным модулем. Если выполнено условие (г) (условие (д)), то правый R -модуль $R/Z(R)$ ($R/G(R)$) квазиинъективен, откуда по лемме 8 (б) модуль R_R квазиинъективен и, следовательно, кольцо R самоинъективно справа [1, с. 103]. Импликация $(б) \Rightarrow (в)$ следует из того, что кольцо $R/G(R)$ изоморфно фактор-кольцу кольца $R/Z(R)$. Импликация $(в) \Rightarrow (д)$ вытекает из того, что по лемме 7 кольцо $R/G(R)$ малоинъективно справа, а по лемме 10 (в) — самоинъективно справа.

Лемма 11. Пусть R — строго малоинъективное справа кольцо. Тогда $G(R)$ — инъективный правый идеал; $Z(R)$ — квазиинъективный правый идеал.

Доказательство. Первое утверждение доказано в [5, лемма 13 (а)], а второе вытекает из того, что $Z(R)$ — вполне инвариантный подмодуль инъективного модуля $G(R)$.

Лемма 12. Для кольца R равносильны условия:

(а) R — самоинъективное справа кольцо;

(б) R — строго малоинъективно справа, а фактор-кольцо $R/Z(R)$ регулярно;

(в) R — строго малоинъективно справа, а фактор-кольцо $R/G(R)$ регулярно.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 1 и леммы 11.

Теорема 2. Пусть R — такое кольцо, что $Z(R)$ — нильдеал. Тогда равносильны условия:

(а) R — самоинъективное справа кольцо;

(б) R — малоинъективно справа, а фактор-кольцо $R/Z(R)$ регулярно;

(в) R — малоинъективно справа, а фактор-кольцо $R/G(R)$ регулярно;

Доказательство. Утверждение вытекает из лемм 10 (а) и 12.

Лемма 13. Пусть R — малоинъективное справа кольцо, причем $Z(R)$ — существенный строго малоинъективный правый идеал. Тогда R — самоинъективное справа кольцо.

Доказательство. По лемме 2 кольцо R строго малоинъективно справа, причем $Z(R)$ — существенный правый идеал. Тогда кольцо R самоинъективно справа [5, лемма 13 (б)].

Лемма 14. Пусть M — малоинъективный модуль. Если $Z(M)$ — либо нётеров, либо артинов модуль, то M — строго малоинъективен.

Доказательство. Так как $Z(M)$ — вполне инвариантный подмодуль малоинъективного модуля M , то $Z(M)$ — малоинъективный модуль. Если $Z(M)$ — нётеров модуль, то $Z(M)$ — малоинъективный модуль, все эндоморфизмы которого с существенными ядрами нильпотентны. Тогда $Z(M)$ — строго малоинъективный модуль [4, лемма 9] и по лемме 2 модуль M строго малоинъективен. Если $Z(M)$ — артинов малоинъективный модуль, то $Z(M)$ — квазиинъективный модуль (см. [2, теорема 1]) и по лемме 6 модуль M строго малоинъективен.

Теорема 3. Пусть R — такое кольцо, что $Z(R)$ — существенный правый идеал. Тогда равносильны условия:

(а) R — квазифробениусово кольцо;

(б) R — малоинъективно справа и $Z(R)$ — нётеров правый идеал;

(в) R — малоинъективно справа и $Z(R)$ — артинов правый идеал.

Доказательство. Импликации $(а) \Rightarrow (б)$, $(а) \Rightarrow (в)$ тривиальны. Пусть выполнено одно из условий (б), (в). По лемме 14 кольцо R строго малоинъективно справа. По лемме 13 кольцо R самоинъективно справа. Так как $Z(R)$ — существенный конечномерный правый идеал, то R — конечномерное справа самоинъективное справа кольцо. Тогда R — самоинъективное справа полулокальное кольцо, причем $Z(R) = J(R)$ по лемме 9. Так как к

тому же $Z(R)$ — либо нётеров, либо артинов правый идеал, то R — нётерово справа самоинъективное справа кольцо. Тогда R — квазифробениусово кольцо [1, с. 320].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории.— М.: Мир, 1979, т. 2.— 463 с.
 2. Туганбаев А. А. Квазинъективные и малоинъективные модули.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1977, № 2, с. 61—64.
 3. Туганбаев А. А. О самоинъективных кольцах.— Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1980, № 12, с. 71—74.
 4. Туганбаев А. А. Малоинъективные кольца.— Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1981, № 9, с. 47—50.
 5. Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все циклические модули малоинъективны.— Труды семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981, вып. 6, с. 257—262.
 6. Anderson F. W., Fuller K. P. Rings and categories of modules.— New York e. a., Springer, 1974.
 7. Jeremy L. Modules et anneaux quasi-continus.— Canad. Math. Bull., 1974, v. 17, № 2, p. 217—228.
-

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБР С УСЛОВИЕМ АЛГЕБРАИЧНОСТИ

В. Д. ТЭН

Пусть R — ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом с единицей Φ . Через $\Phi[X]$ обозначим свободную ассоциативную алгебру над Φ , свободно порожденную множеством X . Все рассматриваемые ниже Φ -алгебры удовлетворяют следующему условию: Φ -алгебра R является Φ -модулем без кручения, т. е. из условия $ar = 0$, где $a \in \Phi$, $r \in R$, следует либо $a = 0$, либо $r = 0$.

Пусть A — подмножество в R ; $f(x_1, \dots, x_r) \in \Phi[X]$. Рассмотрим следующее условие:

(A_1). Для любых $a_1, \dots, a_r \in A$ существует целое число $n = n(a_1, \dots, a_r) \geq 1$ такое, что $f^n(a_1, \dots, a_r) \in Z(R)$, где $Z(R)$ — центр алгебры R .

В работе [1] доказывалось, что примитивная алгебра R , удовлетворяющая условию (A_1) при $A = R$, является PI -алгеброй и приводится оценка на размерность алгебры R над ее центром, зависящая от степени полинома $f(x_1, \dots, x_r)$. Целью этой работы является изучение Φ -алгебр с инволюцией, удовлетворяющих условию (A_1) для случая, когда подмножество A совпадает с множеством симметрических или кососимметрических элементов. Используя представления G -примитивных алгебр и G -примитивных PI -алгебр, полученные в [14], доказывалось, что примитивные алгебры с инволюцией, удовлетворяющие этому условию, являются PI -алгебрами и приводится оценка на PI -степень этих алгебр, зависящая от степени полинома $f(x_1, \dots, x_r)$, при некоторых условиях на полином $f(x_1, \dots, x_r)$ и кольцо операторов Φ . Далее эти результаты распространяются на первичные алгебры

с инволюцией без правых ниль-идеалов. Пусть R — Φ -алгебра с инволюцией $*$, $Z(R)$ — центр R . Введем обозначения:

$$S(R) = \{s \in R \mid s^* = s\}, \quad K(R) = \{\kappa \in R \mid \kappa^* = -\kappa\}, \\ Z^+(R) = Z(R) \cap S(R).$$

Напомним, что инволюция $*$ называется инволюцией первого рода, если $Z(R) = Z^+(R)$, и инволюцией второго рода в противном случае. Всюду в этой работе предполагается, что $\frac{1}{2} \in \Phi$.

§ 1

Лемма 1.1. Пусть R — простое кольцо с инволюцией второго рода $*$. Тогда R удовлетворяет следующим условиям:

1) Существует элемент $\alpha \in Z(R)$ такой, что $R = S(R) + \alpha S(R)$.

2) Существует элемент $\gamma \in Z(R)$ такой, что $K(R) = \gamma S(R)$.

Доказательство. 1. Так как $*$ — инволюция второго рода, то $Z(R) \neq \{0\}$, а так как R — простое кольцо, то $Z(R)$ — поле. Следовательно, существует элемент $0 \neq \alpha \in Z(R)$ такой, что $\alpha \neq \alpha^*$. Пусть a — произвольный элемент из R , тогда так как элемент $a - \alpha^*$ имеет обратный $(\alpha - \alpha^*)^{-1}$, то a можно представить в виде $a = (\alpha a^* - \alpha^* a)(\alpha - \alpha^*)^{-1} + \alpha(\alpha - \alpha^*)^{-1}$. Легко проверить, что элементы $(\alpha a^* - \alpha^* a)(\alpha - \alpha^*)^{-1}$, $(\alpha - \alpha^*)(\alpha - \alpha^*)^{-1} \in S(R)$, следовательно, $R = S(R) + \alpha S(R)$.

2. Если $\text{char } Z(R) = 2$, то $K(R) = S(R)$ и $\gamma = 1$. Поэтому пусть $\text{char } Z(R) \neq 2$. Из доказанного выше условия 1) следует существование элемента $\alpha \in Z(R)$ такого, что $\alpha \neq \alpha^*$ и $R = S(R) + \alpha S(R)$. Поэтому, если $a \in R$, $a = s_1 + \alpha s_2$, $s_1, s_2 \in S(R)$, тогда $a - \alpha^* = (\alpha - \alpha^*)s_2$. Следовательно, если $\kappa \in K(R)$, то $\kappa = \frac{1}{2}(\kappa -$

$-\kappa^*) = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^*)s$ для некоторого $s \in S(R)$, поэтому

если взять $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^*)$, то $K(R) = \gamma S(R)$.

Лемма 1.2. Пусть R — прямая сумма двух простых колец с инволюцией второго рода $*$. Тогда если $R = *$

примитивное кольцо, то R удовлетворяет условиям 1), 2) леммы 1.

Доказательство. Пусть $R = S_1 \oplus S_2$; S_1, S_2 — идеалы кольца R , являющиеся простыми кольцами. Так как R не является примитивным кольцом, то из [14] следует

$$S_i^* = S_2, S_i^* \cap S_i = \{(0, 0)\}, i = 1, 2.$$

А так как $*$ — инволюция второго рода, то $Z(R) \neq \{(0, 0)\}$, а поэтому не равны нулю и $Z(S_1)$, и $Z(S_2)$. Пусть $(\alpha, 0)$ — ненулевой элемент из $Z(S_1)$, тогда $(\alpha, 0)^* = (0, \beta) \neq (0, 0)$, $(0, \beta) \in Z(S_2)$. Так как $Z(S_1) \cap Z(S_2) = \{(0, 0)\}$, то $(\alpha, 0) - (\alpha, 0)^* \neq (0, 0)$, более того, $(\alpha, 0) - (\alpha, 0)^* = (\alpha, -\beta)$ — обратимый элемент из $Z(R)$. Пусть $a \in R$. Как и при доказательстве предыдущей леммы, рассмотрим представление $a = [(\alpha, 0)a^* - (\alpha, 0)^*a][(\alpha, 0) - (\alpha, 0)^*]^{-1} + (\alpha, 0)(a - a^*)[(\alpha, 0) - (\alpha, 0)^*]^{-1}$. Элементы $(a - a^*)[(\alpha, 0) - (\alpha, 0)^*]^{-1}$, $[(\alpha, 0)a^* - (\alpha, 0)^*a][(\alpha, 0) - (\alpha, 0)^*]^{-1} \in S(R)$, следовательно, $R = S(R) + (\alpha, 0)S(R)$. Доказательство пункта 2) проводится так же, как в лемме 1.

З а м е ч а н и е 1.1. Определение $*$ -примитивного кольца можно найти, например, в [14].

Л е м м а 1.3. Пусть R — $*$ -примитивное кольцо с инволюцией второго рода $*$. Тогда если $f(x_1, \dots, x_r)$ является тождеством в $S(R)$ или $K(R)$ и $|\Phi| > \deg f(x_1, \dots, x_r)$, то $f(x_1, \dots, x_r)$ — тождество в R .

Доказательство. Из [8] и [14] следует, что R — $*$ -простое кольцо. Поэтому, как было показано в доказательстве леммы 1.1, $Z^+(R)$ — поле. Пусть $f(x_1, \dots, x_r) = \sum_v f_v(x_1, \dots, x_r)$, где $f_v(x_1, \dots, x_r)$ — полиномы, однород-

ные по каждой переменной $x_i, i = 1, 2, \dots, r$. Так как $|\Phi| > \deg f(x_1, \dots, x_r)$, то из [2, с. 338] следует, что каждый из полиномов $f_v(x_1, \dots, x_r)$ является тождеством в $S(R)$ или $K(R)$. Поэтому достаточно доказать лемму для случая, когда $f(x_1, \dots, x_r)$ — полином, однородный по каждой переменной x_i , а в силу условия 2) лемм 1.1, 1.2 достаточно рассмотреть случай, когда $f(x_1, \dots, x_r)$ — тождество в $S(R)$. Пусть теперь $s_1, s_1', s_2, \dots, s_r$ — произвольные элементы из $S(R)$, $\gamma \in Z^+(R)$; d_1 — степень $f(x_1, \dots, x_r)$ относительно переменной x_1 , $d_1 \leq \deg f(x_1, \dots, x_r)$. Очевидно, что $s_1 + \gamma s_1' \in S(R)$. Поэтому имеем

$$0 = f(s_1 + \gamma s_1', s_2, \dots, s_r) = f_0(s_1, \dots, s_r) +$$

$$+ \gamma f_1(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_r) + \dots + \gamma^{d_1} f_{d_1}(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_r)$$

для некоторых полиномов $f_0(x_1, \dots, x_r), f_i(x_1, x'_1, x_2, \dots, x_r), i = 1, \dots, d_1$. Так как $|\Phi| \leq |Z^+(R)|$ ($\Phi \subseteq Z^+(R)$, так как R — кольцо с единицей), а $|\Phi| \geq \deg f(x_1, \dots, x_r) \geq d_1$, то $|Z^+(R)| > d_1$. Следовательно, существуют попарно различные $\gamma_1, \dots, \gamma_{d_1} \in Z^+(R)$ такие, что

[illegible]

Определитель этой системы $\Delta = |(\gamma_i^j)|$, $i, j = 1, 2, \dots, d_1$, есть определитель Вандермонда, следовательно, $\Delta \neq 0$. Отсюда следует

$$f_0(s_1, \dots, s_r) = f_1(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_r) = \dots = f_{d_1}(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_r) = 0.$$

Пусть теперь a_1 — произвольный элемент R , $s_2, \dots, s_r \in S(R)$. Из условия 1) лемм 1.1, 1.2 следует: существуют элементы $s_1, s'_1 \in S(R)$ и $\alpha \in Z(R)$ такие, что $a_1 = s_1 + \alpha s'_1$. Тогда имеем

$$f(a_1, s_2, \dots, s_r) = f(s_1 + \alpha s'_1, s_2, \dots, s_r) = f_0(s_1, \dots, s_r) + \alpha f_1(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_r) + \dots + \alpha^{d_1} f_{d_1}(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_r) = 0.$$

По доказанному выше $f_0(s_1, \dots, s_r) = f_1(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_r) = \dots = f_{d_1}(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_r) = 0$. Следовательно, $f(a_1, s_2, \dots, s_r) = 0$. Повторяя этот процесс r раз, получаем $f(a_1, \dots, a_r) = 0$ для любых $a_1, \dots, a_r \in R$.

Замечание 1.2. Пусть R — кольцо с инволюцией $*$; $k \in K(R)$. Тогда $C_R(k)$ $*$ -инвариантное подкольцо в R , где $C_R(k)$ — централизатор k в R .

Л е м м а 1.4. Пусть R — кольцо матриц порядка $n \times n$, $n \geq 2$, над алгебраически замкнутым полем F ; $\text{char } F \neq 2$; $*$ — инволюция кольца R . Тогда в R существует подкольцо A , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) A — $*$ -инвариантное подкольцо в R .
- 2) Ограничение инволюции $*$ на A является инволюцией второго рода.
- 3) A является полупростым артиновым кольцом.

Доказательство. Если $*$ действует на R как инволюция второго рода, то в качестве A может быть взято само R . Поэтому предположим, что $*$ действует на R как инволюция первого рода. Из [5] следует, что $*$ является инволюцией одного из следующих двух типов:

(1) $x^* = \sum \gamma_j^{-1} \xi_{ij} \gamma_i e_{j,i}$, где $x = \sum \xi_{ij} e_{ij}$; $\gamma_i, \gamma_j \in F$; e_{ij} — матричные единицы.

(2) $x^* = y^{-1} x^t y$, где x^t — транспонированная матрица, а

$$y = \left(\begin{pmatrix} \sigma & \\ & \end{pmatrix} \right) \left\{ \kappa \text{ раз}; \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; n = 2\kappa. \right.$$

Рассмотрим отдельно оба случая. Пусть $*$ — инволюция вида (1) и пусть $n = 2\kappa$ четное. Тогда легко проверить, что элементы

$$a_1 = \alpha_1 (e_{1,2} - \gamma_2^{-1} \gamma_1 e_{2,1}),$$

$$a_2 = \alpha_2 (e_{3,4} - \gamma_4^{-1} \gamma_3 e_{4,3}),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_\kappa = \alpha_\kappa (e_{n-1,n} - \gamma_n^{-1} \gamma_{n-1} e_{n,n-1}),$$

где $\alpha_i^2 = \beta_1 \dots \beta_{i-1} \beta_{i+1} \dots \beta_\kappa$, $i = 1, \dots, \kappa$, $\beta_1 = \gamma_2^{-1} \gamma_1$, $\beta_2 = \gamma_4^{-1} \gamma_3, \dots, \beta_\kappa = \gamma_n^{-1} \gamma_{n-1}$ являются кососимметрическими относительно $*$ (так как F — алгебраически замкнутое поле, то $\alpha_i \in F$). Следовательно, $a = \sum_{i=1}^{\kappa} a_i \in K(R)$.

Заметим, что $a^2 = \lambda(e_{1,1} + e_{2,2} + \dots + e_{n,n}) \in Z(R)$, где $\lambda = -\beta_1 \dots \beta_\kappa$. Рассмотрим $C_R(a)$ — централизатор элемента a в R . Очевидно, что a — обратимый элемент в R ($a^{-1} = \lambda^{-1} a$), поэтому $C_R(a)$ есть подкольцо инвариантов кольца R относительно внутреннего автоморфизма второго порядка ψ_a , $\psi_a(x) = axa^{-1}$, $x \in R$. Тогда из [6] следует, что $C_R(a)$ — прямая сумма простых колец, причем число слагаемых конечно, а из [7] следует, что $C_R(a)$ — артиново кольцо. Так как $a \in K(R)$, то в силу замечания 1.2 $C_R(a)$ — $*$ -инвариантное подкольцо, а так как элемент a принадлежит центру кольца $C_R(a)$ и $a \neq a^*$, то ограничение инволюции $*$ на подкольцо $C_R(a)$ есть инволюция второго рода. Следовательно, подкольцо $A = C_R(a)$ удовлетворяет условиям 1)–3). Пусть теперь $n = 2\kappa + 1$ нечетное. Из вида инволюции (1) легко следует, что F_{n-1} является $*$ -инвариант-

ным подкольцом в F_n . Так как $n-1$ четное, то из приведенных выше рассуждений получаем, что в F_{n-1} , а следовательно, и в F_n содержится подкольцо A , удовлетворяющее условиям 1) — 3).

Пусть теперь $*$ является инволюцией вида (2). В этом случае n четное, $n = 2k$. Легко проверить, что

$$e_{i,i}^* = \begin{cases} e_{i-1,i-1}, & i - \text{четное}, \\ e_{i+1,i+1}, & i - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Следовательно, так как $\text{char } F \neq 2$, то $a_1 = e_{1,1} - e_{2,2}$, $a_2 = e_{3,3} - e_{4,4}, \dots$, $a_k = e_{n-1,n-1} - e_{n,n} \in K(R)$. Отсюда следует $a = \sum_{i=1}^k a_i \in K(R)$, причем очевидно, что $a^2 = E \in Z(R)$, где E — единичная матрица. Рассуждениями, аналогичными тем, которые приведены выше, получаем $A = C_R(a)$, удовлетворяющее условиям 1) — 3).

Замечание 1.3. а) Из доказательства леммы 1.4 следует, что если n — четное, то A является подкольцом инвариантов кольца $R = F_n$ относительно внутреннего автоморфизма второго порядка, а если n — нечетное, то A является подкольцом инвариантов $*$ -инвариантного подкольца F_{n-1} относительно внутреннего автоморфизма второго порядка кольца F_{n-1} .

б) Из [14] следует, что A есть конечная прямая сумма колец, принадлежащих к одному из следующих двух типов:

- 1) A_i — простое кольцо с инволюцией второго рода.
- 2) A_i — $*$ -простое кольцо, являющееся прямой суммой двух простых колец.

§ 2

В этом параграфе мы рассмотрим Φ -алгебры, удовлетворяющие одному из следующих условий:

(S_0) Для любых $s_1, \dots, s_r \in S(R)$ существует натуральное число $n = n(s_1, \dots, s_r)$ такое, что $f^n(s_1, \dots, s_r) = 0$.

(K_0) Для любых $k_1, \dots, k_r \in K(R)$ существует натуральное число $n = n(k_1, \dots, k_r)$ такое, что $f^n(k_1, \dots, k_r) = 0$.

Ниже нам понадобятся следующие условия на полином $f(x_1, \dots, x_r)$. (f_1), (s). Существует натуральное число N_0 такое, что для любых

$$s_1, \dots, s_r \in S(R) \quad f^{N_0}(s_1, \dots, s_r) \in S(R).$$

(k). Существует натуральное число N_0 такое, что для любых

$$\kappa_1, \dots, \kappa_r \in K(R) \quad f^{N_0}(\kappa_1, \dots, \kappa_r) \in S(R).$$

Лемма 2.1. Пусть R — примитивная Φ -алгебра с инволюцией $*$, удовлетворяющая условию (S_0) или (K_0) , а полином $f(x_1, \dots, x_r)$ удовлетворяет условию $(f_1)(s)$ или (k) соответственно. Тогда R — примитивная Φ -алгебра с ненулевым цоклем.

Доказательство. Докажем для случая, когда R удовлетворяет условию (S_0) , а $f(x_1, \dots, x_r)$ удовлетворяет условию $(f_1)(s)$. Во втором случае доказательство аналогичное. Предположим сначала, что в $S(R)$ нет нильпотентных элементов. Но тогда в $S(R)$ выполняется тождество $f^{N_0}(x_1, \dots, x_r) = 0$, так как $f^{N_0}(x_1, \dots, x_r) \in S(R)$ для любых $s_1, \dots, s_r \in S(R)$. Тогда по теореме Амицура [8] R является PI -алгеброй, следовательно, имеет ненулевую цокль. Поэтому мы можем предположить, что существует элемент $s \in S(R)$ такой, что $s^2 = 0$. Очевидно, что для любых $a_1, \dots, a_r \in R$ элементы $sa_1 + a_1^*s, \dots, sa_r + a_r^*s \in S(R)$. Следовательно, существует натуральное число m такое, что

$$f^m(sa_1 + a_1^*s, \dots, sa_r + a_r^*s) = 0,$$

тогда $f^m(sa_1 + a_1^*s, \dots, sa_r + a_r^*s)s = 0$ (*).

Но $f^m(sa_1 + a_1^*s, \dots, sa_r + a_r^*s)s$ можно представить в виде

$$f^m(sa_1 + a_1^*s, \dots, sa_r + a_r^*s)s = (f_1 + f_2 + f_3)s,$$

где f_1 есть сумма мономов $sa_{i_1} \dots sa_{i_r}$; f_2 есть сумма мономов вида $a_{i_1}^*s \dots a_{i_m}^*s$; f_3 тогда имеет вид sg_1s , $g_1 = g_1(s, a_1, \dots, a_2, a_1^*, \dots, a_r^*)$. Так как $s^2 = 0$, то очевидно, что этими тремя слагаемыми f_1, f_2, f_3 все исчерпывается. Далее, нетрудно видеть, что $(f_1 + f_2 + f_3)^m s = f_1^m s$. Но тогда в силу соотношения (*) имеем $f_1^m s = 0$. Так как $f_1 = sg_2(s, a_1, \dots, a_r)$, то имеем $f_1^m sg_2(s, a_1, \dots, a_r) = 0$, т. е. $f_1^{m+1}(sa_1, \dots, sa_r) = 0$, а отсюда следует, что полином $f_1(x_1, \dots, x_r)$ принимает нильпотентные значения в правом идеале sR . Пусть $J(sR)$ — радикал Джекобсона кольца sR . Тогда из [2, с. 57] следует, что $J^2(sR) = \{0\}$ и $\overline{sR} = sR/J(sR)$ — примитивное кольцо. Очевидно, что в $\overline{sR}$ полином $f_1(x_1, \dots, x_r)$ принимает нильпотентные значения. Поэтому в силу [1, теорема 1.7] $\overline{sR}$ — PI -алгебра, а так как $J(sR)$ — ниль-

потентная алгебра, sR удовлетворяет некоторому полиномиальному тождеству $f_s(x_1, \dots, x_t) = 0$, но тогда в R выполняется обобщенное тождество $f_s(sx_1, \dots, sx_t) = 0$. Следовательно, и в этом случае R имеет ненулевой цоколь.

Замечание 2.1. Пусть R_1, R_2 — алгебры над Φ и алгебра R_2 коммутативна; $*$ — инволюция Φ -алгебры R_1 . Тогда на Φ -алгебре $R_1 \otimes_{\Phi} R_2$ можно следующим образом определить действие $*$: если $r = \sum r_i \otimes r_i \in R_1 \otimes_{\Phi} R_2$, где $r_i' \in R_1$; $r_i \in R_2$, то $r^* = \sum (r_i')^* \otimes r_i$. Причем если R_1, R_2 являются свободными Φ -модулями, то $S(R_1 \otimes_{\Phi} R_2) = S(R_1) \otimes_{\Phi} R_2$ и $K(R_1 \otimes_{\Phi} R_2) = K(R_1) \otimes_{\Phi} R_2$.

Лемма 2.2. Пусть R — простая Φ -алгебра, конечномерная над своим центром $Z(R)$; $*$ — инволюция Φ -алгебры R . Тогда если R удовлетворяет условию (S_0) или (K_0) , а $|\Phi| = \infty$, то $\dim_{Z(R)} R = n^2$, причем $n \leq \deg f + 1$, где $\deg f$ — степень полинома $f(x_1, \dots, x_r)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $*$ — инволюция второго рода, а R удовлетворяет, для определенности, условию (S_0) . Тогда на множестве симметрических элементов $S(R)$ выполняется тождество $f^n(x_1, \dots, x_r) = 0$. Так как $|\Phi| = \infty$, то в силу леммы 1.3 $f^n(x_1, \dots, x_r) = 0$ является тождеством в R . Тогда из [9] следует, что в R выполняется тождество $f(x_1, \dots, x_r) = 0$, и поэтому $\dim_{Z(R)} R \leq \left(\frac{1}{2} \deg f\right)^2$. Пусть те-

перь $*$ — инволюция первого рода и пусть $\overline{Z(R)}$ — алгебраическое замыкание центра алгебры R . Тогда из замечания 2.1 следует, что на $R = R \otimes_{Z(R)} \overline{Z(R)} \cong \overline{Z(R)}_n$ можно определить действие $*$, причем $\overline{S(R)} = S(R) \otimes_{Z(R)} \overline{Z(R)}$. Далее легко видеть, что Φ -алгебра R удовлетворяет условию (S_0) . Из леммы 1.4 следует, что в $\overline{R}$ содержится Φ -подалгебра A , удовлетворяющая условиям 1) — 3) этой леммы. Из замечания 1.3, п. б) следует, что A есть прямая сумма $*$ -простых колец с инволюцией второго рода, которые очевидным образом удовлетворяют условию (S_0) . Пусть $A = \sum_{i=1}^k \oplus A_i$, где A_i — $*$ -простые кольца. Рассмотрим здесь два случая:

а) A_i — простое кольцо. Тогда, как было показано выше, в A выполняется стандартное тождество $S_{2l}(x_1, \dots, x_{2l}) = 0$, где $l \leq \frac{1}{2} \deg f$.

б) Пусть A_i — $\ast$ -простое кольцо, не являющееся простым. Тогда $A_i = A_{i_1} \oplus A_{i_2}$ — прямая сумма простых колец и $A_{i_1}^* = A_{i_2}$. Если $a \in A_i$, то обозначим через $\bar{a}$ образ элемента a при каноническом эпиморфизме: $A_i \rightarrow A_i/A_{i_2} \cong A_{i_1}$. Если $a \in A_{i_1}$, то $a^* \in A_{i_2}$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_r \in A_{i_1}$, тогда $a_1 + a_1^*, \dots, a_r + a_r^* \in S(A_i)$. И очевидно, что $a_i = \bar{a}_i + a_i^*$, $i = 1, \dots, r$. Ясно, что мы можем считать полином $f(x_1, \dots, x_r)$ униформным в смысле [4, определение 3.8, с. 11]. Поэтому для любого натурального числа t имеем $f^t(a_1, \dots, a_r) = f(a_1 + a_1^*, \dots, a_r + a_r^*) \pmod{A_{i_2}}$. Тогда так как $f^m(a_1 + a_1^*, \dots, a_r + a_r^*) = 0$ для некоторого натурального $m = m(a_1, \dots, a_r)$, то $f^m(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r) = f^m(\bar{a}_1 + a_1^*, \dots, \bar{a}_r + a_r^*) = 0$. Следовательно, полином $f(x_1, \dots, x_r)$ является нильзначным в простой Ф-алгебре A_{i_1} , тогда из [1, теорема 1.7] следует, что в A_{i_1} выполняется стандартное тождество $S_{2l}(x_1, \dots, x_{2l})$. Но тогда очевидно, что и в A_i выполняется это же стандартное тождество, причем $l \leq \frac{1}{2} \deg f$.

Следовательно, в Ф-алгебре A выполняется стандартное тождество $S_{2l}(x_1, \dots, x_{2l})$. Но тогда из замечания 1.3, п. а) и [10] следует, что $\dim_{\overline{Z(R)}} \overline{R} = \dim_{Z(R)} R \leq (\deg f + 1)^2$. В случае, когда R удовлетворяет условию (K_0) , доказательство аналогично.

Теорема 2.1. Пусть R — примитивная Ф-алгебра с инволюцией $\ast$, удовлетворяющая условию (S_0) или (K_0) , а полином $f(x_1, \dots, x_r)$ удовлетворяет условию $(f_1)(s)$ или (k) соответственно. Тогда если $|\Phi| = \infty$, то R является простой алгеброй, конечномерной над своим центром, причем $\dim_{Z(R)} R \leq (\deg f + 1)^2$.

Доказательство. Из леммы 2.1 имеем: R — примитивная Ф-алгебра с ненулевым цоклем. Тогда из [3, с. 19] следует, что либо: 1) R изоморфна D_m , где D — $\ast$ -инвариантное тело, либо 2) для любого натурального числа n в R содержится $\ast$ -инвариантное подкольцо $A(n)$ одного из следующих двух типов:

а) $A(n) \cong D_n$, где D — $\star$ -инвариантное тело;

б) $A(n) \cong F_{2n}$, где F — $\star$ -инвариантное поле.

Из леммы 2.2 следует, что случай 2) невозможен, так как $\dim_{Z(n)} A(n) \leq (\deg f + 1)^2$ для всех n , где $Z(n)$ — центр кольца $A(n)$, а последнее невозможно. Следовательно, $R \cong D_n$, т. е. R — простая центральная алгебра, конечномерная над своим центром, так как конечномерность D над $Z(R)$ следует из теоремы Амицура [8]. Снова, применяя лемму 2.2, получаем $\dim_{Z(R)} R \leq (\deg f + 1)^2$.

§ 3

В этом параграфе мы рассмотрим Φ -алгебры R , удовлетворяющие одному из следующих условий:

(S_1). Для любых $s_1, \dots, s_r \in S(R)$ существует натуральное число $n = n(s_1, \dots, s_r)$ такое, что $f^n(s_1, \dots, s_r) \in Z(R)$.

(K_1). Для любых $k_1, \dots, k_r \in K(R)$ существует натуральное число $n = n(k_1, \dots, k_r)$ такое, что $f^n(k_1, \dots, k_r) \in Z(R)$.

Всюду ниже будем предполагать, что $|\Phi| = \infty$.

Л е м м а 3.1. Пусть R — примитивная Φ -алгебра с инволюцией $\star$, удовлетворяющая условию (S_1) или (K_1), а полином $f(x_1, \dots, x_r)$ является однородным и удовлетворяет условию (f_1)(s) или (k) соответственно. Тогда R — примитивная Φ -алгебра с ненулевым цокелем.

Доказательство. Если полином $f(x_1, \dots, x_r)$ принимает на $S(R)$ (соответственно на $K(R)$) нильпотентные значения, то утверждение следует из леммы 2.1. Поэтому мы можем считать, что $Z(\bar{R})$, а следовательно, и $Z^+(R)$ отличны от нуля. Локализуя R по $Z^+(R) \setminus \{0\}$, мы получим Φ -алгебру R' . Нетрудно видеть, что если M — точный неприводимый правый R -модуль, то $M_{Z^+(R) \setminus \{0\}} = M[Z^+(R) \setminus \{0\}]^{-1}$ есть точный неприводимый правый R' -модуль, следовательно, R' — примитивная Φ -алгебра. На R' можно определить действие инволюции $\star$ следующим образом: $(ra)^* = r^*a$, где $r \in R$, $a \in [Z^+(R) \setminus \{0\}]^{-1}$. Далее, заметим, что ненулевые элементы центра кольца R' являются обратимыми, так как $Z^+(R)[Z^+(R) \setminus \{0\}]^{-1}$ является кольцом инвариантов кольца $Z(R')$, где $Z(R')$ — центр R' относительно автоморфизма второго порядка и $\dim_{Z^+(R)[Z^+(R) \setminus \{0\}]^{-1}} Z(R') = 2$, а, как хорошо известно, алгебраическая над полем область целостности является полем. И, наконец, очевидно, что R'

удовлетворяет условию (S_1) (соответственно (K_1)), следовательно, R' удовлетворяет всем условиям леммы. Далее, для определенности, будем считать, что R' удовлетворяет условию (S_1) . Предположим, что существует элемент $s \in S(R')$ такой, что s не является ни обратимым, ни нильпотентным. И рассмотрим здесь два случая.

1. Пусть s не является регулярным, т. е. s — делитель нуля. Тогда для любых $s_1, \dots, s_r \in S(R')$ существует натуральное число $n = n(s_1, \dots, s_r)$ такое, что $f^n(ss_1s, \dots, ss_rs) \in Z(R')$. Но $f^n(ss_1s, \dots, ss_rs) = sas$ для некоторого элемента $a \in R'$ и $sas \in Z(R')$, а так как ненулевые элементы из $Z(R')$ обратимы, то $sas = 0$. Следовательно, в $\ast$ -инвариантном кольце $sR's$ полином $f(x_1, \dots, x_r)$ принимает нильпотентные значения на $S(sR's)$. Из [3, с. 84] следует, что в $sR's$ существует $\ast$ -инвариантный идеал N такой, что $N^3 = \{0\}$ и $sR's/N$ — примитивное кольцо. Но очевидно, что примитивная Φ -алгебра $sR's/N$ — простая центральная алгебра, конечномерная над своим центром, отсюда следует, что $sR's/N$ содержит единицу $\bar{e}$. Но тогда идемпотент $\bar{e}$ можно поднять по модулю нильпотентного идеала N [2, с. 84]. Следовательно, в $sR's$ существует идемпотент e , причем $e \in S(sR's)$. Так как все элементы из $sR's$ не являются обратимыми в R' , то e отличен от единицы R' . Так как $e^* = e$, то для любых $s_1, \dots, s_r \in S(R')$ существует $n = n(s_1, \dots, s_r)$ такое, что $f^n(es_1e, \dots, es_re) \in Z(R')$, но опять-таки имеем $f^n(es_1e, \dots, es_re) = ebe$ для некоторого элемента $b \in R'$, так как нулевые элементы из $Z(R')$ обратимы, а e — делитель нуля, то снова получаем $f^n(es_1e, \dots, es_re) = 0$. Из [2, с. 77] следует, что если R' примитивно, то $eR'e$ тоже примитивно. Следовательно, Φ -алгебра $eR'e$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, а отсюда следует, что $eR'e$ — простая центральная алгебра, конечномерная над своим центром, следовательно, удовлетворяет некоторому тождеству $g(x_1, \dots, x_t) = 0$, но тогда в R' выполняется обобщенное тождество $g(ex_1e, \dots, ex_te) = 0$, но тогда этому же обобщенному тождеству удовлетворяет и R , следовательно, R — примитивное кольцо с ненулевым цоклем.

2. Пусть s — регулярный элемент в R' . Если для любых $s_1, \dots, s_r \in S(R')$, $f^n(ss_1s, \dots, ss_rs) = 0$ для некоторого натурального числа $n = n(s_1, \dots, s_r)$, то как и выше, получим, что R' — примитивная Φ -алгебра с не-

нулевым цокелем. Поэтому пусть существуют $s_1, \dots, s_r \in S(R')$ и натуральное число $n = n(s_1, \dots, s_r)$ такие, что $f^n(ss_1s, \dots, ss_rs) \in Z(R')$, $f^n(ss_1s, \dots, ss_rs) \neq 0$. Так как любой ненулевой элемент из $Z(R')$ обратим, а $f^n(ss_1s, \dots, ss_rs) = scs$ для некоторого элемента $c \in R'$, то получаем, что s — обратимый элемент, а это противоречит предположению.

Итак, у нас остался случай, когда каждый элемент из $S(R')$ либо обратим, либо нильпотентен. Но в этом случае из [11, теорема 7] следует, что R' является кольцом одного из следующих типов:

- (1) R' — тело;
- (2) R' — прямая сумма двух тел D_1, D_2 и $D_1^* = D_2$;
- (3) R' — алгебра 2×2 — матриц над полем;
- (4) R' — коммутативное кольцо характеристики 2.

В случае (1) в силу [15] R' , а следовательно, и R удовлетворяют полиномиальному тождеству; случай (2) исключается, так как R' примитивно; в случаях (3) и (4), как и в (1), получаем, что R — PI -кольцо. Итак, во всех случаях R — примитивная Φ -алгебра с ненулевым цокелем. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть R — простая центральная алгебра размерности n^2 над своим центром $Z(R)$; $*$ — инволюция R . Пусть $Z^+(R)$ не является алгебраическим расширением конечного поля. Тогда если R удовлетворяет условию (S_1) или (K_1) , а $*$ — инволюция второго рода, то $n \leq \frac{1}{2}(\deg f + 2)$.

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_{n^2}$ — базис алгебры R над $Z(R)$ с таблицей умножения $e_i e_j = \sum_{\kappa=1}^{n^2} \alpha_{ijk} e_\kappa$, далее, пусть $e_i^* = \sum_{\kappa=1}^{n^2} \beta_{ik} e_\kappa$; $\alpha_{ijk}, \beta_{ik} \in Z(R)$, $i, j, \kappa = 1, \dots, n^2$. Пусть P — простое подполе в $Z(R)$. Так как $Z^+(R)$ не является алгебраическим расширением конечного поля, то в случае $\text{char } P = 0$ имеем $|P| = \infty$, а если $\text{char } P = p > 0$, то в $Z(R)$ существует элемент γ такой, что $|P(\gamma)| = \infty$. Так как $*$ — инволюция второго рода, то существует $\delta \in Z(R)$ такой, что $\delta \neq \delta^*$. Обозначим через F подполе в $Z(R)$, порожденное над P элементами $\gamma, \gamma^*, \delta, \delta^*, \alpha_{ijk}, \beta_{ik}, \alpha_{ijk}^*, \beta_{ik}^*$ и коэффициентами полинома $f(x_1, \dots, x_r)$. Тогда F — конечно-по-

рожденное расширение поля P и очевидно, что F — $*$ -инвариантное подполе в $Z(R)$. Пусть R_0 — подкольцо в R , порожденное элементами $e_i, i = 1, \dots, n^2$ над F . Очевидно, что R_0 $*$ -инвариантное подкольцо в R , причем $*$ действует в R_0 как инволюция второго рода. Далее, R_0 является простой центральной алгеброй над F и $\dim_F R_0 = n^2$. Следовательно, R_0 удовлетворяет всем условиям леммы. Из [1, лемма 3.1] следует, что для всех элементов $a \in R_0$, таких, что $a^{m(a)} \in F$, существует фиксированное натуральное $m_0 \geq 1$ такое, что $a^{m_0} \in F$. Поэтому если в R_0 выполняется условие (S_1) или (K_1) , а y — новая переменная, то в $S(R_0)$ или соответственно в $K(R_0)$ выполняется тождество $[f^{m_0}(x_1, \dots, x_r), y] = 0$, а так как $*$ — инволюция второго рода, то из леммы 1.3 следует, что $[f^{m_0}(x_1, \dots, x_r), y]$ — тождество в R_0 и, следовательно, $f^{m_0}(x_1, \dots, x_r)$ является центральным полиномом в R_0 . Но тогда очевидно, что $f^{m_0}(x_1, \dots, x_r)$ — центральный полином для алгебры матриц порядка n . Хорошо известно, что тогда $f^{m_0}(x_1, \dots, x_r)$ является тождеством в алгебре матриц порядка $n - 1$. Из [9] следует, что $f(x_1, \dots, x_r)$ является тождеством в алгебре матриц порядка $n - 1$, отсюда имеем $2(n - 1) \leq \deg f$ и $n \leq \frac{1}{2}(\deg f + 2)$.

Пусть R — алгебра над полем L ; $L < F$ — расширение поля L . Из замечания 2.1 следует, что действие $*$ можно продолжить на $\bar{R} = R \otimes_L F$, причем таким образом, что $S(\bar{R}) = S(R) \otimes_L F$, $K(\bar{R}) = K(R) \otimes_L F$. Пусть $f(x_1, \dots, x_r)$ — тождество в $S(R)$ или $K(R)$.

Определение 3.1 [4, с. 14]. Будем говорить, что $f(x_1, \dots, x_r)$ является стабильным тождеством в $S(R)$ или соответственно в $K(R)$, если $f(x_1, \dots, x_r)$ является тождеством в $S(R \otimes_L F)$ или соответственно в $K(R \otimes_L F)$ для любого расширения F поля L .

Лемма 3.3. Если $|\Phi| > \deg F$, то $f(x_1, \dots, x_r)$ — стабильное тождество в $S(R)$ или соответственно в $K(R)$.

Доказательство [4, теорема 3.16, с. 15].

Лемма 3.4. Пусть R — простая центральная алгебра с инволюцией $*$ размерности n^2 над своим центром $Z(R)$. Тогда если R удовлетворяет условию (S_1) или (K_1) , а $Z(R)$ не является алгебраическим расширением конечного поля, то либо $n \leq 2$, либо $n \leq \deg f + 3$.

Доказательство. Если $*$ — инволюция второго рода, то утверждение следует из леммы 3.2. Поэтому пусть $*$ — инволюция первого рода. Пусть $e_1, \dots, e_{n^2}$ — базис алгебры R над $Z(R)$. И пусть F — расширение простого подполя P поля $Z(R)$, порожденное элементами $\gamma, \gamma^*, \alpha_{ijk}, \alpha_{ijk}^*, \beta_{ik}, \beta_{ik}^*, i, j, k = 1, \dots, n^2$ и коэффициентами полинома $f(x_1, \dots, x_r)$, где $\gamma, \alpha_{ijk}, \beta_{ik}$ — те же, что в лемме 3.2. Определим R_0 так же, как в лемме 3.2. Тогда R_0 — простая центральная алгебра с инволюцией первого рода, удовлетворяющая всем условиям леммы, причем центр F алгебры R_0 является конечно-порожденным расширением поля P . Поэтому для всех $a \in R_0$, таких, что $a^{m(a)} \in F$, существует общее натуральное число $m_0 \geq 1$ такое, что $a^{m_0} \in F$. Следовательно, если в R_0 выполнено условие (S_1) или (K_1) , то $S(R_0)$ или соответственно $K(R_0)$ удовлетворяет тождеству $[f^{m_0}(x_1, \dots, x_r), y] = 0$. Пусть теперь $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля F . Рассмотрим алгебру $\bar{R}_0 = R_0 \otimes_F \bar{F}$. Так как F — бесконечное поле, то из леммы 3.3 следует, что в $S(\bar{R}_0)$ или соответственно в $K(\bar{R}_0)$ выполняется тождество $[f^{m_0}(x_1, \dots, x_r), y] = 0$. Следовательно, $\bar{R}_0$ удовлетворяет условию (S_1) или (K_1) . Далее, так как $\bar{R}_0 \cong \bar{F}_n$, то к алгебре $\bar{R}_0$ применима лемма 1.4. Пусть A — подкольцо в $\bar{R}_0$, удовлетворяющее условиям 1)–3) леммы 1.4. Тогда из замечания 1.3 б) следует, что A есть конечная прямая сумма $*$ -инвариантных колец одного из следующих двух типов:

- а) A_i — простая центральная алгебра размерности над своим центром с инволюцией второго рода $*$.
- б) A_i — $*$ -простое кольцо, являющееся прямой суммой двух простых центральных алгебр размерности l над своими центрами.

В случае а) из леммы 3.2 следует, что $l_i \leq \frac{1}{2} \times (\deg f + 2)$. В случае б) аналогично тому, как это делалось в доказательстве леммы 2.2, можно показать, что в A_i выполняется стандартное тождество $S_{2l_i}(x_1, \dots, x_{2l_i}) = 0$, причем $l_i \leq \frac{1}{2} (\deg f + 2)$. Следовательно, в кольце A выполняется стандартное тождество $S_{2l}(x_1, \dots, x_{2l}) = 0$, где $l \leq \frac{1}{2} (\deg f + 2)$. Тогда из замечания 1.3

n . а) и [10] следует, что $n - 1 \leq 2l \leq \deg f + 2$. Следовательно, $n \leq \deg f + 3$.

Теорема 3.1. Пусть R — примитивная Φ -алгебра с инволюцией $*$, удовлетворяющая всем условиям леммы 3.1. Тогда если центр R не является алгебраическим расширением конечного поля, то R является простой алгеброй, конечномерной над своим центром, и $\dim_{Z(R)} R \leq (\deg f + 3)^2$.

Доказательство. Из леммы 3.1 следует, что R — примитивная Φ -алгебра с ненулевым цоклем. Тогда аналогично тому, как делалось в доказательстве теоремы 2.1, применяя теорему [3, с. 19] и лемму 3.4, получаем, что R — простая центральная алгебра, конечномерная над своим центром, и $\dim_{Z(R)} R \leq (\deg f + 3)^2$.

Лемма 3.5. Пусть R — первичная Φ -алгебра, удовлетворяющая некоторому полиномиальному тождеству. Тогда если R удовлетворяет условию (S_1) или (K_1) , а центр R не является алгебраическим расширением конечного поля, то PI -степень R не превосходит $2(\deg f + 3)$.

Доказательство. Пусть R' — кольцо, полученное из R локализацией по $Z^+(R) \setminus \{0\}$. Тогда, как было замечено при доказательстве леммы 3.1, R' — PI -кольцо, центр которого является полем. Из результата [12] следует, что если центр PI -кольца — поле, то кольцо является простой центральной алгеброй, конечномерной над своим центром. Следовательно, R' — простая центральная алгебра, конечномерная над своим центром, удовлетворяющая всем условиям леммы. Поэтому в силу леммы 3.4 R' -степень $\leq 2(\deg f + 3)$. Для завершения доказательства осталось отметить, что PI -степени колец R и R' равны.

Теорема 3.2. Пусть R — первичная Φ -алгебра с инволюцией $*$ без ненулевых правых ниль-идеалов, удовлетворяющая условию (S_1) или (K_1) , а полином $f(x_1, \dots, x_r)$ является полилинейным и удовлетворяет условию $(f_1)(s)$ или (k) соответственно. Тогда если центр $Z(R)$ алгебры R не является алгебраическим расширением конечного поля, то алгебра R является PI -алгеброй и PI -степень R не превосходит $2(\deg f + 3)$.

Доказательство. Проведем доказательство для случая, когда R удовлетворяет условию (S_1) , для (K_1) доказательство аналогичное. Предположим сначала, что R удовлетворяет условию (S_0) , т. е. $f(x_1, \dots, x_r)$ является

нильзначным на $S(R)$. Тогда если $S(R)$ не содержит нильпотентных элементов, то $f^{N_0}(x_1, \dots, x_r)$ является тождеством в $S(R)$, где N_0 — число из условия $(f_1)(s)$, и по теореме Амицура [8] R является PI -алгеброй, но тогда в силу леммы 3.5 имеем PI -степень $R \leq 2(\deg f + 3)$. Поэтому предположим, что в $S(R)$ существует элемент $s \neq 0$ такой, что $s^2 \neq 0$. Пусть $a_1, \dots, a_r \in R$. Так как $sa_i + a_i^*s \in S(R)$, $i = 1, \dots, r$, то существует натуральное число m такое, что $f^m(sa_1 + a_1^*s, \dots, sa_r + a_r^*s) = 0$, следовательно, $0 = f^m(sa_1 + a_1^*s, \dots, sa_r + a_r^*s)s$. Но тогда $f^m(sa_1 + a_1^*s, \dots, sa_r + a_r^*s)s = (f_1 + f_2 + f_3)^ms = f_1^ms$, где f_1, f_2, f_3 определены так же, как в лемме 2.1. Следовательно, имеем $f_1^{m+1}(sa_1, \dots, sa_r) = 0$ и $f(x_1, \dots, x_r)$ принимает нильпотентные значения в правом идеале sR . Обозначим $l(sR) = \{a \in R \mid asR = 0\}$ — левый аннулятор правого идеала sR . Тогда из [4, с. 38] следует, что $M = sR \cap l(sR)$ — идеал в sR и sR/M — первичное кольцо. Докажем, что sR/M является первичным кольцом без ненулевых правых ниль-идеалов. Предположим противное, т. е. пусть $\bar{J}$ — отличный от нуля правый ниль-идеал в sR/M и пусть J — прообраз идеала $\bar{J}$ в sR . Тогда J — правый ниль-идеал в sR , так как если $i \in J$, то $i^n \in M$ для некоторого натурального $n = n(i)$, но очевидно, что $M^2 = \{0\}$. Рассмотрим JsR — правый идеал в R , а так как J — правый ниль-идеал в sR , то $JsR \subset J$ и, следовательно, JsR — правый ниль-идеал в R . Но по условию R не содержит ненулевых правых ниль-идеалов, поэтому $JsR = \{0\}$, а так как R — первичная алгебра, то $Js = \{0\}$. Далее, в силу того, что $J \subset sR$ и $Js = \{0\}$, имеем $J^2 = \{0\}$. Следовательно J является нильпотентным правым идеалом в sR , отсюда следует, что $J \subset M$, так как sR/M — первичное кольцо, т. е. $\bar{J} = \{0\}$, и мы привели к противоречию предположение о том, что в sR/M существует ненулевой правый ниль-идеал. Далее очевидно, что полином $f(x_1, \dots, x_r)$ принимает нильпотентные значения в sR/M , но тогда по [13, лемма 6] sR/M является PI -алгеброй, а так как M нильпотентен, то sR — PI -алгебра. Следовательно, в sR выполняется некоторое полиномиальное тождество $g(x_1, \dots, x_r) = 0$, но тогда в R выполняется обобщенное тождество $g(sx_1, \dots, sx_r) = 0$. Итак, R — первичная Φ -алгебра с инволюцией $*$.

удовлетворяющая обобщенному тождеству. Из [3, с. 96] следует, что либо R является PI -алгеброй, либо для любого целого положительного n R содержит $*$ -инвариантную подалгебру $R^{(n)}$, которая является первичной PI -алгеброй и PI -степень $R^{(n)} \geq n$. Но из леммы 3.5 следует, что второй случай невозможен, следовательно, R является PI -алгеброй и в силу леммы 3.5 PI -степень $R \leq 2(\deg f + 3)$. Итак, случай, когда $f(x_1, \dots, x_r)$ является нильзначным на $S(R)$, нами полностью рассмотрен.

Поэтому пусть существуют $s_1, \dots, s_r \in S(R)$ и натуральное m такие, что $0 \neq f^m(s_1, \dots, s_r) \in Z(R)$, следовательно, в этом случае $Z(R) \neq \{0\}$. Пусть R' — Φ -алгебра, полученная из R локализацией по $Z^+R \setminus \{0\}$. Ранее было замечено, что центр $Z(R')$ алгебры R' является полем. Пусть I — идеал в R' ; I^* — образ I при действии инволюции $*$, предположим, что $I \neq \{0\}$. Тогда очевидно, что $I^* \neq \{0\}$, а так как R' — первичная алгебра, то $*$ — инвариантный идеал $I \cap I^* \neq \{0\}$. Далее, $I \cap I^*$ является первичной Φ -алгеброй без ненулевых правых ниль-идеалов. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $I \cap I^* \cap Z(R') = \{0\}$. Тогда $f(x_1, \dots, x_r)$ является нильзначным на $S(I \cap I^*)$ и по доказанному выше $I \cap I^*$ является PI -алгеброй. Но, как хорошо известно, если в первичной алгебре двусторонний идеал является PI -алгеброй, то и вся алгебра является PI . Тогда имеем PI -степень R , равную PI -степени R' , а последняя в силу леммы 3.5 не превосходит $2(\deg f + 3)$.

2. Пусть $I \cap I^* \cap Z(R') \neq \{0\}$ для любого идеала I . Тогда, так как $Z(R')$ — поле, $I \cap I^* = R'$, следовательно, $I = R'$. Отсюда следует, что R' — простая алгебра с ненулевым центром, следовательно, R' — примитивная алгебра. В этом случае утверждение теоремы следует из теоремы 3.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Herstein I. N., Procesi C., Shacher M. Algebraic valued functions on non-commutative rings.— J. Algebra, 1975, № 36, p. 128—150.
2. Джекобсон Н. Строение колец.— М., 1961.— 392 с.
3. Herstein I. N. Rings with involution.— Chicago Lectures in Math., 1976.
4. Procesi C. Rings with polynomial identities. New-York, 1973.

5. Jacobson N., Rickart C. E. Homomorphisms of jordan rings of self-adjoint elements.— Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v. 72, p. 310—322.

6. Харченко В. К. Подкольца Галуа простых колец. Матем. заметки, 1975, т. 17, № 6, с. 887—892.

7. Бейдар К. И. Ассоциативные кольца и конечные группы автоморфизмов.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1978, вып. 4, с. 33—44.

8. Amitsur S. Identities in rings with involution.— Israel J. Math., 1969, v. 7, p. 63—68.

9. Amitsur S. The T-ideals of free rings.— J. London Math. Soc., 1955, v. 3, № 4.

10. Барбаумов В. Е. Группы автоморфизмов и PI-алгебры.— Сиб. мат. ж., 1975, т. 16, № 3.

11. Herstein I. N., Montgomery S. Invertible and regular elements in rings with involution.— J. Algebra, 1973, v. 25, p. 390—400.

12. Rowen L. On rings with central polynomials.— J. Algebra, 1974, v. 31, № 3, p. 393—426.

13. Felzenszwalb B., Giambruno A. Centralizers and multilinear polynomials in non-commutative rings.— J. London Math. Soc., 1979, (2z), v. 19, p. 417—428.

14. Бейдар К. И., Тэн В. Д. О локальной конечности некоторых PI-алгебр.— Сиб. мат. ж., № 4, т. 18 (1977), с. 934—938.

15. Тэн В. Д. Функции со значениями в алгебрах и кольца инвариантов.— Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тарту, 1976.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

Т. М. ФЛЕШЕР

Пусть G — абелева группа без кручения конечного ранга; A — ее подгруппа; $\text{Aut } G$ — группа всех ее автоморфизмов. Подгруппу $\Gamma(A)$ группы $\text{Aut } G$ назовем A -тождественной, если она состоит из всех таких автоморфизмов α группы G , что $\alpha(a) = a$ для всех $a \in A$. Подгруппу C группы G назовем $\Gamma(A)$ -максимальной, если она состоит из всех тех элементов c группы G , для которых $\alpha(c) = c$ при любом $\alpha \in \Gamma(A)$.

Заметим, что для каждой подгруппы A группы G существует A -тождественная подгруппа $\Gamma(A)$, состоящая, может быть, из одного лишь тождественного автоморфизма ε , и $\Gamma(A)$ -максимальная подгруппа, возможно, совпадающая с самой группой G . Если из контекста будет ясно о какой подгруппе идет речь, то вместо « $\Gamma(A)$ -максимальная подгруппа» будем говорить « Γ -максимальная». Очевидно, что нулевая подгруппа и сама группа G являются Γ -максимальными подгруппами, первая — относительно $\Gamma(O) = \text{Aut } G$, вторая — относительно $\Gamma(G) = \langle \varepsilon \rangle$. Кроме того, для любого автоморфизма $\varphi \in \text{Aut } G$ подгруппа $A = \text{Ker}(\varphi - \varepsilon)$ будет $\Gamma(A)$ -максимальной подгруппой. Действительно, предположим, что A — не $\Gamma(A)$ -максимальна. Тогда существует подгруппа $C > A$ ($C \leq G$), которая $\Gamma(A)$ -максимальна. Но для любого $x \in C \setminus A$ имеем $\varphi(x) \neq x$, так как в противном случае $x \in \text{Ker}(\varphi - \varepsilon)$. С другой стороны, $\varphi \in \Gamma(A)$, то есть $\varphi(x) = x$ для любого $x \in C$. Таким образом, $C = A$ — $\Gamma(A)$ -максимальная подгруппа.

Введем следующие понятия и обозначения. Пусть S и T — сервантные вполне характеристические подгруппы

группы G ; pfi — подгруппы, причем $T < S$. Следуя [1], будем говорить, что S — минимальная по модулю T pfi -подгруппа в G , если для любой pfi -подгруппы R в G , такой, что $T \leq R \leq S$, будет $R = T$ или $R = S$. Положим теперь $P_0 = 0$, $P_1 = \text{Soc } G$, где $\text{Soc } G$ — псевдоцокль группы G [2], то есть сервантная подгруппа группы G , порожденная всеми ее минимальными pfi -подгруппами. Пусть подгруппы P_k определены для всех $k < t$. Тогда P_t — сервантная подгруппа группы G , порожденная всеми ее минимальными по модулю P_{t-1} pfi -подгруппами. Так как G имеет конечный ранг, то $G = P_n$ для некоторого целого числа $n > 0$. Последовательность $P_0 < P_1 < \dots < P_n = G$ назовем последовательностью обобщенных псевдоцоклей группы G .

Группу G , у которой обобщенные псевдоцокли и только они являются Γ -максимальными подгруппами, назовем $\{ps$ -группой. Другими словами, G — $\{ps$ -группа, если для любой подгруппы A группы G $\Gamma(A)$ — максимальная подгруппа совпадает с некоторым обобщенным псевдоцоклем группы.

В работе будем пользоваться понятиями теории квазиразложений. Группу G назовем квазивложенной в группу H ($G \leq H$), если $nG \leq H$ для некоторого целого n . Группа G квазиравна H ($G \approx H$), если $G \leq H$ и $H \leq G$. Группа G квазиизоморфна группе H ($G \sim H$), если nG для некоторого целого n изоморфна подгруппе конечного индекса группы H . Группа G называется квазиразложимой в прямую сумму своих подгрупп A и B , если подгруппа $A \oplus B$ квазиравна группе G . Подгруппы A и B называются квазислагаемыми группы G . В противном случае группа G называется сильно неразложимой. Пусть G — группа; D — ее делимая оболочка. Эндоморфизм φ группы D называется квазиэндоморфизмом группы G , если $n\varphi G \leq G$ для некоторого целого n . Множество всех квазиэндоморфизмов группы G образует кольцо $E(G)$. Обратимые элементы этого кольца называются квазиавтоморфизмами группы G и образуют группу $\text{Aut } G$ всех квазиавтоморфизмов группы G .

Следуя [3, 4], обозначим через $r(G)$ ранг группы G ; $E(G)$ — кольцо всех ее эндоморфизмов; $N(E(G))$ — нильрадикал кольца эндоморфизмов. Если M — некоторое множество элементов группы G , то $\langle M \rangle_*$ — сервантная ее подгруппа, порожденная множеством M . Авто-

морфизм φ группы G назовем регулярным, если известно, что $\varphi(g)=g$ ($g \in G$) влечет $g=0$, а группу, каждый автоморфизм которой регулярен, — регулярно полной. Такие группы изучались в [5].

В настоящей работе дано описание сильно неразложимых fps -групп (теорема 5). Показана связь обобщенных псевдоцоклей сильно неразложимых fps -групп с ядрами их нильпотентных эндоморфизмов (теорема 3). Приведены примеры сильно неразложимых и квазиразложимых fps -групп (предложения 8, 9, 11).

Предложение 1. Сильно неразложимая группа G , совпадающая со своим псевдоцоклем, является fps -группой.

Доказательство. В [5, теорема 2.2] показано, что всякая сильно неразложимая группа конечного ранга, совпадающая со своим псевдоцоклем, регулярно полна, то есть $\varphi(g) \neq g$ для любых $\varphi \neq \text{id} \in \text{Aut } G$ и $g \in G$. Следовательно, единственными Γ -максимальными подгруппами группы G будут $P_0=0$ и $P_1=\text{Soc } G=G$, а G — fps -группа по определению.

Рассмотрим далее группы, не совпадающие со своими псевдоцоклями. Напомним [2], что если $G=P_n$ сильно неразложима, то всякий ее эндоморфизм является либо мономорфизмом, а значит, квазиавтоморфизмом, либо нильпотентным эндоморфизмом. Из [1, следствие 1.10] следует, что в этом случае $N(E(G)) = \text{Ann } (\text{Soc } G) = \langle \varphi \in E(G) \mid \text{Ker } \varphi \neq 0 \rangle$. Так как $\varphi + \text{id} \in \text{Aut } G$, то из предыдущих рассуждений следует, что $\text{Ker } \varphi$ — Γ -максимальная подгруппа. Если теперь G — сильно неразложимая fps -группа, то всякая ее Γ -максимальная подгруппа совпадает с некоторым обобщенным псевдоцоклем группы. Таким образом, получаем

Предложение 2. Пусть G — сильно неразложимая fps -группа. Тогда ядро любого ее эндоморфизма совпадает с некоторым обобщенным псевдоцоклем P_i .

Возникает вопрос, всякий ли обобщенный псевдоцокль сильно неразложимой fps -группы реализуется как ядро некоторого нильпотентного эндоморфизма? Покажем, что это действительно так.

Теорема 3. Для сильно неразложимой fps -группы G каждый обобщенный псевдоцокль P_i является ядром некоторого ее нильпотентного эндоморфизма.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для группы G существует такой эндоморфизм $\varphi \in N(E(G))$, что $\text{Ker } \varphi = \text{Soc } G$. Пусть $x \in P_2 \setminus P_1$. Из [2] следует, что существует такой эндоморфизм $\varphi \in E(G)$, что $\varphi(x) = a \in \text{Soc } G$. Заметим, что $\varphi \in N(E(G))$. Действительно, если $\varphi \notin N(E(G))$, то φ — квазиавтоморфизм. Следовательно, существует $\varphi^{-1} \in E(G)$ и $\varphi^{-1}(a) = x$. Для некоторого целого n имеем $n\varphi^{-1} \in E(G)$ и $n\varphi^{-1}(a) = nx$, что невозможно, так как $\text{Soc } G$ — rfi -подгруппа группы G . Теперь имеем $\text{Soc } G \leq \text{Ker } \varphi$ [1, следствие 1.10]. Очевидно, $x \notin \text{Ker } \varphi$, а значит, по определению fps -группы P_2 не содержится в $\text{Ker } \varphi$ и $\text{Ker } \varphi = \text{Soc } G$.

Покажем теперь, что для найденного эндоморфизма $\varphi \in N(E(G))$ с $\text{Ker } \varphi = \text{Soc } G$ выполнено следующее условие:

(*) $(\forall x \in P_i \setminus P_{i-1}) \Rightarrow (\varphi(x) \in P_{i-1} \setminus P_{i-2}), i=2, \dots, n$.
 Для любого $x \in P_2 \setminus P_1$ имеем $\varphi(x) \in P_1$ [1, теорема 1.13] и $\varphi(x) \neq 0$ по условию. Пусть условие (*) справедливо для всех $i < \kappa$ и существует такой элемент $x \in P_\kappa \setminus P_{\kappa-1}$, что $\varphi(x) \in P_{\kappa-t} \setminus P_{\kappa-t-1} (t > 1)$. Тогда $\varphi^t(x) = 0$, но для любого $y \in P_{\kappa-1} \setminus P_{\kappa-2}$, в силу индуктивного предположения, $\varphi^t(y) \neq 0$, что противоречит определению fps -группы. Теперь очевидно, что для данного $\varphi \in N(E(G))$ с $\text{Ker } \varphi = \text{Soc } G$ имеем $\text{Ker } \varphi^i = P_i$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Лемма 4. Пусть G — сильно неразложимая группа; S и T — такие ее rfi -подгруппы, что S — минимальная по модулю T rfi -подгруппа группы G . Тогда $r(S/T) = r(A)$, где A — любая минимальная rfi -подгруппа группы G .

Доказательство. Отметим сначала, что ранг всех минимальных rfi -подгрупп сильно неразложимой группы одинаков. Это легко следует из [1, лемма 1.11].

Предположим сначала, что $r(S/T) < r(A)$. Пусть $a_1, \dots, a_r$ — максимальная линейно-независимая система элементов из A ; $\bar{s}_1 = s_1 + T, \dots, \bar{s}_t = s_r + T$ — максимальная линейно-независимая система элементов из $S/T (t < r)$. Очевидно, $s_1, \dots, s_t$ — линейно независимы в G . В силу [1, лемма 1.11] существует такой эндоморфизм $\varphi_1 \in E(G)$, что $\varphi_1(a_1) = \kappa_1 a_2$. Если $\varphi_1(s_1)$ и s_1 линейно независимы, то находим такой эндоморфизм $\varphi_2 \in E(G)$, что $\varphi_2(a_1) = \kappa_2 a_3$, и т. д. Так как $t < r$, то

через конечное число шагов будем иметь $m\varphi_t(s_1) = \sum_{i=1}^{t-1} m_i \varphi_i(s_1)$ для некоторых целых чисел $m, m_1, \dots, m_{t-1}$. Но $\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_t(a_1)$ линейно независимы в G . Следовательно, $s_1 \in \text{Ker}(m\varphi_t - \sum_{i=1}^{t-1} m_i \varphi_i)$, но $\text{Soc } G$ не содержится в $\text{Ker}(m\varphi_t - \sum_{i=1}^{t-1} m_i \varphi_i)$. что невозможно в силу [1, следствие 1. 10].

Пусть теперь $r(S/T) > r(A)$. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что $(m\varphi_r - \sum_{i=1}^{r-1} m_i \varphi_i)s_1 \in S \setminus T$, а $a_1 \in \text{Ker}(m\varphi_r - \sum_{i=1}^{r-1} m_i \varphi_i)$, то есть $m\varphi_r - \sum_{i=1}^{r-1} m_i \varphi_i \in N(E(G))$ [1, следствие 1.10]. Это противоречит [1, лемма 1.12]. Таким образом, $r(S/T) = r(A)$.

Рассмотрим теперь строение сильно неразложимых fps-групп.

Теорема 5. Пусть $G = P_n$ — сильно неразложимая fps-группа. Тогда $G = \langle A_1, \dots, A_r \rangle_*$, где r — целое число, каждая A_i — pfi-подгруппа группы G ; $A_i \cap A_j = 0$ ($i \neq j$), и все A_i одновременно удовлетворяют одному из следующих условий:

1. $A_i \cap P_j$ — минимальная по модулю $A_i \cap P_{j-1}$ pfi-подгруппа группы G , $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, r$;

2. Существует такое $1 \leq \kappa < n$, что $A_i \cap P_s$ ($1 \leq s \leq \kappa$) удовлетворяет условию 1) и $A_i \cap P_{n-j}$ сервантно порождается t^j попарно непересекающимися минимальными по модулю $A_i \cap P_{n-j-1}$ pfi-подгруппами группы G , $j = 0, 1, \dots, n - \kappa - 1$, t — целое число.

Доказательство. Пусть $x \in P_n \setminus P_{n-1}$ — произвольный элемент и $\varphi \in N(E(G))$ — такой эндоморфизм, что $\text{Ker } \varphi = \text{Soc } G$. В силу условия (*) имеем $y = \varphi^{n-2}(x) \in P_2 \setminus P_1$. Тогда $\varphi(y) \in P_1$ и $\varphi(y) \neq 0$. Рассмотрим подгруппу $C_1 = \langle \alpha \varphi(y) \mid \alpha \in E(G) \rangle_*$. Очевидно, C_1 — pfi-подгруппа группы G . Покажем, что C_1 — минимальная pfi-подгруппа группы G . Предположим противное, существует pfi-подгруппа $S < C_1$. Пусть $y_1 = \alpha_1 \varphi(y) \in S$; $z = \alpha_2 \varphi(y) \in C_1 \setminus S$. Так как $z, y_1 \neq 0$, то α_1, α_2 — мономорфизмы, а значит, квазиавтоморфизмы [2, теорема 4.1], Тогда существует $\alpha_1^{-1} \in E(G)$ и $m\alpha_1^{-1} \in E(G)$ для некоторого целого m . Имеем $\alpha_2 m \alpha_1^{-1}(y_1) = \alpha_2 m \alpha_1^{-1} \alpha_1 \varphi(y) = m \alpha_2 \varphi(y) =$

$= m\alpha \in S$, что противоречит вполне характеристичности подгруппы S . Таким образом, C_1 — минимальная рfi-подгруппа группы G . Пусть $a_1, \dots, a_m$ — максимальная линейно-независимая система элементов группы C_1 и $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in E(G)$ такие мономорфизмы, что $\alpha_1(a_1) = s_1 a_2, \dots, \alpha_{m-1}(a_{m-1}) = s_{m-1} a_m$ [1, лемма 1.11]. Рассмотрим элементы $\alpha_1(y) = y_2, \dots, \alpha_{m-1}(y) = y_m$. Аналогично доказательству леммы 4 можно показать, что $y, y_2, \dots, y_m$ линейно независимы. Строим подгруппу $C_1^{(2)} = \langle C_1, y, \dots, y_m \rangle_*$. Если теперь $z = \varphi^{n-3}(x)$ и $z_2 = \alpha_1(z), \dots, z_m = \alpha_{m-1}(z)$, то строим подгруппу $C_1^{(3)} = \langle C_1^{(2)}, z, \dots, z_m \rangle_*$. И так далее, $A_1 = C_1^{(n)} = \langle C_1^{(n-1)}, x, \alpha_1(x), \dots, \alpha_{m-1}(x) \rangle_*$. Возможны два случая: 1) для любого $\psi \in N(E(G))$ имеем $\psi(\varphi^\kappa(x)) \in A_1$; 2) существует $\psi \in N(E(G))$ такой, что $\psi(\varphi^\kappa(x)) \notin A_1$ для некоторого целого κ .

Случай 1. Вернемся к подгруппе $C_1^{(2)}$. Для каждого $\psi \in N(E(G))$ имеем $\psi \alpha_i(y) = \psi(y_{i+1}) \in C_1$, так как $\psi \alpha_i \in N(E(G))$, и по условию $\psi \alpha_i(y) \in C_1$. Теперь легко видеть, что $C_1^{(2)}$ — рfi-подгруппа группы G . Более того, $C_1^{(2)}$ — минимальная по модулю C_1 рfi-подгруппа группы G , так как $r(C_1^{(2)}/C_1) = r(C_1)$ (лемма 4). Аналогично имеем $C_1^{(3)}$ — минимальную по модулю $C_1^{(2)}$ рfi-подгруппу группы G . И так далее, $C_1^{(n)}$ — минимальная по модулю $C_1^{(n-1)}$ рfi-подгруппа группы G . То есть для подгруппы A_1 выполнено условие 1 теоремы.

Легко видеть, что если G — fps-группа и g_1, g_2 — такие элементы, что $mg_1 - tg_2 \notin \text{Soc } G$ ни для каких целых чисел m, t , то $\varphi(g_1)$ и $\varphi(g_2)$ линейно независимы. Следовательно, $\text{Im}(\varphi/A_1)$ имеет тот же ранг, что и подгруппа $C_1^{(n-1)}$.

Пусть, далее, $x_1 \in P_n \setminus P_{n-1}$, причем $x_1 + a \notin A_1$ для любого $a \in \text{Soc } G$. Если такого $x \in P_n \setminus P_{n-1}$ не существует, то ищем $x_1 \in P_{n-1} \setminus P_{n-2}$, удовлетворяющий тому же условию. Если такого x_1 не найдется, то $G = A_1$ и теорема доказана. Предположим, что $\varphi(x_1) \in A_1$. В силу [1, лемма 1.12] $\varphi(x_1) \in P_{n-1} \cap A_1 = C_1^{(n-1)}$. Тогда из предыдущего замечания следует, что для некоторого целого числа m имеем $m\varphi(x_1) \in \text{Im}(\varphi/A_1)$. То есть $m\varphi(x_1) = \varphi(b)$, где $b \in A_1$. Очевидно, b и x_1 линейно независимы. Получим противоречие с предыдущим замечанием. Аналогично показывается, что $\varphi^\kappa(x_1) \notin A_1$ для всех $\kappa = 1, \dots, n-1$ и $\alpha\varphi^\kappa(x_1) \notin A_1$ для всех $\alpha \in E(G)$.

Обозначим через $y_1 = \varphi^{n-2}(x_1) \in P_2 \setminus P_1$. Строим минимальную pfi-подгруппу $C_2 = \langle \alpha \varphi(y_1) \mid \alpha \in E(G) \rangle_*$. Очевидно, $C_1 \cap C_2 = 0$. Предположим, что для некоторого $\psi \in N(E(G))$ имеем $\psi(y_1) \notin C_2$. Так как $\psi(y) \in C_1$, то существует $\alpha \in E(G)$ такой, что $\alpha \varphi(y) = \kappa \psi(y)$, но $\alpha \varphi(y_1) \neq \kappa \psi(y_1)$. То есть $(\alpha \varphi - \kappa \psi)y = 0$, но $(\alpha \varphi - \kappa \psi)y_1 \neq 0$, что противоречит определению fgs-группы. Таким образом, для любого $\psi \in N(E(G))$ имеем $\psi(y_1) \in C_2$. Теперь аналогично предыдущему строим подгруппу $A_2 = C_2^{(n)}$. В силу конечности ранга группы G имеем $G = \langle A_1, \dots, A_r \rangle_*$, каждая подгруппа A_i удовлетворяет условию 1 теоремы.

Случай 2. Пусть сначала существует такой $\varphi_2 \in N(E(G))$, что $\varphi_2(\varphi^{n-2}(x)) = \varphi_2(y) \notin C_1$. Строим подгруппу $C_2 = \langle \alpha \varphi_2(y) \mid \alpha \in E(G) \rangle_*$. Имеем C_2 — минимальная pfi-подгруппа группы G и $C_1 \cap C_2 = 0$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что существует t эндоморфизмов $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_t \in NE(G)$ и t минимальных pfi-подгрупп C_i таких, что $\varphi_i(y) \in C_i$. Причем для каждого нильпотентного эндоморфизма ψ с ядром $\text{Soc } G$ имеем $m\psi = \sum_{i=1}^t \alpha_i \varphi_i$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ — моно-

морфизмы, а m — некоторое целое число. Рассмотрим минимальную по модулю $S_1 = \langle C_1, \dots, C_t \rangle_*$ pfi-подгруппу B_1 группы G . Из леммы 4 следует, что $r(B_1/S_1) = r(C_1)$. Покажем, что B_1 — единственная минимальная по модулю S_1 pfi-подгруппа. Предположим противное. Пусть D — минимальная по модулю S_1 pfi-подгруппа группы G и $B_1 \cap D = S_1$. Тогда существует $z \in D \setminus S_1$ и такой $\eta \in N(E(G))$, что $\eta(z) = \sum_{i=1}^t c_i (c_i \in C_i)$.

Для каждого $i = 1, \dots, t$ имеем $\alpha_i \varphi_i(y) = m_i c_i$ для некоторых мономорфизмов α_i и некоторых целых чисел m_i . Рассмотрим эти равенства в кольце $E(G)$. Тогда $\frac{1}{m_i} \alpha_i \varphi_i \in E(G)$ и $c_i = \frac{1}{m_i} \alpha_i \varphi_i(y)$. Отсюда $\left(\sum_{i=1}^t \frac{1}{m_i} \alpha_i \varphi_i \right) y =$
 $= \gamma(y) = \sum_{i=1}^t c_i$. Так как для некоторого целого m

имеем $m\gamma \in E(G)$, то $m\gamma(y) = m \sum_{i=1}^t c_i \in G$. Если теперь $\gamma(y) = a$, то в силу изоморфизма $\text{Im } \eta$ и $\text{Im } (m\gamma)$ [3, лемма 2.2] имеем $m\gamma(z) = ma$. Следовательно, $[m\varphi -$

$-m\gamma](y+z)=0$, что противоречит определению firs -группы. Таким образом, B_1 — единственная минимальная по модулю S_1 pfi -подгруппа группы G .

Рассмотрим элемент $z = \varphi^{n-3}(x) \in P_3 \setminus P_2$. Имеем $\varphi(z) \in B_1$. Если $\varphi_2(z) \in B_1$, то существует $\alpha \in E(G)$ такой, что $\alpha\varphi(z) = \kappa\varphi_2(z)$ [1, лемма 1.11]. Тогда $(\alpha\varphi - \kappa\varphi_2)z = 0$, но $(\alpha\varphi - \kappa\varphi_2)(y) \neq 0$. Это противоречит тому, что G — firs -группа. Следовательно, $\varphi_2(z) \notin B_1$. Проведя для $\varphi_2(z)$ рассуждения, аналогичные предыдущим, получим, что $\varphi_2(z) \in B_2$, где B_2 — минимальная по модулю $S_2 = \langle C'_1, \dots, C'_t \rangle_*$ pfi -подгруппа группы G ; $B_1 \cap B_2 = 0$; $C'_1, \dots, C'_t$ — минимальные pfi -подгруппы группы G , причем $\varphi_i(\varphi_2(z)) \in C'_i$ ($i = 1, \dots, t$). Строим далее подгруппы $B_3, \dots, B_t$ для элементов $\varphi_3(z), \dots, \varphi_t(z)$. Минимальная по модулю $S_2 = \langle B_1, \dots, B_t \rangle_*$ pfi -подгруппа группы G является единственной. Продолжая подобные рассуждения, получаем, что G удовлетворяет условию 2 теоремы. Если же $\kappa > 1$, то доказательство ведем сначала аналогично случаю 1, затем — случаю 2.

Следствие 6. Пусть $G = P_n = \langle A_1, \dots, A_s \rangle_*$ — сильно неразложимая firs -группа, причём $A_i \cap P_m \leq A_i \cap P_{m+1}$ для всех $i = 1, \dots, s$; $m = 1, \dots, n-1$. Для того чтобы G удовлетворяла условию 2) теоремы, необходимо выполнение следующего условия:

(**) последовательность рангов $r(P_n/P_{n-1}), \dots, r(P_\kappa/P_{\kappa-1})$ образует геометрическую прогрессию для некоторого $\kappa \geq 1$ и $r(P_\kappa/P_{\kappa-1}) = r(P_{\kappa-1}/P_{\kappa-2}) = \dots = r(P_1)$.

Доказательство. Если группа G не удовлетворяет условию (**), то в силу леммы 4 и доказательства пункта 2 теоремы 5 для некоторой pfi -подгруппы A_i имеем: $A_i \cap P_j$ порождается s минимальными по модулю $A_i \cap P_{j-1}$ pfi -подгруппами группы G и $s \neq t^{n-j}$. Если же для некоторого $\kappa' < \kappa$ имеем $r(P_{\kappa'}/P_{\kappa'}) \neq r(P_\kappa/P_{\kappa-1})$, то из доказательства пункта 1 теоремы 5 следует, что P_κ не удовлетворяет условию 1 теоремы 5.

Непосредственно из доказательства теоремы 5 вытекает

Следствие 7. Пусть G — сильно неразложимая firs -группа.

1. Если G удовлетворяет условию 1 теоремы 5, то для любых таких $\psi, \varphi \in N(E(G))$, что $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$, имеем $\langle \text{Im } \varphi \rangle_* = \langle \text{Im } \psi \rangle_*$.

2. Если G удовлетворяет условию 2 теоремы 5 и $\kappa=1$, то существуют t нильпотентных эндоморфизмов с ядрами, равными $\text{Soc } G$, образы которых попарно не пересекаются.

Приведем теперь примеры f ps-групп.

Предложение 8. Существуют квазиразложимые f ps-группы.

Доказательство. Пусть A — группа без кручения ранга 1 и типа τ с характеристикой $\chi = (0, 0, \dots, 0, \dots)$; B — группа без кручения ранга 1 и типа τ' с характеристикой $\chi' = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Пусть $a \in A$, $b \in B$ — элементы нулевой 3-высоты; $x = 3^{-1}(a + b)$; $G = \langle A, B, x \rangle$. Очевидно, $G \approx A \oplus B$, так как $3G \leq A \oplus B$. Покажем, что B сервантна в G . Для этого достаточно показать, что если $3g \in B$, то $g \in B$ для всех $g \in G$. Действительно, $g = \bar{a} + \bar{b} + \kappa x$, где $\bar{a} \in A$; $\bar{b} \in B$ и κ — некоторое целое число. Тогда $3g = 3\bar{a} + 3\bar{b} + \kappa(a + b)$. Так как $3g \in B$, то $3\bar{a} + \kappa a = 0$, а так как a имеет нулевую 3-высоту, то $\kappa = 3\kappa'$. То есть $3g = 3\bar{b} + 3\kappa'b$ и $g = \bar{b} + \kappa'b \in B$. Теперь вполне характеристичность подгруппы B очевидна. Таким образом, B — минимальная π -подгруппа группы G и $B \leq \text{Soc } G$. Если $B < \text{Soc } G$, то, так как $r(G) = 2$, получим $G = \text{Soc } G$. Но G имеет нильпотентный эндоморфизм φ , действующий следующим образом: $\varphi(B) = 0$, $\varphi(a) = 3b$. Это невозможно в силу [1, теорема 1.4]. Следовательно, $B = \text{Soc } G$. Тогда в силу [2, теорема 7.1] кольцо $E(G)$, а значит, и $E(G)$ состоит из 2×2 треугольных матриц. Так как единственными автоморфизмами групп A и B являются $\pm \varepsilon$, то всякий автоморфизм группы G имеет вид $\begin{pmatrix} \pm \varepsilon & \varphi \\ 0 & \pm \varepsilon \end{pmatrix}$, где $\varphi \in N(E(G))$.

Покажем, что для любого $\varphi \in N(E(G))$ имеем $\text{Ker } \varphi = B$ или $\text{Ker } \varphi = G$. Действительно, если $B = P_1$, то $G = P_2$ и $\varphi: P_2 \rightarrow P_1$ [1, лемма 1.12]. То есть $\text{Ker } \varphi \geq P_1$. Легко видеть, что если $\text{Ker } \varphi > P_1$, то $\text{Ker } \varphi = G$. Таким образом, каждый автоморфизм имеет вид $\pm \varepsilon + \varphi$, где $\varphi \in N(E(G))$ и $\text{Ker } \varphi = B$ либо $\text{Ker } \varphi = G$. То есть всякая Γ -максимальная подгруппа имеет вид $\text{Ker } \varphi$ для некоторого $\varphi \in N(E(G))$. Следовательно,

единственными Γ -максимальными подгруппами являются $B = P_1$ и $G = P_2$. По определению G — fps-группа.

Предложение 9. Существуют сильно неразложимые fps-группы.

Доказательство. Пусть $I_1 = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, $I_2 = \{q_1, \dots, q_n, \dots\}$ — бесконечные непересекающиеся множества простых чисел, причем для всех $p_i \in I_1$ имеем $p_i \equiv 1 \pmod{4}$. Пусть A и B — группы ранга 1 и типа τ_1 такого, что $h_{q_i}(a) = h_{q_i}(b) = 1$ ($a \in A$, $b \in B$) для всех $q_i \in I_2$. На всех остальных местах в характеристике типа τ_1 стоят нули. Пусть далее $C = \langle A, B, p_i^{-1}(a + \kappa_i b), \forall p_i \in I_1 \rangle$, где $\kappa_i^2 \equiv -1 \pmod{p_i}$; D — группа из [4, с. 319, пример 1]. То есть $D = \langle \alpha, \beta, p_i^{-1}(a + \kappa_i \beta), \forall p_i \in I_1 \rangle$, где α и β — элементы нулевого типа. Теперь строим группу $G = \langle C, D, q_i^{-1}(a + q_i^{-1}a), q_i^{-1}(\beta + q_i^{-1}b), \forall q_i \in I_2 \rangle$. Группы C и D сильно неразложимы и имеют группы автоморфизмов, изоморфные $Z(4)$. Покажем теперь, что C сервантна в G . Пусть $x \notin C$, но $mx \in C$ для некоторого целого m . Тогда $x = c + d + \sum \kappa_i x_i + \sum s_i y_i$, где $c \in C$, $d \in D$, $x_i = q_i^{-1}(a + q_i^{-1}a)$, $y_i = q_i^{-1}(\beta + q_i^{-1}b)$, κ_i, s_i — некоторые целые числа. Отсюда $mx = mc + md + m \sum \kappa_j x_j + m \sum s_j y_j \in C$. Перейдем к делимой оболочке группы G . Имеем $m^* = m(c + \sum \kappa_j q_j^{-1}a + \sum s_j q_j^{-1}b) + m(d + \sum \kappa_j q_j^{-2}a + \sum s_j q_j^{-2}\beta) \in C$. Значит, $d + \sum \kappa_j q_j^{-2}a + \sum s_j q_j^{-2}\beta = 0$. Или $\sum \kappa_j q_j^{-2}a + \sum s_j q_j^{-2}\beta \in D$. Следовательно, $\kappa_j : q_i, s_j : q_j$. Таким образом, $\sum \kappa_j q_j^{-1}a + \sum s_j q_j^{-1}b \in C$, $x = c + \sum \kappa_j q_j^{-1}a + \sum s_j q_j^{-1}b \in C$. Из [4, с. 319, пример 1] следует, что подгруппа C имеет автоморфизм φ порядка 4, действующий следующим образом: $\varphi(a) = -b$, $\varphi(b) = a$. В свою очередь подгруппа D имеет автоморфизм ψ , действующий следующим образом: $\psi(\alpha) = -\beta$, $\psi(\beta) = \alpha$. Покажем, что существует автоморфизм $\mu \in \text{Aut } G$ такой, что $\mu/C = \varphi$, $\mu/D = \psi$. Отображение μ корректно, так как $\mu(q_i^{-1}(a + q_i^{-1}a)) = -q_i^{-1}(\beta + q_i^{-1}b)$, а $\mu(q_i^{-1}(\beta + q_i^{-1}b)) = (q_i^{-1}(a + q_i^{-1}a))$. То, что μ — эндоморфизм, проверяется непосредственно. Нетрудно показать, что C вполне характеристична в G . Покажем, что C — минимальная pfi-подгруппа группы G . Предположим противное — существует $C' < C$, которая является минимальной pfi-

подгруппой группы G . Так как $r(C) = 2$, то $r(C') = 1$ и $C' = \langle ka + mb \rangle_*$ для некоторых целых чисел k и m . Имеем $\mu(ka + mb) = -kb + ma \in C'$. Отсюда $k(ka + mb) + m(-kb + ma) = (k^2 + m^2)a \in C'$. Аналогично имеем $(k^2 - m^2)b \in C'$, что невозможно. Следовательно, C — минимальная рfi-подгруппа группы G . Заметим, что $G/C \cong C$, так как $h_p(a + C) = \begin{cases} 0, & p \notin I_2 \\ 1, & p \in I_2 \end{cases}$.

Следовательно, существует эндоморфизм $\gamma \in E(G)$ с ядром C . Легко видеть, что $\gamma \in N(E(G))$, так как $\gamma^2 = 0$. Таким образом, $C = \text{Soc } G$ [1, предложение 1,2]. Аналогично доказательству того, что C — минимальная рfi-подгруппа группы G , можно показать, что G — минимальная по модулю C рfi-подгруппа, то есть $G = P_2$. Если теперь ψ — произвольный нильпотентный эндоморфизм и $\text{Ker } \psi = F$, то $F \geq C$. Если $F > C$, то $G/F \cong G/C/F/C$. Очевидно, $G/F \cong F' \leq C$, $F/C \cong E' \leq C$ и $G/C \cong C$. Отсюда следует, что C имеет эндоморфизм с ненулевым ядром, что невозможно, так как C сильно неразложима. Таким образом, ядра всех нильпотентных эндоморфизмов равны C либо G .

Покажем теперь, что G сильно неразложима. Нам понадобится аналог леммы 9.3 [3], который может быть легко проверен. Если $A \approx B \oplus C$ и G — вполне характеристическая подгруппа группы A , то $G \approx (G \cap B) \oplus (G \cap C)$. Если G не является сильно неразложимой, то $G \approx M \oplus N$ и $C \approx (C \cap M) \oplus (C \cap N)$. Так как C сильно неразложима, то $C \leq M$ либо $C \leq N$. Пусть для определенности $C \leq M$. Предположим, что это включение строгое. Так как $G \leq P_2$, то существует нильпотентный эндоморфизм $\eta \in N(E(G))$ такой, что $\eta: G \rightarrow M$. Тогда в силу [1, лемма 1.5] отображение ψ , действующее как нулевое на M и как $r\eta$ на N для некоторого целого r является эндоморфизмом группы G . Очевидно, $\psi \in N(E(G))$, но $C \neq \text{Ker } \psi$, что противоречит предыдущим рассуждениям. Таким образом, $C \approx M$. Следовательно, $D \leq N$, а так как D и N сервантны в G и имеют один и тот же ранг, то $D \approx N$. По построению $G/D \oplus C$ — бесконечная периодическая группа, тогда как $G/M \oplus N$ — конечная группа. Следовательно, G — сильно неразложима. А так как ядра ее нильпотентных эндоморфизмов совпадают

с обобщенными псевдоцоколями, то G — fps -группа.

Следствие 10. Построенная выше группа удовлетворяет условию 1 теоремы 5.

Доказательство. Легко видеть, что C — минимальная rfi -подгруппа группы G . Так как $G = P_2$ и $C = \text{Soc } G$, а также в силу леммы 4 G — минимальная по модулю C rfi -подгруппа.

Предложение 11. Существует сильно неразложимая fps -группа, удовлетворяющая условию 2 теоремы 5.

Доказательство. Пусть I_1, I_2 — непересекающиеся бесконечные множества простых чисел; A — группа ранга 1, в характеристике χ_1 типа которой на местах простых чисел из $I_1 \cup I_2$ стоят единицы, на остальных — нули; B — группа ранга 1, в характеристике χ_2 типа которой на местах простых чисел из I_2 стоят нули, на остальных — единицы. Пусть I_3 — бесконечное множество простых чисел и $I_3 \cap I_1 = I_3 \cap I_2 = \emptyset$. Выберем $a \in A, b \in B$ такие элементы, что $\chi(a) = \chi_1, \chi(b) = \chi_2$. Построим группу $C = \langle A, B, p_i^{-1}(a + p_i^{-1}b), \forall p_i \in I_3 \rangle$. Аналогично доказательству предыдущих утверждений можно показать, что A и B — минимальные rfi -подгруппы группы C и $C = \text{Soc } C$ — сильно неразложимая группа. Пусть теперь D — группа ранга 1 и нулевого типа; $d \in D$ — элемент с нулевой характеристикой. Обозначим через $G = \langle D, C, q_i^{-1}(d + q_i^{-1}a), q_i^{-1}(d + q_i^{-1}b), \forall q_i \in I_1 \rangle$. Легко видеть, что G сильно неразложима и $C' = \text{Soc } G$. Эндоморфизмы $\varphi_1(d) = a, \varphi_1(c) = 0$ и $\varphi_2(d) = b, \varphi_2(c) = 0$ являются искомыми эндоморфизмами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения. — Мат. сб., 1974, т. 95, № 2, с. 214—228.
2. Reid J. D. On the ring of quasi-endomorphisms of torsion-free groups. — Topics in Abelian groups. Chicago, 1963, p. 51—68.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М., 1974, т. 1. — 335 с.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М., 1977, т. 2. — 416 с.
5. Кожухов С. Ф. Группы автоморфизмов регулярно полных абелевых групп без кручения. — Томск, 1977. — 29 с. Деп. в ВИНТИ, 1977, № 2790-77.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А. Р. ЧЕХЛОВ

В § 1 данной работы изучаются абелевы группы, в которых замкнутые в Z -адической топологии сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми (здесь такие группы называются CS -группами). Известно, что периодически полные и алгебраически компактные группы являются CS -группами. Рассматриваются также группы, выделяющиеся прямыми слагаемыми в каждой группе, содержащей их в качестве замкнутых сервантных подгрупп. Показывается, что это в точности алгебраически компактные группы.

В § 2 исследуются абелевы группы, в которых сумма двух прямых слагаемых снова есть прямое слагаемое (назовем такие группы π -группами), и абелевы группы, в которых прямые слагаемые образуют подрешетку в решетке всех подгрупп данной группы (назовем такие группы π - σ -группами). Заметим, что задача описания групп, в которых пересечение прямых слагаемых снова является прямым слагаемым, сформулирована в [1] в виде проблемы (проблема 9). Такие группы (называемые σ -группами) изучались в работе [3].

Все рассматриваемые в работе группы — абелевы. Терминология и обозначения, если специально не оговорено, будут соответствовать [1, 2].

Через ω_0 обозначим счетное кардинальное число.

§ 1. Абелевы группы, в которых замкнутые в Z -адической топологии сервантные подгруппы являются прямыми слагаемыми

Рассмотрим сначала примарные CS -группы.

Предложение 1.1. p -группа A является CS -группой тогда и только тогда, когда $p^n A$ есть CS -группа.

Доказательство. Пусть H — замкнутая сервантная подгруппа группы A . Группы A и H представим в виде $A = B \oplus G$ и $H = B' \oplus G'$, где B и B' — $p^n A$ -и $p^n H$ — высокие подгруппы в A и в H соответственно такие, что $B' \subseteq B$. Имеем $B = B' \oplus B''$, поскольку $p^n H$ — замкнутая сервантная подгруппа в $p^n A$, $p^n A = p^n G = p^n H \oplus E$ для некоторых подгрупп $B'' \subseteq B$ и $E \subseteq p^n A$. Пусть теперь $G = H' \oplus E'$, где $p^n H' = p^n H$ и $p^n E' = E$ (такое разложение группы G существует в силу теоремы 2.1 из [4]). Тогда $A = B'' \oplus E' \oplus (H' \oplus B')$ и $(H' \oplus B') [p] = H[p]$. Отсюда вытекает, что H — прямое слагаемое в A [2, с. 12].

Обратно, пусть H — замкнутая сервантная подгруппа группы $p^n A$ и пусть H' — сервантная подгруппа группы A со свойством $p^n H' = H$ (такая подгруппа H' существует в силу теоремы 2.2 из [4]). Ясно, что H' — замкнутая подгруппа группы A . Следовательно, $A = H' \oplus G$ для некоторой подгруппы $G \subset A$ и, таким образом, $p^n A = H \oplus p^n G$.

Напомним, что финальным рангом p -группы A называется минимум кардинальных чисел $r(p^n A)$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\text{fin } r(A) = \inf_n r(p^n A).$$

Далее, в теореме 1.2 и в предложении 1.3 предполагаем справедливой гипотезу континуума.

Теорема 1.2. Пусть A — прямая сумма циклических p -групп. A является CS-группой тогда и только тогда, когда $\text{fin } r(A) \leq \omega_0$.

Доказательство. Из условия вытекает, что если H — замкнутая сервантная подгруппа группы A , то A/H — прямая сумма циклических групп [1, с. 179]. Следовательно, H — прямое слагаемое в A .

Обратно, допустим, что в A существуют прямые слагаемые A_i такие, что $A_i \cong \bigoplus Z(p^{n_i})A$, $|A_i| > \omega_0$ и $n_1 < n_2 < \dots$ ($i = 1, 2, \dots$). Тогда в $A' = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ существует замкнутая сервантная подгруппа H такая, что A'/H не является прямой суммой циклических групп [1, с. 149]. Отсюда A' и, следовательно, A не являются CS-группами. Таким образом, $\text{fin } r(A) \leq \omega_0$.

Приведем теперь следующий результат, уточняющий строение класса примарных CS-групп.

Предложение 1.3. Пусть A — CS- p -группа, не имеющая неограниченных периодически полных пря-

мых слагаемых. Тогда финальный ранг ее базисной подгруппы $\leq \omega_0$.

Доказательство. Если финальный ранг базисной подгруппы B группы A несчетен, то в группе B существует сервантная подгруппа H такая, что B/H — неограниченная периодически полная группа. Тогда $A/H = B/H \oplus G/H$ для некоторой подгруппы $G/H \subset A/H$. Отсюда $A = G \oplus C$ и C — такое прямое слагаемое, что $C \cong B/H$. Противоречие. Следовательно, $\text{fin } r(B) \leq \omega_0$.

Примеры квазиполных групп [2, § 74] показывают, что существуют примарные группы со счетной базисной подгруппой, не являющиеся CS -группами.

Лемма 1.4. Пусть $A = B \oplus G$ — прямое разложение группы A без элементов бесконечной высоты с проекциями π и θ и пусть H — подгруппа группы A такая, что $H \cap B = H \cap G = 0$. Тогда если πH — замкнутая, а θH — сервантная подгруппа в группах B и G соответственно, то H — замкнутая подгруппа в A .

Доказательство. Из условий леммы вытекает, что существует изоморфизм $\varphi: \pi H \rightarrow \theta H$ такой, что $\varphi(\pi a) = \theta a$ для каждого элемента $a \in H$. Предположим, что последовательность $a_n \in H$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится к пределу $a \in A$. Тогда πa_n ($n = 1, 2, \dots$) является последовательностью Коши в группе πH . В силу замкнутости подгруппы πH элемент $\pi a \in \pi H$. Тогда $\theta a \in \theta H$, так как в противном случае последовательность $\varphi(\pi a_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) не имела бы предела в группе θH . Таким образом, $a \in H$, т. е. H — замкнутая подгруппа группы A .

Заметим, что сервантно полная p -группа A является CS -группой тогда и только тогда, когда каждый ее замкнутый подцоколь служит носителем прямого слагаемого группы A .

Оказывается, что прямая сумма двух CS - p -групп не обязана быть CS -группой.

Предложение 1.5. Если A — сервантно полная CS - p -группа, не имеющая счетных неограниченных прямых слагаемых, а C — неограниченная прямая сумма циклических p -групп, то $A \oplus C$ не является CS -группой.

Доказательство. Заметим, что $G = A \oplus C$ — сервантно полная группа [2, с. 48]. Пусть теперь S — замкнутый подцоколь группы G , и пусть $S \cap A = S \cap C = 0$ и $|C| = \omega_0$. Тогда $|S| \leq \omega_0$. Предположим, что S служит носителем прямого слагаемого H группы G , $G = H \oplus B$

для некоторой подгруппы $B \subset G$. Пусть $A[p] \cap B$ — носитель прямого слагаемого B' группы B ($B = B' \oplus B''$). Имеем $A[p] = B'[p] \oplus (B'' \oplus H) \cap A[p]$. Откуда $|(B'' \oplus H) \cap A[p]| \leq |H| \leq \omega_0$. Следовательно, $(B'' \oplus H) \cap A[p]$ — дискретный подцоколь группы $A[p]$, т. е. существует натуральное число n такое, что $p^n A[p] \subseteq B'$. Таким образом, проекции группы $S \oplus p^n A[p]$ на S и на $p^n A[p]$ не уменьшают высоты элементов.

Пусть теперь $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$ и $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle a_n \rangle$ — прямые слагаемые в C и в некоторой базисной подгруппе B группы A соответственно такие, что $\langle x_n \rangle \cong Z(p^{\kappa_n})$, $\langle a_n \rangle \cong Z(p^{m_n})$ ($n = 1, 2, \dots$) и $m_1 < \kappa_1 < m_2 < \kappa_2 < \dots$.

По лемме 1.4 сервантная подгруппа $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle a_n + p^{\kappa_n - m_n} x_n \rangle$ является замкнутой в G . Однако в группе $p^m A[p] \oplus H[p]$ проекция на $H[p]$ уменьшает высоты элементов для любого натурального m . Следовательно, H не является прямым слагаемым в G . Предложение доказано.

Поскольку неограниченные периодически полные p -группы не имеют счетных неограниченных прямых слагаемых, то для прямых сумм периодически полных групп получается более интересная.

Теорема 1.6. Прямая сумма A периодически полных p -групп, отличная от прямой суммы циклических групп, является CS -группой тогда и только тогда, когда A — периодически полная группа.

Рассмотрим теперь CS -группы без кручения.

Если G — группа без кручения ранга 1, то $\tau(G)$ будет обозначать ее тип. Через τ^+ обозначим тип аддитивной группы Q всех рациональных чисел.

Лемма 1.7. Пусть $A = B \oplus G$, где B и G — редуцированные группы без кручения ранга 1 такие, что $\tau(B) \neq \tau(G)$. Группа A является CS -группой тогда и только тогда, когда $\tau(B) \cup \tau(G) = \tau^+$.

Доказательство. Пусть H — собственная сервантная подгруппа группы A . Тогда A/H — группа без кручения ранга 1, тип которой есть либо $\tau(B)$, либо $\tau(G) < \tau(B) \cup \tau(G)$, либо $\tau(B) \cup \tau(G)$; причем первые две возможности соответствуют случаю, когда H есть либо G , либо B . Значит, если $\tau(B) \cup \tau(G) \neq \tau^+$, то каждая сервантная подгруппа группы будет замкнутой в A . Так как A со-

держит сервантные подгруппы, не выделяющиеся прямыми слагаемыми в A [2, с. 139], то A не является CS -группой. Таким образом, $\tau(B) \cup \tau(G) = \tau^+$.

Обратно, пусть $\tau(B) \cup \tau(G) = \tau^+$ и $H \neq B, G$. Тогда A/H — делимая группа. Таким образом, если H — замкнутая сервантная подгруппа в A , то $H = B$ либо $H = G$. Лемма доказана.

Теорема 1.8. Пусть $A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau$ — редуцированная вполне разложимая группа без кручения, где A_τ — однородные вполне разложимые группы типа τ (τ пробегает некоторое множество T различных типов). A является CS -группой тогда и только тогда, когда A_τ есть группы конечного ранга, причем $\tau_1 \cup \tau_2 = \tau^+$ при $\tau_1 \neq \tau_2$ ($\tau_1, \tau_2 \in T$).

Доказательство. Если A_τ — группа бесконечного ранга, то существует замкнутая сервантная подгруппа H группы A такая, что A/H не является вполне разложимой группой. Следовательно, A_τ должны быть группами конечного ранга. В силу леммы 1.7 группа A имеет вид, указанный в теореме.

Обратно, пусть H — замкнутая сервантная подгруппа группы A . Покажем, что $H = \bigoplus_{\tau \in T} (A_\tau \cap H)$. Если $x = a_1 + \dots + a_n \in H$, где $a_m \in A_{\tau_m}$ ($m = 1, \dots, n$), то $\tau(a_m + H) = \tau(-\sum_{k \neq m} a_k + H) = \tau^+$. Следовательно, $\langle a_m + H \rangle_*$ — делимая группа, значит, $a_m \in H$ ($m = 1, \dots, n$). Так как $A_\tau \cap H$ — прямые слагаемые в A_τ [2, с. 137], то H — прямое слагаемое группы A .

Теорема 1.9. Редуцированная векторная группа $A = \prod_{\tau \in T} A_\tau$, где A_τ — прямые произведения групп ранга I и типа τ (τ пробегает некоторое множество T различных типов), является CS -группой тогда и только тогда, когда A_τ — группы конечного ранга, причем $\tau_1 \cup \tau_2 = \tau^+$ при $\tau_1 \neq \tau_2$ ($\tau_1, \tau_2 \in T$).

Доказательство. Заметим, что если $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n — группы ранга I типа $\tau \neq \tau^+$, то $A / \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ — алгебраически компактная группа [1, с. 207], не являющаяся делимой. Следовательно, замыкание $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n)^-$ подгруп-

пы $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ является замкнутой сервантной подгруппой в A , не являющейся прямым слагаемым. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Рассмотрим группы A , удовлетворяющие условию: для каждой группы B такой, что $B^1=0$, следует

$$\text{Ext}^1(B, A) = \text{Pext}(B, A) = 0.$$

Другими словами, группы A выделяются прямыми слагаемыми в каждой группе, содержащей их в качестве замкнутых в Z -адической топологии сервантных подгрупп.

Следующая теорема показывает, что такие группы A — это в точности алгебраически компактные группы.

Теорема 1.10. Группа A выделяется прямым слагаемым в каждой группе, содержащей ее в качестве замкнутой в Z -адической топологии сервантной подгруппы тогда и только тогда, когда A — алгебраически компактная группа.

Доказательство. Пусть T — периодическая часть группы A и пусть $B \subseteq T$ — периодическая группа такая, что $B^1 = 0$. Из сервантно точной последовательности

$$0 \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow A/T \rightarrow 0$$

получаем точную последовательность

$$0 = \text{Hom}(B, A/T) \rightarrow \text{Pext}(B, T) \rightarrow \text{Pext}(B, A) = 0.$$

Следовательно, $\text{Pext}(B, T) = 0$. Отсюда вытекает, что T — периодически полна [2, с. 27]. Для завершения доказательства достаточно показать, что A — копериодическая группа [5, теорема 1].

Предположим, напротив, что $\text{Pext}(Q, A) \neq 0$. Выберем такое кардинальное число n , что $|A| < n$ и $n^{\omega_0} = 2^n (= m)$; такое n существует, например, можно, взять $n = |A| + 2^{|A|} + 2^{2^{|A|}} + \dots$. Пусть $B = \bigoplus_{p \in \Pi} \bigoplus_n Z(p)$ и $B^* = \prod_{p \in \Pi} \bigoplus_n Z(p)$, где Π — множество всех простых чисел.

Из сервантно точной последовательности

$$0 \rightarrow B \rightarrow B^* \rightarrow B^*/B \rightarrow 0$$

получаем точную последовательность

$$\text{Hom}(B, A) \rightarrow \text{Pext}(B^*/B, A) \rightarrow \text{Pext}(B^*, A) = 0.$$

Здесь

$$|\operatorname{Hom}(B, A)| = \prod_{p \in \Pi} |A[p]| \leq |A|^n = 2^n,$$

в то время как $B^*/B = \bigoplus_m Q$ дает

$$|\operatorname{Pext}(B^*/B, A)| = \prod_m |\operatorname{Pext}(Q, A)| \geq 2^m.$$

Из последней точной последовательности имеем $2^n \geq 2^m$, а это противоречит тому, что $m = 2^n < 2^m$.

Группу G назовем замкнуто сервантно инъективной, если каждая диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \swarrow \psi & & \\ & & G & & & & \end{array}$$

может быть дополнена до коммутативной, где $\operatorname{Im} \alpha$ — замкнутая сервантная подгруппа в B .

Предыдущая теорема утверждает, что класс замкнуто сервантно инъективных групп совпадает с классом алгебраически компактных групп.

Двойственным образом можно определить понятие замкнуто сервантно проективных групп.

Теорема 1.11. Группа G замкнуто сервантно проективна тогда и только тогда, когда $\hat{G}/G^1$ — прямая сумма циклических групп.

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость вытекает из того факта, что для каждой группы G существует прямая сумма циклических групп B и такой гомоморфизм $\varphi: B \rightarrow G$, что $\operatorname{Ker} \varphi$ — сервантная подгруппа группы B [1, с. 149].

§ 2. Абелевы группы, в которых сумма прямых слагаемых есть прямое слагаемое

Будем говорить, что группа не имеет элементарных прямых слагаемых, если для каждого простого числа p она не содержит прямых слагаемых, изоморфных $Z(p)$.

Лемма 2.1. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — прямое разложение группы A в прямую сумму своих вполне характеристических подгрупп. Группа A является π -группой (σ -группой) тогда и только тогда, когда A_i есть π -группа (σ -группа) для каждого $i \in I$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $A = B_1 \oplus G_1 = B_2 \oplus G_2$ — произвольные разложения группы A . Тогда $A = \bigoplus_{i \in I} (A_i \cap B_n) \oplus \bigoplus_{i \in I} (A_i \cap G_n)$ ($n=1, 2$). Отсюда $B_1 + B_2 = \bigoplus_{i \in I} ((A_i \cap B_1) + (A_i \cap B_2))$. По условию $(A_i \cap B_1) + (A_i \cap B_2)$ — прямое слагаемое в A_i для каждого $i \in I$. Следовательно, $B_1 + B_2$ — прямое слагаемое группы A . Утверждение для σ -групп доказано в [3, лемма 1].

В качестве непосредственного следствия получаем

Предложение 2.2. Периодическая группа является π -группой (σ -группой) тогда и только тогда, когда каждая ее p -компонента есть π -группа (σ -группа).

Для примарных π -групп справедлив следующий результат.

Теорема 2.3. Примарная группа является π -группой тогда и только тогда, когда она есть либо циклическая, либо элементарная, либо делимая группа.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Если A не является ни циклической, ни элементарной, ни делимой, то найдется элемент $a \in A$ такой, что $pa \neq 0$ и $A = \langle a \rangle \oplus A'$ для некоторой подгруппы $0 \neq A' \subset A$. Если A' — элементарна, то подгруппа $\langle a_1 + p^na \rangle \oplus \langle a_1 \rangle$ не является прямым слагаемым в A , хотя $\langle a_1 + p^na \rangle$ и $\langle a_1 \rangle$ — прямые слагаемые, где $a_1 \in A'$ и $p^na \in \langle a \rangle [p]$. Пусть теперь $0 \neq a_1 \in pA' [p]$. Тогда подгруппа $G = \langle a + a_1 \rangle + \langle a \rangle$ не является прямым слагаемым в A , так как $a_1 \notin G \cap pA$.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.4. Пусть $A = B \oplus G$ и $B/E \cong D \subseteq G$ для некоторой подгруппы $E \subseteq B$. Тогда существует такая подгруппа $R \subset A$, что $A = R \oplus G$ и $B + R = B \oplus D$.

Доказательство. В A существует подпрямая сумма R групп B и D с ядрами E и 0 , которая и удовлетворяет требованиям леммы.

Предложение 2.5. Периодическая подгруппа смешанной π -группы A является π -группой, а ее p -примарные компоненты A_p есть прямые слагаемые группы A . Кроме того, если $pA_p \neq 0$, то $A/A_p = p(A/A_p)$.

Доказательство. Каждое неразложимое прямое слагаемое периодической подгруппы $T(A)$ группы A является прямым слагаемым и в A . По условию сумма двух

таких прямых слагаемых — прямое слагаемое в A , а поэтому и в $T(A)$. Из доказательства теоремы 2.3 вытекает, что $T(A)$ — π -группа. Оставшееся утверждение следует из леммы 2.4.

Предложение 2.6. Пусть A — редуцированная π -группа и пусть $A = B \oplus G$. Тогда если $\varphi: G \rightarrow B$ — гомоморфизм, то:

- 1) $E = \varphi G$ — прямое слагаемое группы B ;
- 2) каждый эндоморфный образ группы E есть прямое слагаемое в E ;
- 3) p -компоненты E_p группы E являются элементарными группами, $E/T(E)$ — делимая группа и

$$\bigoplus_p E_p \subseteq E \subseteq \prod_p E_p.$$

Доказательство. Утверждение 1) следует из леммы 2.4. Утверждение 2) вытекает из того, что каждый эндоморфный образ группы E можно рассматривать как образ некоторого гомоморфизма $G \rightarrow E \subseteq B$.

Докажем теперь утверждение 3). Поскольку pE_p есть эндоморфный образ группы E для каждого простого p , то в силу редуцированности группы E вытекает $pE_p = 0$, т. е. E_p — элементарные группы. Пусть $E = E_p \oplus E'$. Так как $pE = pE'$ является эндоморфным образом группы E , то pE' — также прямое слагаемое в E . Отсюда $pE' = E'$, значит, $E/T(E)$ — делимая группа.

Наконец, из существования разложения $E = E_p \oplus E'$ вытекает, что для всех p существуют эпиморфизмы $E \rightarrow E_p$. Они индуцируют гомоморфизм $E \rightarrow \prod_p E_p$. Поскольку $\bigcap_p pE = 0$, то $E \subseteq \prod_p E_p$.

К качестве следствия имеем

Предложение 2.7. Пусть A — редуцированная группа, не имеющая элементарных прямых слагаемых. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A — π -группа;
- 2) каждое прямое слагаемое группы A есть вполне характеристическая подгруппа.

Доказательство. Из предложения 2.6 вытекает, что условие 1) влечет за собой 2). Пусть теперь выполняется условие 2) и пусть $A = B \oplus G$. Если N — прямое слагаемое в A , то $N = B \cap N \oplus G \cap N$. Отсюда следует, что $B + N = B \oplus G \cap N$ — прямое слагаемое в A , т. е. получаем условие 1).

Элемент a кольца R назовем регулярным, если $a\beta a = a$ для некоторого $\beta \in R$, и регулярным слева (справа), если $a = \beta a^2$ ($a = a^2 \beta$). Кольцо R назовем подкоммутативным, если для любых элементов $a, \beta \in R$ существует такой элемент $\gamma \in R$, что $a\gamma = \beta a$. Через $E(A)$ обозначим кольцо эндоморфизмов группы A .

Предложение 2.8. 1) Группа A является π -группой (σ -группой) тогда и только тогда, когда для любых двух идемпотентов $\alpha, \beta \in E(A)$ $\text{ima}\beta$ ($\text{кега}\beta$) — прямое слагаемое в A ;

2) группа A является π - σ -группой тогда и только тогда, когда для любых идемпотентов $\alpha, \beta \in E(A)$ элемент $\alpha\beta$ — регулярный в $E(A)$.

Доказательство. Пусть $A = B \oplus G = N \oplus F$, где $\alpha: A \rightarrow B$ и $\beta: A \rightarrow N$. Имеем $G + N = G \oplus B \cap (G + N)$. Очевидно, что $B \cap (G + N) = \text{ima}\beta$ и $G \cap N \oplus F = \text{кега}\beta$. Это и доказывает утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) заметим, что для каждого $\alpha \in E(A)$ ima и кега являются прямыми слагаемыми группы A тогда и только тогда, когда α — регулярный элемент в $E(A)$ [2, с. 282].

Следствие 2.9. Группа A является π - σ -группой, если для ее кольца эндоморфизмов $E(A)$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $E(A)$ коммутативно;
- 2) $E(A)$ подкоммутативно;
- 3) $E(A)$ регулярно;
- 4) $E(A)$ регулярно слева или справа.

В связи с предложением 2.8 интересно отметить два следующих результата.

Предложение 2.10. Группа A является π - σ -группой тогда и только тогда, когда множество регулярных элементов ее кольца эндоморфизмов $E(A)$ образует полугруппу относительно умножения кольца $E(A)$.

Доказательство. Вытекает из предложения 2.8 и из того факта, что если в произвольном кольце R произведение идемпотентов является регулярным элементом, то множество его регулярных элементов образует полугруппу относительно умножения кольца R .

Предложение 2.11. Произведение любых двух идемпотентов кольца $E(A)$ является идемпотентом тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое группы A есть вполне характеристическая подгруппа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = B \oplus G$ и $\varphi: G \rightarrow B$ — гомоморфизм. Тогда $A = B \oplus G'$, где $G' = \text{im } \gamma$ и $\gamma = (\alpha - \beta\varphi\alpha)$, $\alpha: A \rightarrow G$ и $\beta: A \rightarrow B$ — проекции [1, с. 61]. Если $\varphi g \neq 0$ для некоторого $g \in G$, то $\beta\gamma g = \beta(g - \varphi g) = -\varphi g \neq \beta\gamma(-\varphi g) = 0$. Отсюда $(\beta\gamma)^2 \neq \beta\gamma$. Противоречие. Следовательно, $\varphi = 0$.

Достаточность. Пусть $A = A_1 \oplus A_2 = A_3 \oplus A_4$ и $\alpha: A \rightarrow A_1$, $\beta: A \rightarrow A_3$ — проекции и пусть $a = a_3 + a_4$, $a_3 = a_1 + a_2$, где $a \in A$, $a_i \in A_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Из условия следует, что $a_1 \in A_3$. Имеем $(\alpha\beta)^2 a = \alpha\beta a a_3 = \alpha\beta a_1 = \alpha a_1 = a a_3 = \alpha\beta a$. Следовательно, $(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta$.

Если E_p — элементарные p -группы, то $\bigoplus_p E_p$ и $\prod_p E_p$ являются π - σ -группами. Но для произвольных сервантных подгрупп E группы $\prod_p E_p$ таких, что $\bigoplus_p E_p \subseteq E \subseteq \prod_p E_p$, это уже в общем случае несправедливо. Например, $\prod_p Z(p) \oplus \bigoplus_p Z(p)$ не будет π - σ -группой. Однако если E — сервантная подгруппа группы $\prod_p Z(p)$ такая, что $\bigoplus_p Z(p) \subseteq E$, то E является π - σ -группой. Чтобы доказать это, рассмотрим разложение $E = B \oplus G$. Каждая подгруппа $Z(p)$ содержится либо в группе B , либо в группе G . Отсюда вытекает, что B и G — вполне характеристические подгруппы группы E и, значит, E — π - σ -группа.

Пусть опять E — сервантная подгруппа группы $\prod_p E_p$, где E_p — элементарные p -группы и $\bigoplus_p E_p \subseteq E$. В связи со следствием 2.9 возникает вопрос, влечет ли свойство группы E быть π - σ -группой регулярность ее кольца эндоморфизмов? В [6] приведен пример сервантной подгруппы E группы $\prod_p Z(p)$ ($\bigoplus_p Z(p) \subset E$), кольцо эндоморфизмов которой не регулярно. Однако группа E , как было замечено раньше, является π - σ -группой.

Из леммы 2.1 и предложения 2.7 вытекает

Теорема 2.12. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i — редуцированные π -группы, не имеющие элементарных прямых слагаемых. Группа A является π -группой тогда и только тогда, когда $\text{Hom}(A_i, A_j) = 0$ для всех $i \neq j$ ($i, j \in I$).

Следствие 2.13. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$) — прямая сумма (прямое произведение) редуцированных групп без кручения A_i ранга 1. Группа A является π -

группой тогда и только тогда, когда типы прямых слагаемых A_i попарно несравнимы.

Доказательство. Необходимость вытекает из предыдущей теоремы. Достаточность следует из того факта, что в обоих случаях кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A коммутативно.

Следствие 2.14. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i — группы типа P^+ . Группа A является π -группой тогда и только тогда, когда простые числа, относящиеся к группам A_i , попарно различны.

Определение прямых сумм групп типа P^+ см. в [7].

Известно [1, с. 272], что редуцированную копериодическую группу A можно представить в виде $A = \prod_p A_p$, где A_p для каждого простого числа p есть копериодическая группа, являющаяся p -адическим модулем.

Теорема 2.15. Для редуцированной копериодической группы $A = \prod_p A_p$ справедливы следующие утверждения:

1) A — π -группа тогда и только тогда, когда для каждого простого p A_p изоморфна прямой сумме элементарной p -группы и группы целых p -адических чисел, либо A_p — циклическая p -группа;

2) A — σ -группа тогда и только тогда, когда для каждого p A_p либо элементарная, либо циклическая p -группа, либо копериодическая группа без кручения.

Доказательство. Примарные компоненты π -группы являются прямыми слагаемыми (предложение 2.5), причем дополнение к p -компоненте p -делимо, если последняя не элементарна. Ссылка на предложение 2.7 заканчивает доказательство необходимости 1). Для доказательства необходимости 2) достаточно провести аналогичные рассуждения, применяя теоремы 2, 3 и 4 из [3].

Достаточность. Пусть $A = B \oplus G = N \oplus E$. Тогда $A_p = A_p \cap B \oplus A_p \cap G = A_p \cap N \oplus A_p \cap E$. Имеем $B + E = \prod_p (A_p \cap B + A_p \cap E)$ и $B \cap E = \prod_p ((A_p \cap B) \cap (A_p \cap E))$.

Непосредственно проверяется, что если A_p изоморфна прямой сумме элементарной p -группы и группы целых p -адических чисел либо если A_p — циклическая p -группа, то $A_p \cap B + A_p \cap E$ — прямое слагаемое в A_p . Аналогично если A_p — элементарная либо циклическая p -группа, то $(A_p \cap B) \cap (A_p \cap E)$ — прямое слагаемое в

A_p . Если же A_p — копериодическая группа без кручения, то $(A_p \cap B) \cap (A_p \cap E)$ — замкнутая в Z -адической топологии сервантная подгруппа и, значит, есть прямое слагаемое в A_p (в силу алгебраически компактности A). Следовательно, $B+E$ для первого утверждения теоремы и $B \cap E$ — для второго являются прямыми слагаемыми соответствующих групп. Теорема доказана.

Непосредственно проверяется, что если каждое прямое слагаемое есть вполне характеристическая подгруппа, то данная группа будет σ -группой. Следовательно, многие π -группы являются и σ -группами. В частности, все редуцированные π -группы, не имеющие элементарных прямых слагаемых, будут σ -группами; это справедливо также для редуцированных периодических π -групп.

Для π - σ -групп теорему 2.12 можно несколько усилить следующим образом:

Теорема 2.16. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i — π - σ -группы такие, что для каждого простого числа p , если A_i содержит прямое слагаемое, изоморфное $Z(p)$, то $\bigoplus_{j \neq i} A_j$ такого прямого слагаемого не имеет. Группа A является π - σ -группой тогда и только тогда, когда $\text{Hom}(A_i, A_j) = 0$ для всех $i \neq j$ ($i, j \in I$).

Доказательство. В силу леммы 2.1 требуется доказать только необходимость. Примарные компоненты A_p σ -группы A являются прямыми слагаемыми в A ; $A/A_p = p(A/A_p)$, если $A_p \neq 0$ [3, теорема 4]. Ссылка на предложение 2.6 заканчивает доказательство.

Покажем, что, зная строение редуцированных π - и π - σ -групп, можно полностью описать π - и π - σ -группы в нередуцированном случае.

Лемма 2.17. Пусть $A = G \oplus R$, где G — ненулевая делимая группа без кручения и R — группа, не имеющая делимых подгрупп без кручения. Если в R существует элемент x такой, что $O(x) = \infty$ и $h_p(x) = 0$ для некоторого простого числа p , то A не является π -группой.

Доказательство. Пусть B есть $\langle x \rangle \oplus$ высокая подгруппа в R и пусть $\langle x+g \rangle \oplus B \subseteq R'$, где $0 \neq g \in G$, и R' — некоторая G -высокая подгруппа в A . Имеем $g \in R+R'$. Предположим, что $g = p(y+y') = (-x) + (x+g)$, где $y \in R$ и $y' \in R'$. Тогда $0 \neq py+x = (x+g) - py' \in R \cap R'$. Если n — натуральное число такое, что $n(x+g-py') \in \langle x \rangle \oplus B$, то $n(x+g) - npy' =$

$=mx+b \in R \cap R'$ для некоторого целого числа m и элемента $b \in B$. Отсюда $mx \in R'$ и, следовательно, $0 \neq mg \in R' \cap G$. Противоречие. Лемма доказана.

Теорема 2.18. Пусть $A = G \oplus B$, где G — ненулевая делимая группа без кручения, а B не имеет делимых подгрупп без кручения. Для группы A справедливы следующие утверждения:

1) A — π -группа тогда и только тогда, когда B — периодическая π -группа;

2) A — π - σ -группа тогда и только тогда, когда B — редуцированная периодическая π - σ -группа.

Доказательство. Необходимость первого утверждения следует из леммы 2.17, а второго — дополнительно из теоремы 4 работы [3].

Достаточность. Если $B = E \oplus R$, где E — делимая часть группы B , то из описания периодических π -групп (теорема 2.3) следует, что $G \oplus E$ и R , а для второго утверждения G и B — вполне характеристические подгруппы исходных групп. Ссылка на лемму 2.1 заканчивает доказательство.

Теорема 2.19. Пусть $A = D \oplus R$, где D — ненулевая делимая периодическая группа, а R — редуцированная группа. Для группы A справедливы следующие утверждения:

1) A — π -группа тогда и только тогда, когда R — π -группа такая, что $R = pR$, если p -примарная компонента D_p группы D отлична от нуля;

2) A — π - σ -группа тогда и только тогда, когда $D \cong \bigoplus_{p \in \Pi'} Z(p^\infty)$ для некоторого подмножества Π' множества всех простых чисел Π , а R — периодическая π - σ -группа такая, что $R = pR$ для всех $p \in \Pi'$.

Доказательство. Заметим, что во втором утверждении D и R — вполне характеристические подгруппы группы A . Докажем достаточность первого утверждения. Пусть $A = B \oplus G = E \oplus N$. Тогда поскольку $(B+D)/D$ и $(E+D)/D$ — прямые слагаемые в $A/D \cong R$, то $A/D = (B+E+D)/D \oplus H/D$ для некоторой подгруппы $H/D \subset A/D$. Отсюда $A = (B+E+D) \oplus F$, где $F \subset H$. Из условия следует, что $D' = (B+E) \cap D$ — делимая подгруппа в D . Следовательно, D' — прямое слагаемое группы D . Пусть $D = D' \oplus D''$. Отсюда $A = (B+E) \oplus D'' \oplus F$, т. е. A — π -группа.

Рассмотрим теперь расщепляющийся случай.

Теорема 2.20. Пусть $A = T \oplus R$ — расщепляющаяся редуцированная группа, где T — периодическая часть группы A . Справедливы следующие утверждения:

1) A — π -группа тогда и только тогда, когда T и R — π -группы, причем для каждого простого p $pR = R$, если $pT_p \neq 0$;

2) A — π - σ -группа тогда и только тогда, когда T и R — π - σ -группы, причем для каждого простого p $pR = R$, если $T_p \neq 0$.

Доказательство. Необходимость первого утверждения следует из предложения 2.5, а второго — дополнительно из теоремы 4 работы [3].

Достаточность. Заметим, что во втором утверждении T и R — вполне характеристические подгруппы группы A . Докажем достаточность первого утверждения. Пусть $A = B \oplus G = E \oplus N$. Поскольку $(B+T)/T$ и $(E+T)/T$ — прямые слагаемые в A/T , то $A/T = (B+E+T)/T \oplus H/T$ для некоторой подгруппы $H/T \subset A/T$. Отсюда $A = (B+E+T) \oplus F$, где $F \subset H$. Легко проверяется, что периодическая часть $T(B+E)$ группы $B+E$ есть сервантная подгруппа в T . Тогда $T(B+E)$ — прямое слагаемое группы T , скажем $T = T(B+E) \oplus T'$. Таким образом, $A = (B+E) \oplus T' \oplus F$, т. е. A — π -группа.

Отметим следующий результат, вытекающий из доказательства предыдущей теоремы.

Теорема 2.21. Пусть $A = T \oplus R$, где T — элементарная периодическая группа, а R — редуцированная группа, не имеющая элементарных прямых слагаемых. Для группы A справедливы следующие утверждения:

1) A — π -группа тогда и только тогда, когда R — π -группа такая, что для каждого простого p $R_p = 0$, если $T_p \neq 0$;

2) A — π - σ -группа тогда и только тогда, когда R — π - σ -группа такая, что для каждого простого p $pR = R$, если $T_p \neq 0$.

Заметим, что в π - σ -группах сумма и пересечение бесконечного числа прямых слагаемых не обязаны быть прямыми слагаемыми. Приведем соответствующий пример. Для этого рассмотрим группы без кручения A_i ранга I типа τ_i ($i = 1, 2, \dots$), причем типы τ_i, τ_j несравнимы и $\tau_i \cup \tau_j$ — тип группы всех рациональных чисел Q при

$i \neq j$. Тогда $\prod_{i=1}^{\infty} A_i / \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ — делимая группа. Пусть $a = (\dots, a_i, \dots)$ — такой элемент, что $a_i \neq 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots$. Рассмотрим подгруппу A группы $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ такую, что $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$, $a \in A$ и $A/B \cong Q$. Из условия следует, что A_i — вполне характеристические подгруппы группы A . Таким образом, если $A = G \oplus H$, то каждая A_i содержится либо в группе G , либо в группе H . Следовательно, $B = G \cap B \oplus H \cap B$. Поскольку $A/B \cong Q$, то либо $G \cap B = G$, либо $H \cap B = H$. Более того, в силу выбора элемента a либо G , либо H — группа конечного ранга. Ясно, что G и H — вполне характеристические подгруппы группы A . Следовательно, A — π - σ -группа. Однако сумма бесконечного числа прямых слагаемых A_i не является прямым слагаемым в A . Обозначим теперь через A'_i прямое дополнение к A_i в группе A (оно единственное) и пусть $A' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A'_{2i}$. Ясно, что A' не является прямым слагаемым в A .

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974, т. 1. — 335 с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1977, т. 2. — 416 с.
3. Камалов Ф. Ф. Пересечение прямых слагаемых абелевых групп. — Изв. высш. учеб. заведений. Сер. Математика, 1977, № 5, с. 45—56.
4. Cutler D. O. Quasi-isomorphism for infinite abelian p -groups. — Pacific J. Math., 1966, v. 16, № 1, p. 25—45.
5. Rangaswamy K. M. A note on Algebraic Compact Groups. — Bull. Acad. Polon. Sci., 1964, 12, p. 369—371.
6. Rangaswamy K. M. Abelian groups with endomorphic images of special types. — J. Algebra, 1967, v. 6, p. 271—280.
7. Procházka L. Прямые суммы групп типа P^+ . — Comment. Math. Univ. Carolinae, 1967, v. 8, p. 85—114.

МОДУЛИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ НАД КОЛЬЦАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А. З. ШЛЯФЕР

В [1] установлены условия на конечную группу G , необходимые и достаточные для существования такой абелевой группы без кручения A , что $G \cong \text{Aut} A$ ($\text{Aut} A$ — группа всех автоморфизмов группы A). Таким образом, охарактеризован класс конечных групп автоморфизмов абелевых групп без кручения.

Естественно поставить такую задачу: для данного кольца охарактеризовать все конечные группы, которые являются группами автоморфизмов модулей без кручения над этим кольцом.

В данной работе эта задача решается в классе порядков полей алгебраических чисел. Кольца этого класса близки по своим свойствам к кольцу целых чисел, а их кольцевые и теоретико-числовые свойства достаточно изучены. Доказана такая

Теорема 1. Пусть G — конечная группа; R — порядок в конечном расширении F поля Q рациональных чисел; $R \neq Z$. R -модуль без кручения M такой, что $G \cong \text{Aut}_R M$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

(1) R — порядок поля $Q[i]$ гауссовых чисел и $G \cong \prod_m \text{PZ}(2) \times \prod_n \text{PZ}(4)$, где m, n — целые неотрицательные числа, не равные нулю одновременно, причем $n \neq 0$, если $R = Z[i]$ — максимальный порядок поля $Q[i]$;

(2) R — порядок поля $Q[\sqrt[m]{-3}]$ и $G \cong \prod_m \text{PZ}(2) \times \prod_n \text{PZ}(3)$, где m, n — целые неотрицательные числа, $m \neq 0$, причем $n \neq 0$, если R — максимальный порядок поля $Q[\sqrt{-3}]$;

(3) R — порядок мнимого квадратичного поля $Q[\sqrt{d}]$, где d — свободное от квадратов целое отрицательное число, не равное $-1, -3$, а $G \cong \text{PZ}(2)$, где m — целое положительное число. Здесь $Z(2), Z(3), Z(4)$ — циклические группы порядков 2, 3 и 4 соответственно.

В приведенной формулировке теоремы 1 можно считать M R -модулем, построенным на абелевой группе без кручения M^+ (см. лемму 2).

Доказательство необходимости условий теоремы 1 распадается на ряд шагов (см. предложения 3, 5, 8 и относящиеся к ним вспомогательные предложения), которые представляют и самостоятельный интерес. Здесь использованы также некоторые идеи работы [2].

Для доказательства достаточности условий теоремы 1 используется метод построения модулей с заданной группой автоморфизмов, опирающийся на одно следствие известной теоремы Корнера (см. следствие 10).

Введем некоторые соглашения. Под кольцом понимается ассоциативное кольцо с единицей. Подкольцо R кольца S всегда содержит единицу кольца S . Если подмножество R кольца S , не обязательно содержащее единицу кольца R , удовлетворяет остальным свойствам, входящим в определение подкольца, то R называется предподкольцом кольца S . Через $S(G)$, $S(R)$ и $U(R)$ обозначаем центр группы G , центр кольца R и группу обратимых элементов кольца R соответственно.

Пусть R — кольцо. Кольцо S вместе с кольцевым гомоморфизмом $\Phi: R \rightarrow S(S)$ называется R -алгеброй. Если Φ является мономорфизмом, то R -алгебру S называют точной. Для данного кольца R точная R -алгебра существует тогда и только тогда, когда кольцо R коммутативно. Обратимые элементы группового кольца $R[G]$ группы G над кольцом R вида ug , где $u \in U(R)$, $g \in G$, называются тривиальными, а все остальные элементы группы $U(R[G])$ — нетривиальными обратимыми элементами кольца $R[G]$. Через $I(R)$ обозначаем кольцо всех целых над Z элементов кольца R . Термины теории абелевых групп, примененные к кольцу (или R -алгебре) S , относятся к аддитивной группе S^+ кольца (соответственно R -алгебры) S . Например, кольцо без кручения, редуцированное кольцо.

Все рассматриваемые модули — унитарные и левые. Модуль M , построенный на редуцированной абелевой группе M^+ , называется редуцированным. Модуль M над кольцом R называется R -модулем без кручения (соответственно без Z -кручения), если для любых $r \in R$ (соответственно $r \in Z$) и $x \in M$ из $rx=0$ следует $r=0$ или $x=0$. R -модуль M точен, если $\text{ann}_R M = \{r \in R | rM=0\} = 0$.

Пусть R — область целостности; F — ее поле частных. R -подалгебру S называем R -порядком F -алгебры A , если S является конечно-порожденным R -модулем относительно структуры R -модуля на S , определяемой структурой R -алгебры, и содержит некоторый базис F -алгебры A (последнее эквивалентно равенству $FS=A$). Если поле A является конечным расширением поля F , то R -порядками поля A называют R -порядки A как F -алгебры. Если $R=Z$ и, значит, $F=Q$, то порядком поля A называется Z -порядок поля A .

Остальные определения и обозначения стандартны [3, 4, 5]. Непосредственно проверяется такая

Лемма 2. Пусть R — порядок конечного расширения F поля Q ; M — R -модуль, построенный на абелевой группе M^+ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) M является R -модулем без кручения;

(2) M^+ является группой без кручения.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением модулей без кручения над порядками конечных расширений поля Q . Как показывает лемма 2, этот класс модулей совпадает с формально более широким классом модулей над указанными кольцами, построенных на группах без кручения.

Предложение 3. Пусть R — порядок конечного расширения F поля рациональных чисел Q ; M — R -модуль без кручения с конечной группой $G = \text{Aut}_R M$.

Тогда существует конечномерная полупростая F -алгебра A , обладающая R -порядком K , порожденным как R -модуль его группой обратимых элементов $U(K) \cong G$.

Доказательство. Пусть $\theta: G \rightarrow \text{Aut}_R M$ — изоморфизм конечных групп. По известному свойству группового кольца $R[G]$ этот изоморфизм однозначно продолжается до гомоморфизма R -алгебр $\bar{\theta}: R[G] \rightarrow E_R(M)$. Рассмотрим теперь групповую алгебру $F[G]$. $J = F \cdot \ker \bar{\theta}$ — ее двусторонний идеал, так как

$\ker \bar{\theta}$ — двусторонний идеал R -алгебры $R[G]$ и $F[G] = F \cdot R[G]$. Очевидно, что $J \cap R[G] = \ker \bar{\theta}$.

Канонический эпиморфизм F -алгебр $\pi: F[G] \twoheadrightarrow F[G]/J = A$ индуцирует эпиморфизм $\pi|_{R[G]}: R[G] \twoheadrightarrow K$ R -алгебры $R[G]$ на некоторую R -подалгебру K F -алгебры A . Нетрудно проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 F[G] & \xrightarrow{\pi} & A \\
 \uparrow \wedge_{\kappa_1} & & \uparrow \wedge_{\kappa_2} \\
 R[G] & \xrightarrow{\pi|_{R[G]}} & K \\
 \parallel & & \uparrow \psi \\
 R[G] & \xrightarrow{\theta_1} & \text{im } \bar{\theta} \xrightarrow{\sigma} E_R(M) \\
 \uparrow \wedge_{\kappa} & & \uparrow \wedge_{\varepsilon} \\
 G & \xrightarrow{\theta} & \text{Aut}_R M.
 \end{array}$$

где ψ — композиция естественных изоморфизмов R -алгебр $\text{im } \bar{\theta} \cong R[G]/\ker \bar{\theta} \cong R[G]/(J \cap R[G]) \cong (R[G] + J)/J \cong \pi(R[G]) = K$. Фактически $\psi: \bar{\theta}(x) \rightarrow x + J$ для любого $x \in R[G]$.

На приведенной диаграмме κ — инъективное вложение G в ее групповое кольцо над R . Можно считать, что $G \subset R[G]$. θ_1 и ε — это гомоморфизм $\bar{\theta}$ и вложение $\text{Aut}_R M$ в $E_R(M)$, соответственно рассматриваемые как действующие в $\text{im } \theta$, κ_1 , κ_2 и σ — вложения R -подалгебр в содержащие их R -алгебры, которые, естественно, могут рассматриваться как мономорфизмы R -алгебр. Отметим, что вложения κ и ε осуществляют мономорфизмы групп G и $\text{Aut}_R M$ в группы обратимых элементов колец $R[G]$ и $\text{im } \bar{\theta}$ соответственно.

Из коммутативности диаграммы следует, что гомоморфизм π осуществляет изоморфизм группы G на группу $U(K)$.

Так как $R[G]$ — это R -алгебра, а $F[G]$ — F -алгебра, порожденные группой G , то получаем, что $K = \pi(R[G])$ является R -алгеброй, а $A = \pi(F[G])$ — F -алгеброй, порожденными группой $\pi(G) \cong G$. Отсюда получаем, что

K — R -порядок F -алгебры A . По теореме Машке [6, с. 30] F -алгебра $F[G]$ полупроста. Значит, ее гомоморфный образ — F -алгебра A — также полупроста. Предложение доказано.

Следующая лемма в случае $R=Z$, $F=Q$ была доказана в [2].

Лемма 4. Пусть R — порядок конечного расширения F поля Q . Если в конечномерной F -алгебре A есть R -порядок K с конечной группой $U(K)$ обратимых элементов, то группа обратимых элементов любого порядка K_1 F -алгебры A конечна.

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $K \subseteq K_1$. Тогда $U(K) \subseteq U(K_1)$. Ввиду конечной порожденности K и K_1 как R -модулей и того, что $F = QR$ и $A = FK$, можно выбрать такое $m \in Z$, $m \neq 0$, что $mK_1 \subseteq K$. mK_1 является K_1 -модулем, так как $K_1(mK_1) = m(K_1K_1) \subseteq mK_1$. Пусть теперь для $\varepsilon, \varepsilon_1 \in U(K_1)$ выполнено $\varepsilon - \varepsilon_1 \in mK_1$. Тогда $\varepsilon^{-1}\varepsilon_1 - 1 \in mK_1 \subseteq K$ и $\varepsilon_1^{-1}\varepsilon - 1 \in mK_1 \subseteq K$. Так как $1 \in K$, то оба взаимно обратных элемента $\varepsilon^{-1}\varepsilon_1$ и $\varepsilon_1^{-1}\varepsilon$ лежат в K , а значит, $\varepsilon^{-1}\varepsilon_1 \in U(K)$. Таким образом, число смежных классов мультипликативной группы $U(K_1)$ по ее подгруппе $U(K)$ не превосходит числа смежных классов аддитивной группы K_1^+ кольца K_1 по ее подгруппе mK_1^+ . Последнее же число конечно, так как K_1 — конечно-порожденный R -подмодуль алгебры A , а значит, ввиду того, что R^+ — конечно-порожденная абелева группа, K_1^+ — конечно-порожденная абелева группа.

2) Пусть теперь K и K_1 — произвольные R -порядки F -алгебры A , $|U(K)| < \omega_0$. Заметим, что $K \cap K_1$ также R -порядок F -алгебры A . Действительно, $K \cap K_1$ является R -подалгеброй F -алгебры A как пересечение R -подалгебр K и K_1 . Так как существует $m \in Z$, $m \neq 0$, такое, что $mK \subseteq K_1$ (см. 1), то $mK \subseteq K \cap K_1$, откуда $F(K \cap K_1) \supseteq Q(K \cap K_1) \supseteq QmK \supseteq QK = QRK = FK = A$, то есть $F(K \cap K_1) = A$. Вспомним теперь, что кольцо R нетерово. Поэтому K является нетеровым R -модулем как конечно-порожденный модуль над нетеровым кольцом. Но любой подмодуль нетерова модуля конечно порожден и, значит, ввиду $K \cap K_1 \subseteq K$, $K \cap K_1$ — конечно-порожденный R -модуль. Итак $K \cap K_1$ является R -порядком F -алгебры A . Далее, так как $K \cap K_1 \subseteq K$, то

$U(K \cap K_1) \subseteq U(K)$, поэтому группа $U(K \cap K_1)$ конечна. Теперь ввиду $K \cap K_1 \subseteq K_1$ можно воспользоваться (1), откуда $U(K_1)$ — конечная группа. Лемма доказана.

Предложение 5. Пусть R — порядок конечного расширения F поля Q ; A — конечномерная полупростая F -алгебра, обладающая R -порядком K , порожденным как R -модуль его конечной группой обратимых элементов $U(K) \cong G$.

Тогда существует конечное число конечномерных простых F -алгебр A_i , $i = 1, \dots, n$, каждая из которых также обладает R -порядком K_i , порожденным как R -модуль своей конечной группой элементов $U(K_i) = G_i$, причем G изоморфно вкладывается в прямое произведение $\prod_{i=1}^n G_i$ групп G_i , $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. По структурной теореме Веддерберна конечномерная полупростая F -алгебра A разложима в прямую сумму конечного числа своих простых F -подалгебр A_i , то есть $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, $i = 1, \dots, n$, $A_i = \pi_i(A)$, где $\pi_i: A \rightarrow A_i$ — канонические проекции на прямые слагаемые.

Рассмотрим теперь R -порядок K F -алгебры A , порожденный как R -модуль его конечной группой обратимых элементов $U(K)$. Тогда $K_i = \pi_i(K)$ — R -порядок F -алгебры A_i , так как, переходя к образам при отображении π_i , убеждаемся в том, что для любого $i = 1, \dots, n$ K_i является R -алгеброй, а A_i — F -алгеброй, порожденными группой $\pi_i(U(K))$. Очевидно, что $\bigoplus_{i=1}^n K_i$ — R -порядок алгебры A и $K \subseteq \bigoplus_{i=1}^n K_i$, поэтому

$G \cong U(K) \subseteq U\left(\bigoplus_{i=1}^n K_i\right) \cong \prod_{i=1}^n U(K_i)$, причем последний изоморфизм задается отображением $\varepsilon \rightarrow (\pi_1 \varepsilon, \dots, \pi_n \varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in U(K)$. Так как $\pi_i(U(K))$ состоит из обратимых элементов кольца K_i , то $\pi_i(U(K)) \subseteq U(K_i)$. Далее, K порождается как R -модуль группой $U(K)$. Переходя к проекциям относительно π_i , получаем $K_i = R\pi_i(U(K))$. Отсюда $K_i = R \cdot U(K_i)$, то есть K_i является R -порядком F -алгебры A_i , порожденным своей группой обратимых элементов $U(K_i)$, $i = 1, \dots, n$. Остается показать, что группы $G_i = U(K_i)$ конечны. Ввиду

$U\left(\bigoplus_{i=1}^n K_i\right) \cong \prod_{i=1}^n U(K_i) = \prod_{i=1}^n G_i$ это следует согласно лемме 4 из конечности группы $U(K)$ обратимых элементов R -порядка K F -алгебры A . Предложение доказано.

Лемма 6. Пусть R —порядок конечного расширения F поля Q . Если A — конечномерная F -алгебра, имеющая R -порядок K с конечной группой обратимых элементов, то либо $F=Q$, либо F — мнимое квадратичное поле.

Доказательство. Так как $1 \in K$, то кольцо R изоморфно вкладывается в K отображением $r \rightarrow r \cdot 1$, $r \in R$. Значит, $|U(R)| < |U(K)|$. Остается теперь воспользоваться непосредственным следствием из теоремы Дирихле о строении групп обратимых элементов порядков конечных расширений поля Q [7, с. 152]: группа единиц некоторого порядка (а значит, ввиду леммы 4 и всех остальных порядков) конечного алгебраического расширения F поля Q конечна тогда и только тогда, когда либо $F=Q$, либо F — мнимое квадратичное поле. Лемма доказана. В дальнейшем потребуется также

Лемма 7. Пусть R —порядок конечного расширения F поля Q ; A — простая F -алгебра; K — ее R -порядок. Тогда A — простая Q -алгебра, а K — ее Z -порядок.

Предложение 8. Пусть R — порядок конечного расширения F поля Q , $R \neq Z$; A — конечномерная простая F -алгебра.

В A имеется R -порядок K , порожденный как R -модуль своей конечной группой $G=U(K)$ обратимых элементов тогда и только тогда, когда $F=A=Q[\sqrt{d}]$, где d — свободное от квадратов целое отрицательное число; $R=Z+Zm\omega$, $K=Z+Zn\omega$, где $\omega=(1+\sqrt{d})/2$ при $d \equiv 1 \pmod{4}$, $\omega=\sqrt{d}$ при $d \equiv 2,3 \pmod{4}$, m и n — целые положительные числа. Причем m — любое, если $d=-1$ или $d=-3$, и, кроме того, $n=1$; $m=n$ в остальных случаях.

Если эти условия выполнены, то $G=\{\pm 1, \pm i\} \cong Z(4)$ при $d=-1$, $n=1$; $G=\{\pm 1, \pm \rho, \pm \rho^2\} \cong Z(6)$, где $\rho=(\sqrt{-3}+1)/2$, при $d=-3$, $n=1$; $G=\{\pm 1\} \cong Z(2)$ во всех остальных случаях.

Доказательство. По известной теореме Веддерберна конечномерная простая F -алгебра A изоморфно F -алгебре D_k всех матриц порядка k , где k — целое положительное число над некоторой F -алгеброй с делением D . Пусть $\Theta: A \rightarrow D_k$ — такой изоморфизм. При этом $\Theta(K)$ —

R -порядок F -алгебры D_k . Определим L как множество всех $d \in D$, таких, что $d \cdot 1_{D_k} \in \Theta(K)$. Можно убедиться, что L — R -порядок F -алгебры D . Непосредственная проверка показывает, что кольцо L_k всех матриц над L порядка k является R -порядком F -алгебры D_k , поэтому $U(L_k)$ является образом группы обратимых элементов некоторого порядка F -алгебры A при изоморфизме Θ . Так как F -алгебра A содержит R -порядок, группа обратимых элементов которого конечна, то ввиду леммы 4 группа обратимых элементов любого R -порядка F -алгебры A конечна. Значит, конечна и группа $U(L_k)$. Поэтому порядок любого элемента группы $U(L_k)$ конечен.

Предположим, что $k > 1$. Тогда матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

где на незаполненных местах стоят нули, принадлежит L_k и является элементом бесконечного порядка группы $U(L_k)$. Значит, $A = D$, то есть исходная F -алгебра A является алгеброй с делением.

Согласно лемме 6 F — мнимое квадратичное поле и R — некоторый его Z -порядок. Отметим, что случай $F = Q$ невозможен ввиду $R \neq Z$. Согласно доказанному выше $A = D$ является F -алгеброй с делением. Так как отображение $f \rightarrow f \cdot 1_A$ осуществляет изоморфное вложение поля F в алгебру A , будем считать, что $F \subseteq A$, отождествляя F и $F \cdot 1_A$. При этом отождествлении элементы 1_F и 1_A совпадают, поэтому пишем просто 1 вместо каждого из этих элементов.

Пусть x — произвольный элемент алгебры A . Тогда $F[x]$ — подполе алгебры A , являющееся конечным расширением поля F , так как A — конечномерная F -алгебра. Непосредственно проверяется, что $K_1 = F[x] \cap K$ является R -порядком F -алгебры $F[x]$.

Согласно лемме 7 поле $F[x]$ является конечным расширением поля Q , а кольцо K_1 — его порядком, причем ввиду $K_1 \subseteq K$ группа $U(K_1)$ является подгруппой конечной группы $U(K)$, и, значит, сама конечна. Используя

теорему Дирихле [7, с. 152] и вспоминая, что $R \neq Z$, получаем, что $F[x]$ является мнимым квадратичным полем. Учитывая $Q \subseteq F \subseteq F[x]$ и $|F:Q| = |F[x]:Q|$, получаем $F[x] = F$. Ввиду произвольности выбора элемента $x \in A$, $A = F$. Кольцо R и в силу леммы 7 кольцо K — порядки поля F .

Дальнейшее рассмотрение разветвляется. Разбор вариантов проводим, опираясь на следующее описание порядков в квадратичных полях [7, с. 178].

Пусть $d \neq 1$ — свободное от квадратов целое рациональное число, в качестве Z -базиса максимального порядка квадратичного поля $Q[\sqrt{d}]$ можно взять числа 1 и ω , где $\omega = (1 + \sqrt{d})/2$ при $d \equiv 1 \pmod{4}$ и $\omega = \sqrt{d}$ при $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Произвольный порядок K поля $Q[\sqrt{d}]$ имеет вид $K = Z + Zn\omega$, где n — целое положительное число (при $n=1$ получаем максимальный порядок $Z + Z\omega$ поля $Q[\sqrt{d}]$).

Кроме того, неоднократно используется следующий факт [7, с. 179].

Пусть F — мнимое квадратичное поле; R — порядок F .

Тогда

(1) $U(R) = \{\pm 1, \pm i\} \cong Z(4)$, если $F = Q[i]$, $R = Z + Zi$ — максимальный порядок поля $Q[i]$, где $i = \sqrt{-1}$;

(2) $U(R) = \{\pm 1, \pm \rho, \pm \rho^2\} \cong Z(6)$, если $F = Q[\sqrt{-3}]$, $R = Z + Z\rho$ — максимальный порядок поля F , где $\rho = (\sqrt{-3} + 1)/2$;

(3) $U(R) = \{\pm 1\} \cong Z(2)$ в остальных случаях.

Переходим к разбору вариантов.

1. $A = F = Q[i]$, $K = Z + Zni$, $R = Z + Zmi$, где m, n — целые положительные числа. Так как $R \subseteq K$, то n делит m . Если $n=1$, то для любого m $K = Z + Zi$ является R -порядком поля $Q[i]$, порожденным группой $U(K) = \{\pm 1, \pm i\} \cong Z(4)$, так как $K = Z \cdot 1 + Z \cdot i \subseteq Z \cdot U(K) \subseteq R \cdot U(K)$. Если же $n \neq 1$, то $U(K) = \{\pm 1\}$, значит, $K = RU(K) = R \cdot \{\pm 1\} = R$. Итак, при $A = F = Q[i]$ либо m — любое целое положительное число, $n=1$, $R = Z + Zmi$, $K = Z + Zi$, $U(K) = \{\pm 1, \pm i\} \cong Z(4)$, либо $m = n \neq 1$, $R = K = Z + Zmi$, $U(K) = \{\pm 1\} \cong Z(2)$.

2. $A = F = Q[\sqrt{-3}]$, $K = Z + Znp$, $R = Z + Zmp$, где $\rho = (\sqrt{-3} + 1)/2$; m и n — целые положительные

числа. Так как $R \subseteq K$, то n делит m . Если $n = 1$, то для любого m имеем $K = Z \cdot 1 + Zp \subseteq Z \cdot U(K) \subseteq R \times \times U(K)$, то есть $K = Z + Zp$ является R -порядком поля $Q[\sqrt{-3}] = Q[p]$, порожденным группой $U(K) = \{\pm 1, \pm p, \pm p^2\}$ при любом m . Если же $n \neq 1$, то $U(K) = \{\pm 1\}$, значит, как и в только что разобранным варианте 1, $K = R$. Таким образом, при $A = F = Q[\sqrt{-3}] = Q[p]$ либо m — любое целое положительное число, $n = 1$, $R = Z + Zmp$, $K = Z + Zp$, $U(K) = \{\pm 1, \pm p, \pm p^2\} \cong Z(6)$, либо $m = n \neq 1$, $R = K = Z + Zmp$, $U(K) = \{\pm 1\} \cong Z(2)$.

3. $A = F = Q[\sqrt{d}]$, где d — свободное от квадратов целое отрицательное число, $d \neq -1, -3$. В этом случае $R = Z + Zn\omega$, где n — целое положительное число, $U(K) = \{\pm 1\} \cong Z(2)$, значит, $K = R \cdot U(K) = R \cdot \{\pm 1\} = R$.

Собирая вместе результаты вариантов 1, 2 и 3, получаем в точности все, что требовалось. Предложение доказано.

Лемма 9. Пусть R — немаксимальный порядок поля $Q[i]$. Тогда для любого целого положительного числа n существует R -модуль без кручения M такой, что $\text{Aut}_R M \cong \prod Z(4)$.

Доказательство. Пусть $Q_1, \dots, Q_n$ — абелевы группы без кручения ранга 1, не являющиеся p -делимыми ни для какого простого p . Нетрудно выбрать группы $Q_1, \dots, Q_n$ так, чтобы их типы были попарно несравнимыми.

Пусть $S = Z + Zi$ — кольцо целых гауссовых чисел. S является максимальным порядком поля $Q[i]$, поэтому $R \subset S$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ тензорное произведение $S \otimes_Z Q_i$ будем обозначать S_i . Так как S очевидным образом является R - Z -бимодулем, то S_i — R -модуль.

Непосредственно проверяется, что $E_R(S_i) \cong S$. Переходя к группам обратимых элементов изоморфных колец $E_R(S_i)$ и S , получаем

$$\text{Aut}_R(S_i) \cong U(S) \cong Z(4). \quad (2)$$

Легко видеть, что $\text{Hom}_R(S_i, S_j) = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Положим ${}_R M = \bigoplus_{i=1}^n S_i$. Очевидно, M является R -модулем без кручения. Ввиду $\text{Hom}_R(S_i, S_j) = 0$ для любых $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, S_i является вполне характеристичес-

ким подмодулем R -модуля M . Поэтому $\text{Aut}_R M \cong \prod_{i=1}^n \text{Aut}_R(S_i)$. Воспользовавшись (2), получаем $\text{Aut}_R M \cong \text{PZ}(4)$. Лемма доказана.

Хорошо известна теорема Корнера о том, что всякое счетное редуцированное кольцо без кручения E изоморфно кольцу эндоморфизмов $E(A)$ некоторой счетной редуцированной абелевой группы A без кручения [8]. Из этой теоремы непосредственно вытекает такое

Следствие 10. Пусть R — кольцо. Всякая счетная редуцированная R -алгебра без кручения E изоморфна как кольцо кольцу эндоморфизмов $E_R(A)$ некоторого счетного редуцированного R -модуля без Z -кручения A . Причем если R -алгебра E — точная, то указанный R -модуль A можно также выбрать точным.

Используя результаты работы [9], нетрудно доказать такую лемму.

Лемма 11. Пусть F — мнимое квадратичное поле; R — порядок поля F ; G — конечная абелева группа показателя h , причем хотя бы один (или, что эквивалентно, любой) первообразный корень из единицы степени h принадлежит полю F . Тогда групповое кольцо $R[G]$ группы G над кольцом R не имеет нетривиальных обратимых элементов. В частности, $U(R[G]) \cong U(R) \times G$.

Теперь мы в состоянии доказать теорему 1 — основной результат данной работы.

Доказательство теоремы 1. Необходимость доказывалась последовательным применением предложений 3, 5 и 8, а также теоремы о строении подгрупп конечно-порожденных абелевых групп [3, теорема 15.6].

Докажем достаточность. Пусть m и n — произвольные целые неотрицательные числа. Определим группу H следующим образом:

$$1) \ H = \prod_m \text{PZ}(2) \times \prod_n \text{PZ}(4), \text{ если } F = Q[i];$$

$$2) \ H = \prod_m \text{PZ}(2) \times \prod_n \text{PZ}(3), \text{ если } F = Q[\sqrt{-3}];$$

$$3) \ H = \prod_m \text{PZ}(2), \text{ если } F = Q[\sqrt{d}], \text{ где } d \text{ — свободное от}$$

квадратов целое отрицательное число, не равное $-1, -3$.

Пусть h — показатель группы H ; ξ_h — первообразный корень из 1 степени h . Непосредственно проверяется, что $\xi_4 \in Q[i]$; $\xi_3, \xi_6 \in Q[\sqrt{-3}]$; $\xi_1, \xi_2 \in Q[\sqrt{d}]$ для любого

целого d . Поэтому при целых неотрицательных m и n $\xi_h \in F$. Согласно лемме 11 $U(R[H]) \cong U(R) \times H$.

Далее, кольцо $R[H]$ счетно, так как кольцо R счетно, а группа H конечна. $R[H]$ редуцированное кольцо, так как его аддитивная группа — свободная абелева группа. Кольцо $R[H]$ является R -алгеброй относительно естественного вложения $R \hookrightarrow R[H]$. Таким образом, по следствию 10 существует R -модуль M без Z -кручения такой, что $E_R(M) \cong R[H]$. Переходя к группам обратимых элементов этих изоморфных колец, получаем $\text{Aut}_R M \cong U(R[H]) \cong U(R) \times H$. Итак, для любых целых неотрицательных m, n и любого порядка R мнимого квадратичного поля F существует R -модуль M без Z -кручения такой, что $G = \text{Aut}_R M \cong U(R) \times H$.

Отметим, что $U(R) \cong Z(4)$, если $R = Z[i]$ — максимальный порядок поля $Q[i]$; $U(R) \cong Z(6)$, если R — максимальный порядок поля $Q[\sqrt{-3}]$, и $U(R) \cong Z(2)$ в остальных случаях [7, с. 179]. Используя это, непосредственно проверяем, что при любом R каждая из групп G , удовлетворяющая (в зависимости от R) условию (1), (2) или (3) доказываемой теоремы, изоморфна при некоторых целых неотрицательных m, n группе $U(R) \times H$ за исключением одного случая: R — не максимальный порядок поля $Q[i]$ и $G = \prod_{n=1}^{\infty} Z(4)$, где n — целое положи-

тельное число. Так как по доказанному для любого R и любых целых неотрицательных чисел m, n группа $U(R) \times H$ изоморфна группе автоморфизмов $\text{Aut}_R M$ некоторого R -модуля M без Z -кручения, то остается воспользоваться леммой 10. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hallett J. T., Hirsch K. A. Finite groups of exponent 12 as automorphism groups.— *Math. Z.*, 1977, v. 155, p. 43—53.
2. Hirsch K. A., Zassenhaus H. Finite automorphism groups of torsion free groups.— *J. London, Math. Soc.*, 1966, v. 41, p. 545—549.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1974, т. 1.— 335 с.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.— М.: Мир, 1977, т. 2.— 416 с.
5. Кэртис Ч., Райнер Н. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М.: Наука, 1969.— 667 с.
6. Херстейн Н. Некоммутативные кольца.— М.: Мир, 1972.— 190 с.

7. Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р. Теория чисел.— М.: Наука, 1964.— 496 с.

8. C o r n e r A. L. S. Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring.— Proc. London Math. Soc., 1963, v. 13, p. 687—710.

9. H i g m a n G. The units of group-rings.— Proc. London Math. Soc., 1938—39, v. 46, p. 231—248.

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЫ

УДК 512.553+565

О дистрибутивности решетки предкручений. Буну И. Д., Тэ-бырцэ Е, И. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 3—10.

Найдены необходимые и достаточные условия дистрибутивности решетки во всех предкручений категории всех унитарных модулей над ассоциативным кольцом с единицей. В качестве следствий получают более простые условия дистрибутивности указанной решетки в случае модулей над артиновыми и коммутативными кольцами.

УДК 512.541

О расщепляющихся квазисервантно инъективных группах. Добрусин Ю. Б. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 11—23.

Изучается вопрос о том, когда прямая сумма квазисервантно инъективных абелевых групп A и T , где A — без кручения; T — периодическая группа, будет снова квазисервантно инъективной (Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974, т. 1; проблема 17). Полностью получены ответы на этот вопрос в случае, когда T обладает лишь конечным множеством ненулевых p -компонент для таких простых p , что $pA \neq A$, либо в случае, когда T произвольна, а A — некоторая из групп, описанных в РЖМат, 1980, 11A169.

УДК 512.541

Об изоморфизме N -высоких подгрупп. Кравченко А. А. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 24—39.

Описан класс $\mathfrak{N}$ абелевых групп A , у которых для произвольной подгруппы N все N -высокие подгруппы изоморфны. Кроме того, показано, что класс групп $\mathfrak{N}$ в точности совпадает с классом таких групп A , у которых для двух слабо сервантных подгрупп H_1 и H_2 из $r(H_1) = r(H_2)$ и $r(A/H_1) = r(A/H_2)$ следует $H_1 \cong H_2$.

УДК 512.541

Об абелевых группах без кручения. Крылов П. А. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 40—64.

Для произвольной абелевой группы G без кручения доказывается, что определенные ее подгруппы обладают некоторыми каноническими квазиразложениями. Затем, опираясь на эти результаты, исследуются вполне транзитивные и транзитивные абелевы группы без кручения.

УДК 512.553+55.0

Минимальные модули. Кузичева В. А.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 65—79.

В работе исследуются свойства языка первой ступени теории модулей над ассоциативным кольцом с единицей, связанные с определенными подмножествами модулей над кольцом. Минимальный модуль, по аналогии с кольцами, определяется как модуль, где всякое определенное подмножество конечно или коконечно. Изучается строение минимальных модулей и колец, над которыми существуют минимальные модули. Показано, что любой бесконечный модуль над телом минимален. Кроме того, тело характеризуется в классе бесконечных колец требованием минимальности всех ненулевых модулей, а в классе конечных колец — требованием минимальности всех бесконечных модулей. Получено полное описание минимальных абелевых групп, а именно показано, что абелева группа M минимальна тогда и только тогда, когда она является либо бесконечной элементарной p -группой (p -простое), либо такой ненулевой делимой абелевой группой, что p -ранг $r_p(M)$ конечен для всех простых p .

УДК 512.553+55.0

О конечной аксиоматизируемости радикальных и полупростых классов модулей. Попович Р. Б.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 80—89.

С произвольным непустым множеством элементов кольца связывается идемпотентный радикал, обобщающий понятие I -радикала. Решается вопрос об аксиоматизируемости радикального класса такого радикала. Рассматриваются идемпотентные радикалы, порожденные некоторым классом циклических модулей. Описаны радикалы указанного типа с аксиоматизируемым полупростым классом.

УДК 512.541

E -корректные абелевы группы. Приходько И. А.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 90—99.

Абелевы группы B и C называются E -эквивалентными ($B_E \sim C$), если каждая из них изоморфна E -чистой подгруппе другой группы. Группа B называется E -корректной, если $B_E \sim C$ влечет $B \cong C$.

Описываются все E -корректные прямые суммы циклических p -групп.

УДК 512.553

О малоинъективных модулях и кольцах. Туганбаев А. А.— В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 100—106.

Приведены критерии самонъективности колец, использующие понятие малоинъективного модуля. (Модуль называется малоинъективным, если все эндоморфизмы его подмодулей продолжаются до эндоморфизмов самого модуля).

УДК 512.552

Представление алгебр с условием алгебраичности. Тэн В. Д. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 107—124.

Доказывается, что примитивные алгебры с инволюцией над коммутативным кольцом с единицей, удовлетворяющие некоторому условию, являются PI-алгебрами и приводится оценка на PI-степень этих алгебр. Далее эти результаты распространяются на первичные алгебры с инволюцией без правых ниль-идеалов.

УДК 512.541

Об одном классе абелевых групп без кручения конечного ранга. Флешер Т. М. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 125—136.

Пусть G — группа; A — ее подгруппа; $\text{Aut } G$ — группа всех ее автоморфизмов. Подгруппу $\Gamma(A) \leq \text{Aut } G$ назовем A -тождественной, если $\Gamma(A) = \langle a \in \text{Aut } G \mid aa = a, \forall a \in A \rangle$. Подгруппу $C \leq G$ назовем $\Gamma(A)$ — максимальной, если $C = \langle c \in G \mid ac = c, \forall a \in \Gamma(A) \rangle$. Группы, у которых обобщенные псевдооколы и только они являются $\Gamma(A)$ -максимальными подгруппами, назовем fps -группами.

В работе дано описание сильно неразложимых fps -групп. Показана связь обобщенных псевдооколов сильно неразложимых fps -групп с ядрами их нильпотентных эндоморфизмов. Приведены примеры сильно неразложимых и квазиразложимых fps -групп.

УДК 512.541

О некоторых классах абелевых групп. Чехлов А. Р. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 137—152.

Рассматриваются группы, в которых замкнутые в Z -адической топологии сервантные подгруппы являются прямыми слагаемыми. Показывается, что группы, выделяющиеся прямыми слагаемыми в каждой группе, содержащей их в качестве замкнутых сервантных подгрупп, это в точности алгебраически компактные группы. Рассматриваются также группы, в которых прямые слагаемые образуют подрешетку в решетке подгрупп данной группы.

УДК 512.541+553

Модули без кручения с конечными группами автоморфизмов над кольцами алгебраических чисел. Шляфер А. З. — В кн.: Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 153—165.

Рассматривается следующая задача: для данного кольца охарактеризовать все конечные группы, являющиеся группами автоморфизмов модулей без кручения над этим кольцом. Полный ответ получен для порядка конечного расширения поля рациональных чисел.

СОДЕРЖАНИЕ

И. Д. Буну, Е. И. Тэбырцэ. О дистрибутивности решетки предкручений	3
Ю. Б. Добрусин. О расщепляющихся квазисервантно инъективных группах	11
А. А. Кравченко. Об изоморфизме N -высоких подгрупп	24
П. А. Крылов. Об абелевых группах без кручения, I	40
В. А. Кузичева. Минимальные модули	65
Р. Б. Попович. О конечной аксиоматизируемости радикальных и полупростых классов модулей	80
И. А. Приходько. E -корректные абелевы группы	90
А. А. Туганбаев. О малоинъективных модулях и кольцах	100
В. Д. Тэн. Представление алгебр с условием алгебраичности	107
Т. М. Флешер. Об одном классе абелевых групп без кручения конечного ранга	125
А. Р. Чехлов. О некоторых классах абелевых групп	137
А. З. Шляфер. Модули без кручения с конечными группами автоморфизмов над кольцами алгебраических чисел	153
Рефераты на опубликованные статьи	166

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

Редактор Е. С. Юзефович

Технический редактор Р. М. Подгорбунская

Корректоры Н. С. Поддубная, В. Г. Лихачева

ИБ1294 Сдано в набор 27.01.84 г. Подписано к печати 18.07.84 г.
 К305177. Формат $84 \times 108^{1/32}$. Бумага типографская № 1.
 Гарнитура Литературная. Печать высокая.
 Печ. л. 5.25. Усл. п. л. 8.87, уч.-изд. л. 8.7.
 Тираж 500. Заказ 424/1. Цена 1 р. 40 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
 Типография изд-ва «Красное знамя», 634029, Томск, ул. Советская, 47

