

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА ПОВТОРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ $GI|M|_{\infty}$ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Л. А. Задиранова

---

*Национальный исследовательский Томский государственный университет  
Томск, Российская Федерация  
E-mail: ZhidkovaLA@mail.ru*

Рассматривается система массового обслуживания  $GI|M|_{\infty}$  с повторными обращениями заявок в систему. С помощью метода асимптотического анализа получено приближение характеристической функции числа повторного обслуживания за время  $t$ , проведен численный анализ полученных результатов.

*Ключевые слова:* поток повторных обращений, метод асимптотического анализа.

Сложный характер рыночной экономики и современный уровень предъявляемых к ней требований стимулируют использование более серьезных методов анализа ее теоретических и практических проблем. В последние десятилетия значительный вес в экономических исследованиях приобрели математические методы. Математическое моделирование становится одним из основных и наиболее плодотворных методов изучения экономических процессов и объектов.

В качестве математических моделей социально-экономических и демографических процессов часто используют системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов [1, 2]. Как правило, в таких системах число потенциальных клиентов (банков, страховых организаций, пенсионных фондов, налоговых инспекций и др.) считается неограниченным.

Одной из модификаций СМО с неограниченным числом приборов являются системы массового обслуживания с повторными обращениями. В работах [3, 4] в качестве математических моделей изменения числа клиентов торговых компаний предлагается использовать СМО с неограниченным числом приборов, пуассоновским входящим потоком и повторными обращениями.

Однако пуассоновский поток не всегда верно описывает реальные потоки заявок. В связи с чем, можно сделать вывод о том, что существует необходимость расширения круга исследуемых моделей массового обслуживания с непуассоновским входящим потоком, а также разработки методов их исследований.

В данной статье помощью метода асимптотического анализа приводится исследование потока повторных обращений в СМО с повторными обращениями, на вход которой поступает рекуррентный поток.

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок  $A(x)$ .

Продолжительность обслуживания заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu$ . Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью  $1 - r$  покидает систему или с вероятностью  $r$  возвращается в неё для повторного обслуживания.

Обозначим  $i(t)$  – число занятых приборов в системе в момент времени  $t$ ,  $n(t)$  – число заявок, обратившихся в систему за время  $t$  для повторного обслуживания. Так как полученный случайный процесс  $\{i(t), n(t)\}$  немарковский, то марковизируем его, введя дополнительную переменную  $z(t)$ , равную длине интервала от момента  $t$  до момента поступления следующей заявки. Тогда трехмерный процесс  $\{z(t), i(t), n(t)\}$  будет марковским.

Ставится задача исследования потока повторных обращений в систему за время  $t$ .

Обозначим распределение вероятностей значений полученного марковского процесса  $P(z, i, t) = P\{z(t) < z, i(t) = i, n(t) = n\}$ , тогда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, i, n, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, i, n, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0, i, n, t)}{\partial z} + i\mu r P(z, i, n-1, t) + \mu(1+i)(1-r)P(z, i+1, n, t) + \\ & + A(z) \frac{\partial P(0, i-1, n, t)}{\partial z} - i\mu P(z, i, n, t), \text{ где } i = \overline{0, \infty}, n = \overline{0, \infty}. \end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции в виде

$$H(z, u, w, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{ju i} e^{jwn} P(z, i, n, t),$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z, u, w, t)}{\partial t} = & \frac{\partial H(z, u, w, t)}{\partial z} - j\mu[(1-r)e^{-ju} + re^{jw} - 1] \frac{\partial H(z, u, w, t)}{\partial u} + \\ & + (e^{ju} A(z) - 1) \frac{\partial H(0, u, w, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Полученное уравнение позволяет определить основные характеристики рассматриваемой системы.

Определим характеристики потока повторных обращений в рассматриваемой системе методом асимптотического анализа. Данный метод заключается в нахождении аппроксимации характеристической функции потока повторных обращений в системе GI|M| $\infty$  при определенных условиях, для нашей системы мы будем рассматривать условие растущего времени обслуживания [5].

Обозначим

$$\mu = \varepsilon, u = \varepsilon y, H(z, u, w, t) = F(z, y, w, t, \varepsilon) \quad (2)$$

и перепишем (1) с учетом введенных обозначений (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z, y, w, t, \varepsilon)}{\partial t} = & \frac{\partial F(z, y, w, t, \varepsilon)}{\partial z} + (e^{j\varepsilon w} A(z) - 1) \frac{\partial F(0, y, w, t, \varepsilon)}{\partial z} - \\ & - j((1-r)e^{-j\varepsilon w} + re^{jw} - 1) \frac{\partial F(z, y, w, t, \varepsilon)}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Выполняя в данном уравнении предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем, что  $F(z, y, w, t)$  является решением уравнения

$$\frac{\partial F(z, y, w, t)}{\partial t} = \frac{\partial F(z, y, w, t)}{\partial z} + (A(z) - 1) \frac{\partial F(0, y, w, t)}{\partial z} - jr(e^{jw} - 1) \frac{\partial F(z, y, w, t)}{\partial y}.$$

В уравнении (3) выполним предельный переход при  $z \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial F(z, y, w, t)}{\partial t} + jr(e^{jw} - 1) \frac{\partial F(z, y, w, t)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

общее решение полученного уравнения имеет вид

$$F(y, w, t) = \varphi \left( t + \frac{jy}{r(e^{jw} - 1)} \right),$$

где  $\varphi(y)$  – некоторая функция. Чтобы определить вид данной функции, необходимо начальное условие. Заметим, что в нулевой момент времени функция  $F(y, w, 0)$  не зависит от переменной  $w$ , так как число обслуженных заявок в этот момент равно нулю. Таким образом имеем начальное условие:

$$F(y, w, 0) = \Phi(y), \quad (5)$$

где  $\Phi(y)$  – асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов в системе в момент времени  $t$  в условии растущего времени обслуживания, вид которого был определен в работе [6]:

$$\Phi(y) = \exp \left\{ \frac{j\lambda y}{1-r} \right\},$$

где  $\lambda = \frac{\partial R(0)}{\partial z}$ ,  $R(z)$  – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса  $z(t)$ .

Запишем частное решение уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию (5)

$$F(y, w, t) = \exp \left\{ \frac{r\lambda t}{1-r} (e^{jw} - 1) + \frac{j\lambda y}{1-r} \right\}.$$

Полагая в данном равенстве  $y = 0$ , имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, поступивших в систему для повторного обслуживания за время  $t$ , в условии растущего времени обслуживания

$$M \{ e^{jwn(t)} \} = H(0, w, t) = F(0, w, t, \varepsilon) \approx \exp \left\{ \frac{r\lambda t}{1-r} (e^{jw} - 1) \right\}.$$

Для определения области применения полученного результата проведем сравнение распределения числа повторных обращений в систему за время  $t$ , полученного методом асимптотического анализа и допредельным способом для частного случая, когда на вход системы поступает поток заявок с функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок  $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ , для этого с помощью обратного преобразования Фурье данной характеристической функции найдем асимптотическое распределение вероятностей  $P_2(n)$

$$P_2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwn} h_2(w) dw.$$

Используя вид производящей функции распределения вероятностей  $P(n, t)$  числа повторных обращений, реализованных за время  $t$ , в системе  $M|M|\infty$ , полученный в работе [4], имеем:

$$P(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jun} h_0(u) du,$$

$$\text{где } h_0(u) = \exp \left\{ \lambda r \frac{e^{ju} - 1}{1 - re^{ju}} t - \frac{\lambda r^2}{\mu(1-r)} \frac{(e^{ju} - 1)^2}{(1 - re^{ju})^2} (1 - e^{-\mu(1-re^{ju})t}) \right\}.$$

**Пример 1:** Используем следующие значения параметров  $r = 0,75$ ,  $\lambda = 0,6$ . Определим расстояние Колмогорова между распределениями при изменении значения произведения  $\mu t$ .

Таблица 1

**Расстояние Колмогорова при  $r = 0,75$ ,  $\lambda = 0,6$**

| $\mu t$ | $\Delta$ |
|---------|----------|
| 1,00    | 0,253    |
| 0,50    | 0,148    |
| 0,10    | 0,035    |
| 0,05    | 0,018    |

Рассмотрим случай, когда параметры  $r = 0,25$ ,  $\lambda = 0,6$ .

Таблица 2

**Расстояние Колмогорова при  $r = 0,25$ ,  $\lambda = 0,6$**

| $\mu t$ | $\Delta$ |
|---------|----------|
| 1,00    | 0,088    |
| 0,50    | 0,051    |
| 0,10    | 0,012    |
| 0,05    | 0,006    |

Данный пример позволяет сделать вывод о том, что на асимптотические результаты влияет не только продолжительность рассматриваемого периода времени и времени обслуживания заявок, но и вероятность их возврата в систему.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеева, С. П. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями / С. П. Моисеева, И. А. Захорольная // Автометрия. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2011. Т. 47. № 6. С. 51–58.
2. Морозова, А. С. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации / А. С. Морозова, С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.
3. Жидкова, Л. А. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6, С. 5–9.
4. Морозова, А. С. Исследование математических моделей стимулирования сбыта продукции: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / А. С. Морозова. Анжеро-Судженск, 2007. 115 с.
5. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
6. Жидкова, Л. А. Исследование системы  $GI|M|\infty$  с повторными обращениями / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 2014. Т. 295. С. 94–100.