УДК 531.012, 517.977.5

А.М. ЛАТЫШЕВ, С.Л. ЛЯХОВИЧ, А.А. ШАРАПОВ

ИЗОТРОПНЫЕ КРИВЫЕ В $\mathbb{R}^{2,n}$ КАК ПЛОСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ [1]

Доказывается, что дифференциальное уравнение, описывающее множество изотропных кривых псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{2,n}$, определяет плоскую динамическую систему в смысле теории оптимального управления. Связь с общими калибровочными теориями кратко обсуждается.

Ключевые слова: *изотропные кривые, плоские динамические системы, калибровочные теории.*

Введение

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$f_a(x,x')=0\,,\qquad a=1,...,l\,,\tag{1}$$

относительно неизвестных функций $x=(x_1,...,x_m)$ называется *плоской*, если общее решение системы может быть представлено в виде

$$x=g(y,y',...,y^{(p)})\,,\tag{2}$$

где $y=(y_1,...,y_k)$ – произвольные функции независимой переменной; при этом должна существовать такая вектор-функция $h(x,x',...,x^{(q)})$, что подстановка

$$y=h(x,x',...,x^{(q)})\tag{3}$$

превращает (2) в тождество с учетом уравнений (1). Функции (3) называются *плоским выходом* для системы (1). Если p – порядок старшей производной y, содержащейся в g, то говорят о плоской динамической системе, при этом число p называется *порядком плоского управления*. Мы будем рассматривать только *регулярные системы*, т.е. системы, для которых $\operatorname{rank}(\partial f/\partial x')=l$. В этом случае число функций, определяющих плоский выход (3), равно $k=m-l$. Как обычно, в точках общего положения функции g и h будут предполагаться вещественно-аналитическими.

Плоские динамические системы появились и активно изучаются в математической теории оптимального управления [1], хотя само понятие плоскостности восходит еще к работе Гильберта [2] о системах дифференциальных уравнений, интегрируемых без квадратур. К сожалению, до сих пор не известны какие-либо эффективные критерии, позволяющие судить о том, является ли данная динамическая система плоской или нет.

Имеется тесная взаимосвязь между динамическими системами с управлением и общими калибровочными теориями, изучаемыми в физике [3]. С физической точки зрения наличие управления эквивалентно калибровочной инвариантности уравнений движения. В частности, плоские динамические системы могут быть охарактеризованы как калибровочные теории без физических степеней свободы, конечные (не инфинитезимальные) калибровочные преобразования которых локальны, т.е. вовлекают конечное число производных калибровочных параметров. Действие калибровочных преобразований на решениях (2) индуцируется сдвигом $y\to y+\varepsilon$, так что калибровочная группа оказывается абелевой. Функции плоского выхода (3) интерпретируются при этом как условия калибровки $h=0$. Заметим, что соответствующая матрица Фадеева – Попова $(\delta_\varepsilon h/\delta\varepsilon)$ дается единичным оператором.

[1] Работа частично поддержана грантом РФФИ № 13-02-00551 и Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров. А.А. Шарапов благодарит за финансовую поддержку некоммерческий фонд «Династия».

В данной заметке рассматриваются дифференциальные уравнения, описывающие изотропные кривые в псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{R}^{2,n}$. Эти кривые $x(\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$(x', x') = 0\,, \tag{4}$$

где скобками обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2,n}$. Мы используем метрику с сигнатурой $(--+...+)$. Изучение изотропных кривых в псевдоевклидовых пространствах различной сигнатуры представляет интерес как с точки зрения физики, так и математики. Например, изотропные кривые пространства Минковского соответствуют мировым линиям безмассовых частиц. К нахождению пары изотропных кривых сводится и задача локального описания минимальных двумерных поверхностей (релятивистских струн) [5–7].

Плоский выход для уравнения изотропности

Основным результатом данной работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Уравнение изотропных кривых в* $\mathbb{R}^{2,n}$ *определяет* 2*-плоскую динамическую систему при* $n \neq 2$ *и* 1*-плоскую при* $n = 2$.

Заметим, что уравнение (4) инвариантно относительно репараметризации $\tau \to \tau'(\tau)$ кривых. Это дает один функциональный параметр в общем решении уравнения изотропности. С другой стороны, используя репараметризационную инвариантность, можно наложить одно дополнительное условие на переменные x и y. Это простое замечание будет использоваться в дальнейшем.

Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

Начнем со случая трехмерного пространства Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$. Следуя Вейерштрассу, рассмотрим пространственноподобную кривую

$$u(\tau) = (1 - \tau^2, 2\tau, 1 + \tau^2)\,. \tag{5}$$

Эта кривая целиком лежит на световом конусе, т.е. $(u, u) = 0$, и, кроме того, $(u', u') = -4$. Полагая $\mathrm{x}' = ua$, где a – произвольная функция τ, общее решение уравнения изотропности $(\mathrm{x}', \mathrm{x}') = 0$ можно записать в виде

$$\mathrm{x}(\tilde{\tau}) = \int_0^{\tilde{\tau}} ua\,d\tau\,.$$

Чтобы избавиться от квадратур, положим $a = f'''$ и проинтегрируем в последнем выражении два раза по частям. С точностью до несущественных аддитивных констант получим

$$\mathrm{x} = uf'' - uf' + u''f\,. \tag{6}$$

Это и есть искомая параметризация множества изотропных кривых в $\mathbb{R}^{2,1}$ двумя функциональными параметрами. Как отмечалось выше, один из параметров получается репараметризацией $\tau \to g(\tau)$, после чего второй дается композицией $h(\tau) = f(g(\tau))$. Заметим, что решение (6) существенно вовлекает вторую производную h. Мы называем (6) параметризацией Вейерштрасса – Хитчина [4].

В качестве следующего шага рассмотрим вспомогательное уравнение, определяющее множество пространственноподобных кривых в $\mathbb{R}^{2,1}$ с заданной инфинитезимальной длиной $\Delta(\tau)$:

$$(x', x') = -\Delta^2\,. \tag{7}$$

Оказывается, что данное уравнение также определяет 2-плоскую динамическую систему, чье общее решение может быть записано в виде [2]

$$x = \mathrm{x} + \frac{1}{2}u\Delta\,,$$

где кривые $u(\tau)$ и $\mathrm{x}(\tau)$ даются выражениями (5), (6). Функции, описывающие плоский выход, имеют вид

[2] Данная задача рассматривалась в работе [8], где с помощью довольно громоздких дифференциально-геометрических построений было показано, что система (7) является 3-плоской. Наша конструкция является совершенно элементарной и, кроме того, позволяет понизить порядок плоского уравнения на единицу.

$$f=\frac{1}{2}\left(\frac{x_2'-\Delta}{x_1'+x_3'}\right)^2(x_3+x_1)-\left(\frac{x_2'-\Delta}{x_1'+x_3'}\right)x_2+\frac{1}{2}(x_3-x_1), \tag{8}$$

$$\tau=\frac{x_2'-\Delta}{x_1'+x_3'}.$$

Параметризация множества изотропных кривых в $\mathbb{R}^{2,n}$ может быть теперь получена, если положить

$$\Delta=\sqrt{(x_4')^2+(x_5')^2+\ldots+(x_{n+2}')^2} \tag{9}$$

и считать $x_4,x_5,\ldots,x_{n+2}$ произвольными функциями τ. Вместе с g и h это дает $n+1$ произвольный функциональный параметр в решении, как и должно быть в случае одного регулярного уравнения на $n+2$ переменных.

В случае пространства $\mathbb{R}^{2,2}$ порядок плоского управления может быть понижен на единицу, так что соответствующая система изотропных кривых оказывается 1-плоской. Рассмотрим пару изотропных и взаимно ортогональных прямых

$$u(\tau)=(1,\tau,1,-\tau)\,,\qquad v(\tau)=(-\tau,1,\tau,1)\,, \tag{10}$$

$$(u,u)=0\,,\qquad (u,v)=0\,,\qquad (v,v)=0\,.$$

Вектор мгновенной скорости может быть представлен в виде $x'=uf''+vg''$ для некоторых функций f и g. Интегрируя последнее выражение по частям, как в п. 2, получаем следующее представление для изотропных кривых [5, 6]:

$$x=uf'+vg'-uf-vg.$$

Формулы обращения имеют вид

$$f=\frac{1}{2}\left(\frac{x_2'-x_4'}{x_3'+x_1'}\right)(x_3+x_1)-\frac{1}{2}(x_2-x_4)\,,\qquad g=\frac{1}{2}\left(\frac{x_3'-x_1'}{x_2'-x_4'}\right)(x_2+x_4)-\frac{1}{2}(x_3-x_1)\,,$$

$$\tau=\frac{x_2'-x_4'}{x_3'+x_1'}=\frac{x_3'-x_1'}{x_2'+x_4'}\,.$$

Покажем, наконец, что порядок плоского управления не может быть меньше двух при $n>2$. Стратегия доказательства основана на следующих двух замечаниях. Если $x=x(y,y')$ есть общее решение уравнения изотропности, то

$$d=\operatorname{rank}\left(\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_{n+2})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n+1},y_1',\ldots,y'_{n+1})}\right)\geq n+2\,.$$

В противном случае все изотропные кривые семейства $x=x(y,y')$ лежали бы на некоторой поверхности $\mathbb{R}^{2,n}$ размерности $d\leq n+2$, что противоречит тому обстоятельству, что через каждую точку $\mathbb{R}^{2,n}$ можно провести изотропную кривую. Второе замечание состоит в том, что максимальная размерность изотропного подпространства в $\mathbb{R}^{2,n}$ равна двум и, следовательно, любые три изотропных и взаимноортогональных вектора обязательно линейно зависимы.

Очевидно, что система не может быть 0-плоской, поскольку тогда мы имели бы $x=x(y)$ и, следовательно, $d\leq n+1$.

Допустим, что система является 1-плоской. В этом случае $x=x(y,y')$ и

$$x'=Dx+\sum_{\alpha=1}^{n+2}y_\alpha''x_{(\alpha)}\,,\qquad D=\sum_{\alpha=1}^{n+1}y_\alpha'\frac{\partial}{\partial y},\qquad x_{(\alpha)}=\frac{\partial x}{\partial y_\alpha'}.$$

Ввиду произвольности y_α'' из условия изотропности немедленно следует, что

$$(Dx,Dx)=0\,,\qquad (Dx,x_{(\alpha)})=0\,,\qquad (x_{(\alpha)},x_{(\beta)})=0\,. \tag{11}$$

В каждой точке общего положения векторы $x_{(\alpha)}$ порождают либо одномерное, либо двумерное изотропное подпространство I. Рассмотрим эти возможности по отдельности.

Пусть $\dim I = 1$. Без потери общности можно считать, что I порождается изотропным вектором $x_{(1)}$. Тогда существуют такие функции λ_α, $a = 2,3,...,n+1$, что

$$V_a x = 0\,, \qquad V_a = \frac{\partial}{\partial y'_a} - \lambda_a \frac{\partial}{\partial y'_1}\,.$$

Рассматривая дифференциальные следствия уравнений (11), находим

$$V_a(Dx, Dx) = 2(W_a x, Dx) = 0\,, \qquad V_a(Dx, x_{(1)}) = (W_a x, x_{(1)}) = 0\,,$$

$$W_a = \frac{\partial}{\partial y_a} + \lambda_a \frac{\partial}{\partial y_1}\,.$$

Следовательно, векторы $W_a x$ ортогональны изотропному подпространству J, порожденному векторами Dx и $x_{(1)}$. Отсюда нетрудно видеть, что при любой размерности J векторы $W_a x$, Dx и $x_{(1)}$ линейно зависимы, т.е. существуют такие функции ξ^a, μ и, λ не равные одновременно нулю, что

$$Wx = 0\,, \qquad W = \xi^a W_a + \mu D + \lambda \frac{\partial}{\partial y'_1}\,.$$

Вместе векторные поля V_a и W порождают $(n+1)$-мерное векторное распределение (не обязательно интегрируемое), оставляющее инвариантными функции $x(y, y')$. Следовательно, $d \le n+1$.

Пусть $\dim I = 2$ Можно считать, что $I = \operatorname{span}(x_{(1)}, x_{(2)})$. Тогда из соотношений (11) следует, что векторы Dx и $x_{(A)}$, где $A = 3,...,n+1$, принадлежат I. Иначе говоря, существуют такие функции σ, ν, λ_A и μ_A, что

$$\tilde{D}x = 0\,, \qquad V_A x = 0\,, \qquad \tilde{D} = D + \sigma \frac{\partial}{\partial y'_1} + \nu \frac{\partial}{\partial y'_2}\,,$$

$$V_A = \frac{\partial}{\partial y'_A} + \lambda_A \frac{\partial x}{\partial y'_1} + \mu_A \frac{\partial x}{\partial y'_2}\,. \tag{12}$$

Коммутатор векторных полей $\tilde{D}$ и V_A имеет вид

$$\tilde{W}_A = [V_A, \tilde{D}] = \frac{\partial}{\partial y_A} + \lambda_A \frac{\partial}{\partial y_1} + \mu_A \frac{\partial}{\partial y_2} + ...,$$

где точками обозначены слагаемые, пропорциональные $\partial / \partial y'_1$ и $\partial / \partial y'_2$. Уравнения $\tilde{W}_A x = 0$ являются условиями интегрируемости системы (12). Очевидно, что векторные поля V_A и $\tilde{W}_A$ линейно независимы и порождают $(2n-2)$-мерное векторное распределение. Условие инвариантности функции $x(y, y')$ относительно действия этого (не обязательно интегрируемого) распределения означает, что $d \le (2n+2) - (2n-2) = 4$. Следовательно, в размерности больше четырех функции $x = x(y, y')$ не могут параметризовать все изотропные кривые. В четырех измерениях изотропные кривые действительно составляют 1-плоскую динамическую систему, как было показано выше.

Заключение

Сделаем несколько замечаний, касающихся полученных результатов.

До сих пор неизвестно, определяют ли изотропные кривые пространства Минковского плоскую динамическую систему в размерности больше четырех. С помощью рассуждений, аналогичных тем, что использовались в данной работе, можно показать, что порядок плоского управления для изотропных кривых в $\mathbb{R}^{1,n}$ не может быть меньше n. Это, в частности, согласуется с результатами работы [6], где с помощью твисторной техники была предложена параметризация изотропных кривых в $\mathbb{R}^{1,3}$, вовлекающая третью производную функциональных параметров. К сожалению, попытки распространить эту технику на высшие измерения пока не привели к успеху [7].

Как мы видели, в случае $\mathbb{R}^{2,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$ параметризация множества изотропных кривых и плоский выход задаются рациональными функциями. В высших измерениях функции плоского выхода вовлекают радикалы. Меняя сигнатуру квадратичной формы в (9), можно получить параметризацию изотропных кривых в псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$ с $\min(p,q) > 2$. Возможные векторы скорости этих кривых будут покрывать, однако, лишь некоторую открытую область на световом конусе. Существование в случае высших измерений рациональной параметризации с рациональными функциями выхода остается еще одним открытым вопросом.

Легко видеть, что параметризация изотропных кривых в псевдоевклидовых пространствах дает одновременно и локальное представление для изотропных кривых конформно плоских псевдоримановых многообразий соответствующей сигнатуры, например пространств постоянной кривизны. Было бы интересно описать класс псевдоримановых метрик, допускающих плоское управление изотропными кривыми заданного порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fliess M., Levine J., Martin Ph., and Rouchon P. // Int. J. Contr. – 1995. – V. 61. – No. 6. – P. 1327–1361.
2. Hilbert D. // Math. Ann. – 1912. – V. 73. – P. 95–108.
3. Lyakhovich S.L. and Sharapov A.A. // J. Math. Phys. – 2009. – V. 50. – P. 083510.
4. Hitchin N.J. // Commun. Math. Phys. – 1982. – V. 83. – P. 579–602.
5. Budinich P. // Commun. Math. Phys. – 1986. – V. 107. – P. 455–465.
6. Hughston L.P. and Show W.T. // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1987. – V. 414. – P. 415–422.
7. Hughston L.P. and Show W.T. // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1987. – V. 414. – P. 423–431.
8. Gollek H. // Filomat. – 2009. – V. 23. – No. 2. – P. 12–27.

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия
E-mail: latyshev1992@mail.ru; sll@phys.tsu.ru; sharapov@phys.tsu.ru

Поступила в редакцию 06.03.15.

Латышев Александр Михайлович, магистрант;
Ляхович Семен Леонидович, д.ф.-м.н., профессор;
Шарапов Алексей Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор.