УДК 515.12
DOI 10.17223/19988621/39/6

Т.Е. Хмылёва

О ГОМЕОМОРФИЗМЕ ПРЯМОЙ ЗОРГЕФРЕЯ И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ S_Q

Доказывается негомеоморфность двух топологических пространств, а именно, прямой Зоргенфрея S и ее модификации S_Q, где Q – множество рациональных чисел на прямой. При доказательстве используется монотонность гомеоморфизма $\varphi: S \to S$ на некотором интервале $(a,b) \subset S$. Этот факт установил E. K. Van Douwen. Вопросы о гомеоморфизме прямой Зоргенфрея и ее модификаций рассматривались в работе V.A. Chatyrko, Y. Hattory, где топология «стрелки» на некотором множестве A заменена на евклидову топологию, а также в работе Е.С. Сухачевой, Т.Е. Хмылевой, где доказывается гомеоморфность пространств S и S_A, если A – это подмножество счетного замкнутого множества на прямой $\mathbb{R}$ и пространство S_A определяется аналогично пространству S_Q.

Ключевые слова: *стрелка Зоргенфрея, гомеоморфизм, бэровское пространство, множество первой категории.*

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, наделенное стандартной евклидовой топологией; $Q \subset \mathbb{R}$ – подмножество рациональных чисел; $J \subset \mathbb{R}$ – подмножество иррациональных чисел; S – прямая Зоргенфрея (или «стрелка») с топологией, порожденной базой $\{(a,b]: a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

Если множество $A \subset \mathbb{R}$, то через S_A обозначается множество вещественных чисел, наделенное топологией, в которой база окрестностей определяется следующим образом:

$$\text{если } x \in A \text{, то } B_x = \{[x,a): a \in \mathbb{R},\ \mathrm{x} < a\};$$

$$\text{если } x \in \mathbb{R} \setminus A \text{, то } B_x = \{(a,x]: a \in \mathbb{R},\ a < x\}.$$

Если промежуток $(a,b) \subset S_A$, то пишем $(a,b)_A$.

Определение 1 Топологическое пространство X называется бэровским, если пересечение любой последовательности открытых всюду плотных в X подмножеств является всюду плотным.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1 . Пространства S и S_Q не являются гомеоморфными.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующие факты.

Предложение 1. Пространство S является бэровским.

Доказательство. Пусть $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность открытых всюду плотных подмножеств в S. Каждое множество G_n есть объединение непересекающихся интервалов вида $(a,b]$ или (c,d). Заменяя интервалы вида $(a,b]$ на интервалы

(a,b), получим множество G_n', которое будет открыто на прямой $\mathbb{R}$ и всюду плотно в $\mathbb{R}$. Так как $\mathbb{R}$ – бэровское пространство, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n'$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, а следовательно, всюду плотно в *S*.

Поскольку плотные G_δ-множества в бэровском пространстве являются бэровскими (Ткачук [4]), получаем следующее следствие.

Следствие 1. Подмножество иррациональных точек $J \subset S_Q$ является бэровским пространством.

Предложение 2. Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ пространство S_A является бэровским.

Доказательство аналогично предложению 1 с тем отличием, что открытое множество $G \subset S_A$ есть объединение непересекающихся интервалов вида интервалов вида (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ или $[a,b]$.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi : S_Q \to S$. Тогда $\varphi|_J$ является гомеоморфизмом пространства J на некоторое подмножество S. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$F_n = \left\{ x \in J : x - \frac{1}{n} < y < x \text{ и } y \in J \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(x) \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$. Так как отображение φ непрерывно, то для каждой точки $x \in J$ найдется окрестность $(x-\varepsilon, x]$, такая, что $\varphi(y) < \varphi(x)$ для любого $y \in (x-\varepsilon, x]$. Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = J$.

Покажем, что множества F_n замкнуты в J. Пусть точка $x_0 \in J$ является предельной для множества F_n. Тогда существует возрастающая последовательность $x_k \in F_n$, такая, что $\lim_{x\to\infty} x_k = x_0$. Для точки $y \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 \right) \cap J$ найдется x_{k_0}, для которой $y < x_{k_0} < x_0$. Следовательно, при всех $k \ge k_0$ выполняется неравенство $y < x_k < x_0$. Так как $x_k \in F_n$, а $y \in \left(x_k - \frac{1}{n}, x_k \right]$, то $\varphi(y) < \varphi(x_k)$ и в силу непрерывности функции φ выполняется неравенство $\varphi(y) \le \varphi(x_0)$. Поскольку φ является гомеоморфизмом и $y \ne x_0$, то $\varphi(y) < \varphi(x_0)$ и по определению F_n получаем, что $x_0 \in F_n$.

По предложению 1 множество J является бэровским пространством и, значит, существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого $\operatorname{int}_J F_{n_0} \ne \varnothing$. Следовательно, существует интервал (p,q), такой, что $(p,q) \cap J \subset F_{n_0}$. Не нарушая общности, можно считать, что $q - p < \frac{1}{n_0}$. Для любых двух точек $x, y \in (p,q) \cap J$ выполняется неравенство $\varphi(x) < \varphi(y)$, поскольку $y \in F_{n_0}$ и $y - \frac{1}{n_0} < x < y$, т.е. функция φ на интервале $(p,q) \cap J$ является строго возрастающей.

Рассмотрим теперь рациональную точку $r \in (p,q) \subset S_Q$ и последовательность иррациональных точек $x_k \in (p,q)$, такую, что $\lim\limits_{x\to\infty} x_k = r$ и $x_1 > x_2 > \ldots$. В силу возрастания функции φ на интервале $(p,q) \bigcap T$ последовательность $\varphi(x_k)$ является убывающей на «стрелке» *S*, что противоречит условию $\lim \varphi(x_k) = \varphi(r)$, которое должно быть выполнено в силу непрерывности функции φ.

Теорема 2. Если подмножество $T \subset S$ гомеоморфно S, а D счетное всюду плотное в T подмножество, то пространства S_D и S не являются гомеоморфными.

Доказательство. Поскольку T гомеоморфно S, то по предложению 1 пространство T является бэровским. Следовательно, $T \setminus D$ также бэровское, так как является плотным G_δ-подмножеством в T [4]. Кроме того, из гомеоморфности T и S следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $t \in T$ множество $(t-\varepsilon, t] \bigcap (T \setminus D)$ является несчетным. Это означает, что для любой точки $d \in D \subset T$ найдется последовательность $y_n \in T \setminus D$, которая сходится к точке d, возрастая, и, значит, в пространстве S_D последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предельных точек.

Предположим теперь, что существует гомеоморфизм $\varphi : S_D \to S$. Так же, как и в теореме 1, доказываем существование интервала (p,q), такого, что функция $\varphi\big|_{(p,q)\bigcap(T\setminus D)}$ является возрастающей. Рассмотрим точки $d_1, d_2 \in (p,q) \bigcap D$, $d_1 < d_2$ и последовательности точек $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ из множества $T \setminus D$, которые, возрастая, сходятся к точкам d_1 и d_2 соответственно, но не имеют предельных точек в S_D. Отсюда следует, что

$$\varphi(y_1) < \ldots < \varphi(y_n) < \ldots < \varphi(z_1) < \ldots \varphi(z_n) < \ldots$$

и, следовательно, возрастающая последовательность $\varphi(y_n)$ является ограниченной, а значит, сходящейся в пространстве S. Получаем противоречие с предположением о непрерывности отображения φ^{-1}.

Следствие 2. Пусть $F \subset S$ замкнутое подпространство без изолированных точек и $D \subset F$ счетное всюду плотное в F подмножество. Тогда пространства S_D и S не являются гомеоморфными.

Для доказательства достаточно заметить что в этом случае подпространство F гомеоморфно S. Доказательство этого факта можно найти в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van Douwen E.K.* Retracts of the Sorgenfrey line // Compositio Mathematica. 1979. T. 38. No. 2. P. 155–161.
2. *Chatyrko V.A.*, *Hattori Y.* A poset of topologies on the set of real numbers // Comment. Math. Univ. Carolin. 2013. V. 54. No. 2. P. 189–196.

3. *Хмылева Т.Е.*, *Сухачева Е.С.* О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 5.
4. *Tkachuk V.V.* Cp-theory Problem Book. Topological and functional analysis. Springer, 2015.
5. *Burke D.K.*, *Moore J.T.* Subspaces of the Sorgenfrey line // Topology and its Applications. 1998. V. 90. No. 1. P. 57–68.

Статья поступила 11.01. 2016 г.

Khmyleva T.E. ON THE HOMEOMORPHISM OF THE SORGENFREY LINE AND ITS MODIFICATIONS S_Q

DOI 10.17223/19988621/39/6

Khmyleva T.E. ON THE HOMEOMORPHISM OF THE SORGENFREY LINE AND ITS MODIFICATIONS S_Q.

In this paper, it is proved that two topological spaces, namely, the Sorgenfrey line S and its modifications S_Q, where Q is the set of rational numbers on the real line, are nonhomeomorphic. Topology of the space S_Q is defined as follows: if $x \in Q \subset S$, then the base of neighborhoods of the point x is the family of semiintervals $\{[x, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, and if $x \in S \setminus Q$, then the base of the neighborhood is a family of semiintervals $\{(x-\varepsilon, x] : \varepsilon > 0\}$. The proof of this fact uses monotonicity of the homeomorphism $\varphi : S \to S$ on some interval $(a,b) \subset S$ (E.K. Van Douwen, 1979).

Keywords: Sorgenfrey line, Baire space, homeomorphism, first category set.

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: TEX2150@yandex.ru.

REFERENCES

1. Van Douwen E.K. Retracts of the Sorgenfrey line. *Compositio Mathematica*, 1979, vol. 38, no. 2, pp. 155–161.
2. Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 189–196.
3. Khmyleva T.E., Sukhacheva E.S. O nekotorykh lineyno uporyadochennykh topologicheskikh prostranstvakh, gomeomorfnykh pryamoy Zorgenfreya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 5.
4. Tkachuk V.V. *Cp-theory Problem Book. Topological and functional analysis*. Springer, 2015.
5. Burke D.K., Moore J.T. Subspaces of the Sorgenfrey line. *Topology and its Applications*, 1998, vol. 90, no. 1, pp. 57–68.