

На правах рукописи



Петрушевич Денис Андреевич

**НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
ОРИЕНТИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ**

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники», на кафедре высшей математики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Шелепин Алексей Леонидович

Официальные оппоненты:

Гаврилов Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена», кафедра общей и экспериментальной физики, доцент

Чуприков Николай Леонидович, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный педагогический университет», кафедра теоретической физики, профессор

Ведущая организация:

Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московской области «Университет «Дубна», г. Дубна.

Защита состоится 02 июня 2016 г. в 16:30 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/PetrusevichDA02062016.html>

Автореферат разослан « ____ » марта 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.267.07



Киреева
Ирина Васильевна

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Область приложений теоретико-групповых методов в теоретической физике постоянно расширяется. На языке теории групп формулируются имеющие фундаментальное значение свойства симметрии физических систем; в частности, теория представлений групп лежит в основе квантового описания объектов, обладающих ориентацией. Ориентация в трехмерном евклидовом пространстве задается элементом группы вращений $SO(3) \sim SU(2)$, в пространстве Минковского – элементом группы Лоренца $SO(3, 1) \sim SL(2, C)$.

В квантовой теории присутствуют два важных примера ориентируемых объектов. Первый – жесткий нерелятивистский ротатор, второй – частицы, обладающие спином. Естественное рассмотрение квантовомеханического описания таких ориентируемых объектов достигается введением волновых функций, зависящих не только от координат центра масс, но также от дополнительных переменных, описывающих ориентацию. Набор пространственных и ориентационных координат можно рассматривать как элемент группы движений пространства, являющейся полупрямым произведением групп трансляций и вращений.

Рассмотрение релятивистских полей, зависящих от дополнительных непрерывных переменных, связанных с ориентацией или спином, имеет длительную историю. Тем не менее, до последнего времени единственным примером хорошо разработанной физической теории, где волновая функция зависит от ориентации была теория нерелятивистского жесткого ротатора, построенная еще в 1930-е годы. Последовательное рассмотрение квантовых объектов, обладающих ориентацией, важно не только само по себе, но и для решения ряда задач, связанных с наличием спина, как в нерелятивистской, так и в релятивистской квантовой теории.

Настоящая работа посвящена исследованию ряда аспектов теории квантовых ориентированных объектов.

Цель работы – развитие методов описания ориентации на основе теории представлений групп Ли и их применение к состояниям квантового ротатора и нахождению точных решений релятивистских волновых уравнений, в том числе бесконечнокомпонентных уравнений Майораны.

Научная новизна исследования определяется тем, что на основе использования волновых функций, зависящих от координат и ориентации, производится построение когерентных состояний ротатора и развиваются оригинальные методы в теории релятивистских волновых уравнений.

Научно-практическая значимость результатов, полученных в диссертации, заключается в возможности их использования в ядерной,

атомной и молекулярной спектроскопии, физике элементарных частиц и когерентных явлений, в частности, при построении точных решений релятивистских волновых уравнений.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Построена система КС квантового ротатора $|j\mu\nu\rangle$, обладающих минимальной неопределённостью. Они имеют определённую проекцию j на подвижную ось, жёстко связанную с ротатором, и на неподвижную ось.
2. Показано, что в системах с квадратичным по генераторам группы $SO(3)$ гамильтонианом КС со временем, в общем случае, “расплывается” (для аксиально-симметричного ротатора такого расплывания нет); при больших значениях углового момента j уравнения на параметры КС переходят в классические уравнения Эйлера, при малых j их правая часть отличается численным множителем, что соответствует замедлению прецессии.
3. Получены точные решения 2+1-мерных аналогов уравнений Майораны и Бхаббы в постоянном однородном магнитном поле. Предложена методика построения точных решений конечно- и бесконечнокомпонентных релятивистских волновых уравнений во внешнем поле, основанная на их записи через генераторы групп Ли и разделении пространственных и ориентационных переменных.
4. Для уравнений Майораны, описывающих произвольные спины, как и для конечнокомпонентных уравнений спинов $1/2$ и 1 , решения существуют при любых значениях напряженности магнитного поля, и их спектры обладают сходным поведением. Для конечнокомпонентных уравнений для высших спинов ($s > 1$) уровни энергии при больших напряженностях поля становятся комплексными.
5. Для 2+1-мерных уравнений Дирака и Майораны (спин $1/2$) во внешнем электромагнитном поле проведено разложение по степеням $1/c$. В первом приближении ($1/c$) разложения совпадают (уравнение Паули). Различия возникают во втором приближении (учитываются члены до $1/c^2$), в постоянном однородном магнитном поле - в третьем.

Достоверность результатов и выводов диссертационной работы обеспечивается корректностью проведенных расчетов; подтверждается соответствием результатов, полученных разными методами, в тех случаях,

когда это возможно, и согласием полученных результатов с выводами других исследователей в некоторых частных случаях.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на 60-й (2011), 61-й (2012) и 62-й (2013) Научно-технических конференциях МГТУ МИРЭА, на семинарах ЛЯР ОИЯИ (Дубна) и МГТУ МИРЭА.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 6 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК РФ. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора. Все изложенные в диссертации результаты получены автором лично. Автор принимал активное участие в обсуждении, интерпретации полученных результатов и написании статей. Вклад соискателя в опубликованные работы, вошедшие в диссертацию, является решающим.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, библиографии из 90 наименований и приложения. Работа изложена на 140 страницах, содержит 11 рисунков и 1 таблицу. Библиография включает 90 наименований на 10 страницах.

Содержание работы

Во введении отражена актуальность работы, указана цель проводимых автором исследований, кратко изложено содержание работы по главам.

В первой главе “Описание ориентируемых объектов в квантовой теории” рассматривается описание ориентированных объектов в нерелятивистской и релятивистской квантовой теории, использование для этого когерентных состояний (КС), и дается обзор литературы.

Во второй главе строятся когерентные состояния (КС) квантового ротатора. Далее рассматривается эволюция КС, уравнения для параметров построенных КС, условия, при которых эти уравнения переходят в классические уравнения Эйлера.

При описании ротатора обычно рассматриваются 2 системы отсчета: лабораторная e_i и связанная с телом, векторы которой ξ_a направлены вдоль главных осей тензора инерции. Имеется два вида преобразований: вращения лабораторной системы — “внешние” преобразования и вращения системы, связанной с телом, — внутренние преобразования.

Ориентация ротатора в лабораторной системе задается матрицей поворота $\Lambda \in SO(3) \sim SU(2)$, связывающей базисы e_i и ξ_a и зависящей от трех действительных параметров, — углов Эйлера. Нам будет удобнее использовать выражающиеся через них комплексные параметры Кэли-Клейна z_1, z_2 , $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, являющиеся элементами первой строки

матрицы $Z \in SU(2)$. Волновые функции квантового ротатора зависят от его ориентации, и являются функциями на группе $SO(3) \sim SU(2)$.

Дискретный базис в пространстве таких функций $|jmk\rangle$ отвечает состояниям с определённой проекцией m на неподвижную ось и с проекцией k на подвижную ось, жёстко связанную с ротатором.

При внутреннем преобразовании g_r матрица Z преобразуется следующим образом: $Z' = Zg_r$, тогда как при внешнем преобразовании g_l имеем $Z' = g_l^{-1}Z$. В общем случае

$$Z' = g_l^{-1}Zg_r, \quad \text{где} \quad g_l = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -\bar{u}_2 & \bar{u}_1 \end{pmatrix}, \quad g_r = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -\bar{v}_2 & \bar{v}_1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Очевидно, общие преобразования

$$\Pi(g_l, g_r) \in SU(2)_{\text{ext}} \times SU(2)_{\text{int}}. \quad (2)$$

Согласно (1), общие преобразования (2) определяют представление $T(g_l, g_r)$ группы $SU(2)_{\text{ext}} \times SU(2)_{\text{int}}$ в пространстве скалярных функций $\Psi(Z)$ (волновые функции ротатора):

$$T(g_l, g_r)\Psi(Z) = \Psi'(Z) = \Psi(g_l^{-1}Zg_r). \quad (3)$$

Ясно, что генераторы представления $T(g_l, g_r)$ состоят из генераторов \hat{J}_i и \hat{J}_a^R в левом $T_L(g_l)$ и правом $T_R(g_r)$ регулярных представлениях группы $SU(2)$.

Согласно схеме Переломова, в рассматриваемом случае КС являются орбитами старших весов $|j j j\rangle$ группы $SU(2)_{\text{int}} \times SU(2)_{\text{ext}}$.

Поворотом лабораторной системы (т.е. внешним преобразованием) из состояния $|j j j\rangle = \bar{z}_1^{2j}$ мы получаем “левые” КС $|j u j\rangle$,

$$|j u j\rangle = (u_1 \bar{z}_1 + \bar{u}_2 z_2)^{2j} = \sum_{m=-j}^j \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{1/2} u_1^{j+m} \bar{u}_2^{j-m} |j m j\rangle, \quad (4)$$

где $u_1 = \cos(\gamma/2)e^{i\delta/2}$ и $u_2 = \sin(\gamma/2)e^{-i\delta/2}$. В записи (4) вид этих состояний совпадает с видом КС углового момента. Однако в случае ротатора z_1, z_2 зависят от трех переменных (углов Эйлера ϕ, θ, ψ , являющихся координатами на группе $SU(2)$), а в случае КС углового момента — только от двух переменных ϕ, θ , являющихся координатами на однородном пространстве $SU(2)/U(1)$.

В то же время состояние $|j u j\rangle$ — это собственный вектор проектора \hat{J}_n на направление, заданное единичным вектором \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = (\sin \gamma \cos \delta, \sin \gamma \sin \delta, \cos \gamma), \quad n_i = \sigma_i^{\alpha\beta} \bar{u}_\alpha u_\beta. \quad (5)$$

т.е., $\hat{J}_n |j u j\rangle = j |j u j\rangle$.

Применяя внутренние преобразования к состоянию $|j j j\rangle = \bar{z}_1^{2j}$, получаем “правые” КС $|j j v\rangle$ ротатора:

$$|j j v\rangle = (\bar{v}_1 \bar{z}_1 + v_2 (-\bar{z}_2))^{2j} = \sum_{k=-j}^j \left(\frac{(2j)!}{(j+k)!(j-k)!} \right)^{1/2} \bar{v}_1^{j+k} v_2^{j-k} |j j k\rangle, \quad (6)$$

где $v_1 = \cos(\gamma/2)e^{i\delta/2}$ и $v_2 = \sin(\gamma/2)e^{-i\delta/2}$.

Состояние $|j j k\rangle$ обладает определённой проекцией k на ось ξ^3 в системе, связанной с телом. Соответственно, КС $|j j v\rangle$ — это состояние с максимальной проекцией $k = j$ углового момента на направление

$$\boldsymbol{\nu} = (\sin \gamma \cos \delta, \sin \gamma \sin \delta, \cos \gamma), \quad \nu_a = \sigma_a^{\alpha\beta} \bar{v}_\alpha v_\beta.$$

Т.е., КС $|j j v\rangle$ — это собственный вектор проектора \hat{I}_ν на направление $\boldsymbol{\nu}$, заданное углами γ, δ в системе, связанной с телом,

$$\hat{I}_\nu |j j v\rangle = j |j j v\rangle.$$

Вектор квазиклассического вращения или угловая скорость определяется компонентами

$$\omega_a = A_a^{-1} \hbar \langle \hat{I}_a \rangle, \quad (7)$$

где A_a — главные моменты инерции, и для КС (6) имеем $\omega_a = A_a^{-1} j \hbar \nu_a$.

Исходя из состояния $|j j j\rangle$, поворотами лабораторной и связанной с телом систем получим КС $|j u v\rangle$ ротатора:

$$\begin{aligned} |j u v\rangle &= (u_1 \bar{v}_1 \bar{z}_1 + \bar{u}_2 \bar{v}_1 z_2 + \bar{u}_2 v_2 z_1 + u_1 v_2 (-\bar{z}_2))^{2j} \\ &= \sum_{m,k=-j}^j \frac{(2j)!}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+k)!(j-k)!}} u_1^{j+m} \bar{u}_2^{j-m} \bar{v}_1^{j+k} v_2^{j-k} |j m k\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Построенные КС $|j u v\rangle$ характеризуются проекциями j углового момента на ось \mathbf{n} в лабораторной системе и на ось $\boldsymbol{\nu}$ в системе, связанной с телом. При фиксированном полном угловом моменте j эти состояния обладают минимальной инвариантной относительно $SU(2) \times SU(2)$ дисперсией

$$\Delta J_\Sigma^2 = \sum (\Delta I_a)^2 + \sum (\Delta J_i)^2 = 2j. \quad (9)$$

Отметим, что построенные ранее в ряде работ КС ротатора с неопределённым полным моментом являются суммами состояний $|j u v\rangle$ с коэффициентами, зависящими от j .

Далее мы рассматриваем эволюцию построенных КС во времени в системах с квадратичным по генераторам \hat{I}_a гамильтонианом

$$\hat{H} = \hbar^2 \left(\frac{1}{2A_1} \hat{I}_1^2 + \frac{1}{2A_2} \hat{I}_2^2 + \frac{1}{2A_3} \hat{I}_3^2 \right) + U, \quad (10)$$

где A_a – главные моменты инерции, U – потенциальная энергия ротатора.

Выберем КС ротатора $|j j v\rangle$ (6) в качестве начального. В случае фундаментального представления ($j = 1/2$) КС всегда сохраняют свой вид. В общем случае форма волнового пакета со временем изменяется (пакет “расплывается”).

Тем не менее, для свободного аксиально-симметричного ротатора ($A_1 = A_2 = A$) оказалось возможным построить нерасплывающиеся решения уравнения Шрёдингера, близкие к КС:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{j(j+1)}{2A} t \right] \sum_k c_k \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} k^2 \Omega t \right) |j j k\rangle, \\ c_k &= \left(\frac{(2j)!}{(j+k)!(j-k)!} \right)^{1/2} \bar{v}_1^{j+k} v_2^{j-k}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Omega = \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A} \right)$. При этом $\Psi(0) = |j j v\rangle$ – это КС (6). Функция $\Psi(z, t)$ является периодической (с точностью до фазового множителя), её период $T_0 = 4\pi\hbar\Omega^{-1}$. Таким образом, в моменты времени nT_0 волновая функция $\Psi(z, t)$ снова приобретает вид КС. Значит, неопределённость ΔI^2 не возрастает, а волновой пакет не расплывается со временем.

Рассмотрение изменения средних значений $\langle I_i \rangle$ со временем в терминах проекций угловых скоростей ω_a (см. (7)) приводит к аналогам классических уравнений Эйлера:

$$A_a \dot{\omega}_a = \frac{2j-1}{2j} \epsilon^{abc} A_b \omega_b \omega_c + K_a. \quad (12)$$

где $K_a = i\hat{I}_a U$ – момент вращения.

Для $j = 1/2$ КС стабильны и эволюция во времени сводится к изменению параметров КС согласно уравнениям:

$$A_a \dot{\omega}_a = K_a,$$

при $K_i = 0$ прецессия отсутствует и со временем меняется только фаза волновой функции.

Уравнения (12) можно трактовать, как квантовую версию уравнений Эйлера для классического ротатора. Они отличаются от классических выражений только множителем $(2j-1)/2j$ в правой части. Следует отметить, что для малых j этот множитель существенно отличается от 1. Это отличие приводит к замедлению прецессии ротатора; он стремится к классическому значению 1 при $j \rightarrow \infty$. Таким образом, $(j)^{-1}$ можно рассматривать как малый безразмерный параметр, описывающий переход к классическому пределу.

В третьей главе рассматриваются решения релятивистских волновых уравнений (РВУ) в пространстве 2+1 измерений, имеющих вид $(\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu - \kappa)\psi = 0$. В пространстве 2+1 измерений конечнокомпонентные РВУ (аналоги уравнений Бхаббы, и в частности, уравнений Дирака и Даффина-Кеммера) связаны с конечномерными неунитарными, а РВУ, аналогичные уравнениям Майораны в 3+1-мерном пространстве, — с бесконечномерными унитарными представлениями группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$. Последние уравнения описывают частицы с произвольным действительным спином в 2+1-мерном пространстве и используются в релятивистской теории анионов.

Ориентация в пространстве 2+1 измерений задается элементом группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$. Также, как и в случае нерелятивистского ротатора, ориентация определяется 3 действительными параметрами, но удобнее использовать аналоги параметров Кэли-Клейна z_1, z_2 , $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 1$, являющиеся элементами первой строки матрицы $Z \in SU(1,1)$. В пространстве однокомпонентных функций, зависящих от ориентационных переменных, операторы \hat{S}^μ , входящие в РВУ, представляют собой не конечно- или бесконечно- компонентные матрицы, а дифференциальные операторы. Это оказывается очень удобным при решении уравнений с большим или с бесконечным (уравнения Майораны) компонент.

В пространстве функций от x, z свободные решения уравнений Майораны компактно записываются как КС 2+1-мерной группы Лоренца $SU(1,1)$,

$$f(x, z) = f_u^+(z)\psi(x) = (z_1 u^2 + \bar{z}_2 u^1)^{2S} e^{ipx}, \quad (13)$$

где

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m \\ -p_1 + ip_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Обычное описание с помощью многокомпонентных функций, зависящих только от x^μ , дается разложением в ряд (конечный или бесконечный) по степеням комплексных ориентационных переменных.

Далее мы рассматриваем частицу во внешнем электромагнитном поле, описываемую уравнением вида:

$$\hat{L}f(x, z) = \kappa f(x, z), \quad \hat{L} = (\hat{p}_\mu - eA_\mu)\hat{S}^\mu, \quad \kappa = \pm mS. \quad (15)$$

В пространстве $2 + 1$ измерений магнитное поле имеет одну компоненту $B(x) = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}$. Выберем потенциал $A_\mu = (0, 0, Bx^1)$, отвечающий однородному постоянному магнитному полю.

Введя обозначение $\xi = \sqrt{\frac{|eB|}{c}}(x^1 - p_2\frac{c}{eB})$ и восстановив c в формулах, получим

$$\hat{L} = p_0\hat{S}^0 - \sqrt{|eB|c} \left(i\hat{S}^1\frac{\partial}{\partial\xi} + \text{sgn}(eB)\hat{S}^2\xi \right). \quad (16)$$

Перепишем теперь эту формулу в терминах операторов рождения и уничтожения (генераторов группы Гейзенберга-Вейля $W(1)$), а также повышающих и понижающих операторов группы $SU(1, 1)$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right), & \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}\right), \\ \hat{S}_- &= \hat{S}^1 - i\hat{S}^2 = z_1\frac{\partial}{\partial z_2}, & \hat{S}_+ &= \hat{S}^1 + i\hat{S}^2 = z_2\frac{\partial}{\partial z_1}; \end{aligned} \quad (17)$$

при $\text{sgn}(eB) = -1$ имеем

$$\hat{L} = p_0\hat{S}^0 + \varkappa(\hat{a}\hat{S}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{S}_-), \quad \text{где } \varkappa = \sqrt{|eB|c\hbar/2}. \quad (18)$$

При $\text{sgn}(eB) = +1$ операторы \hat{S}_- и \hat{S}_+ в (18) меняются местами. Итак, мы представили оператор \hat{L} в виде комбинации генераторов групп $W(1)$ и $SU(1, 1)$.

Если решения свободных уравнений (13) представляют собой произведение функций, зависящих от ориентации и пространственных переменных, то в задаче о магнитном поле оказывается возможным разделение пространственных и ориентационных переменных. Операторы \hat{p}_0 и \hat{p}_2 коммутируют с \hat{L} , ищем решения в виде их собственных функций:

$$f_{p_0p_2}(x, z) = e^{-i(p_0x^0 - p_2x^2)}\Phi(x^1, z), \quad (19)$$

$$\Phi(x^1, z) = \sum_{n, S_0} C_{nS_0}|nSS_0\rangle = \sum_{n, S_0} C_{nS_0}\Psi_n(\xi)\Psi_{SS_0}(z), \quad (20)$$

где $\Psi_n(\xi)$, выражающиеся через полиномы Эрмита, образуют базис НП группы $W(1)$, $\hat{a}^\dagger\hat{a}\Psi_n(\xi) = n\Psi_n(\xi)$, а $\Psi_{SS_0}(z)$ при фиксированном S образуют базис НП группы $SU(1, 1)$. Для функций $\Psi_{s_s^0}(z)$ имеем 2 различных случая,

отвечающих конечномерным неунитарным НП T_S^0 группы $SU(1, 1)$, $-S \leq S_0 \leq S$, $2S \geq 0$, целое,

$$|SS_0\rangle = \left[\frac{(2S)!}{(S+S_0)!(S-S_0)!} \right]^{1/2} z_1^{S+S_0} z_2^{S-S_0}, \quad S^0 = -S, -S+1, \dots, S. \quad (21)$$

и бесконечномерным унитарным НП дискретных серий T_S^+ , $S^0 \geq |S|$ и T_S^- , $S^0 \leq |S|$, $S < 0$, $n_1 = S + S_0$, $n_2 = S - S_0$,

$$T_S^+ : |SS_0\rangle = \left(\frac{\Gamma(-n_2)}{\Gamma(-2S)n_1!} \right)^{1/2} (-i)^{n_1} z_1^{n_1} z_2^{n_2}, \quad n_1 \geq 0, \text{ целое, } n_2 < 0. \quad (22)$$

Оператор \hat{L} , действуя на состояние $|nSS_0\rangle$, даёт линейную комбинацию, в которую, кроме состояний $|nSS_0\rangle$, входят два состояния $|n \pm 1, S, S_0 \pm 1\rangle$ или $|n \pm 1, S, S_0 \mp 1\rangle$ в зависимости от $\text{sgn}(eB)$. При $\text{sgn}(eB) = -1$ имеем

$$T_S^0 : \hat{L}|nSS_0\rangle = p_0 S_0 |nSS_0\rangle + \varkappa \sqrt{n(S+S_0+1)(S-S_0)} |n-1, S, S_0+1\rangle - \varkappa \sqrt{(n+1)(S+S_0)(S-S_0+1)} |n+1, S, S_0-1\rangle. \quad (23)$$

$$T_S^+ : \hat{L}|nSS_0\rangle = p_0 S_0 |nSS_0\rangle - i\varkappa \sqrt{n(S+S_0+1)(-S+S_0)} |n-1, S, S_0+1\rangle + i\varkappa \sqrt{(n+1)(S+S_0)(-S+S_0+1)} |n+1, S, S_0-1\rangle. \quad (24)$$

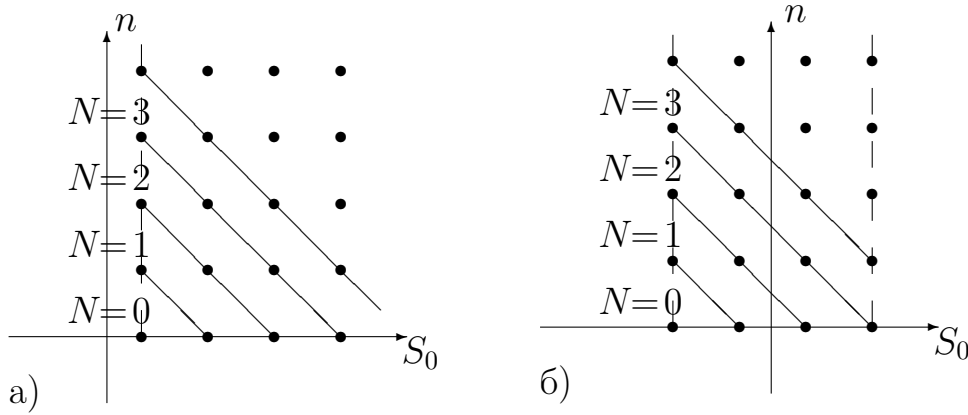


Рис. 1: Состояния $|nSS_0\rangle$, входящие в разложение волновой функции, отвечающей N -му уровню, для бесконечномерных унитарных НП T_S^+ , $S = -s = -1/2$, и конечномерных НП T_S^0 , $S = -s = -3/2$, группы $SU(1, 1)$.

Рассмотрение инвариантных подпространств оператора \hat{L} в терминах состояний $|nSS_0\rangle$ (рис.1) позволяет записать решения $\Phi_N(x^1, z)$, отвечающие N -му уровню энергии (случай $\text{sgn}(eB) = -1$), в виде

$$T_S^0 : \Phi_N(x^1, z) = \sum_{K=0}^{\min(N, 2S)} c_K |N-K, S, -S+K\rangle, \quad (25)$$

$$T_S^+ : \Phi_n(x^1, z) = \sum_{K=0}^N c_K |N-K, S, -S+K\rangle, \quad (26)$$

При $2S \geq N$ столбец $\tilde{\Phi}_N$ из функций, входящих в разложение (25), имеет $N+1$ компоненту, $\tilde{\Phi}_N = (|N, S, -S\rangle, \dots, |0, S, -S+N\rangle)^T$, а при $2S \leq N$ имеет $2S+1$ компоненту, $\tilde{\Phi}_N = (|N, S, -S\rangle, \dots, |N-S, S, S\rangle)^T$ (рис. 1б). Столбец $\tilde{\Phi}_N$ из функций, входящих в разложение (26), имеет $N+1$ компоненту (рис. 1а).

Действие оператора \hat{L} теперь можно записать в матричной форме,

$$(\hat{L} \pm mc^2 S)\tilde{\Phi}_N = A\tilde{\Phi}_N = 0. \quad (27)$$

Матрица A – трехдиагональная, для конечномерных НП группы $SU(1, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} (-p_0 \pm mc^2)S & \varkappa\sqrt{2SN} & \dots & 0 \\ -\varkappa\sqrt{2SN} & (-p_0 \pm mc^2)S + p_0 & \dots & 0 \\ 0 & -\varkappa\sqrt{2(2S-1)(N-1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varkappa\sqrt{N(2S-N)} \\ 0 & 0 & \dots & (-p_0 \pm mc^2)S + Np_0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где последний столбец выписан для $N \leq 2S$ (в этом случае A – это $(N+1) \times (N+1)$ матрица, а в случае $N \geq 2S$ A – это $(2S+1) \times (2S+1)$ матрица). Для бесконечномерных НП получим эрмитову матрицу,

$$A = \begin{pmatrix} (p_0 \mp mc^2)|S| & i\varkappa\sqrt{2|S|N} & \dots & 0 \\ -i\varkappa\sqrt{(2|S|)N} & (p_0 \mp mc^2)|S| + p_0 & \dots & 0 \\ 0 & -i\varkappa\sqrt{2(1+2|S|)(N-1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i\varkappa\sqrt{N(2|S|-N)} \\ 0 & 0 & \dots & (p_0 \mp mc^2)|S| + Np_0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

При $\text{sgn}(eB) = +1$ получаем матрицу $A' = -A^T$. Условие существования нетривиальных решений системы (27) $\det A = 0$ определяет энергетический спектр задачи.

В зависимости от размера матрицы A , существует $N+1$ или $2S+1$ решений уравнения $\det A = 0$. Это связано с тем, что уравнения $(\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu - ms)\psi$ описывают спектр спинов и масс. Для уравнений Майораны $m_k s_k = ms$, где $s_k = s, s+1, \dots$, а для уравнений, связанных с конечномерными представлениями группы Лоренца, $m_k s_k = ms$, где $s_k = -s, -s+1, \dots, s$.

При решении уравнений $\det A = 0$ получены зависимости значений энергии уровней E_N от магнитного поля B . В случае уравнений Майораны эти зависимости имеют одинаковый характер для всех спинов; как и для уравнения Дирака, рост энергии уровней замедляется с ростом

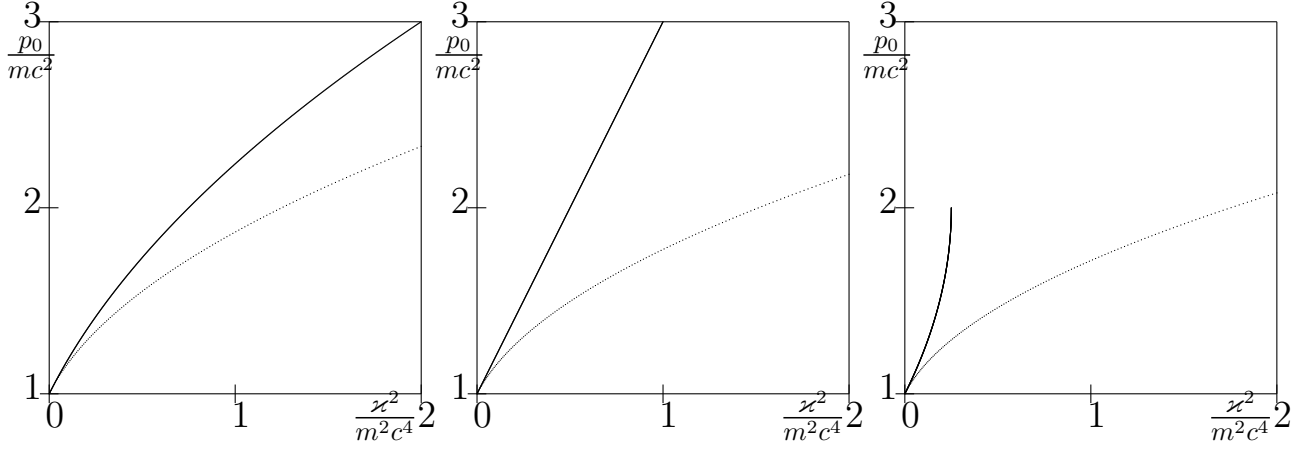


Рис. 2: Графики зависимости энергии первого уровня p_0/mc^2 от безразмерного параметра $\kappa^2/(mc^2)^2$ приведены на рис. 2 для значений $s = 1/2, 1, 3/2$.

напряженности поля (рис. 2). Однако, для конечнокомпонентных уравнений для высших спинов ($s \geq 3/2$) уровни энергии при больших напряженностях поля становятся комплексными (рис. 2в).

Хотя уравнения Дирака и Майораны дают различные спектры для заряженной массивной частицы спина $1/2$ в магнитном поле, эти спектры совпадают в нерелятивистском пределе $\kappa/mc^2 \rightarrow 0$. Для максимальных создаваемых в лаборатории полей 10^6 Гс отношение поправки к высоте уровня к расстоянию между уровнями составит

$$\frac{\Delta E_N}{(E_N^D - E_{N-1}^D)} \approx 10^{-7},$$

где $\Delta E_N = E_N^M - E_N^D$ — разность между уровнями энергии, получаемыми при решении уравнений Майораны и Дирака.

Рассмотрено поведение решений в очень сильных полях $\hbar\Omega = 2\frac{\kappa^2}{m^2c^4} > 1$, см. рис. 3 и 4. В случае конечнокомпонентных уравнений решения для таких полей существуют только при $s = 1/2$ (рис. 3а) и $s = 1$ (рис. 4а).

В бесконечнокомпонентном случае решения качественно ведут себя одинаково. Отдельно следует выделить случай аналога уравнения Даффина-Кеммера, $s = 1$. В этом случае спектр при больших $\frac{\kappa}{mc^2}$ становится эквидистантным. С ростом параметра $\frac{\kappa}{mc^2}$ решения приближаются к параллельным прямым с коэффициентом наклона 2.

Проведено сравнение разложения уравнения Дирака и Майораны для частицы со спином $1/2$ по степеням $1/c$ во внешнем электромагнитном поле. В первом приближении по $1/c$ в обоих случаях мы приходим к уравнению

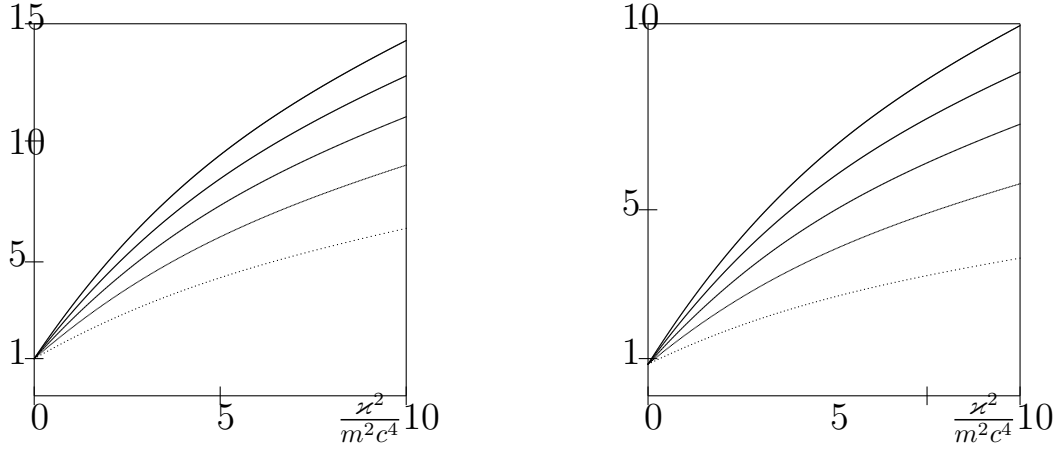


Рис. 3: Графики зависимости энергии p_0/mc^2 первых 5 уровней от безразмерного параметра $\kappa^2/(mc^2)^2$ для значения спина $s = 1/2$.

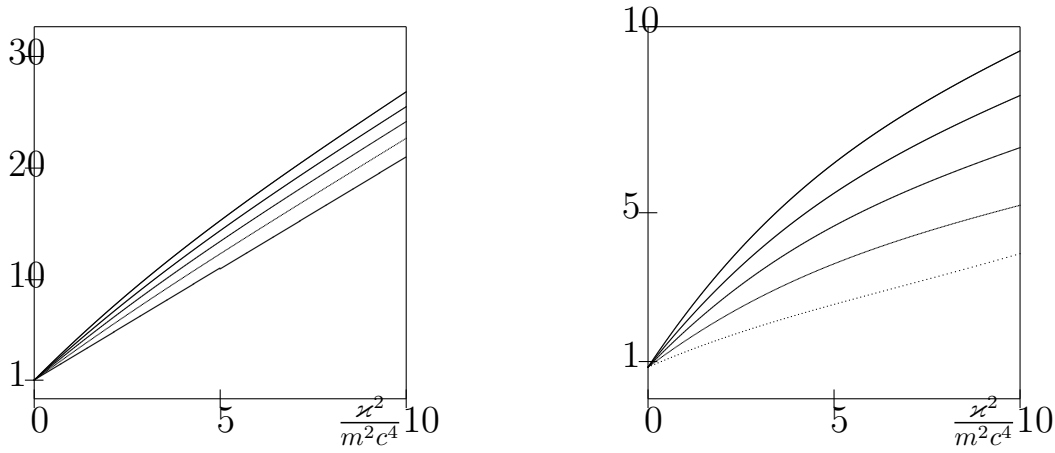


Рис. 4: Графики зависимости энергии p_0/mc^2 первых 5 уровней от безразмерного параметра $\kappa^2/(mc^2)^2$ для значения спина $s = 1$.

Паули

$$E\psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{esB}{mc} + e\Phi \right) \psi, \quad s = \pm 1/2. \quad (30)$$

При учете членов $1/c^2$ для уравнений Дирака и Майораны получаем соответственно

$$\left(\hat{p}^2/2m + e\Phi - \frac{seB}{mc} - E \right) \Psi = \left(\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{se[\mathcal{E}, \hat{p}]}{2m^2c^2} - \frac{e\nabla^2\Phi}{8m^2c^2} \right) \Psi, \quad (31)$$

$$\left(\hat{p}^2/2m + e\Phi - \frac{seB}{mc} - E \right) \Psi = \left(\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{3se[\mathcal{E}, \hat{p}]}{2m^2c^2} - \frac{5e\nabla^2\Phi}{8m^2c^2} + \frac{ie(\mathcal{E}, \hat{p})}{2m^2c^2} \right) \Psi. \quad (32)$$

Первый член в правой части (релятивистская поправка к кинетической энергии) одинаков в обоих выражениях. Второй и третий члены отличаются

только значениями численных коэффициентов. Однако, кроме них, в (32) появляется дополнительный член, пропорциональный скалярному произведению (\mathcal{E}, \hat{p}) , отсутствующий в случае уравнения Дирака.

В приложения вынесен вспомогательный материал по теории представлений групп Лоренца и Пуанкаре в $2 + 1$ измерении и когерентным состояниям групп $SU(2)$ и $SU(1, 1)$.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы работы.

1. Построена система КС квантового ротатора $|juv\rangle$, обладающих минимальной неопределённостью. Они имеют определённую проекцию j на подвижную ось, жёстко связанную с ротатором (она задается параметром v), и на неподвижную ось (задается параметром u).

2. Для построенных КС рассмотрена эволюция во времени в системах с квадратичным по генераторам группы $SO(3)$ гамильтонианом. Показано, что КС со временем, в общем случае, “расплывается”. Однако, для аксиально-симметричного ротатора такого расплывания нет. Показано, что квантовые уравнения на параметры КС переходят в классические уравнения Эйлера при больших значениях углового момента j , при малых j правая часть уравнений отличается численным множителем, что соответствует замедлению прецессии.

3. Предложена методика построения точных решений конечно- и бесконечнокомпонентных релятивистских волновых уравнений во внешнем поле, основанная на их записи через генераторы групп Ли и разделении пространственных и ориентационных переменных. Получены точные решения $2+1$ -мерных аналогов уравнений Майораны и Бхаббы в постоянном однородном магнитном поле.

4. Проведен анализ полученных решений. Для уравнений Майораны, описывающих произвольные спины, как и для конечнокомпонентных уравнений спинов $1/2$ и 1 (уравнения Дирака и Даффина-Кеммера), решения существуют при любых значениях напряженности магнитного поля, и их спектры обладают сходным поведением. Отличие состоит в том, что энергии уровней в случае бесконечнокомпонентных уравнений растут с ростом поля несколько медленнее, чем в случае конечнокомпонентных. Так, для случая спина $1/2$ при максимальном создаваемом в лаборатории поле 10^6 Гс отношение разности энергий уровней, отвечающих решениям уравнений Майораны и Дирака, к расстоянию между соседними уровнями составляет примерно 10^{-7} . Для конечнокомпонентных уравнений для высших спинов ($s > 1$) уровни энергии при больших напряженностях поля становятся комплексными.

5. Для $2+1$ -мерных уравнений Дирака и Майораны (спин $1/2$) во внешнем

электромагнитном поле проведено разложение по степеням $1/c$. В первом приближении ($1/c$) разложения совпадают (уравнение Паули). Различия возникают во втором приближении (учитываются члены до $1/c^2$): у двух членов не совпадают численные коэффициенты, кроме того, в случае уравнения Майораны появляется дополнительный член, отсутствующий в разложении уравнения Дирака.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в журналах, включённых в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук, и в библиографическую базу данных цитирования Web of Science:

1. Gitman D.M. Semiclassical description of quantum rotator in terms of SU(2) coherent states / D.M. Gitman, **D.A. Petrusevich**, A.L. Shelepin // Physica Scripta.—2013.—V. 88, Is. 8.—P. 045005.—9 pp.—1,09 / 0,55 p.p.—DOI: 10.1088/0031-8949/88/04/045005.

2. Gitman D. M. Majorana equation and some of its solutions in 2 + 1 dimensions / D. M. Gitman, **D. A. Petrusevich**, A. L. Shelepin // Journal Physics A Mathematical and Theoretical.—2014.—V. 47, Is. 27.—P. 275401.—18 pp.—0,94 / 0,48 p.p.—DOI: 10.1088/1751-8113/47/27/275401.

Статьи, опубликованные в других научных изданиях:

3. Петрусевич Д. А. Когерентные состояния квантового ротатора / **Д. А. Петрусевич**, А. Л. Шелепин // 60-я научно-техническая конференция МИРЭА: сборник трудов. Москва, 13–25 мая, 2011 г.—Москва, 2011.—Ч. 2.—С. 34–38.—0,12 / 0,06 п.л.

4. Петрусевич Д. А. Решение уравнений типа Майорана в постоянном магнитном поле / **Д. А. Петрусевич**, А. Л. Шелепин // 61-я научно-техническая конференция МИРЭА: сборник трудов. Москва, 16–25 мая, 2012 г.—Москва, 2012.—Ч. 2.—С. 88–93.—0,11 / 0,06 п.л.

5. Петрусевич Д. А. Уравнения Майораны: нерелятивистский предел и разложение по степеням $1/c$ / **Д. А. Петрусевич**, А. Л. Шелепин // 62-я научно-техническая конференция МИРЭА: сборник трудов. Москва, 15–24 мая, 2013 г.—Москва, 2013.—Ч. 2.—С. 17–24.—0,18 / 0,09 п.л.

6. Гитман Д. М. Точные решения уравнения Майораны в постоянном однородном магнитном поле / Д. М. Гитман, **Д. А. Петрусевич**, А. Л. Шелепин // Вестник МГТУ МИРЭА.—2013.—Т. 1, № 1.—С. 149–163.—0,41 / 0,21 п.л.