

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3, 514.181.22
DOI 10.17223/19988621/38/1

М.С. Бухтяк

ЛИНИИ НА ПАРАБОЛОИДЕ, БЛИЗКИЕ К ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ

Завершено решение задачи, поставленной в [1]. Свойства линии пересечения параболоида вращения с демиквадрикой дополнены фактами, убеждающими в целесообразности избранного подхода к построениям линий на параболоиде, близких к геодезическим линиям и обладающих свойствами, достаточно удобными для использования их в качестве линий раскроя сетеполотна. Основным результатом – демонстрация близости главных нормалей найденных линий (они названы SG-линиями) и геодезических.

Ключевые слова: *параболоид, геодезическая линия, нормальная конгруэнция, демиквадрика, линейчатое пространство.*

1. Постановка проблемы

В [1] поставлена задача об отыскании на параболоиде вращения линий, которые локально близки к геодезическим линиям, без осложнений допускают отнесение к натуральному параметру, а также определяются своими концевыми точками. В той же работе обоснована перспективность использования в качестве такой линии сечения параболоида куском демиквадрики Q , ограничивающими лучами которого служат две нормали параболоида. С этой целью в специальном линейном комплексе прямых, пересекающих ось параболоида, выделено подмножество \tilde{K} прямых, непараллельных директориальной плоскости α параболоида. Наличие оси и указанной плоскости позволило ввести систему координат на \tilde{K} , отождествляющую его с областью в \mathbb{R}^3 .

Нормальной конгруэнции параболоида соответствует алгебраическая поверхность Σ в \mathbb{R}^3 . В работе [1] оценена степень близости прямой в \mathbb{R}^3 , изображающей демиквадрику Q , к поверхности Σ . В той же работе поставлен следующий вопрос. Пусть L – линия пересечения демиквадрики Q и параболоида. Необходимо оценить угловое отклонение главных нормалей линии L от нормалей параболоида в соответствующих точках. В [1] этот вопрос не решен, поскольку используемая в ней модель приводит к чрезмерно сложным вычислениям. Здесь мы применим иную модель, которая проигрывает в применении к нормальной конгруэнции параболоида, но удобна для решения поставленной здесь задачи.

2. Локальная карта на многообразии прямых

Линейчатое пространство [2, 3] наделяется структурой дифференцируемого многообразия [4] различными способами. Нас будет интересовать локальная карта, примененная автором в [5]. Именно, пусть в трехмерном аффинном пространстве A_3 задана неподвижная пара параллельных (и не совпадающих) плоскостей Π_1 и Π_2 . Вершину репера O помещаем в плоскость Π_1 , векторы e_1 и e_2 параллельны обеим плоскостям. Вектор e_3 , отложенный из точки O , имеет концевую точку в плоскости Π_2 . Область Λ локальной карты содержит все прямые в A_3 , пересекающие пару плоскостей Π_1, Π_2 . Если прямая l пересекает плоскость Π_1 в точке $A(x_1, x_2, 0)$, а плоскость Π_2 в точке $B(x_3, x_4, 1)$, то локальными координатами прямой l объявляем четверку чисел (x_1, x_2, x_3, x_4) .

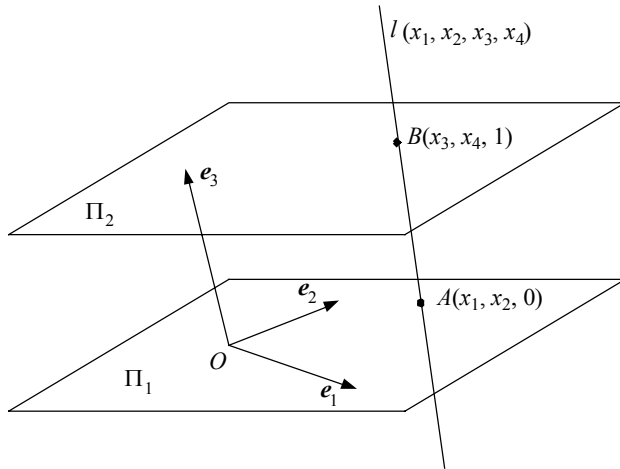


Рис. 1. Правило присвоения локальных координат прямой $l \in \Lambda$

Гомеоморфизм

$$\Lambda \ni l \xrightarrow{f} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad (2.1)$$

позволяет ввести на Λ структуру 4-мерного точечно-векторного пространства. Его свойствам посвящена работа [5]. При этом группа преобразований пространства A_3 – эквиаффинная. Отдавая предпочтения метрическим свойствам указанного пространства, сужаем эквиаффинную группу до группы движений, а репер $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ полагаем ортонормированным.

Мы не видим оснований для терминологического различения прямой $l \in \Lambda$ и соответствующей ей точкой $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ и будем писать $l(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Если, кроме того, имеем $n(y_1, y_2, y_3, y_4)$, то определяем расстояние между прямыми:

$$\rho(l, n) \triangleq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2}.$$

Заметим также, что наши построения не претерпевают существенных изменений, если расстояние между параллельными плоскостями Π_1 и Π_2 взять равным не единице, а другой отличной от нуля константе. Правило (2.1) остается неизменным.

3. Конгруэнция нормалей параболоида вращения. Координатное представление

Рассмотрим кусок параболоида вращения

$$R = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad 0 \leq u \leq r, \quad 0 \leq v \leq 2\pi. \quad (3.1)$$

Здесь r – радиус вырезающего цилиндра. На практике $r < F$, и мы можем одно из условий в (3.1) записать (и это существенно) иначе:

$$0 \leq u < F.$$

Пару неподвижных плоскостей выбираем следующим образом. $\Pi_1 = (xOy)$, Π_2 задана уравнением

$$z = \frac{F}{4}.$$

Не нарушая общности, полагаем

$$F = 1.$$

Взаимное расположение куска параболоида, плоскостей Π_1 и Π_2 и нормали l параболоида пояснено на рис. 2.

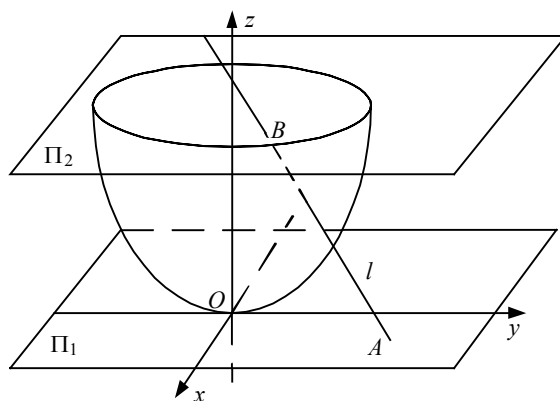


Рис. 2. Кусок параболоида и сопутствующие объекты:
плоскости Π_1 , Π_2 и нормали l

Нормаль, отвечающая значениям параметров u и v , есть годограф вектор-функции

$$N = \left\{ u \cos v \left(1 - \frac{t}{2} \right), u \sin v \left(1 - \frac{t}{2} \right), t + \frac{u^2}{4} \right\}.$$

Если A – точка пересечения нормали с плоскостью Π_1 и B – точка пересечения нормали с плоскостью Π_2 , то

$$A = \left\{ \frac{u}{8} \cos v (8+u^2), \frac{u}{8} \sin v (8+u^2), 0 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{u}{8} \cos v (7+u^2), \frac{u}{8} \sin v (7+u^2), \frac{1}{4} \right\}.$$

Точка в \mathbb{R}^4 , изображающая нормаль (попросту, сама нормаль), пробегает 2-поверхность, заданную вектор-функцией

$$\mathbf{r} \equiv \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \left\{ \frac{u}{8} \cos v (8+u^2), \frac{u}{8} \sin v (8+u^2), \frac{u}{8} \cos v (7+u^2), \frac{u}{8} \sin v (7+u^2) \right\}. \quad (3.2)$$

Эта 2-поверхность принадлежит гиперквадрике (детерминантное многообразие [6, ст. 99])

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0. \quad (3.3)$$

Она также принадлежит гиперповерхности 6-го порядка

$$14y_1^2 - 6y_1 y_2 - 16y_2^2 + 49y_1 - 64y_2 + (y_1 - y_2)^3 = 0, \quad (3.4)$$

где

$$y_1 = 64(x_1^2 + x_2^2), \quad y_2 = 64(x_3^2 + x_4^2). \quad (3.5)$$

Впрочем, 2-поверхность (3.2) допускает и другое задание. Разрешая (3.3) параметрически

$$x_3 = tx_1, \quad x_4 = tx_2, \quad (3.6)$$

где t – новый вещественный параметр, и учитывая (3.5), приводим уравнение (3.4) к виду

$$(x_1^2 + x_2^2) f_1 f_2 = 0.$$

Здесь

$$f_1 = 64x_1^2 t^3 - 192t^2 x_1^2 + 192x_1^2 t - 64x_1^2 - 7 + 8t + 64t^3 x_2^2 - 192t^2 x_2^2 + 192tx_2^2 - 64x_2^2,$$

$$f_2 = 64x_1^2 t^3 + 192t^2 x_1^2 + 192x_1^2 t + 64x_1^2 + 7 + 8t + 64t^3 x_2^2 + 192t^2 x_2^2 + 192tx_2^2 + 64x_2^2.$$

Стоит заметить, что

$$\begin{aligned} f_1 &= 64(t-1)^3 (x_1^2 + x_2^2 + 8t - 7), \\ f_2 &= 64(t+1)^3 (x_1^2 + x_2^2 + 8t + 7). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если применено (3.6), то при различных значениях параметра t получаем линии в плоскости $x_1 O x_2$: это окружности вещественного радиуса при $t \in \left[-\frac{7}{8}, -1 \right) \cup \left(1, \frac{7}{8} \right]$

и мнимого радиуса при остальных вещественных значениях t .

Если ввести новые переменные

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad z_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad z_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \quad z_4 = \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}},$$

то, как видно из (3.2),

$$z_1 = z_3 = \cos v, \quad z_2 = z_4 = \sin v$$

и, следовательно, формулы (3.7) отображают поверхность Σ на тор Клиффорда [7, с. 13].

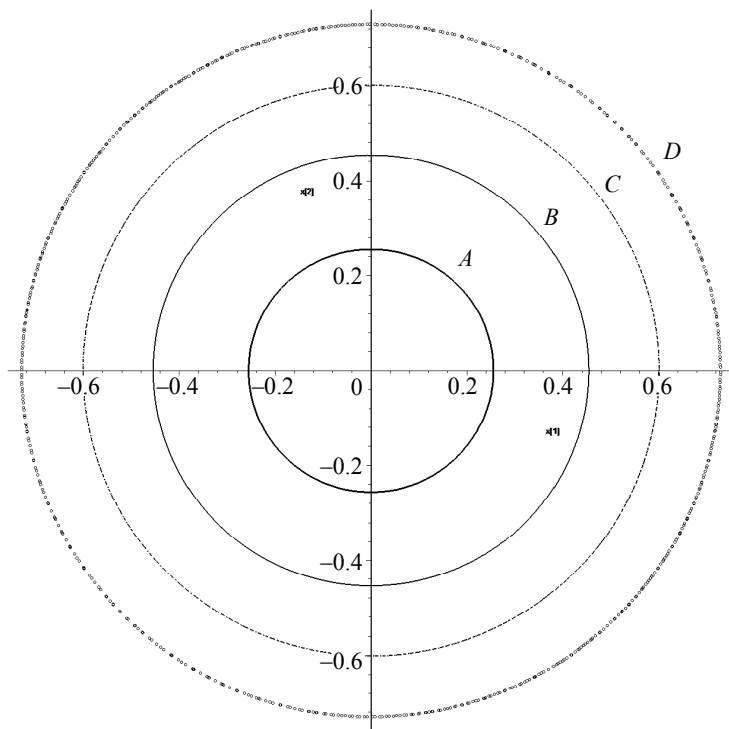


Рис. 3. Проекция на координатную плоскость x_1Ox_2 линий, высекаемых на поверхности Σ уравнениями (3.6). Линия A соответствует значению $t = 0.876$, для $B : t = 0.878$, для $C : t = 0.880$, для $D : t = 0.882$

4. Отклонение демиквадрики от нормальной конгруэнции

Как и в [1], строим кусок гиперболического параболоида, взяв в качестве опорных прямых [1] две нормали параболоида вращения. В нашем четырехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^4 он изображается отрезком, концевые точки которого A_1, A_2 принадлежат поверхности (3.2). Нас интересует оценка близости точек отрезка $[A_1A_2]$ к поверхности, изображающей нормальную конгруэнцию параболоида вращения. Эта задача может показаться излишней ввиду [1]. Но там использована принципиально иная модель, и выводы, к которым мы придем в данном пункте, либо подтвердят ранее сделанные выводы, либо потребуют их пересмотра.

Действуем так, как в [1]. Вводим в рассмотрение плоскость Γ полярных координат (uOv) . Точки A_1, A_2 определяются из (3.2) своими радиус-векторами, полученными соответственно при $u = u_1, v = v_1$ и при $u = u_2, v = v_2$. В плоскости Γ точкам A_1, A_2 биективно соответствуют точки E_1, E_2 . причем выбор полярной

системы координат в плоскости (uOv) и полярных радиусов точек E_1, E_2 соврешается так, как в [1], то есть приводит к соотношениям

$$u_2 = R - u_1, v_2 = -v_1.$$

Иллюстрацией служит заимствованный в [1] рис. 3.

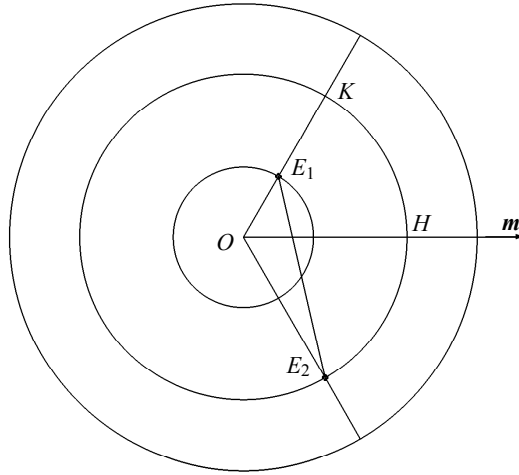


Рис. 3. Точки E_1 и E_2 на полярной плоскости.

$$\angle HOK = v, \angle HOE_2 = -v, |OE_1| = u_1, |OE_2| = 1 - u_1.$$

Тогда

$$A_1 = \left\{ \frac{u_1}{8} \cos v_1 (8 + u_1^2), \frac{u_1}{8} \sin v_1 (8 + u_1^2), \frac{u_1}{8} \cos v_1 (7 + u_1^2), \frac{u_1}{8} \sin v_1 (7 + u_1^2) \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \frac{1-u_1}{8} \cos v_1 (8 + (1-u_1)^2), \frac{u_1-1}{8} \sin v_1 (8 + (1-u_1)^2), \right.$$

$$\left. \frac{1-u_1}{8} \cos v_1 (7 + (1-u_1)^2), \frac{u_1-1}{8} \sin v_1 (7 + (1-u_1)^2) \right\}.$$

Радиус-вектор текущей точки отрезка $[A_1 A_2]$ имеет вид

$$L = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

где

$$a_1 = \frac{1}{8} \cos v_1 (8u_1 + u_1^3 - 19u_1 t - 2u_1^3 t + 9t + 3tu_1^2),$$

$$a_2 = \frac{1}{8} \sin v_1 (8u_1 + u_1^3 + 3u_1 t - 9t - 3tu_1^2),$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \cos v_1 (7u_1 + u_1^3 - 17u_1 t - 2u_1^3 t + 8t + 3tu_1^2),$$

$$a_4 = \frac{1}{8} \sin v_1 (7u_1 + u_1^3 + 3u_1 t - 8t - 3tu_1^2),$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

6. SG-линии

Линии, о которых идет речь в этой и предыдущей статьях, суть линии пересечения параболоида вращения с демиквадрикой, для которой двумя прямыми служат нормали параболоида. Как мы выяснили, эти линии довольно хорошо воспроизводят свойства геодезических, не являясь на самом деле таковыми. Автору показалось уместным присвоить этим линиям обозначение SG-линии (от английского *Substitute Geodesic*).

Вообще, удобный исходный материал для демиквадрики – пространственный четырехугольник [8]. Действительно, пусть $(A_1 A_2 B_2 B_1)$ – пространственный четырехугольник. Пусть

$$M = (1-t)A_1 + tA_2, \quad N = (1-t)B_1 + tB_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, при $t \in \mathbb{R}$ прямые MN заполняют демиквадрику, включающую прямые $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$, а при $0 \leq t \leq 1$ получаем часть демиквадрики, ограниченную этими прямыми.

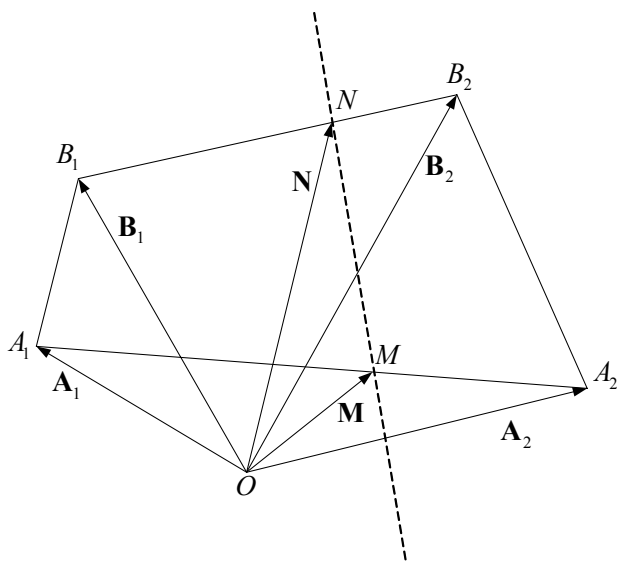


Рис. 5. Схема построения демиквадрики по пространственному четырехугольнику $(A_1 A_2 B_2 B_1)$

Обозначим демиквадрику, построенную на пространственном четырехугольнике $(A_1 A_2 B_2 B_1)$ символом $D(A_1 A_2 B_2 B_1)$, а параболоид – символом P . Тогда SG-линия есть $P \cap D(A_1 A_2 B_2 B_1)$. При этом произвол в отыскании SG-линии не столь велик. Точки A_1, A_2 – те точки параболоида, которые предполагается соединить SG-линией. Прямые $A_1 B_1, A_2 B_2$ направлены по нормальям параболоида в точках A_1, A_2 . Кроме того, если выбор точек B_1, B_2 уже совершен, то заменяя их на точки C_1, C_2 так, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\overline{A_1 C_1} = \lambda \overline{A_1 B_1}, \overline{A_2 C_2} = \lambda \overline{A_2 B_2}$ и получим ту же самую демиквадрику.

Один из безусловно естественных способов определения положения точек B_1, B_2 сводится к помещению их в плоскость $z=0$. Тогда ситуация передается рис. 6. Точки A_1, A_2 лежат на параболоиде. Точки B_1, B_2 суть точки пересечения нормалей параболоида в точках A_1, A_2 с плоскостью $z=0$. Поверхность $(A_1A_2B_2B_1)$ – кусок демиквадрики $D(A_1A_2B_2B_1)$, а линия L (линия пересечения демиквадрики с параболоидом) есть SG-линия.

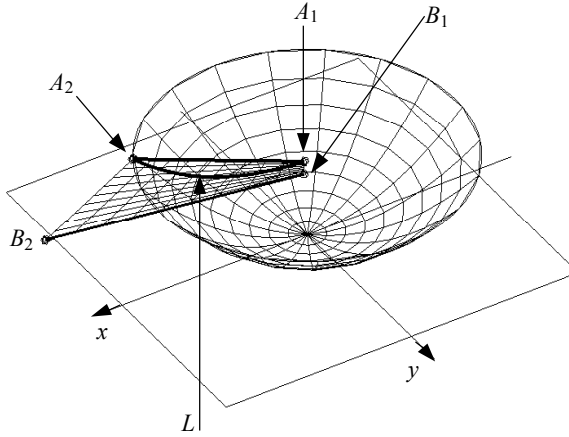


Рис. 6. SG-линия – один из вариантов (отрезок $[B_1B_2]$ в плоскости xOy)

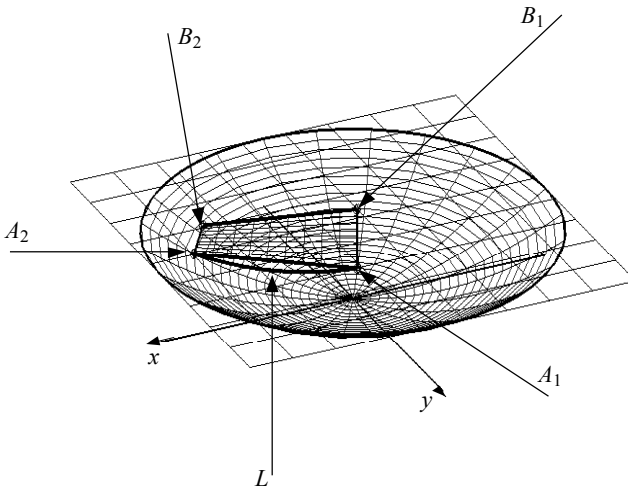


Рис. 7. SG-линия – иной вариант (отрезок $[B_1B_2]$ в плоскости $z = \frac{F}{4}$).

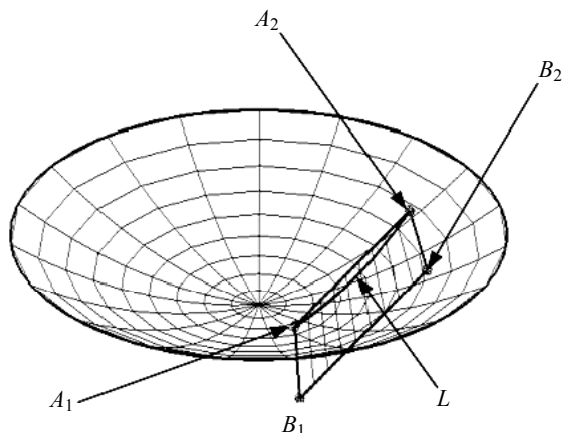


Рис. 8. SG-линия. Отрезки A_1B_1 , A_2B_2 одинаковой длины отложены на нормалях параболоида в соответствующих точках A_1 и A_2

Если не применять искусственное сокращение числа параметров, то SG-линия определяется заданием величин F , u_1 , v_1 , u_2 , v_2 . Уравнение SG-линии при переменных указанных величинах чрезвычайно сложно. Автором разработана программа, которая при заданных значениях перечисленных пяти параметров составляет вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, годографом которой является искомая SG-линия. Если параболоид задан не вектор-функцией (3.1), а уравнением

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}, \quad (6.1)$$

то SG-линия определится набором значений F , x_1 , y_1 , x_2 , y_2 .

7. Сравнение с геодезической линией

Сопоставление SG-линий и геодезических линий параболоида уже проведено выше (в данной статье и в [1]). Но это сопоставление в очевидном смысле косвенное. Прямое же сравнение в общем случае затруднено хотя бы тем, что уравнения SG-линий при произвольных определяющих её параметрах чрезвычайно громоздко. Однако вполне осуществим следующий вычислительный эксперимент. Указав на параболоиде точку A_1 и касательное направление в этой точке, решаем задачу Коши для дифференциальных уравнений геодезической. Для полученного решения $u = u(t)$, $v = v(t)$ указываем промежуток изменения параметра t от 0 до некоей константы t_1 . Точку на параболоиде, для которой $t = t_1$, считаем точкой A_2 . Для пары точек A_1, A_2 строим SG-линию (ради определенности – по схеме рис. 8). Сравниваются длина геодезической (вычисленная, разумеется, приближенно) с длиной SG-линии (тоже вычисленной приближенно). Эксперимент фрагментарен, но, по крайней мере, в случае успеха поддерживает гипотезу о близости линий.

Дифференциальные уравнения, определяющие геодезические линии на достаточно гладкой поверхности, хорошо известны (например, [9]) и здесь не приво-

дятся. Параболоид задаем уравнением (6.1) – там, где это удобно. В ином случае – вектор-функцией (3.1). В этом случае линия на параболоиде задается параметрически:

$$u = u(t), v = v(t), \quad (7.1)$$

а дифференциальные уравнения геодезических имеют вид

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) = -\frac{u(t) \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right)}{4F^2 + (v(t))^2 + (u(t))^2},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} v(t) = -\frac{v(t) \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right)}{4F^2 + (v(t))^2 + (u(t))^2}.$$

Для приближенного решения данной системы с помощью системы Maple в виде отрезка ряда Тейлора полагаем

$$u(0) = 0.2; \quad v(0) = 0.2; \quad u'(0) = 0.5; \quad v'(0) = -0.25.$$

Приближенные значения искомым функций

$$u(t) \approx 0.2000 + 0.5000t - 0.0005t^2 - 0.0004t^3 + 0.1624 \cdot 10^{-5}t^4 +$$

$$+ 0.1283 \cdot 10^{-5}t^5 - 0.8592 \cdot 10^{-8}t^6 - 0.5625 \cdot 10^{-8}t^7 + 5.2480 \times 10^{-11}t^8 +$$

$$+ 2.8743 \times 10^{-11}t^9 - 3.4329 \times 10^{-13}t^{10} - 1.6046 \times 10^{-13}t^{11},$$

$$v(t) \approx 0.2000 - 0.2500t - 0.0005t^2 + 0.0002t^3 + 0.6722 \times 10^{-6}t^4 -$$

$$- 0.6461 \times 10^{-6}t^5 - 0.1334 \times 10^{-8}t^6 + 0.2845 \times 10^{-8}t^7 + 5.276 \times 10^{-13}t^8 -$$

$$- 1.459 \times 10^{-11}t^9 + 2.848 \times 10^{-14}t^{10} + 8.175 \times 10^{-14}t^{11}. \quad (7.2)$$

Пусть

$$0 \leq t \leq 8.$$

Тогда, согласно (7.2), (7.1) и (3.1),

$$A_1(0.2000, 0.2000, 0.0050), \quad A_2(3.9986, -1.7409, 1.1887). \quad (7.3)$$

Длина геодезической линии $[A_1 A_2]$ равна (приближенно)

$$4.47181517.$$

Для той же пары точек (7.3) находим параметрические уравнения SG-линии, длина её (приближенно) составляет

$$4.47181558.$$

Разница длин (в процентах) оценивается величиной

$$0.91014 \cdot 10^{-5} \%.$$

8. Заключение

Соображения, приведенные в [1] и в настоящей работе, позволяют считать полезным использование SG-линий в теории и практике раскроя сетеполотна для параболических рефлекторов вне зависимости от их типа (осесимметричный либо офсетный). Примеры такого использования – в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтыак М.С. Нормальная конгруэнция параболоида. Демиквадрики // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 5–19.
2. Картан Э. Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства. М.: Л., 1933. 72 с.
3. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л.: ОНТИ НКТП, ГТТЛ, 1937. 263 с.
4. де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956. 250 с.
5. Бухтыак М.С. Об одном перенесении // Геометрический сборник. Вып. 20. Томск: ТГУ, 1979. С. 44–51.
6. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1979. Т. 2. 1103 с.
7. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2011. V. 4. No. 1. 64 p.
8. <http://www.resolventa.ru/spr/planimetry/mline.htm>
9. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.

Статья поступила 01.09.2015 г.

Bukhtyak M.S. LINES CLOSE TO GEODETIC LINES ON A PARABOLOID

DOI 10.17223/19988621/38/1

The problem posed in [1] has been completely solved. Properties of the line at which a paraboloid of revolution intersects a demiquadric are updated with facts convincing that the selected approach is feasible for constructing lines lying on the paraboloid, close to geodesic lines, and having properties comfortable enough to use them as tailoring lines of a metallic mesh. The main result is a demonstration of proximity of principal normals of the identified lines (they are called SG-lines) and geodesic lines.

Keywords: paraboloid, geodesic line, normal congruence, demiquadrics, ruled space.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

REFERENCES

1. Bukhtyak M.S. Normal'naya kongruentsiya paraboloida. Demikvadriki. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 5(37), pp. 5–19. (in Russian)
2. Kartan E. *Metod podvizhnogo repera, teoriya nepreryvnykh grupp i obobshchennye prostranstva*. Moscow, Leningrad, 1933. 72 p. (in Russian)
3. Finikov S.P. *Proektivno-differentsial'naya geometriya*. Moscow, Leningrad, ONTI NKTP Publ., GTTL Publ., 1937. 263 p. (in Russian)
4. de Ram Zh. *Differentsiruemye mnogoobraziya*. Moscow, IL Publ., 1956. 250 p. (in Russian)
5. Bukhtyak M.S. Ob odnom perenesenii. *Geometricheskii sbornik*. Vyp. 20. Tomsk, TGU Publ., 1979, pp. 44–51. (in Russian)
6. *Matematicheskaya entsiklopediya*. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1979, vol. 2. 1103 p. (in Russian)
7. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2011, vol. 4, no. 1. 64 p.
8. <http://www.resolventa.ru/spr/planimetry/mline.htm>
9. Rashevskiy P.K. *Kurs differentsial'noy geometrii*. Moscow, Leningrad, GITTL Publ., 1950. 428 p. (in Russian)