

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Молодежная научная конференция
«Все грани математики и механики»
(24–30 апреля 2015 г.)**

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

Исследование режимов смешанной конвекции в прямоугольной полости при наличии изотермической стенки

И.И. Носонов, М.А. Шермет

Томский государственный университет
E-mail: nosonov_94@mail.ru

Проведен численный анализ нестационарных режимов смешанной конвекции в прямоугольном канале с изотермической стенкой. Краевая задача, сформулированная в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность скорости – температура» в приближении Буссинеска, была реализована численно методом конечных разностей. Установлено влияние числа Ричардсона, высоты стенки и времени на среднее число Нуссельта на поверхности изотермического участка.

Ключевые слова: смешанная конвекция, изотермическая стенка, функция тока, математическое моделирование.

Введение

Изучение нестационарных режимов конвективного теплопереноса в полукрытых областях имеет фундаментальное и прикладное значение. На практике очень часто при оптимизации существующих и создании новых энергетических систем одним из определяющих механизмов переноса энергии является конвекция [1]. Детальное исследование гидродинамических и тепловых особенностей данного вида теплопереноса позволяет ответить на многие вопросы, возникающие при изучении объектов любых масштабов: от микроскопических – в порах и полостях строительных материалов и конструкций, до масштабов Земли – задачи геофизики. Необходимо отметить, что при изучении режимов смешанной конвекции в отличие от вынужденной, течение возникает не только под действием внешнего потока, но и при наличии внутреннего температурного напора в поле действия силы тяжести [2]. Поэтому процессы передачи тепла и течение жидкости в таком режиме конвекции неразрывно связаны друг с другом и их нельзя рассматривать независимо.

В настоящее время проведено небольшое количество теоретических и экспериментальных исследований смешанного конвективного теплопереноса в замкнутых и полукрытых областях при наличии локальных источников тепловыделения [1, 3–6]. Так, анализ режимов смешанной конвекции в частично открытых пространственных полостях с внутрен-

ними источниками тепла проведен в [3]. Результаты показали существование двух различных механизмов, которые определяют формирование рециркуляций внутри полости. Первый механизм обусловлен гидродинамическими особенностями смешанной конвекции и доминирует, когда силы инерции преобладают над силами плавучести. Второй механизм связан с переносом энергии внутри полости и развивается, когда тепловыделение от источника способно преодолеть вынужденное течение, вследствие формирования выталкивающей силы. Результаты также показали сильную трехмерную природу течения внутри полости, что указывает на необходимость использования пространственных моделей при изучении подобных процессов. Численное исследование смешанной конвекции наножидкости, представляющей собой смесь воды с наночастицами меди, в Т-образной полости в присутствии однородного магнитного поля проведено в [4]. Дифференциальные транспортные уравнения, описывающие анализируемый процесс, решены методом контрольного объема с применением SIMPLE-алгоритма. В результате установлены распределения скорости и температуры внутри полости в зависимости от значений определяющих параметров – числа Рейнольдса, Ричардсона, Гартмана, геометрический параметр. Показано, что при низких значениях числа Рейнольдса среднее число Нуссельта незначительно увеличивается с ростом интенсивности магнитного поля. Однако при высоких значениях Re темпы роста среднего числа Нуссельта с ростом числа Гартмана становятся более заметными.

Целью настоящей работы является математическое моделирование нестационарных режимов смешанной конвекции в полуоткрытой полости при наличии изотермической стенки.

Математическая модель

Ньютоновская несжимаемая жидкость поступает в прямоугольную полость через входное отверстие с постоянной температурой охлаждения T_c и постоянной горизонтальной скоростью u_{in} . Все поверхности открытой полости являются адиабатическими за исключением вертикальной стенки входного уступа, на которой поддерживается постоянная температура нагрева T_h . Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси y (рис. 1).

При численном моделировании будем рассматривать случай квадратной области ($L = H$). Дифференциальные уравнения, описывающие анализируемый процесс в приближении Буссинеска в размерных переменных «скорость–давление», имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (T - T_c), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

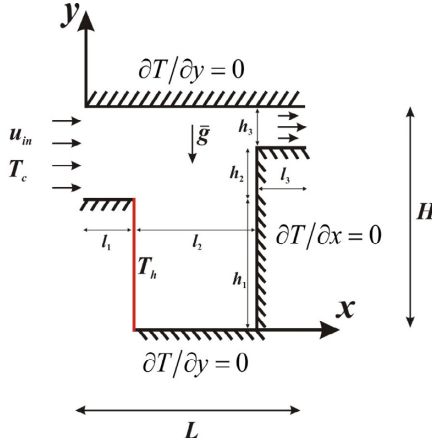


Рис. 1. Область решения задачи

Далее вводим функцию тока ψ и завихренность скорости ω следующим образом $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\omega = \text{rot}_z \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, и обезразмериваем уравнения (1)–(4), где в качестве масштаба длины выберем L , масштаб скорости – u_{in} , масштаб времени – L/u_{in} , масштаб функции тока – $u_{in}L$, масштаб завихренности – u_{in}/L , а безразмерную температуру введем следующим образом: $\Theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$. Тогда математическая постановка

смешанной конвекции вязкой несжимаемой жидкости для рассматриваемой области в безразмерных переменных примет вид [7]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (7)$$

Здесь $\text{Re} = u_{in} L / \nu$ – число Рейнольдса, $\text{Pr} = \nu / a$ – число Прандтля, $\text{Ri} = \text{Ra} / (\text{Pr} \cdot \text{Re}^2)$ – число Ричардсона, $\text{Ra} = g \beta \Delta T L^3 / \nu a$ – число Рэлея.

Безразмерные граничные условия для предложенной системы уравнений (5)–(7) имеют вид:

$$\begin{aligned} X=0, \quad h_1/L \leq Y \leq 1, \quad \Psi = Y - h_1/L, \quad \Omega = 0, \quad \Theta = 0; \\ X=l_1/L, \quad 0 \leq Y \leq h_1/L, \quad \Psi = 0, \quad \partial \Psi / \partial X = 0, \quad \Theta = 1; \\ X=(l_1+l_2)/L, \quad 0 \leq Y \leq (h_1+h_2)/L, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0; \\ X=1, \quad (h_1+h_2)/L \leq Y \leq 1, \quad \partial \Psi / \partial X = 0, \quad \partial \Omega / \partial X = 0, \quad \partial \Theta / \partial X = 0; \\ Y=0, \quad l_1/L \leq X \leq (l_1+l_2)/L, \quad \Psi = 0, \quad \partial \Psi / \partial Y = 0, \quad \partial \Theta / \partial Y = 0; \\ Y=h_1/L, \quad 0 \leq X \leq l_1/L, \quad \Psi = 0, \quad \partial \Psi / \partial Y = 0, \quad \partial \Theta / \partial Y = 0; \\ Y=(h_1+h_2)/L, \quad (l_1+l_2)/L \leq X \leq 1, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0; \\ Y=1, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad \Psi = 1 - h_1/L, \quad \partial \Psi / \partial Y = 0, \quad \partial \Theta / \partial Y = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Сформулированная краевая задача для дифференциальных уравнений (5)–(8) решена методом конечных разностей [7–10] на равномерной сетке. Уравнения решались последовательно, каждый временной шаг начинался с определения функции (5) тока внутри полости, затем решались уравнение дисперсии завихренности (6) и уравнение энергии (7). Значения завихренности скорости на поверхностях стенок полости определялись на основе формулы Вудса [7–10]. Для численного решения уравнений параболического типа (6) и (7) применялась локально одномерная схема Самарского, позволяющая плоскую задачу свести к системе одномерных. Для аппроксимации конвективных слагаемых использовалась монотонная схема Самарского, для диффузионных слагаемых – центральные разности. Эволюционный член представлял собой односторон-

ною разность по времени и имел первый порядок точности относительно шага по времени. Все производные по пространственным координатам аппроксимировались со вторым порядком точности относительно шага по координате. Дискретизация уравнения Пуассона для функции тока (5) проводилась на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученное разностное уравнение разрешалось методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

Разработанный метод решения также был протестирован на множестве сеток. На рисунке 2 представлены распределения температуры в вертикальном сечении $X = 0,3$ в зависимости от размерности разностной сетки при $Ra = 7,1 \cdot 10^5$, $Pr = 0,7$.

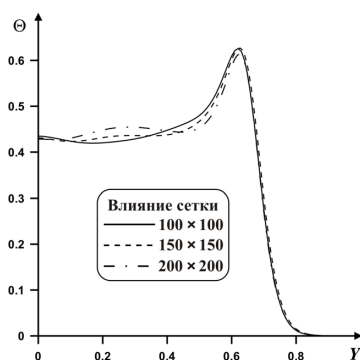


Рис. 2. Влияние сеточных параметров на профили температуры в сечении $X = 0,3$

Поскольку уменьшение шага разностной сетки отражается на повышении времени счета, то для дальнейшего анализа была выбрана разностная сетка размерности 150×150 с целью оптимизации точности вычислений и времени расчета.

Результаты численного моделирования

Численный анализ проведен при следующих значениях безразмерных комплексов, характеризующих режимы конвективного теплопереноса: $Ri = 0,1-100$; $Pr = 0,71$; $h_2/L = 0,1-0,3$; $0 \leq \tau \leq 100$.

На рис. 3 представлены распределения среднего числа Нуссельта на поверхности изотермической стенки $\left(Nu_{\text{avg}} = \frac{L}{h_1} \int_0^{h_1/L} \left(-\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_{X=h_1/L} dY \right)$ в зависимости от числа Ричардсона, времени и относительной высоты правого уступа. Увеличение температурного напора, которое отражается в росте числа Рэлея, а соответственно и в повышении числа Ричардсона, проявляется в увеличении интенсивности теплообмена на поверхности изотермического участка. В свою очередь изменение высоты правого уступа приводит к незначительному снижению интенсивности теплообмена с поверхности нагреваемого элемента. Наблюдаемый эффект обусловлен несущественным ростом размеров рециркуляционной зоны, которая не позволяет значительно снизить температуру среды при ее перемещении от тепловыделяющего элемента к противоположной стенке и обратно.

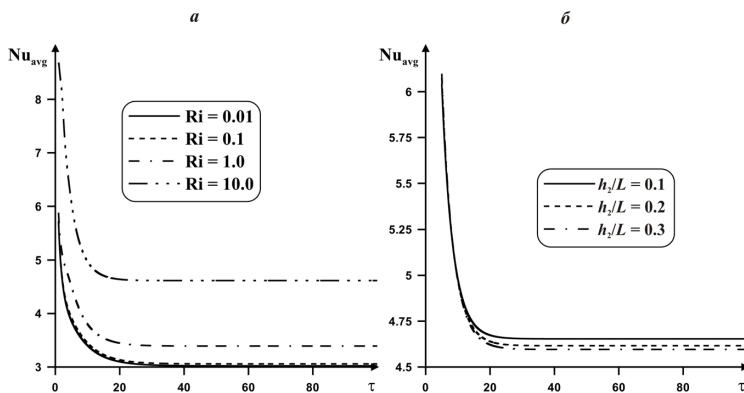


Рис. 3. Влияние числа Ричардсона (а) и безразмерной высоты правого уступа (б) на временные зависимости среднего числа Нуссельта

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Минобрнауки России (задание № 13.1919.2014/К).

Литература

1. Jaluria Y. Design and Optimization of Thermal Systems. N. Y. : McGraw-Hill, 1998. 626 p.
2. Джагурия Й. Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. М. : Мир, 1983. 400 с.
3. Fontana E., Capeletto C.A., da Silva A., Mariani V.C. Numerical analysis of mixed convection in partially open cavities heated from below // Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. Vol. 81. P. 829–845.

4. Kasaeipoor A. Ghasemi B. Aminossadati S.M. Convection of Cu-water nanofluid in a vented T-shaped cavity in the presence of magnetic field // *Int. J. Thermal Sciences*. 2015. Vol. 94. P. 50–60.
5. Ермолаев И.А., Жбанов А.И., Кошелев В.С. Смешанная конвекция при слабом внешнем течении в вертикальном канале с источником тепла конечных размеров // *Теплофизика высоких температур*. 2008. Т. 46, № 5. С. 717–722.
6. Ермолаев И.А., Жбанов А.И. Смешанная конвекция в вертикальном канале с дискретными источниками тепла на стенке // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2009. № 4. С. 40–46.
7. Kuznetsov G.V., Sheremet M.A. Numerical simulation of convective heat transfer modes in a rectangular area with a heat source and conducting walls // *ASME. Journal of Heat Transfer*. 2010. Vol. 132, iss. 8. P. 1–9.
8. Шеремет М.А. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения. Берлин : LAMBERT Academic Publishing, 2011. 176 с.
9. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М. : Наука, 1984. 288 с.
10. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М. : Мир, 1980. 616 с.