На правах рукописи

Кау

Казинский Пётр Олегович

Непертурбативные эффекты в интенсивных электромагнитных и гравитационных полях

01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Томск – 2015

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», на кафедре квантовой теории поля.

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор Ляхович Семён Леонидович.

Официальные оппоненты:
Макаренко Андрей Николаевич,
доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный педагогический университет», проректор по научной работе;

Сушков Сергей Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», кафедра теории относительности и гравитации, заведующий кафедрой;

Кетов Сергей Владимирович,
доктор физико-математических наук, ассоциированный профессор лаборатории теоретической физики, Токийский столичный университет (Tokyo Metropolitan University), лаборатория теоретической физики высоких энергий, ассоциированный профессор.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Защита состоится 02 июня 2016 г. в $14^{\underline{30}}$ часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.07, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ:
http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/KazinskijjPO02062016.html

Автореферат разослан «   » марта 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.07 Киреева Ирина Васильевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Современное развитие экспериментальной техники впервые дает возможность проверить предсказания квантовой теории поля вне рамок стандартной теории возмущений. Обычно, непертурбативные эффекты очень малы в физике высоких энергий и проявляются только в полях высокой интенсивности, либо требуют высокопрецизионных экспериментов. В решении этих задач современная экспериментальная физика добилась значительного прогресса. Диссертация посвящена теоретическому исследованию ряда непертурбативных эффектов в интенсивных электромагнитных и гравитационных полях. Выбор этих полей не случаен, поскольку именно сейчас создаются новые экспериментальные установки для исследования непертурбативных эффектов в таких полях. Что касается электромагнитных полей, то здесь стоит отметить два крупных проекта: европейский проект Extreme Light Infrastructure (ELI) и российский Exawatt Center for Extreme Light Studies (XCELS). На этих экспериментальных установках планируется создать оптические лазерные поля интенсивностью $I \gtrsim 10^{24}$ Вт/см^2 и выше. Для сравнения, электромагнитная волна со швингеровской напряженностью поля обладает интенсивностью $I \approx 10^{30}$ Вт/см^2. Для гравитационных полей, казалось бы, непертурбативные эффекты вообще нельзя наблюдать в силу слабости гравитационного взаимодействия и малости гравитационной постоянной. Однако это не так. Различные формулировки квантовой гравитации предсказывают небольшие отклонения от законов классической общей теории относительности (ОТО). В связи с этим существует множество экспериментальных проектов как наземных, основанных на атомной интерферометрии (например, в ZARM в Бремене), так и космических (проект NASA/ESA «STEP», проект NASA «SR-POEM», проект CNES «MICROSCOPE», проект ESA «STE-QUEST»), направленных на поиски возможных отклонений от предсказаний классической ОТО. С точки зрения эффективной теории поля, являющейся квантованием классической ОТО, эти эффекты являются существенно непертурбативными. Наличие таких непертурбативных эффектов как в квантовой электродинамике, так и в квантовой гравитации, не вызывает сомнений, поскольку продиктовано самосогласованностью теории. Более того, схожие эффекты наблюдаются в физике конденсированного состояния, где масштабы энергий намного меньше и наблюдение таких эффектов, обычно, не составляет проблем.

Другой аспект, которого касается диссертация, связан с тем, что на сегодняшний день не выяснена природа темной материи, образующей согласно стандартной космологической модели (ΛCDM) около 20 процентов энергетического состава Вселенной. Существует множество гипотез, делающих попытку объяснить феномен темной материи. В данной диссертационной работе, при исследовании непертурбативных эффектов в квантовой гравитации, также возникает естественный кандидат на роль холодной темной материи – дополнительное векторное поле. Причем введение этого векторного поля не только дает (возможное) решение проблемы темной материи, но также решает так называемую «проблему времени» квантовой гравитации. Существование «проблемы времени», т.е. проблемы выбора единственного представления алгебры наблюдаемых, является прямым следствием основных постулатов квантовой теории поля и ОТО, и эта проблема должна быть разрешена, существуют ли неизвестные частицы темной материи или нет.

Цели диссертационной работы

Ключевые цели работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Исследовать непертурбативную динамику заряженных частиц при больших временах в электромагнитных полях высокой интенсивности. Разработать общий формализм учета влияния стохастических сил на динамику заряженных частиц.

2. Исследовать непертурбативные поправки к эффективному действию квантовой гравитации. Проверить для них выполнение тождеств Уорда, генерируемых общекоординатными преобразованиями. В случае нарушения тождеств Уорда из-за «проблемы времени» квантовой гравитации разработать механизм сокращения возникающей квантовой гравитационной аномалии.

3. Исследовать феноменологические следствия непертурбативных поправок к эффективному действию квантовой гравитации.

Степень разработанности темы исследования

Динамика заряженных частиц в интенсивном электромагнитом поле является классической темой исследований как на классическом уровне, так и квантовом. Можно сказать, что к середине 70-х годов прошлого века все основные уравнения этой теории были сформулированы. Однако за последние 5 лет изучение динамики заряженных частиц в сильных полях приобрело новый импульс в связи с запуском и разработками новых экспериментальных установок, позволяющих наблюдать малые непертурбативные эффекты. Основной акцент в современных работах делается на анализе уже известных уравнений – построении точных решений или численном моделировании – и поиске новых физических эффектов, следующих из этих уравнений.

Построению квантовой теории гравитации посвящена обширная литература. В данной диссертационной работе под квантовой гравитацией понимается эффективная неперенормируемая теория поля, следующая из канонического квантования ОТО. Известно, что в такой квантовой теории существует проблема выбора единственного представления алгебры наблюдаемых. Однако не было ясно, можно ли избавиться от этой зависимости в наблюдаемых с помощью локальных контрчленов, добавленных в исходное классическое действие теории. Если это невозможно сделать, то возникает так называемая квантовая гравитационная аномалия, т.е. нарушение тождеств Уорда, выражающих общековариантность теории. Как подробно обсуждается в диссертации, данная гравитационная аномалия является существенно непертурбативной.

В литературе известна[1] другая пертурбативная гравитационная аномалия, индуцированная киральными фермионами в пространстве-времени размерности $D = 4k + 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Методология и методы исследования

Получение непертурбативных результатов всегда нетривиально и требует развития новых методов, либо значительного усовершенствования старых. При анализе непертурбативных эффектов в динамике заряженных частиц в интенсивных электромагнитных полях существенно используются несколько методов: i) метод фонового поля («картина Фарри») для описания квантовой динамики частиц во внешнем поле; ii) метод построения локализованных решений релятивистских квантовых уравнений[2]; iii) асимптотики физических решений уравнения Лоренца-Дирака (ЛД) и точные решения уравнения Ландау-Лифшица (ЛЛ). При построении алгебраической процедуры описания случайных сил используются методы деформационного и БРСТ квантований. Для анализа непертурбативных поправок к эффективному действию квантовой гравитации используется метод фонового поля, а также разработанные автором новые методы вычисления однопетлевых поправок на стационарном гравитационном фоне общего вида. Эти методы во многом основаны на известной процедуре разложения теплового ядра и понятии ζ-функции от оператора лапласовского типа.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание непертурбативной динамики электронов при больших временах во внешних электромагнитных полях простых конфигураций: постоянное однородное поле, плоская электромагнитная волна. Новые асимптотики физических решений уравнения ЛД в этих полях. Новые точные решения уравнения ЛЛ для класса внешних электромагнитных полей, допускающих двупараметрическую группу симметрии. Доказательство того, что для постоянного однородного внешнего электромагнитного поля полная мощность излучения заряда является монотонно убывающей функцией времени, а в случае плоской волны – ограниченной сверху монотонно убывающей функцией. Доказательство того, что в асимптотическом режиме для плоской волны круговой поляризации и постоянных скрещенных полей полная мощность излучения, выраженная в терминах собственного времени, не зависит от заряда частицы или напряженности внешнего поля и равна половине энергии покоя частицы, деленной на собственное время частицы, проведенное в электромагнитном поле.

2. Описание свойств ультрарелятивистских электронов, рассеянных на интенсивном лазерном пучке линейной поляризации (интенсивность $I \gtrsim 10^{24}$ Вт/см^2 и энергия фотонов $\Omega \approx 1$ эВ). Предполагается, что волновой пакет электрона много меньше длины волны электромагнитной волны. В этом случае импульсы электронов, прошед-

[1] Alvarez-Gaumé L., Witten E. Gravitational anomalies // Nucl. Phys. B. 1984. V. 234. P. 269.

[2] Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. Методы математической физики: Асимптотические методы в релятивистской механике. Томск: Изд-во ТПУ, 2006.

ших лазерный пучок, слабо зависят от начального импульса и определяются только параметрами лазерного пучка и фазой электромагнитной волны в точке входа. Большая часть прошедших электронов рассеивается на малые углы к направлению распространения электромагнитной волны. Максимальный Лоренц-фактор прошедших электронов пропорционален работе, совершенной электромагнитным полем, и не зависит от начального импульса. Прошедшие электроны обладают одинаковыми проекциями импульса на ось, параллельную вектору электрического поля электромагнитной волны. Эта проекция определяется только диаметром лазерного пучка, измеренным в классических радиусах электрона. Для электронов, отраженных от лазерного пучка, существует закон отражения, связывающий углы падения и отражения. Этот закон универсален, т.е. не зависит ни от каких параметров заряженной частицы и лазерного пучка. Глубина проникновения заряженной частицы в лазерный пучок много меньше длины волны электромагнитной волны.

3. Явные выражения для спектральной мощности излучения, сформировавшегося на асимптотике в полях указанных конфигураций, и их свойства. Для однородных скрещенных полей максимум плотности мощности излучения при фиксированной энергии фотона не находится в плоскости орбиты электрона, как можно было бы ожидать для ультрарелятивистской частицы, а направлен под определенным углом к этой плоскости. В плоской электромагнитной волне постоянной амплитуды плотность мощности излучения, после проектирования на плоскость, ортогональную направлению распространения волны, представляет собой систему колец максимумов и минимумов. Положение этих колец зависит от энергии излученного фотона, а излучение на указанной плоскости выглядит как круговая радуга.

4. Понятие стохастической деформации и соответствующая общая алгебраическая деформационная процедура как для лагранжевых, так и нелагранжевых систем. Стохастические деформации: модели нерелятивистской частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем на искривленном фоне; классических моделей, приводящих к нерелятивистским и релятивистским уравнениям Клейна-Крамерса; классической модели, соответствующей стохастическому уравнению ЛД; моделей свободного скалярного и электромагнитного полей; гамильтоновой динамической системы, отвечающей нелинейной неравновесной термодинамике.

5. Общая процедура вывода, явные формулы и свойства быстросходящихся разложений однопетлевого Ω-потенциала квантовых полей с законом дисперсии, обладающим эллипсоидальной поверхностью постоянной энергии. Разложение однопетлевого Ω-потенциала на три слагаемых: квазиклассический вклад, вклад от разреза закона дисперсии и осциллирующий вклад. В квазиклассическом вкладе полностью пренебрегается дискретностью квантовых чисел. Другие два вклада являются существенно квантовыми. Низко- и высокотемпературные разложения квазиклассического вклада, обобщающие известные разложения на случай законов дисперсии указанного вида. Соотношения между вкладом от разреза, казимировским вкладом и вакуумной энергией. Доказательство того, что казимировский вклад в вакуумную энергию возникает

только для законов дисперсии, обладающих точкой ветвления, как, например, релятивистский закон дисперсии. Доказательство того, что в высокотемпературном пределе казимировский член, входящий в термальную часть Ω-потенциала, в точности сокращается аналогичным вакуумным вкладом.

6. Доказательство существования и общие свойства эффекта гравитационного сдвига масс массивных частиц за счет механизма Хиггса. Данный эффект приводит, в частности, к малым отклонениям от стандартного закона красного смещения ОТО. Ведущий вклад в смещение масс дают слагаемые эффективного потенциала поля Хиггса, зависящие от векторного поля ξ^μ, которое определяет гамильтониан системы и представление алгебры наблюдаемых в гильбертовом пространстве состояний. В сильном гравитационном поле, где ξ^2 мало, возможны два сценария: массы всех массивных частиц растут до бесконечности, с уменьшением ξ^2 до нуля; или массы всех массивных частиц уменьшаются с уменьшением ξ^2, калибровочная симметрия восстанавливается на конечном расстоянии от горизонта, после чего, все частицы становятся безмассовыми. Показано, что гравитационный сдвиг масс больше для стабильной звезды, чем для черной дыры, на одинаковом расстоянии от гравитирующего объекта. В частности, для черной дыры очень малые значения ξ^2 не реализуются, и $1/2 \lesssim \xi^2 \leq 1$ во всем пространстве-времени вне горизонта событий.

7. Доказательство существования квантовой гравитационной аномалии в однопетлевом эффективном действии квантовой гравитации, индуцированном массивным скалярным полем массы m на стационарном медленно меняющимся в пространстве гравитационном фоне. Аномальные вклады в эффективное действие имеют существенно особую точку при $m^2 \to \infty$, неаналитичны по гравитационной постоянной и импульсам. Аномалия не может быть воспроизведена в любом конечном порядке теории возмущений над плоским фоном и носит существенно непертурбативный характер. Аномалия не может быть сокращена контрчленами, полиномиальными по импульсам. Данная гравитационная аномалия возникает благодаря зависимости квантовых средних от выбора гамильтониана теории, вакуумного состояния и представления алгебры наблюдаемых.

8. Механизм сокращения квантовой гравитационной аномалии, приводящий к возникновению в теории нового динамического векторного поля ξ^μ. Уравнения движения этого векторного поля в виде уравнений идеальной релятивистской гидродинамики с градиентными поправками. Самосогласованная неперенормируемая модель квантовой гравитации. Естественные условия нормировки для эффективного действия квантовой гравитации и класс уравнений состояния релятивистской жидкости, описываемой полем ξ^μ. В пределе слабого гравитационного поля уравнение состояния жидкости имеет вид политропы и определяется двумя универсальными постоянными – политропной постоянной и натуральным показателем политропы. Доказательство того, что жидкость, описываемая полем ξ^μ, может быть ответственна за большую часть холодной темной материи. Оценки для политропной постоянной, характеризующей уравнение состояния данной жидкости. Закон эволюции этой жидкости на космологических

масштабах, согласующийся с ее интерпретацией как холодной темной материи.

9. Квантование релятивистской гидродинамики в формализме Тауба-Фока. Тождества Уорда, связанные с сохранением энтропии и завихренности идеальной жидкости. Ведущие градиентные поправки к давлению идеальной жидкости и ограничения на их вид, гарантирующие отсутствие гостов в модели. Анализ нелинейных поправок второго порядка к уравнениям движения идеальной жидкости и явные выражения для поперечных и продольных возмущений, индуцированных сильной звуковой волной.

10. Понятие и явное однопетлевое выражение для аномалии энергия-время. Эта аномалия характеризует вариацию эффективного действия теории под действием глобального растяжения векторного поля ξ^μ, определяющего гамильтониан системы. Доказательство того, что невозможно перенормировать эффективное действие модели классически конформно инвариантного поля так, чтобы конформная аномалия и аномалия энергия-время одновременно обращались в нуль.

11. Теория ζ-функции волновых операторов на стационарном фоне общего вида, в частности, для нестатических метрик, и новая процедура вычисления однопетлевых поправок к эффективному действию как при нулевых, так и конечных температурах и плотностях. Общая формула для высокотемпературного разложения однопетлевого Ω-потенциала в пренебрежении экспоненциально подавленными, при обратной температуре $\beta \to 0$, поправками.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Особо отметим следующие:

1. Впервые описаны свойства ультрарелятивистских электронов, рассеянных на интенсивном лазерном пучке линейной поляризации с интенсивностью $I \gtrsim 10^{24}$ Вт/см^2 и энергией фотонов $\Omega \approx 1$ эВ. Показано, что большая часть прошедших электронов рассеивается на малые углы к направлению распространения электромагнитной волны, причем прошедшие электроны обладают одинаковыми проекциями импульса на ось, параллельную вектору электрического поля электромагнитной волны. Для электронов, отраженных от лазерного пучка, впервые найден универсальный закон отражения, связывающий углы падения и отражения.

2. Впервые введено понятие стохастической деформации и построена соответствующая общая алгебраическая деформационная процедура как для лагранжевых, так и нелагранжевых систем.

3. Впервые разработана общая процедура вывода и получены явные формулы для быстросходящихся разложений однопетлевого Ω-потенциала квантовых полей с законом дисперсии, обладающим эллипсоидальной поверхностью постоянной энергии. Доказано, что в высокотемпературном пределе казимировский член, входящий в термальную часть Ω-потенциала, сокращается аналогичным вакуумным вкладом.

4. Предсказан эффект гравитационного сдвига масс массивных частиц за счет механизма Хиггса. Данный эффект приводит, в частности, к малым отклонениям от стандартного закона красного смещения ОТО.

5. Впервые доказано существование непертурбативной квантовой гравитационной аномалии в однопетлевом эффективном действии квантовой гравитации, индуцированном массивным скалярным полем массы m на стационарном медленно меняющимся в пространстве гравитационном фоне. Разработан механизм сокращения квантовой гравитационной аномалии, приводящий к возникновению в теории нового динамического векторного поля ξ^μ. Показано, что векторное поле может быть ответственно за большую часть холодной темной материи.

6. Впервые введено понятие и получено явное однопетлевое выражение для аномалии энергия-время. Эта аномалия характеризует вариацию эффективного действия теории под действием глобального растяжения векторного поля ξ^μ, определяющего гамильтониан системы.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты диссертации представляют интерес для дальнейшего развития метода фонового поля в квантовой теории поля и анализа непертурбативных поправок в эффективное действие. Найденные новые эффекты можно будет наблюдать на экспериментальных установках, строящихся в данный момент. Также эти эффекты интересны в физике ускорителей, физике плазмы и в астрофизике. Построенные в диссертации самосогласованная модель квантовой гравитации и процедура квантования релятивистской жидкости открывают новые перспективы для исследования существенно непертурбативных эффектов в квантовой гравитации. Развитые в диссертации методы вычисления непертурбативных поправок в эффективное действие могут быть применены к другим фоновым полевым конфигурациям, нежели тем, которые рассмотрены в диссертационной работе. Часть результатов диссертации вошла в учебные программы и пособия для студентов и аспирантов.

Степень достоверности и апробация результатов работы

Достоверность результатов контролируется их внутренней согласованностью и совпадением в ряде частных случаев с результатами других авторов. Результаты получены на основе строгих методов квантовой теории поля.

Основные результаты диссертации докладывались на Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики (Петровские чтения, г. Казань, 2001-08 гг.); Международной школе-семинаре «Quantum Fields and Strings» (п. Домбай, 2003 г.); VII Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (г. Томск, 2003 г.); XLII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2004 г.); Международной конференции «Quantum Field Theory and Gravity» (г. Томск, 2007, 2010, 2014 гг.); Международной конференции «Probing Strong Gravity near Black Holes» (г. Прага, Чехия, 2010 г.); Международной конференции «Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики» (г. Москва, 2010 г.); Российской летней школе-семинаре «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии» (г. Казань, 2010 г.); Международной конференции «Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation» (г. Казань, 2010 г.); Международной конференции «Progress in Electromagnetics Research Symposium» (г. Сучжоу, Китай, 2011 г.); Международной конференции «20th International Conference on General Relativity» (г. Варшава, Польша, 2013 г.); 15-ой Российской гравитационной конференции – «Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике» (г. Казань, 2014 г.); Международной конференции «XIIth International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology» (г. Москва, 2015 г.); Международной конференции «Fourteenth Marcel Grossmann Meeting» (г. Рим, Италия, 2015 г.), а также на школе-семинаре «Tomsk School and Workshop on Mathematical Physics» (г. Томск, 2015 г.), Межвузовском научном семинаре по проблемам космологии и гравитации (г. Санкт-Петербург, 2015 г.), научных семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета, кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета, и на лекции в Virtual Institute of Astroparticle Physics (г. Париж, Франция, 2015 г.).

Публикации. Личный вклад автора

Основные результаты диссертации опубликованы в 23 работах [1–23], в том числе: статьи в реферируемых журналах – 17, сборники трудов международных конференций – 3, электронные препринты – 3.

Все основные результаты получены лично автором. При выполнении всех работ автор принимал определяющее участие как в постановке, так и в решении задач.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, двух приложений и библиографии из 514 наименований. Материал изложен на 310 страницах, включает 14 рисунков и 1 таблицу.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дана общая характеристика диссертационной работы. Обоснована актуальность темы диссертации и разработанность данной темы на момент написания работы. Определены цели исследования и методы их достижения. Описана научная новизна полученных результатов, степень их достоверности, теоретическая и практическая значимость. Приведены положения, выносимые на защиту.

Глава 1 имеет вводный характер. В ней дается обзор литературы, более развернуто описывается постановка проблемы и основные достигнутые результаты. Полученные в диссертации результаты сравниваются с известными в литературе и обсуждается возможность их экспериментального наблюдения. Приводится краткое описание диссертации по главам.

Глава 2 посвящена исследованию непертурбативных эффектов в динамике и излучении легких заряженных частиц в сильном внешнем электромагнитном поле при больших временах. При больших временах квантовая динамика заряженных частиц становится существенно непертурбативной. Хорошим приближением, которое позволяет описать эти непертурбативные эффекты, является приближение Хартри для модовых функций квантовых полей заряженных частиц (скалярных – если влиянием спина можно пренебречь, и дираковских – в противном случае). С точки зрения стандартной *in-in* теории возмущений использование решений этого нелинейного уравнения суммирует бесконечный набор диаграмм[3]. К сожалению, релятивистское уравнение Хартри не может быть точно решено даже для простейших конфигураций внешних полей. Поэтому в данной диссертационной работе используется метод квазиклассически сосредоточенных состояний. Этот метод позволяет получить приближенные решения уравнения Хартри в том случае, когда волновая функция частицы настолько локализована, что внешние электромагнитные поля можно считать независящими от точки пространства в области, где волновая функция отлична от нуля. В основе квазиклассического метода лежит решение классических уравнений движения, в результате чего проблема описания самосогласованной квантовой динамики электронов в интенсивных полях при больших временах сводится к решению соответствующих классических уравнений движения – уравнений ЛД, – учитывающих реакцию излучения. Отметим, что в большинстве случаев, при построении модовых функций, реакция излучения либо не учитывается вовсе, либо учитывается пертурбативно. При больших временах члены этого ряда теории возмущений становятся большими даже при умеренных напряженностях полей, и их необходимо пересуммировать.

В **§2.1** вводятся основные обозначения и определяются характерные масштабы задачи. Здесь, также, дается определение физического решения уравнения ЛД, приводится интегро-дифференциальное уравнение, описывающее эти решения, и исследуются основные свойства данного уравнения. Устанавливается связь с уравнением ЛЛ: показывается, что физические решения уравнения ЛД являются суммой по Борелю так называемого ряда Ландау-Лифшица.

В **§2.2** исследуются асимптотики физических решений уравнения ЛД и точные решения уравнения ЛЛ для внешних электромагнитных полей, допускающих двупараметрическую группу симметрии. Постоянное однородное электромагнитное поле и плоская электромагнитная волна произвольного профиля являются частными случаями таких электромагнитных полей. В **§2.2.1** приводится известное точное реше-

[3]Схожие пересуммирования непосредственно для спектральной плотности мощности излучения можно найти в Baym G., Blaizot J.-P., Gelis F., Matsui T. Landau-Pomeranchuck-Migdal effect in a quark-gluon plasma and the Boltzmann equation // Phys. Lett. B. 2007. V. 644. P. 48.

ние уравнения ЛД, описывающее линейное движение, т.е. движение по плоскости в пространстве-времени, заряда в произвольном поле, допускающим такое движение. Выбором начальных данных из всего множества решений выделяются физические. В **§2.2.2** подробно рассматривается существенно плоское движение, т.е. движение по гиперповерхности в пространстве-времени, заряда в постоянном однородном электромагнитном поле. Доказывается, что такое движение возможно тогда и только тогда, когда $(\mathbf{EH}) = 0$. Для плоского движения уравнение ЛД сводится к одному дифференциальному уравнению на функцию $u(a)$:

$$\ddot{u} = \frac{[2au + \xi^2(a + \omega u)]\dot{u}^2}{2u(a - \omega u)(\xi^2 + u)} + \frac{2\lambda^2 a^2(\xi^2 + u)}{u(a - \omega u)^2}, \qquad \lambda = 2\alpha/3, \qquad \omega = const, \tag{1}$$

где α – постоянная тонкой структуры, $\xi^2 = \{1, 0, -1\}$. По любому решению данного уравнения точное решение уравнения ЛД строится в квадратурах. Общее решение этого уравнения, даже в случае $\xi^2 = 0$, найти не удалось. В **§2.2.3** находятся асимптотики плоских физических решений уравнения ЛД при больших собственных временах. Показано, что данные асимптотики являются аттракторами в пространстве импульсов на множестве физических решений.

В **§2.2.4** рассматривается трехмерное движение заряженной частицы в постоянном однородном электромагнитном поле. Найдены асимптотики физических решений уравнения ЛД для такого внешнего поля. В **§2.2.5** приведено известное решение уравнения ЛЛ для постоянного однородного электромагнитного поля и проведено сравнение в асимптотическом режиме с асимптотиками, найденными в предыдущем подразделе. Для скрещенных полей, $\mathbf{E}^2 = \mathbf{H}^2$, $(\mathbf{EH}) = 0$, асимптотики совпадают. Для полей с ненулевыми инвариантами асимптотики отличаются малыми поправками порядка $(\alpha E/E_0)^2$, где E – характерная напряженность электромагнитного поля, а $E_0 = 1.32 \times 10^{16}$ В/см – швингеровское поле. В **§2.2.6** найден новый класс точных решений уравнения ЛЛ для однородного магнитного поля, меняющегося произвольным образом во времени, и для однородного электрического поля, направленном вдоль оси x и зависящем только от y. В **§2.2.7** исследуются асимптотики физических решений уравнения ЛД и находятся известные точные решения уравнения ЛЛ для плоской электромагнитной волны произвольного профиля

$$\mathrm{v}_- = \mathrm{v}_-(0)\Big[1 + \lambda \mathrm{v}_-(0)\int_0^{x_-} dx\omega^2(x)\Big]^{-1},$$

$$r_1 - \lambda\omega\cos\varphi = r_1(0) - \lambda\omega(0)\cos\varphi(0) + \mathrm{v}_-^{-1}(0)\int_0^{x_-} dx\omega(x)\cos\varphi(x)\Big[1 + \lambda \mathrm{v}_-(0)\int_0^{x} dy\omega^2(y)\Big],$$

$$r_3 - \lambda\omega\sin\varphi = r_3(0) - \lambda\omega(0)\sin\varphi(0) + \mathrm{v}_-^{-1}(0)\int_0^{x_-} dx\omega(x)\sin\varphi(x)\Big[1 + \lambda \mathrm{v}_-(0)\int_0^{x} dy\omega^2(y)\Big],$$

где $\omega(x_-)$ и $\varphi(x_-)$ – задают профиль и фазу электромагнитной волны, v_- – проекция 4-импульса частицы на изотропный волновой 4-вектор волны, $r_{1,3} = \mathrm{v}_{1,3}/\mathrm{v}_-$ и, для определенности, считается $x_-(0) = 0$. Показано, что в асимптотическом режиме электрон летит со скоростью, стремящейся к скорости света, вдоль направления распространения электромагнитной волны. Физические решения уравнений ЛД и ЛЛ совпадают в асимптотическом режиме.

В **§2.3** исследуются общие свойства мощности излучения заряженной частицы. Оказывается, что для постоянного однородного скрещенного электромагнитного поля и для плоской электромагнитной волны постоянной амплитуды и круговой поляризации полная мощность излучения в асимптотическом режиме, выраженная в терминах собственного времени частицы, зависит только от массы частицы и не зависит от заряда и напряженности внешнего поля:

$$\mathcal{P} \approx \frac{mc^2}{2\tau}, \tag{2}$$

где τ – собственное время частицы, отсчитываемое с момента влета в электромагнитное поле. Для линейно поляризованной плоской электромагнитной волны постоянной амплитуды верна такая же формула, но умноженная на удвоенный квадрат косинуса фазы электромагнитной волны, т.е. после усреднения выражение переходит в (2). Далее в этом разделе доказывается, что полная мощность излучения заряженной частицы в постоянном однородном электромагнитном поле является невозрастающей функцией, постоянна только для гиперболического движения и меньше такой же величины, вычисленной с помощью уравнений Лоренца в том же самом поле (т.е. 4-ускорение выражается из уравнения Лоренца). Для плоской электромагнитной волны постоянной амплитуды с круговой поляризацией полная мощность излучения заряженной частицы ограничена сверху монотонно убывающей функцией, равной мощности излучения, вычисленной с помощью уравнения Лоренца. Для линейно поляризованной волны постоянной амплитуды полная мощность излучения ограничена сверху монотонно убывающей функцией, пропорциональной максимуму мощности излучения, вычисленной с помощью уравнения Лоренца, за период волны. Эти свойства указывают на то, что учет реакции излучения приводит к уменьшению мощности излучения. Заряженная частица согласно классической теории излучения стремится к траектории с наименьшим излучением, что согласуется с общим принципом наименьшего производства энтропии для неравновесных систем[4].

В **§2.4** получаются явные выражения для спектральной плотности мощности излучения, сформировавшегося на найденных асимптотиках физических решений уравнения ЛД, и исследуются их основные свойства. В **§2.4.1** рассматривается постоянное однородное скрещенное электромагнитное поле, где выводится простое выражение для ведущего вклада в спектральную плотность мощности излучения

$$d\mathcal{E} \approx 4\alpha B\big\{B[\mathrm{Ai}(B)]^2 + [\mathrm{Ai}'(B)]^2\big\}\frac{k_0^2}{k_3^2}dk_0 d\Omega, \qquad B = \frac{k_3^2}{2|\omega|k_-(\lambda\,\mathrm{sgn}(\omega)k_1)^{1/3}}, \tag{3}$$

где ω характеризует напряженность электромагнитного поля, k_- и $k_{1,3}$ – соответствующие компоненты импульса вылетающего фотона, а $d\Omega$ – элемент телесного угла. Это выражение верно только в определенной области значений импульсов фотонов, которая подробно описана в диссертации. В **§2.4.2** аналогичные выражения найдены для случая плоской электромагнитной волны постоянной амплитуды как линейной, так и

[4]Onsager L., Machlup S. Fluctuations and irreversible processes // Phys. Rev. 1953. V. 91. P. 1505.

круговой поляризаций. Например, для падающей электромагнитной волны линейной поляризации

$$d\mathcal{E} \approx \alpha\Big(\frac{k_0}{\omega}\Big)^2\Big(\frac{4\Omega}{\lambda k_-^2}\Big)^{2/3}[\mathrm{Ai}'(\tilde{B})]^2 dk_0 \sin\theta d\theta d\varphi, \qquad \tilde{B} = \frac{k_+ - 2\Omega}{\omega^2}\Big(\frac{2\Omega^2}{\lambda^2 k_-}\Big)^{1/3}, \tag{4}$$

где Ω характеризует частоту падающей электромагнитной волны. Это выражение верно только для определенных значений импульсов излученных фотонов k_μ. Схожее выражение получается и для случая падающей электромагнитной волны круговой поляризации. В обоих случаях спектральная плотность излучения, сформировавшегося на асимптотике, взятая при фиксированной энергии фотона k_0, является осциллирующей функцией $k_\perp$. Минимумы интенсивности излучения соответствуют нулям функции $\mathrm{Ai}'(\tilde{B})$. Интенсивность излучения, сформировавшегося на асимптотике, спроектированная на плоскость, перпендикулярную направлению распространения электромагнитной волны, выглядит как система концентрических колец. Поскольку максимумы интенсивности излучения наблюдаются при углах, зависящих от энергии излученного фотона, для широкополосного детектора это излучение выглядит как круговая радуга.

В **§2.5** подробно исследуется непертурбативная динамика ультрарелятивистских электронов, рассеивающихся на линейно поляризованном оптическом лазерном пучке ($\Omega \approx 1$ эВ) с интенсивность порядка $I \gtrsim 10^{24}$ Вт/см^2. Диаметр лазерного пучка предполагается достаточно широким $d \gtrsim 10\pi/\Omega$. При этом считается, что размер волнового пакета электрона много меньше длины волны электромагнитной волны. Преобразованием Лоренца всегда можно свести данную задачу к плоской. Возможны два случая: a) электроны проходят сквозь лазерный пучок и вылетают с его противоположной стороны; b) электроны отражаются от электромагнитной волны. В случае (a), который реализуется, когда электроны попадают в область электромагнитной волны, где электрическое поле способствует его пролету сквозь нее, компоненты импульсов вылетающих электронов имеют вид

$$\begin{gathered} \upsilon_x^f \approx \frac{1}{2}\Big(\frac{6d}{\lambda}\Big)^{1/3}, \quad \upsilon_-^f \approx -\frac{(\lambda/6d)^{1/3}}{\lambda\bar{\omega}}, \quad \upsilon_y^f \approx -\frac{3\bar{\omega}d}{4}, \quad \upsilon_0^f \approx \upsilon_y^f, \\ \upsilon_-^f \upsilon_x^f \approx -(2\lambda\bar{\omega})^{-1}, \quad \mathrm{tg}\,\delta \approx -\frac{2(6d/\lambda)^{1/3}}{3\bar{\omega}d}, \quad \chi \approx (6\lambda^2 d)^{-1/3} \approx 0.076, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\bar{\omega} = \omega_m \cos\psi_0$, ψ_0 – фаза электромагнитной волны, при которой электрон вошел в нее, δ – угол вылета электрона, отсчитываемый от оси распространения волны, и в последнем выражении взято $d = 10\pi/\Omega$. Импульсы электронов, прошедших лазерный пучок, слабо зависят от начального импульса и определяются только параметрами лазерного пучка и фазой электромагнитной волны в точке входа. Большая часть прошедших электронов рассеивается на малые углы к направлению распространения электромагнитной волны. Максимальный Лоренц-фактор прошедших электронов пропорционален работе, совершенной электромагнитным полем, и не зависит от начального импульса. Прошедшие электроны обладают одинаковыми проекциями импульса на ось, параллельную вектору электрического поля электромагнитной волны.

Эта проекция определяется только диаметром лазерного пучка, измеренным в классических радиусах электрона. В случае (b) компоненты импульсов отраженных электронов оказываются равными

$$r^f = -2r(0), \quad \upsilon_-^f = (6\lambda\bar{\omega}r(0))^{-1/2}, \quad \upsilon_y^f \approx \frac{4r^2(0)-1}{\sqrt{24\lambda\bar{\omega}r(0)}}, \quad \upsilon_0^f \approx \frac{4r^2(0)+1}{\sqrt{24\lambda\bar{\omega}r(0)}},$$
$$\upsilon_-^f\upsilon_x^f = -(3\lambda\bar{\omega})^{-1}, \quad \operatorname{tg}\delta \approx \frac{4\operatorname{ctg}(\varphi/2)}{1-4\operatorname{ctg}^2(\varphi/2)}, \tag{6}$$

где φ – угол влета электрона в лазерный пучок. Из соотношений (6) следует, что электрон отражается от лазерного пучка под углом, который определяется (с высокой точностью) только углом падения и не равен ему. Электромагнитная волна передает импульс электрону вдоль направления своего распространения (оси y), и потому абсолютная величина угла отражения всегда меньше угла падения. Так же, как для электронов, прошедших лазерный пучок, для отраженных электронов произведение $\upsilon_-^f\upsilon_x^f$ не зависит от начального импульса, но равно другой величине, нежели в (5). В диссертации подробно описаны условия, при которых рассеянные электроны обладают указанными свойствами.

Глава 3 посвящена формальному построению описания стохастической динамики неравновесных систем. Стохастические уравнения обычно рассматриваются как довольно эффективный способ учета бесконечного числа факторов, влияющих на открытую систему. Эти уравнения получаются с помощью добавления к классическим уравнениям движения системы случайной силы (шума) с определенным законом распределения. В диссертации развивается иной способ получения стохастических систем, аналогичный алгебраическому подходу к квантовой механике. Хорошо известно, что квантовая механика может рассматриваться как алгебраическая деформация пуассоновой структуры на фазовом пространстве классической системы. Такой подход, известный как деформационное квантование, был инициирован в работах[5] и получил полное (формальное) решение в работах Федосова и Концевича. Поскольку квантовые флуктуации могут быть получены за счет деформации пуассоновой структуры, возникает естественный вопрос о том, могут ли стохастические флуктуации быть получены аналогичным образом. В диссертации дается положительный ответ на этот вопрос и рассматриваются многочисленные примеры стохастических систем, получаемых с помощью алгебраической деформации.

Схожесть уравнений квантовой и стохастической механик была осознана многими авторами, начиная со Шредингера. Однако основная идея этих работ состояла в аналитическом продолжении уравнений квантовой механики в область мнимого времени, а не деформации пуассоновой структуры. Корректное самосогласованное описание стохастической системы получается именно при соответствующей деформации алгебры наблюдаемых, а не наивном аналитическом продолжении. В диссертации показано, что стохастическая механика может быть получена при помощи деформации

[5] Березин Ф.А. Квантование // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. С. 1116; Bayen F., *et al.* Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics // Lett. Math. Phys. 1975. V. 1. P. 521.

ассоциативного, коммутативного произведения алгебры классических наблюдаемых (гладкие функции на фазовом пространстве) так же, как в процедуре деформационного квантования. Однако в отличие от обычной квантовой механики с вещественным параметром деформации (постоянной Планка), в данном случае произведение деформируется с помощью мнимого параметра:

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = \nu_0 \delta^i_j, \qquad \nu_0 > 0. \tag{7}$$

где $\hat{x}$ и $\hat{p}$ – образующие деформированной алгебры. Эта процедура развита в работах [7, 8] и названа стохастической деформацией. Параметр деформации ν_0 характеризует «открытость» системы, поскольку дисперсия случайных сил оказывается пропорциональной этому параметру. Гамильтониан, генерирующий динамику стохастической системы, характеризует закон распределения флуктуаций случайных сил. Разложение его pq-символа связано с разложением Крамерса-Мояла, а коэффициенты этого разложения определяют кумулянты функции распределения шума. Для уравнения Ланжевена вида

$$\dot{x}^i(\tau) = \nu^i(\tau), \tag{8}$$

функция,

$$F(\nu, \tau, x) := \int \frac{d^d p}{(2\pi\nu_0)^d} e^{-\frac{i}{\nu_0} d\tau p_i \nu^i} \exp\left\{ \frac{d\tau}{\nu_0} \left[\bar{H}(\tau, x, ip) + \partial_\tau S(\tau, x) \right] \right\}, \tag{9}$$

задает распределение плотности вероятности шума $\nu^i(\tau)$ в момент времени τ, причем уравнение Ланжевена (8) следует понимать в смысле Ито. В формуле (9) функция $S(\tau, x)$ – это стохастическая фаза. Она с необходимостью возникает в процедуре стохастического квантования. С точки зрения классического предела *in-in* формализма эта фаза пропорциональна логарифму разности соответствующих «плюс» и «минус» полей. В простейшем случае линейного симплектического пространства квадратичный по импульсам гамильтониан соответствует белому гауссовому шуму.

Развиваемый в диссертации формализм может рассматриваться как калибровочная версия операторного подхода к стохастической механике или как классический предел *in-in* формализма в квантовой теории поля. Алгебраическая формулировка позволяет перенести методы, разработанные в квантовой механике и квантовой теории поля, в стохастическую механику практически без изменений. В этой связи отметим методы квантования систем со связями. Алгебраический подход позволяет строить стохастические модели, которые сохраняют не только глобальные симметрии исходной модели, но и, что важнее, калибровочные симметрии. Другими словами, этот подход позволяет вводить шум к физическим степеням свободы, не выраженным в явном виде. В диссертации рассмотрено несколько примеров стохастической деформации калибровочных систем.

В **§3.1** вводятся общие правила стохастической деформации, аналогичные деформационному квантованию. В **§3.2** устанавливается физическая интерпретация получающейся стохастической механики, дается представление вероятности перехода в виде функционального интеграла и выводится уравнение Ланжевена (8) с законом распределения (9).

В **§3.3** строится стохастическая деформация различных классических моделей. В **§3.3.1** показано, что деформация системы с гамильтонианом,

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_i - \hat{A}_i)^2}{2m} + \hat{A}^0, \tag{10}$$

приводит к уравнению Фоккера-Планка (ФП),

$$\partial_t \rho = -\partial^i \left[-\frac{\nu_0}{2m} \partial_i \rho + \frac{\partial_i S - A_i}{m} \rho \right], \tag{11}$$

на функцию распределения $\rho(t, x)$. Систематический сдвиг (дрейф) равен

$$f_i(t, x) = (\partial_i S(t, x) - A_i(t, x))/m, \tag{12}$$

где A_i – стохастическое калибровочное поле, а ν_0 характеризует дисперсию случайных сил. В частности, известный стохастический аналог соотношения неопределенности имеет вид

$$\langle (x^i)^2 \rangle \langle (p_i^{os})^2 \rangle \geq \frac{\nu_0^2}{4} \quad \text{(нет суммирования)}, \tag{13}$$

где $p_i^{os} := -\nu_0 \partial_i \ln \rho^{1/2}$ – это так называемый осмотический импульс. Найдена первая стохастическая поправка к уравнениям Ньютона для этой системы. Также в этом подразделе выводится уравнение Клейна-Крамерса как стохастическая деформация соответствующей классической системы. В качестве примера приложения формализма выводится значение параметра деформации для этой системы, через известные физические величины

$$\nu_0 = \frac{2\gamma k T}{m}, \tag{14}$$

где T – температура, m – масса частицы, а γ – коэффициент трения.

В **§3.3.2** исследуется стохастическая деформация релятивистских репараметризационно-инвариантных систем. В результате получены релятивистское уравнение диффузии (релятивистское обобщение уравнения ФП), релятивистское уравнение Клейна-Крамерса и аналог уравнения ФП для стохастического уравнения Лоренца-Дирака. Получено представление для вероятности перехода в виде функционального интеграла как в калибровке лабораторного времени, так и в терминах собственного времени частицы. Приведены соответствующие уравнения Ланжевена. В работе [7] рассмотрены стохастические деформации моделей свободного скалярного и электромагнитного полей. Показано, что в последнем случае возникает стохастическая модель, описывающая флуктуации электромагнитного поля в прозрачной среде. Методы БРСТ-квантования применены для построения стохастической механики систем с калибровочными степенями свободы.

Особое внимание в диссертации уделено стохастической деформации термодинамической симплектической структуры. В **§3.3.3** строится описание слабонеравновесных процессов в нелинейной термодинамике в терминах гамильтоновой динамической системы. Геометрическое описание термодинамических систем имеет долгую историю и было инициировано Гиббсом. В рамках данного подхода пространство термодинамических параметров наделяется естественной симплектической структурой, а уравнения состояния системы задаются лагранжевой поверхностью в этом пространстве. Действительно, все статистические свойства квантовой системы в термостате определяются статистической суммой

$$Z(p_1, \dots, p_{d-1}, x^d) := \operatorname{Sp} \exp\Bigg(-\sum_{i=1}^{d-1} p_i \hat{x}^i \Bigg), \tag{15}$$

где $\hat{x}^i$ – квантовые операторы аддитивных интегралов движения, x^d – некоторая фиксированная экстенсивная величина, например, объем системы, а p_i – интенсивные параметры, термодинамически сопряженные к $\hat{x}^i$, или термодинамические силы. Одной из таких сопряженных пар является гамильтониан и обратная температура. Дифференцируя статистическую сумму по p_i и совершая преобразование Лежандра, приходим к первому началу термодинамики

$$dS(x) = p_i dx^i, \tag{16}$$

где x^i – средние соответствующих операторов, $S(x)$ – энтропия системы, которая является преобразованием Лежандра функции Массье $\Phi := -\ln Z$, а также введен интенсивный параметр $p_d := \partial_d S(x)$, сопряженный к x^d. Первое начало (16) наделяет пространство состояний (x, p) термодинамической системы симплектической структурой, определяемой симплектическим потенциалом $\theta := p_i dx^i - dS$. Согласно (16), система находится на лагранжевой поверхности симплектической 2-формы $d\theta$. В отсутствие равновесия с термостатом, термодинамическая система движется по лагранжевой поверхности. Кроме того, если непосредственно (т.е. не с помощью интенсивных параметров) изменить энтропию системы, то лагранжева поверхность (16) также эволюционирует. Естественное обобщение первого начала термодинамики на неравновесные процессы выглядит как[6]

$$dS(t, x) = p_i dx^i - H(x, p, t)dt, \tag{17}$$

где $H(x, p, t)$ – это термодинамическая сила, сопряженная времени, или кинетический потенциал. Нестационарное первое начало (17) есть не что иное, как уравнение Гамильтона-Якоби. Требование того, чтобы система двигалась по лагранжевой поверхности, ограничивает форму кинетического потенциала:

$$H = -\partial_t S + T_i v^i(t, x) + \frac{1}{2} T_i g^{ij}(t, x) T_j + \dots, \quad T_i := p_i - \partial_i S, \tag{18}$$

где v^i и $g^{ij} = g^{ji}$ – некоторые контравариантные тензоры, точки означают слагаемые более высокого порядка по T_i.

[6]Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Физматлит, 1985.

В результате, неравновесная термодинамика реализуется как гамильтонова динамическая система. Следующим логическим шагом является «квантование» такой динамической системы, чтобы описать ее флуктуации. В то же время, это «квантование» не должно быть квантовым, но должно приводить к уравнениям типа ФП для вероятности распределения термодинамических переменных, т.е. это должна быть стохастическая деформация термодинамической симплектической структуры. Такая деформация построена в **§3.3.4**. Стохастическая деформация, примененная к термодинамике, воспроизводит известные операторные методы для описания флуктуаций в определенных калибровках. Калибровочные преобразования и калибровочные поля с группой $SO(1,1)$, введенные в диссертации, являются необходимыми ингредиентами стохастической деформации. Стохастическая деформация термодинамической симплектической структуры позволяет сформулировать термодинамику и стохастическую механику в виде, инвариантном относительно данных калибровочных преобразований.

Глава 4 посвящена описанию термодинамически равновесного состояния электронов и фотонов в системах с ограниченным объемом. Внешнее поле, например, поле кристалла, учитывается при помощи модификации закона дисперсии частицы, который считается обладающим эллипсоидальной поверхностью постоянной энергии:

$$E(p) = \omega(g^{ij}(p_i - a_i)(p_j - a_j) + m^2), \tag{19}$$

где g_{ij}, a_i и m – некоторые константы, g_{ij} – симметричная, положительно-определенная матрица, и $\omega(x)$ некоторая гладкая функция, возрастающая при большом аргументе. Индексы поднимаются и опускаются с помощью «метрики» g^{ij} и ей обратной. Эта метрика связана с тензором эффективных масс,

$$m_{ij} := \left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{-1}_{p_i = a_i} = \frac{g_{ij}}{\omega'(m^2)}, \tag{20}$$

когда он определен. Предположение о форме закона дисперсии позволяет провести аналитические расчеты, практически, до конца и получить быстросходящееся разложение для Ω-потенциала системы частиц:

$$\beta\Omega(\beta, \mu, \xi) := \ln Z(\beta, \mu, \xi), \qquad Z := \operatorname{Sp} e^{-\beta\hat{H} + \mu\hat{N}}, \tag{21}$$

где $\hat{H}$ – многочастичный гамильтониан, $\hat{N}$ – сохраняющийся заряд, а ξ – некоторые параметры, характеризующие спектр гамильтониана. При этом удается идентифицировать различные вклады в термодинамический потенциал и выделить среди них существенно непертурбативные. Явное вычисление этих непертурбативных слагаемых для скалярного поля на стационарном гравитационном фоне позволяет, в частности, найти квантовую гравитационную аномалию (см. ниже). Общая теория неравновесных систем, изложенная в предыдущей главе, позволяет по известному Ω-потенциалу описывать флуктуации и динамику ее термодинамических характеристик согласно флуктуационно-диссипационным теоремам в слабонеравновесных состояниях.

Существует хорошо разработанный квазиклассический метод для вычисления однопетлевых поправок как при нулевой, так и при конечной температуре, известный как разложение теплового ядра. Этот метод разработан практически для любого фонового поля и граничных условий. Тем не менее он обладает определенными недостатками. Во-первых, этот метод развит, в основном, для частиц с релятивистским законом дисперсии. Во-вторых, что более важно, это разложение не воспроизводит экспоненциально подавленные члены, которые становятся существенными и наблюдаемыми при определенных значениях внешних полей. В физике конденсированного состояния классический пример таких вкладов – это осциллирующие слагаемые в Ω-потенциале электронов проводимости в металле. Ландау был, по-видимому, первый, кто указал на то, что внешнее магнитное поле может приводит к осцилляциям статистической суммы электронов. Эти осцилляции были впоследствии экспериментально обнаружены Шубниковым и де Гаазом в проводимости и де Гаазом и ван Альвеном в магнитной восприимчивости. Позднее была развита квазиклассическая теория этих осцилляций для Ферми-жидкости квазичастиц с произвольным законом дисперсии[7]. Выбор закона дисперсии (19) позволяет аналитически исследовать характерные особенности Ω-потенциала с точностью, превышающей квазиклассический ответ общей теории осцилляций.

В **§4.1.1** находится быстросходящееся разложение однопетлевой поправки к Ω-потенциалу. Фактически, задача сводится к выводу быстросходящегося разложения ряда

$$I_d = \sum_p \ln(1 + e^{\mu - E(p)}), \quad p \in \mathbb{Z}^d, \tag{22}$$

с законом дисперсии (19). Основная проблема при вычислении статистической суммы в данном случае состоит в том, что под суммой стоит выражение, медленно убывающее с увеличением квантовых чисел. Стандартный способ улучшить сходимость такого ряда – это применить преобразование Фурье, т.е. воспользоваться формулой суммирования Пуассона. В результате, однопетлевой Ω-потенциал естественным образом распадается на три слагаемых:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_q, \qquad \Omega_q = \Omega_c + \Omega_{os}. \tag{23}$$

Здесь Ω_0 – квазиклассический (основной) вклад. В этом вкладе полностью пренебрегается дискретностью квантовых чисел. Именно этот вклад, называемый также вкладом Томаса-Ферми, описывается наивным разложением теплового ядра. Слагаемое Ω_q – существенно квантовый вклад. Оно может быть разложено на вклады от разреза закона дисперсии (19) (когда этот разрез существует) и осциллирующий вклад Ω_{os}, который задается суммой по мацубаровским частотам. Слагаемое Ω_q осциллирует при изменении химического потенциала, в то время как первое, Ω_0, – нет. Отметим, что в выражение (23) не включен расходящийся вакуумный вклад. Тем не менее этот вакуумный вклад может быть найден из высокотемпературного разложения (23), поскольку

$$E_f(\beta, 0) = -\,\partial_\beta(\beta\Omega_f(\beta,\mu))\big|_{\mu=0} = \sum_n \frac{E_n}{e^{\beta E_n} + 1} \underset{\beta\to 0}{\rightarrow} \sum_n \frac{E_n}{2}, \tag{24}$$

[7]Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И. Электронная теория металлов. М.: Физматлит, 1971.

где E_n – энергия моды n, индекс f обозначает статистику. При таком способе вычисления вакуумной энергии распределение Ферми-Дирака играет роль регулятора, приводящего к обрезанию по энергии. Казимировское слагаемое[8] содержится в члене Ω_c. В полном Ω-потенциале, учитывающем вакуумный вклад, казимировский член сокращается при высоких температурах как для бозонов, так и для фермионов. Осциллирующий вклад Ω_{os} сводится к сумме ζ-функций Эпштейна. В **§4.1.1** выводится разложение Чоула-Селберга для этой ζ-функции.

В **§4.1.2** анализируются условия эффективности полученного разложения. В **§4.1.3** выводятся неизвестные ранее его пересуммирования, расширяющие область применимости разложения. В частности, рассматриваются пересуммирования разложения Чоула-Селберга и суммы по мацубаровским частотам. В **§4.1.4**, и более подробно в работе [12], впервые получены полные высоко- и низкотемпературные разложения квазиклассического вклада Ω_0 для однородных функций $\omega(x)$. В частных случаях нерелятивистского и релятивистского законов дисперсии эти разложения совпадают с известными.

В **§4.2** рассматриваются примеры приложения общих формул. В **§4.2.1** рассмотрены безмассовые релятивистские частицы (линейный закон дисперсии) в ящике как при нулевом, так и ненулевом химическом потенциале. При нулевом химическом потенциале данная модель описывает фотоны, заключенные в идеальный металлический параллелепипед. В диссертации получены новые быстросходящиеся разложения Ω-потенциала с помощью формул пересуммирования, найденных в §4.1.3. При ненулевом химическом потенциале модель соответствует, например, электронам около точек Дирака в графене. В этом случае получено новое быстросходящееся разложение Ω-потенциала электронов проводимости и описаны осцилляции их химического потенциала при малых деформациях кристалла. Период этих осцилляций равен

$$\ell \approx 2\sqrt{\frac{\pi L_x L_y}{Q}}, \tag{25}$$

т.е. выражается через поверхностную плотность электронов проводимости в графене. В **§4.2.2** исследуются нерелятивистские электроны в тонкой металлической пленке. Эта модель является классическим объектом исследования в теории Ферми-жидкости электронов проводимости в металле. В данном случае получено быстросходящееся разложение для Ω-потенциала и числа частиц, более точное чем квазиклассический ответ общей теории осцилляций. Такое разложение получено в диссертационной работе для Ω-потенциала и числа частиц. Получены простые формулы для периода и амплитуды этих осцилляций химического потенциала с изменением ширины металлической пленки. Например, период осцилляций,

$$\ell \approx \left(\frac{9\pi S L_x}{8N}\right)^{1/3}, \tag{26}$$

[8]Casimir H.B.G. On the attraction between two perfectly conducting plates // Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch. B. 1948. V. 51. P. 793.

выражается через плотность электронов проводимости в металле.

Глава 5 посвящена исследованию эффекта гравитационного сдвига масс за счет механизма Хиггса. Этот эффект по большей части обусловлен зависимостью эффективного действия поля Хиггса от выбора вакуумного состояния квантовых полей и потому является непертурбативным. Данный эффект можно, по-видимому, наблюдать только в сильных гравитационных полях. К сожалению, точное количественное описание (как, скажем, в квантовой электродинамике) этого эффекта, т.е. вывод значений констант при соответствующих структурах в эффективном действии, невозможно в силу неперенормируемости квантовой гравитации.

Эффект гравитационного сдвига масс проявляется в виде отклонения от стандартного закона красного смещения ОТО. При стандартном выводе закона красного смещения неявно предполагается, что спектр излучения не зависит от внешнего гравитационного поля в системе отсчета, связанной с излучателем. Однако если массы частиц изменяются гравитационным полем, то спектр будет также меняться в этой системе координат. Массы всех массивных частиц стандартной модели генерируются посредством механизма Хиггса и определяются ненулевым вакуумным средним поля Хиггса. Вакуумное среднее доставляет минимум эффективному потенциалу, форма которого оказывается зависящей от фонового гравитационного поля.

Одним из важных шагов при вычислении энергии вакуумных колебаний является корректное определение гамильтониана всей системы в гильбертовом пространстве. Формальное выражение для гамильтониана расходится и нуждается в соответствующей процедуре регуляризации и перенормировки. Более того, по определению, гамильтониан системы зависит от выбора векторного поля, задающего направление времени[9]. Различный выбор этого векторного поля приводит к различным (унитарно неэквивалентным) квантовым теориям, и нет физического принципа, позволяющего построить это векторное поле для произвольного гравитационного фона. Другая формулировка этой проблемы состоит в том, что мы должны задать представление алгебры операторов рождения-уничтожения и процедуру нормального упорядочения для составных операторов.

Для стационарного гравитационного поля существует выделенный набор (представление) операторов рождения-уничтожения, связанный со стационарными модовыми функциями. Такие модовые функции определяются как решения соответствующего волнового уравнения, являющиеся собственными функциями для производной Ли вдоль вектора Киллинга, задающего стационарность метрики. Это позволяет определить нормальное упорядочение и придать точный смысл составным операторам, таким как гамильтониан. Как только гамильтониан построен, вакуумное состояние определяется как состояние, отвечающее минимуму энергии.

Такой подход к определению нормального упорядочения эквивалентен так называемой физической регуляризации. Физическая регуляризация – это, по определению, такая регуляризация квантовой теории поля, которая сохраняет основные постулаты

[9]Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.

квантовой механики и, в частности, локальность и унитарность эволюции. Согласно теореме Хаага, последнее требование говорит о том, что данная регуляризация с необходимостью нарушает Пуанкаре-инвариантность, которая должна восстанавливаться пертурбативно в каждом порядке теории возмущений за счет добавления соответствующих контрчленов в исходное действие.

Простейшей реализацией физической регуляризации является модификация релятивистских законов дисперсии частиц выше некоторой энергии обрезания таким образом, чтобы петлевые интегралы стали сходящимися, либо можно, просто, ввести обрезание петлевых интегралов по энергии, как это сделано в (24). Процедура нормального упорядочения операторов рождения-уничтожения, ассоциированных со стационарными модовыми функциями, и обрезание по энергии требуют введения векторного поля Киллинга. Квадрат этого векторного поля входит в эффективный потенциал поля Хиггса и изменяет форму потенциала во внешнем гравитационном поле. В плоском пространстве-времени вектор Киллинга «исчезает» из эффективного потенциала (поскольку в данном случае его квадрат – это всего лишь константа) и в однопетлевом приближении эффективный потенциал принимает хорошо известный вид потенциала Колмена-Вайнберга. Таким образом, после соответствующей перенормировки, нарушения Лоренц-инвариантности в плоском пространстве-времени не происходит. Отметим, что зависимость эффективного действия от вектора Киллинга содержится не только в расходимостях, но и в конечной части. Более того, как подробно обсуждается в главе 6, эта зависимость не может быть сокращена контрчленами, полиномиальными по импульсам.

В **§5.1** напоминаются основные особенности стандартной модели, необходимые для получения однопетлевого эффективного потенциала поля Хиггса. В **§5.2** выводится однопетлевой эффективный потенциал с использованием представления (24) и накладываются естественные условия нормировки, обеспечивающие согласованность с известными экспериментальными данными.

В **§5.3** рассматривается случай нестационарного гравитационного фона. В нестационарном случае, чтобы определить гамильтониан системы, представление операторов рождения-уничтожения и физическую регуляризацию, необходимо ввести некоторое векторное поле ξ^μ так же, как в стационарном случае. Оказывается, что такое векторное поле однозначно определяется требованием ковариантной бездивергентности тензора энергии-импульса материи при условии, что задано значение этого векторного поля на поверхности Коши начальных данных. Фактически, векторное поле ξ^μ – это новые степени свободы теории. Уравнения, описывающие эволюцию ξ^μ, имеют вид гидродинамических уравнений. В ведущем порядке по производным уравнения движения поля ξ^μ могут быть приведены к виду релятивистских уравнений Эйлера с баротропным уравнением состояния, определяемым эффективным потенциалом поля Хиггса. Это позволяет найти стационарные решения уравнений на поле ξ^μ для шварцшильдовской черной дыры, причем оказывается, что существует два таких решения. Первое – тривиальное, совпадающее с вектором Киллинга. Это решение отвечает случаю стабильной звезды. Другое решение – нетривиальное, описывающее «аккрецию» вакуума на черную дыру. В последнем случае оказывается, что эффективный потенциал регулярен на горизонте черной дыры. Массы массивных частиц стандартной модели сдвигаются на конечную величину и не стремятся к бесконечности или нулю. Отметим, что какие бы новые частицы не были введены в стандартную модель, поле ξ^μ также должно быть в нее включено, как это описано выше, если требовать выполнения основных принципов квантовой теории поля и ОТО.

В **главе 6** доказывается существование квантовой гравитационной аномалии, предлагается возможный механизм ее сокращения и рассматриваются некоторые феноменологические следствия этой процедуры. Можно сказать, что в этой главе построена самосогласованная, но пертурбативно неперенормируемая, модель квантовой гравитации.

В квантовой гравитации при описании неравновесных квантовых процессов возникают две дополнительные проблемы, которые отсутствуют в квантовой электродинамике. Первая проблема связана с тем, что квантовая гравитация не является пертурбативно перенормируемой. Эта трудность решается стандартными методами эффективных теорий поля, при этом, однако, предсказательная сила теории значительно уменьшается. Вторая проблема, которая уже обсуждалась выше, носит принципиальный характер и связана с тем, что в квантовой гравитации отсутствуют привилегированное вакуумное состояния, набор операторов рождения-уничтожения и квантовый гамильтониан. Это так называемая проблема времени, т.е. проблема выбора единственного представления алгебры наблюдаемых[10]. Как хорошо известно из квантовой механики, зависимость от выбора вакуумного состояния – существенно непертурбативный эффект. Поэтому, чтобы отследить эту зависимость, необходимо найти непертурбативные поправки в эффективное действие квантовой гравитации.

В **§§6.1-3** находятся явные выражения для таких непертурбативных поправок в калибровке фонового поля в однопетлевом приближении в классе стационарных медленно меняющихся в пространстве метрик. Оказывается, что эти поправки не могут быть выражены ковариантным образом в терминах метрики и ее производных (кривизн). Более того, данные вклады неаналитичны по константе связи и импульсам и потому не могут быть сокращены контрчленами. Этот факт свидетельствует о возникновении квантовой гравитационной аномалии.

Для однопетлевых вкладов в эффективное действие математически проблема выглядит следующим образом. Однопетлевая поправка в эффективное действие при нулевой температуре обычно формально записывается через интеграл по τ от следа так называемого теплового ядра

$$\operatorname{Sp} e^{-\tau H}, \tag{27}$$

где H – волновой оператор (гиперболического типа), например, оператор Клейна-Гордона. Можно наивно думать, что это выражение является общековариантным, т.е. если преобразовать метрику, входящую в волновой оператор, согласно тензорному закону и меру в определении следа, то выражение (27) не изменится. Однако проблема

[10] Isham C.J. Canonical quantum gravity and the problem of time // http://arxiv.org/abs/gr-qc/9210011.

состоит в том, что выражение (27) плохо определено, т.к.:

1) Оператор H, реализованный на квадратично интегрируемых гладких функциях на пространстве-времени, имеет спектр, неограниченный как сверху, так и снизу;
2) Оператор, стоящий под знаком следа в (27), не является ядерным оператором.

Чтобы понять происхождение этих свойств выражения (27), можно иметь в виду модельный пример

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\tau(n^2-k^2)}.$$

Первое свойство говорит о том, что след (27) как функция τ может быть определен только для чисто мнимых τ и только в смысле обобщенных функций τ. Это является довольно серьезным препятствием для корректного вычисления эффективного действия с помощью (27), поскольку в формуле для однопетлевого вклада (27) интегрируется не с финитной функцией τ. Отметим, что математически строгая теория вычисления следа операторов вида (27) разработана только для самосопряженных операторов H со спектром, ограниченным снизу или сверху. Однако еще более серьезная проблема возникает из-за второго свойства, которое говорит о том, что значение (27) зависит от базиса (последовательности полного набора векторов), в котором вычисляется след, и для некоторых базисов оно не определено. Фактически, нужно указать «правильный» базис, в котором следует вычислять (27), т.е. вновь возникает проблема выбора набора модовых функций – проблема времени. Чтобы выражение (27) было скаляром, необходимо при совершении общекоординатных преобразований также преобразовывать и структуру (вектор Киллинга, для стационарного фона), выделяющую «правильный» базис в гильбертовом пространстве.

В **§6.1** строится обобщение теории ζ-функции самосопряженных операторов на случай гиперболических операторов на произвольном стационарном фоне. Изучаются аналитические свойства функции

$$\zeta_+(\nu,\omega) := \mathrm{Sp}\int_C \frac{d\tau\tau^{\nu-1}}{(e^{2\pi i\nu}-1)\Gamma(\nu)}e^{-\tau H(\omega)}, \tag{28}$$

где контур C идет вдоль мнимой оси сверху вниз и обходит начало координат слева, а $H(\omega)$ – преобразование Фурье по времени волнового оператора. Выводится общая формула для высокотемпературного разложения однопетлевого Ω-потенциала:

$$\Omega_b = -\lim_{\nu\to 0}\left[\sum_{k,n=0}^{\infty}\Gamma(D-2\nu-k)\zeta(D-2\nu-k-n)\frac{\zeta_k(\nu)(\beta\mu)^n}{n!\beta^{D-2\nu-k}} + \sum_{l=-1}^{\infty}\frac{(-1)^l\zeta(-l)}{\Gamma(l+1)}\sigma^l_\nu(\mu)\beta^l\right], \tag{29}$$

где

$$\sigma^l_\nu(\mu) := \int_0^\infty d\omega(\omega-\mu)^l\zeta_+(\nu,\omega). \tag{30}$$

Однопетлевой вклад в эффективное действие при нулевой температуре получается из высокотемпературного разложения с помощью соотношения (24).

В **§6.2** приводится доказательство независимости от вектора Киллинга пертурбативной части однопетлевого вклада в эффективное действие при нулевой температуре после соответствующей перенормировки. В **§6.3** находится непертурбативное выражение для теплового ядра скалярного поля на фоне стационарной медленно меняющейся в пространстве метрики. С технической точки зрения, проблема сводится к вычислению функций (30). Первые члены в (29) выражаются через коэффициенты разложения теплового ядра и потому известны. Оказывается, что функции σ^l_ν содержат вклады вида

$$\sigma^l_\nu \sim m^\varkappa \operatorname{Re} e^{-am/m_g}, \qquad a \in \mathbb{C}, \tag{31}$$

где m – масса скалярного поля, а m_g – некоторая ковариантная комбинация производных метрики и вектора Киллинга, которая не может быть выражена в ковариантном виде только через метрику и ее производные. Эти вклады присутствуют и в однопетлевом вкладе в эффективное действие при нулевой температуре. Поскольку данные вклады зависят нетривиальным образом от массы поля, они не сокращаются однопетлевыми гравитонным и духовым вкладами. Члены (31) неаналитичны по гравитационной постоянной и импульсам и потому не могут быть сокращены контрчленами. Они соответствуют реально наблюдаемым (в принципе) явлениям, аналогичным осцилляциям Ландау в квантовой электродинамике.

Сокращения членов (31) не происходит в стандартной модели и ее разумных обобщениях, т.к. (31) существенно различаются для вкладов частиц с различной массой. Однако сокращения аномалии можно добиться, если приписать полю ξ^μ свою динамику. Тогда общая ковариантность восстановится, но ценой введения дополнительных степеней свободы. Как уже обсуждалось выше, динамика векторного поля ξ^μ однозначно определяется из требования выполнения тождеств Уорда и описывается уравнениями гидродинамического типа. В **§6.4** подробно описывается данная процедура сокращения аномалии. Указываются естественные условия нормировки, налагаемые на зависимость эффективного действия от поля ξ^μ:

1) Лоренц-инвариантность. Для плоского пространства-времени, где $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, и постоянного времениподобного векторного поля ξ^μ, зависимость эффективного действия от поля ξ^μ должна исчезать;
2) Согласованность с уравнениями Эйнштейна. В пределе плоского пространства-времени и $\nabla_\nu \xi^\mu \to 0$ вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса полей материи и поля ξ^μ должно стремиться к нулю;
3) Минимальность. Классическое действие поля ξ^μ содержит только те структуры, которые возникают в качестве расходимостей при вычислении квантовых поправок с использованием физической регуляризации обрезанием по энергии.

Сокращение на нуль контрчленами структур в эффективном действии, зависящих от ξ^μ и аналитических по гравитационной постоянной, становится неестественным.

Чтобы построить самосогласованную модель квантовой гравитации, необходимо построить квантовую теорию релятивистской жидкости, описываемой полем ξ^μ. Такая теория развивается в **§§6.5-9**, где также предлагается естественный кандидат на роль холодной темной материи.

В **§6.5** строится лагранжево описание релятивистской гидродинамики на основе формализма Тауба-Фока. В **§6.6** проводится квантование этой модели в рамках формализма фонового поля. В **§6.6.1** устанавливается общий вид классического давления для жидкости, описываемой полем ξ^μ, согласованный с указанными выше условиями нормировки. В **§6.6.2** показывается что пределе слабого гравитационного поля, т.е. фактически везде, кроме малой окрестности черных дыр и начальной стадии эволюции Вселенной, уравнение состояния для рассматриваемой жидкости задается политропой

$$p = \frac{\varepsilon^{1+1/n}}{2(n+1)(2A)^{1/n}} =: K\varepsilon^{1+1/n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{32}$$

где A и n – универсальные постоянные. Естественно отождествить эту жидкость со значительной частью темной материи. Исходя из астрофизических данных по плотности темной материи в окрестности Солнца, находятся оценки значений константы A в зависимости от n. Например,

$$A_1 \approx 1.25\times 10^5\,\text{ГэВ/см}^3 \approx (1\,\text{эВ})^4, \quad A_4 \approx 1.6\times 10^{22}\,\text{ГэВ/см}^3 \approx (19\,\text{кэВ})^4, \quad \text{и т.д.} \tag{33}$$

Анализ эволюции такой жидкости на фоне метрики Фридмана показывает, что данная жидкость действительно может интерпретироваться как холодная темная материя. Модели темной материи, описываемой политропным уравнением состояния, уже рассматривались в литературе в другом контексте для решения «проблемы пика» распределения пылевидной темной материи в центре Галактики. Общепринятая модель темной материи подразумевает нулевое давление, что должно приводить к высокой концентрации темной материи в центре Галактики. Такое увеличение плотности не наблюдается экспериментально. Введение ненулевого давления (32) решает данную проблему.

В **§§6.6.3-5** исследуются градиентные члены в давлении жидкости, индуцированные однопетлевыми квантовыми поправками. Находятся линеаризованные уравнения движения. В случае, когда градиентами метрики можно пренебречь, выводятся ограничения на константы связи в давлении, при выполнении которых в теории отсутствуют госты. Находится фононный закон дисперсии с учетом градиентных поправок. Доказываются тождества Уорда, связанные с сохранением энтропии и завихренности идеальной жидкости, и указаны возможные непертурбативные механизмы их нарушения.

В **§6.7** исследуется динамика малых возмущений жидкости с учетом ведущих квадратичных нелинейных вкладов в уравнения движения. Находятся явные выражения для поперечных и продольных возмущений, индуцированных сильной звуковой волной:

$$\partial_{[i}\dot{\psi}^{\perp}_{j]} = \partial_{k[i}\dot{\theta}\partial_{j]k}\theta - c_s^2\Delta\partial_{[i}\theta\partial_{j]}\dot{\theta}, \qquad c_s^{-2}\ddot{\psi}_0 - \Delta\psi_0 = -\tfrac{1}{2n}\partial_\tau[(\Delta\theta)^2], \tag{34}$$

где ψ_a – возмущение второго порядка соответствующей лагранжевой координаты, θ – потенциал сильной фоновой звуковой волны. Продольные компоненты ψ_i выражаются через ψ_0. Второе уравнение в (34) получено для уравнения состояния (32). Оно, в частности, описывает возникновение обертонов в звуковой волне.

В **§6.8** находятся конкретные выражения для классического потенциала (давления) жидкости, описываемой полем ξ^μ, удовлетворяющие всем условиям нормировки, указанным выше. Простейший потенциал, соответствующий $n = 1$, имеет вид

$$p = -\frac{m_\chi^2}{8\eta^2}(|\phi|^2 - \eta^2)^2 + \frac{A_1}{2}(t^2 - 1)^2, \tag{35}$$

где $t_\mu = \xi_\mu/\xi^2$. Первое слагаемое в (35) – это классический потенциал поля Хиггса.

В **§6.9** рассматриваются некоторые квантовые процессы с участием фононов – малых возмущений поля ξ^μ. Показано, что в ведущем порядке по производным вклад в однопетлевое эффективное действие нулевых колебаний фононного поля должен быть полностью сокращен контрчленом. Также показано, что распад бозона Хиггса в фононы, наличие которого можно ожидать исходя из вида давления для ξ^μ, не может быть описан стандартным пертурбативным методом, поскольку эффективная константа связи очень велика:

$$\frac{m_\chi^4}{4\pi^3 c_s \varepsilon_{dm}} \gg 1, \tag{36}$$

где $\varepsilon_{dm} \lesssim 10^{-42}$ ГэВ^4 – плотность энергии темной материи. Анализ средних в *in-in* формализме показывает, что в ведущем порядке волновой пакет бозонов Хиггса не изменяет вакуумное среднее поля ξ^μ, т.е. фононы не рождаются.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации. В **приложения** вынесены некоторые данные вспомогательного характера и громоздкие формулы.

Основные результаты диссертации

1. Разработана общая процедура вывода эффективных уравнений движения, позволяющих исследовать непертурбативную динамику локализованных волновых пакетов квантовых частиц. Описана непертурбативная динамика электронов при больших временах во внешних электромагнитных полях простых конфигураций: постоянное однородное поле, плоская электромагнитная волна. Найдены асимптотики физических решений уравнения ЛД в этих полях. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы движение заряженной частицы в постоянном однородном электромагнитном поле было плоским. В этом случае уравнение ЛД сведено к одному уравнению второго порядка. Найдены точные решения уравнения ЛЛ для класса внешних электромагнитных полей, допускающих двупараметрическую группу симметрии. Этот класс включает, в частности, полевые конфигурации отмеченные выше.
2. Проведен анализ общих свойств движения заряженных частиц в полях указанных конфигураций. В частности, доказано, что в таких полях сила реакции излучения стремится уменьшить полную излучаемую мощность так, что электрон переходит на траекторию с наименьшим излучением. Это свойство согласуется с общим принципом наименьшего производства энтропии для неравновесных систем. Доказано, что для

постоянного однородного внешнего электромагнитного поля полная мощность излучения заряда является монотонно убывающей функцией времени, а в случае плоской волны – ограниченной сверху монотонно убывающей функцией. Показано, что в асимптотическом режиме для плоской волны круговой поляризации и постоянных скрещенных полей полная мощность излучения, выраженная в терминах собственного времени, не зависит от заряда частицы или напряженности внешнего поля и равна половине энергии покоя частицы, деленной на собственное время частицы, проведенное в электромагнитном поле. Поскольку асимптотика при больших временах описывает (в определенном приближении) результат действия S-матрицы на локализованное состояние электрона, эта асимптотика существенно непертурбативна.
3. Подробно описаны свойства ультрарелятивистских электронов, рассеянных на интенсивном лазерном пучке линейной поляризации (интенсивность $I \gtrsim 10^{24}$ Вт/см^2 и энергия фотонов $\Omega \approx 1$ эВ). Предполагается, что волновой пакет электрона много меньше длины волны электромагнитной волны. В этом случае импульсы электронов, прошедших лазерный пучок, слабо зависят от начального импульса и определяются только параметрами лазерного пучка и фазой электромагнитной волны в точке входа. Большая часть прошедших электронов рассеивается на малые углы к направлению распространения электромагнитной волны. Максимальный Лоренц-фактор прошедших электронов пропорционален работе, совершенной электромагнитным полем, и не зависит от начального импульса. Прошедшие электроны обладают одинаковыми проекциями импульса на ось, параллельную вектору электрического поля электромагнитной волны. Эта проекция определяется только диаметром лазерного пучка, измеренным в классических радиусах электрона. Для электронов, отраженных от лазерного пучка, найден закон отражения, связывающий углы падения и отражения. Этот закон универсален, т.е. не зависит ни от каких параметров заряженной частицы и лазерного пучка. Глубина проникновения заряженной частицы в лазерный пучок много меньше длины волны электромагнитной волны. Подробно описаны условия, при которых рассеянные электроны обладают указанными свойствами.
4. Получены явные выражения для спектральной мощности излучения, сформировавшегося на асимптотике в полях указанных конфигураций, и исследованы их свойства. Показано, что для однородных скрещенных полей максимум плотности мощности излучения при фиксированной энергии фотона не находится в плоскости орбиты электрона, как можно было бы ожидать для ультрарелятивистской частицы, а направлен под определенным углом к этой плоскости. Показано, что в плоской электромагнитной волне постоянной амплитуды плотность мощности излучения, после проектирования на плоскость, ортогональную направлению распространения волны, представляет собой систему колец максимумов и минимумов. Положение этих колец зависит от энергии излученного фотона, а излучение на указанной плоскости выглядит как круговая радуга.
5. Введено понятие стохастической деформации и разработана соответствующая общая алгебраическая деформационная процедура как для лагранжевых, так и нелагранжевых систем. Показано, что данная процедура аналогична деформации алгебры на-

блюдаемых в процедуре деформационного квантования, но с мнимым параметром деформации («постоянной Планка»). В результате такой деформации классической системы возникает некоторая стохастическая механика. Параметр деформации характеризует дисперсию случайных сил, действующих на систему. Разработанный метод применен ко многим нерелятивистским и релятивистским моделям как с конечным, так и с бесконечным числом степеней свободы. Показано, что метод стохастической деформации охватывает значительную часть стохастической физики и, по-видимому, любая стохастическая модель может быть сформулирована в терминах этого алгебраического подхода. Стохастические системы, описываемые немарковскими процессами, получаются стохастической деформацией систем со связями.

6. Показано, что при стохастической деформации модель нерелятивистской частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем на искривленном фоне, переходит в стохастическую модель, описываемую уравнением ФП с тензором диффузии, задаваемым обратным метрическим тензором. Найдена первая стохастическая поправка к уравнениям Ньютона для этой системы. Уравнение Клейна-Крамерса получено в виде стохастической деформации определенной классической модели. Получены релятивистские обобщения уравнений ФП и Клейна-Крамерса с помощью процедуры стохастической деформации, примененной к соответствующим релятивистским классическим системам. Выведен аналог уравнения ФП для стохастического уравнения ЛД. Рассмотрены стохастические деформации моделей свободного скалярного и электромагнитного полей. Показано, что в последнем случае возникает стохастическая модель, описывающая флуктуации электромагнитного поля в прозрачной среде. Методы БРСТ-квантования применены для построения стохастической механики систем с калибровочными степенями свободы.

7. Нелинейная неравновесная термодинамика реализована как гамильтонова динамическая система и найдены ее калибровочные симметрии. Введены термодинамические калибровочные поля с группой $SO(1,1)$ и дана их физическая интерпретация. Построена стохастическая деформация данной гамильтоновой динамической системы. Соответствующая стохастическая механика описывает флуктуации термодинамических величин. Построен оператор диссипации, являющийся стохастическим аналогом диссипативной функции. Производство энтропии в стохастической термодинамике выражено через этот оператор. Введено понятие и построено явное выражения для флуктуационного производства энтропии. Формализм стохастической деформации применен к термодинамической системе в локальном термодинамическом равновесии. Построено явное решение, описывающее основное состояние общего уравнения диффузионного типа.

8. Разработана общая процедура и получены явные формулы для быстросходящихся разложений однопетлевого вклада в Ω-потенциал квантовых полей с законом дисперсии, обладающим эллипсоидальной поверхность постоянной энергии. Однопетлевой вклад разложен естественным образом на три слагаемых: квазиклассический вклад, вклад от разреза закона дисперсии и осциллирующий вклад. В квазиклассическом вкладе полностью пренебрегается дискретностью квантовых чисел. Другие два вкла-

да являются существенно квантовыми. Исследована зависимость однопетлевого Ω-потенциала от формы закона дисперсии.
9. Найдены низко- и высокотемпературные разложения квазиклассического вклада, обобщающие известные разложения на случай законов дисперсии указанного вида. Найдены явные выражения для конечного и логарифмически расходящегося вкладов в однопетлевую вакуумную энергию. Показано, что логарифмические расходимости, важные для метода ренормгруппы, возникают только для определенных законов дисперсии, среди которых содержится релятивистский закон дисперсии. Для законов дисперсии вида $\omega(s) \sim s^\alpha$ логарифмически расходящийся вклад возникает при полуцелых степенях α в нечетномерных пространствах.
10. Найдены соотношения между вкладом от разреза, казимировским вкладом и вакуумной энергией. Показано, что казимировский вклад в вакуумную энергию возникает только для законов дисперсии, обладающих точкой ветвления, как, например, релятивистский закон дисперсии. Доказано, что в высокотемпературном пределе казимировский член, входящий в термальную часть Ω-потенциала, в точности сокращается аналогичным вакуумным вкладом.
11. Осциллирующая часть Ω-потенциала представлена в виде суммы разложений Чоула-Селберга ζ-функции Эпштейна. Получены различные пересуммирования этого разложения, дающие быстросходящиеся разложения при различных значениях параметров, характеризующих закон дисперсии, температуре и химическом потенциале. Проанализированы условия эффективности найденного разложения и получены ограничения на параметры спектра, температуру и химический потенциал, при которых разложение сходится быстро. Эти условия позволяют найти область в пространстве параметров, где осцилляции становятся существенными.
12. Описаны термодинамические свойства двух моделей: безмассовые релятивистские частицы в ящике как при нулевом, так и ненулевом химическом потенциале; электроны проводимости в тонкой металлической пленке. Для этих моделей получены новые быстросходящиеся разложения статистической суммы и среднего числа частиц, верные с экспоненциальной точностью, и исследована их зависимость от размеров системы. Первая модель при нулевом химическом потенциале описывает, например, фотоны, заключенные в идеальный металлический параллелепипед, а при ненулевом химическом потенциале – электроны около точек Дирака в графене. В частности, описаны осцилляции химического потенциала электронов проводимости в графене и тонкой металлической пленке с изменением размеров кристалла. Найдены простые формулы для периода и амплитуды этих осцилляций.
13. Предсказано существование и описаны общие свойства эффекта гравитационного сдвига масс массивных частиц за счет механизма Хиггса. Данный эффект приводит, в частности, к малым отклонениям от стандартного закона красного смещения ОТО. Ведущий вклад в смещение масс дают слагаемые эффективного потенциала поля Хиггса, зависящие от векторного поля ξ^μ, которое определяет гамильтониан системы и представление алгебры наблюдаемых в гильбертовом пространстве состояний. В силу неперенормируемости квантовой гравитации константы, входящие в эффектив-

ный потенциал поля Хиггса, невозможно найти теоретически. Рассмотрены несколько сценариев в зависимости от значений этих констант. Показано, что в сильном гравитационном поле, где ξ^2 мало, возможны два сценария: массы всех массивных частиц растут до бесконечности, с уменьшением ξ^2 до нуля; или массы всех массивных частиц уменьшаются с уменьшением ξ^2, калибровочная симметрия восстанавливается на конечном расстоянии от горизонта, и все частицы становятся безмассовыми. На примере шварцшильдовской метрики показано, что гравитационный сдвиг масс больше для стабильной звезды, чем для черной дыры, на одинаковом расстоянии от гравитирующего объекта. Для шварцшильдовской черной дыры очень малые значения ξ^2 не реализуются, и $1/2 \lesssim \xi^2 \leq 1$ во всем пространстве-времени вне горизонта событий. Динамически решена проблема сингулярности перенормированного тензора энергии-импульса на горизонте черной дыры.

14. В однопетлевом приближении описан эффект гравитационного сдвига масс для линейной сигма-модели с самодействием ϕ^4, взаимодействующей с калибровочными полями, и Стандартной модели с определенными условиями нормировки на эффективный потенциал поля Хиггса. Найдено уравнение состояния жидкости, описываемой полем ξ^μ, в однопетлевом приближении. Для метрики Шварцшильда найдены точные решения уравнений движения поля ξ^μ, отвечающие стационарной сферически симметричной аккреции.

15. Доказано существование квантовой гравитационной аномалии в однопетлевом эффективном действии квантовой гравитации, индуцированном массивным скалярным полем массы m на стационарном медленно меняющимся в пространстве гравитационном фоне. Аномальные вклады в эффективное действие имеют существенно особую точку при $m^2 \to \infty$, неаналитичны по гравитационной постоянной и импульсам. Аномалия не может быть воспроизведена в любом конечном порядке теории возмущений над плоским фоном и носит существенно непертурбативный характер. Аномалия не может быть сокращена контрчленами, полиномиальными по импульсам. Данная гравитационная аномалия возникает благодаря зависимости квантовых средних от выбора гамильтониана теории, вакуумного состояния и представления алгебры наблюдаемых. Выражение для аномальных членов в эффективном действии квантовой гравитации может быть сделано формально ковариантным, если подвергать общекоординатным преобразованиям не только динамические поля теории, но и векторное поле ξ^μ, определяющее гамильтониан системы.

16. Предложен механизм сокращения квантовой гравитационной аномалии, приводящий к возникновению в теории нового динамического векторного поля ξ^μ. Уравнения движения этого векторного поля являются следствием выполнения тождеств Уорда, генерируемых группой диффеоморфизмов, и имеют вид уравнений идеальной релятивистской гидродинамики с градиентными поправками. Построена самосогласованная неперенормируемая модель квантовой гравитации. Предложены естественные условия нормировки для эффективного действия квантовой гравитации и найден класс уравнений состояния релятивистской жидкости, описываемой полем ξ^μ. Показано, что в пределе слабого гравитационного поля уравнение состояния жидкости имеет

вид политропы и определяется двумя универсальными постоянными – политропной постоянной и натуральным показателем политропы.
17. Построено квантование релятивистской гидродинамики в формализме Тауба-Фока. Найдены тождества Уорда, связанные с сохранением энтропии и завихренности идеальной жидкости, и указаны возможные непертурбативные механизмы их нарушения. Найдены ведущие градиентные поправки к давлению идеальной жидкости и получены ограничения на их вид, гарантирующие отсутствие гостов в модели. Проанализированы нелинейные поправки второго порядка к уравнениям движения идеальной жидкости и найдены явные выражения для поперечных и продольных возмущений, индуцированных сильной звуковой волной.
18. Показано, что релятивистская жидкость, описываемая полем ξ^μ, может быть ответственна за большую часть холодной темной материи. С использованием астрофизических данных найдены оценки для политропной постоянной, характеризующей уравнение состояния данной жидкости. Найден закон эволюции этой жидкости на космологических масштабах, согласующийся с ее интерпретацией как холодной темной материи.
19. Введено понятие и найдено явное однопетлевое выражение для аномалии энергия-время. Эта аномалия характеризует вариацию эффективного действия теории под действием глобального растяжения векторного поля ξ^μ, определяющего гамильтониан системы. Установлена связь аномалии энергия-время с конформной (следовой) аномалией. Показано, что невозможно перенормировать эффективное действие классически конформно инвариантного поля так, чтобы конформная аномалия и аномалия энергия-время одновременно обращались в нуль.
20. Развита теория ζ-функции волновых операторов на стационарном фоне общего вида, частности, для нестатических метрик, и предложена новая процедура вычисления однопетлевых поправок к эффективному действию как при нулевых, так и конечных температурах и плотностях. В частном случае ультрастатических и ультрастационарных метрик эта процедура эквивалента известным. Получена общая формула для высокотемпературного разложения однопетлевого Ω-потенциала в пренебрежении экспоненциально подавленными, при обратной температуре $\beta \to 0$, поправками.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах, включенных в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени доктора и кандидата наук, и в журналах, индексируемых в Web of Science или Scopus:

[1] Kazinski, P.O. Radiation reaction and renormalization in classical electrodynamics of a point particle in any dimension / P.O. Kazinski, S.L. Lyakhovich, A.A. Sharapov // Physical Review D. – 2002. – V. 66. – P. 025017 (1-9) – 0,9/0,3 п.л. – DOI: 10.1103/PhysRevD.66.025017.

[2] Kazinski, P.O. Radiation reaction for a massless charged particle / P.O. Kazinski, A.A. Sharapov // Classical and Quantum Gravity. – 2003. – V. 20. – P. 2715-2725. – 0,7/0,4 п.л. – DOI: 10.1088/0264-9381/20/13/319.

[3] Казинский, П.О. Реакция излучения и перенормировка в классической теории поля с сингулярными источниками / П.О. Казинский, А.А. Шарапов // Теоретическая и математическая физика. – 2005. – Т. 143. – С. 375-400. – 1,4/0,7 п.л. – DOI: 10.4213/tmf1820.

[4] Kazinski, P.O. Lagrange structure and quantization / P.O. Kazinski, S.L. Lyakhovich, A.A. Sharapov // Journal of High Energy Physics. – 2005. – V. 0507. – P. 076 (1-42). – 2,5/0,8 п.л. – DOI: 10.1088/1126-6708/2005/07/076.

[5] Казинский, П.О. Эффективная динамика электрически заряженной струны с током / П.О. Казинский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2005. – Т. 128. – С. 312-321. – 0,5 п.л. – DOI: 10.1134/1.2047792.

[6] Казинский, П.О. Реакция излучения мультипольных моментов / П.О. Казинский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2007. – Т. 132. – С. 370-386. – 1,0 п.л. – DOI: 10.1134/S1063776107080055.

[7] Kazinski, P.O. Fluctuations as stochastic deformation / P.O. Kazinski // Physical Review E. – 2008. – V. 77. – P. 041119 (1-19). – 2,0 п.л. – DOI: 10.1103/PhysRevE.77.041119.

[8] Kazinski, P.O. Stochastic deformation of a thermodynamic symplectic structure / P.O. Kazinski // Physical Review E. – 2009. – V. 79. – P. 011105 (1-9). – 1,0 п.л. – DOI: 10.1103/PhysRevE.79.011105.

[9] Kazinski, P.O. One-loop effective potential of the Higgs field on the Schwarzschild background / P.O. Kazinski // Physical Review D. – 2009. – V. 80. – P. 124020 (1-15). – 1,4 п.л. – DOI: 10.1103/PhysRevD.80.124020.

[10] Казинский, П.О. Асимптотическое разложение однопетлевого омега-потенциала квантовых полей с квадратичным законом дисперсии / П.О. Казинский, М.А. Шипуля // Известия вузов. Физика. – 2011. – Т. 54. – С. 27-36. – 0,5/0,3 п.л. – DOI: 10.1007/s11182-011-9650-z.

[11] Kazinski, P.O. Asymptotics of physical solutions to the Lorentz-Dirac equation for planar motion in constant electromagnetic fields / P.O. Kazinski, M.A. Shipulya // Physical Review E. – 2011. – V. 83. – P. 066606 (1-12). – 1,4/0,7 п.л. – DOI: 10.1103/PhysRevE.83.066606.

[12] Kazinski, P.O. One-loop omega-potential of quantum fields with ellipsoid constant-energy surface dispersion law / P.O. Kazinski, M.A. Shipulya // Annals of Physics. – 2011. – V. 326. – P. 2658-2693. – 2,8/1,4 п.л. – DOI: 10.1016/j.aop.2011.07.004.

[13] Kazinski, P.O. Gravitational mass-shift effect in the standard model / P.O. Kazinski // Physical Review D. – 2012. – V. 85. – P. 044008 (1-16). – 1,7 п.л. – DOI: 10.1103/PhysRevD.85.044008.

[14] Kalinichenko, I.S. High-temperature expansion of the one-loop free energy of a scalar field on a curved background / I.S. Kalinichenko, P.O. Kazinski // Physical Review

D. – 2013. – V. 87. – P. 084036 (1-16). – 1,4/0,7 п.л. – DOI: 10.1103/PhysRevD.87.084036.

[15] Kazinski, P.O. Radiation of de-excited electrons at large times in a strong electromagnetic plane wave / P.O. Kazinski // Annals of Physics. – 2013. – V. 339. – P. 430-459. – 2,0 п.л. – DOI: 10.1016/j.aop.2013.09.016.

[16] Kalinichenko, I.S. Non-perturbative corrections to the one-loop free energy induced by a massive scalar field on a stationary slowly varying in space gravitational background / I.S. Kalinichenko, P.O. Kazinski // Journal of High Energy Physics. – 2014. – V. 1408. – P. 111 (1-61). – 3,7/1,9 п.л. – DOI: 10.1007/JHEP08(2014)111.

[17] Богданов, О.В. Properties of electrons scattered by a strong plane electromagnetic wave with a linear polarization: semiclassical treatment / О.В. Богданов, П.О. Казинский // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2015. – Т. 101. – С. 224-231. – 0,4/0,2 п.л. – DOI: 10.1134/S0021364015030030.

Публикации в других научных изданиях:

[18] Kazinski, P.O. Relativistic diffusion equation from stochastic quantization / P.O. Kazinski // Cornell University Library. – 2007. – 16 p. – 0,7 п.л. – URL: http://arxiv.org/abs/0704.3877.

[19] Kazinski, P.O. Propagator of a scalar field on a stationary slowly varying gravitational background / P.O. Kazinski // Cornell University Library. – 2012. – 36 p. – 0,7 п.л. – URL: http://arxiv.org/abs/1211.3448.

[20] Kazinski, P.O. Quantum gravitational anomaly as a dark matter / P.O. Kazinski // Cornell University Library. – 2015. – 30 p. – 2,5 п.л. – URL: http://arxiv.org/abs/1501.05777.

[21] Казинский, П.О. Реакция излучения и перенормировка в теории протяженных релятивистских объектов / П.О. Казинский, А.А. Шарапов // Новейшие проблемы теории поля / Под ред. А.В. Аминовой. – Казань, 2004. – Т. 4. – С. 117-140. – 1,1/0,6 п.л.

[22] Казинский, П.О. Неэкстенсивные поправки в однопетлевой омега-потенциал квантовых полей с квадратичным законом дисперсии / П.О. Казинский, М.А. Шипуля // Нелинейные поля в теории гравитации и космологии (GRACOS-2010): труды российского семинара. Казань-Яльчик. 6-10 сентября 2010 г. – Казань: Изд-во Фолиантъ, 2010. – С. 185-191. – 0,4/0,2 п.л.

[23] Казинский, П.О. Пропагатор векторного поля на стационарном медленно меняющемся гравитационном фоне / П.О. Казинский // Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (RUSGRAV-15): материалы XV-й Российской гравитационной конференции. Казань. 30 июня-5 июля 2014 г. – Казань: Изд-во Фолиантъ, 2014. – С. 74. – 0,1 п.л.