

ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

УДК 537.874.6

В.В. ФИСАНОВ

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ВАКУУМА И АНТИВАКУУМА

Метод Винера – Хопфа (вариант Джонса) применён к задаче дифракции плоской электромагнитной волны при нормальном падении на идеально проводящую полуплоскость, расположенную на плоской поверхности раздела вакуума и антивакуума. Точные аналитические решения, содержащие интегралы Френеля, получены раздельно для вертикальной и горизонтальной поляризаций.

Ключевые слова: дифракция, плоская волна, полуплоскость, вакуум, антивакуум, отрицательное преломление, метод Винера – Хопфа, интеграл Френеля.

Введение. Постановка задачи

Термин «антивакуум» появился в макроскопической электродинамике недавно для обозначения материальной среды, показатель преломления которой по отношению к вакууму (пустому пространству) $n = -1$ [1]. Подразумевается, что диэлектрическая и магнитная проницаемости такой среды равны $-\epsilon_0$ и $-\mu_0$, где ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. Стремительно растущий в последние годы интерес к средам с отрицательными значениями материальных параметров обусловлен многообещающими следствиями из явления отрицательного преломления электромагнитных волн, которое происходит на поверхности раздела сред с обеими положительными и обеими отрицательными проницаемостями. Это явление было впервые достаточно подробно рассмотрено в работе [2] и позже подтверждено экспериментально на сверхвысоких частотах для образца среды с отрицательными проницаемостями, выполненного из метаматериала с металлическими включениями в виде сочетания прямолинейных (штыри) и круговых (разорванные кольца) проводочных элементов («метаатомов») [3, 4]. К числу наиболее активно обсуждаемых устройств для потенциальных применений отрицательного преломления принадлежат плоская псевдолинза Веселаго – Пендри [2, 5], а также противолокационные маскирующие покрытия («плащи-невидимки»). Псевдолинза в простейшем варианте представляет собой продольно неограниченный плоский слой антивакуума, помещённый в вакуум. Ограничение размеров [6] и добавление экранирующих элементов требуют учёта дифракционных эффектов.

Препятствие в виде бесконечно тонкой непроницаемой полуплоскости является в теории дифракции каноническим объектом с острым ребром, для него существует точное математическое решение задачи рассеяния [7]. Многие модельные структуры, содержащие полуплоскость, допускают применение строгого математического метода Винера – Хопфа [8]. Дифракция на полуплоскости, расположенной на поверхности раздела сред, рассматривалась ранее в различных постановках [9–15], но лишь применительно к средам с положительными проницаемостями. В данной работе применяется метод Джонса [16], согласно которому для получения функционального уравнения Винера – Хопфа не требуется промежуточный этап вывода интегрального уравнения граничной задачи.

Плоскость $y = 0$ является поверхностью раздела между вакуумом (область $y > 0$) и антивакуумом (область $y < 0$). Идеально проводящая полуплоскость с прямолинейным краем расположена на этой поверхности для всех значений $x \leq 0$. Из области вакуума на полуплоскость нормально к её ребру ($x = 0$, $y = 0$) падает однородная плоская волна.

Пусть поле характеризуется функцией $\varphi(x, y) = \varphi(r, \theta)$, где $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (отсчёт углов производится от положительного направления оси x). Представим его в виде суперпозиции плоских волн в отсутствие полуплоскости (падающая волна $\varphi^{(i)}$ плюс прошедшая (преломлённая)

волна $\varphi^{(i)}$ и рассеянного объектом дифракционного поля $\varphi^{(d)}$. Это представление не учитывает плоскую волну $\varphi^{(r)}$, которая отражается от полуплоскости и существует в области углов $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$. Угол падения $\theta = \theta_0$ изменяется в пределах $0 < \theta_0 < \pi$. Так как вакуум и антивакуум имеют единый волновой импеданс $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, отражение от поверхности раздела сред вне полуплоскости ($y=0, x>0$) отсутствует и полное геометрооптическое поле в вакууме равно $\varphi^{(g)} = \varphi^{(i)} + \varphi^{(r)}\eta(\theta - \pi + \theta_0)$, где η – функция Хевисайда: $\eta(z)=1$ для $z>0$ и $\eta(z)=0$ для $z<0$. Геометрооптическое поле в области антивакуума – это поле прошедшей плоской волны $\varphi^{(t)}$, которая является результатом отрицательного преломления волны $\varphi^{(i)}$ и существует для углов $-\theta_0 < \theta < 0$. Из области геометрооптической тени ($-\pi < \theta < -\theta_0$), где плоские волны отсутствуют, прошедшую волну следует исключить: $\varphi^{(g)} = \varphi^{(t)}\eta(\theta + \theta_0)$. Если волна падает под скользящим углом к полуплоскости ($\theta_0 \approx \pi$), то вследствие отрицательного преломления область тени почти отсутствует. Рассеянное краем полуплоскости дифракционное поле $\varphi^{(d)}$ ищется как суперпозиция плоских волн в форме интеграла Фурье.

Исходя из уравнений Максвелла для двумерного монохроматического поля с круговой частотой ω при временной зависимости вида $e^{-i\omega t}$, различают по отношению к поверхности раздела сред вертикальную (магнитную) H -поляризацию, для которой следует взять $\varphi(x, y) = H_z(x, y)$, $E_x(x, y) = -(i\omega\varepsilon)^{-1} \partial\varphi/\partial y$, и горизонтальную (электрическую) E -поляризацию, для которой $\varphi(x, y) = E_z(x, y)$, $H_x(x, y) = (i\omega\mu)^{-1} \partial\varphi/\partial y$. В этих формулах для диэлектрической и магнитной проницаемостей приняты следующие обозначения:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0 \exp(i\delta_\varepsilon), & y > 0, \\ \varepsilon_0 \exp[i(\pi - \delta_\varepsilon)], & y < 0; \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu_0 \exp(i\delta_\mu), & y > 0, \\ \mu_0 \exp[i(\pi - \delta_\mu)], & y < 0, \end{cases}$$

где малые положительные величины δ_ε и δ_μ характеризуют виртуальные диссипативные потери в средах. В окончательных и отдельных промежуточных выкладках, переходя к изначала идеальным средам, положим их равными нулю. Этот методический приём хорошо известен [17], он позволяет воспользоваться принципом погашаемости [18], что особенно важно при одновременном наличии сред с положительными и обеими отрицательными проницаемостями. Он также необходим для манипуляций с комплексными функциями в методе Винера – Хопфа. Функция $\varphi(x, y)$ подчиняется стационарному волновому уравнению $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + K^2\varphi = 0$, где применено обобщённое волновое число

$$K = \begin{cases} k = k_1 + ik_2, & y > 0, \\ -k^* = -k_1 + ik_2, & y < 0, \end{cases}$$

причём $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ и $k_1 \rightarrow k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $k_2 \rightarrow 0$, если потери в средах убывают до нуля ($\delta_\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta_\mu \rightarrow 0$). Падающую волну зададим в виде

$$\varphi^{(i)}(x, y; \theta_0) = e^{-i(k_x x + k_y y)} = e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)}, \quad 0 < \theta_0 < \pi, \quad (1)$$

где $k_x = k \cos \theta_0$; $k_y = k \sin \theta_0$. Отражённая от экрана волна имеет вид

$$\varphi^{(r)}(x, y; \theta_0) = e^{-i(k_x x - k_y y)} = e^{ikr \cos[\theta - (\pi - \theta_0)]}, \quad \pi - \theta_0 < \theta < \pi. \quad (2)$$

Прошедшая плоская волна

$$\varphi^{(t)}(x, y; \theta_0) = e^{-i(k_x^* x - k_y^* y)} = e^{-ik^* r \cos(\theta + \theta_0)} \quad (3)$$

распространяется в области антивакуума и поэтому является обратной, то есть её фазовая скорость направлена противоположно вектору плотности потока энергии (вектору Умова–Пойнтинга). Энергия прошедшей волны удаляется от поверхности раздела сред под углом $\theta = -\theta_0$ в соответст-

вии с условием излучения [19]. Граничным условиям на поверхности $y = 0$ должно быть подчинено полное поле, которое определено выше как сумма $\varphi^{(d)} + \varphi^{(i)}$ в области $y > 0$ и сумма $\varphi^{(d)} + \varphi^{(r)}$ в области $y < 0$.

Вертикальная поляризация

На полуплоскости выполняются условия идеальной проводимости $E_x^{(i)} + E_x^{(d)} = 0$, $y = +0$, $x < 0$; $E_x^{(r)} + E_x^{(d)} = 0$, $y = -0$, $x < 0$, что соответствует при отсутствии потерь в средах граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi^{(d)}(x, \pm 0)}{\partial y} = iK_y e^{\pm iK_x x}, \quad x < 0, \quad (4)$$

а также условию

$$\frac{\partial \varphi^{(d)}(x, +0)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^{(d)}(x, -0)}{\partial y} = 0, \quad x < 0. \quad (5)$$

В формуле (4) использованы обозначения $K_x = K \cos \theta_0$, $K_y = K \sin \theta_0$. На продолжении полуплоскости ($y = 0$, $x > 0$) компонента E_x полного поля, а также компонента $E_x^{(g)}$ геометрикооптического поля должны быть непрерывны, откуда следует, что условие (5) является справедливым и для $x > 0$, то есть выполняется на всей составной границе $y = 0$. Требование непрерывности магнитного поля на продолжении полуплоскости приводит к граничному условию

$$\varphi^{(d)}(x, +0) = \varphi^{(d)}(x, -0), \quad x > 0. \quad (6)$$

На больших расстояниях от ребра в дифракционном поле преобладают плоские волны (2) или (3), а в секторе углов $-\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$ при $|K|r \gg 1$ оно изменяется как цилиндрическая волна: $|\varphi^{(d)}| < \text{const}(|K|r)^{-1/2} \exp(-k_2 r)$. На малых расстояниях ($|K|r \ll 1$) должно выполняться условие на ребре: в частности $\partial \varphi / \partial y \sim \text{const}(x)^{-1/2}$ при $x \rightarrow +0$, $y = 0$.

Для решения поставленной задачи по методу Джонса применим преобразование Фурье вида

$$\Phi(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (7)$$

и перейдём в область комплексной спектральной переменной $\alpha = \sigma + i\tau$. Используя асимптотические оценки для $\varphi^{(d)}$ при $|x| \rightarrow \infty$, находим, что $\Phi^{(d)}(\alpha, y) = \Phi_-^{(d)}(\alpha, y) + \Phi_+^{(d)}(\alpha, y)$ является аналитической функцией, регулярной в полосе $-k_2 < \tau < -k_2 \cos \theta_0$, тогда как её слагаемые

$\Phi_{-(+)}^{(d)}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty(0)}^{0(\infty)} \varphi^{(d)}(x, y) e^{i\alpha x} dx$ регулярны в этой полосе и в нижней (верхней) полуплоскости α [8].

Спектральная функция $\Phi^{(d)}(\alpha, y)$ должна быть решением уравнения гармонических колебаний $\partial^2 \Phi^{(d)} / \partial y^2 + \beta(\alpha, K)^2 \Phi^{(d)}(\alpha, y) = 0$, где $\beta(\alpha, K) = \sqrt{K^2 - \alpha^2}$. Ветвь квадратного корня выбрана так, что при вещественных значениях параметра K функция $\beta(\sigma, K) = +\sqrt{K^2 - \sigma^2} \text{sgn}(K)$ для $\sigma^2 < K^2$ и $\beta(\sigma, K) = i\sqrt{\sigma^2 - K^2}$ для $\sigma^2 > K^2$. Решение этого уравнения с учётом граничного условия $\partial \Phi^{(d)}(\alpha, +0) / \partial y - \partial \Phi^{(d)}(\alpha, -0) / \partial y = 0$, которое подчиняется также требованию переноса энергии поля от границы на бесконечность для $|y| \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\Phi^{(d)}(\alpha, y) = \pm A(\alpha) e^{\pm i\beta(\alpha, K)y}, \quad y \geq 0, \quad (8)$$

где амплитудная функция $A(\alpha)$ должна быть найдена после применения граничных условий, заданных на полуосях x , а также условия на ребре в процессе вывода и решения функционального

уравнения Винера – Хопфа. В формуле (8) и далее в соответствии с принятым определением ветви квадратного корня имеем в пределе нулевых потерь ($k_2 \rightarrow 0$)

$$\beta(\alpha, K) \rightarrow \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \alpha^2} = \beta_0(\alpha), & y > 0, \\ \sqrt{(-k_0)^2 - \alpha^2} = -\beta_0(\alpha), & y < 0. \end{cases}$$

С этой целью запишем функции $\Phi^{(d)}(\alpha, y)$ и $\partial\Phi^{(d)}(\alpha, y)/\partial y = \Phi'^{(d)}(\alpha, y)$ для значений $y = \pm 0$:

$$\Phi_+^{(d)}(\alpha, 0) + \Phi_-^{(d)}(\alpha, \pm 0) = \pm A(\alpha), \quad (9)$$

$$\Phi_+^{(d)}(\alpha, \pm 0) + \Phi_-^{(d)}(\alpha, \pm 0) = i\beta(\alpha, K)A(\alpha). \quad (10)$$

Здесь учтено, что $\Phi_+^{(d)}(\alpha, +0) = \Phi_+^{(d)}(\alpha, -0)$, как следует из граничного условия для $x > 0$, и

$$\Phi_-^{(d)}(\alpha, \pm 0) = \frac{K_y}{\sqrt{2\pi}(\alpha \mp K_x)} \rightarrow \frac{\pm k_{0y}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k_{0x})}, \quad (11)$$

как следует из граничного условия для $x < 0$. Образуя полуразность каждой пары уравнений, получим

$$\frac{1}{2}[\Phi_-^{(d)}(\alpha, +0) - \Phi_-^{(d)}(\alpha, -0)] = D_-(\alpha) = A(\alpha), \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}[\Phi_+^{(d)}(\alpha, +0) - \Phi_+^{(d)}(\alpha, -0)] = D'_+(\alpha) = \pm i\beta(\alpha, K)A(\alpha) - D'_-(\alpha), \quad (13)$$

где

$$D'_-(\alpha) = \frac{1}{2}[\Phi_-^{(d)}(\alpha, +0) - \Phi_-^{(d)}(\alpha, -0)] = \frac{\pm K_y}{\sqrt{2\pi}(\alpha \mp K_x)} \rightarrow \frac{k_{0y}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k_{0x})}.$$

Исключив из последних двух уравнений $A(\alpha)$, получаем стандартное функциональное уравнение Винера–Хопфа

$$D'_+(\alpha) \mp i\beta(\alpha, K)D_-(\alpha) + D'_-(\alpha) = 0, \quad (14)$$

все члены которого являются аналитическими функциями, регулярными в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta_0$, $-\infty < \sigma < \infty$. Подразумевается, что линии ветвления для квадратного корня $\beta(\alpha, K)$, соединяющие точки ветвления $\alpha = \pm K$ с точкой $\alpha = \infty$, не пересекают полосу регулярности функционального уравнения (14).

Основной шаг в методе Винера – Хопфа – факторизация ядра функционального уравнения – применительно к уравнению (14) является очевидным: представление $\beta(\alpha, K) = \beta_+(\alpha, K)\beta_-(\alpha, K)$ обеспечивает требуемое разложение на множители, причём функция $\beta_+(\alpha, K) = \sqrt{K + \alpha}$ является регулярной и не имеет нулей в полуплоскости $\tau > -k_2$, а функция $\beta_-(\alpha, K) = \sqrt{K - \alpha}$ является регулярной и не имеет нулей в полуплоскости $\tau < k_2$. Разделим уравнение (14) на $\beta_+(\alpha, K)$, а затем выполним декомпозицию в виде

$$\frac{1}{\beta_+(\alpha, K)(\alpha \mp K_x)} = \frac{1}{\alpha \mp K_x} \left[\frac{1}{\beta_+(\alpha, K)} - \frac{1}{\beta_+(\pm K_x, K)} \right] + \frac{1}{\beta_+(\pm K_x, K)(\alpha \mp K_x)}, \quad (15)$$

где первое слагаемое регулярно в области $\tau > -k_2$, а второе слагаемое с полюсом в точке $\alpha = \pm K_x$ регулярно в области $\tau < -k_2 \cos \theta_0$. Теперь все слагаемые функционального уравнения (14) имеют известные области регулярности. После их перегруппировки представим уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{D'_+(\alpha)}{\beta_+(\alpha, K)} \pm \frac{K_y}{\sqrt{2\pi}(\alpha \mp K_x)} \left[\frac{1}{\beta_+(\alpha, K)} - \frac{1}{\beta_+(\pm K_x, K)} \right] = \\ = \frac{\mp K_y}{\sqrt{2\pi}\beta_+(\pm K_x, K)(\alpha \mp K_x)} \pm i\beta_-(\alpha, K)D_-(\alpha) = J(\alpha), \end{aligned} \quad (16)$$

где функция $J(\alpha)$ определена двояко: через функции, регулярные в области $\tau > -k_2$, и через функции, регулярные в области $\tau < -k_2 \cos \theta_0$. Так как эти области перекрываются, она может быть определена по принципу аналитического продолжения на всей плоскости α как целая аналитическая функция. Используя соотношения, связывающие асимптотики функции-оригинала (условие на ребре) и её фурье-изображения, получаем на основании теоремы Лиувилля, что $J(\alpha) = 0$. Приравнявая правую часть уравнения (16) к нулю, находим искомую спектральную амплитуду

$$A(\alpha) = D_-(\alpha) = \frac{-iK_y}{\sqrt{2\pi}\beta_+(\pm K_x, K)\beta_-(\alpha, K)(\alpha \mp K_x)}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (8) и выполняя обратное по отношению к (7) преобразование Фурье, получим

$$\varphi^{(d)}(x, y) = \frac{\text{sgn}(y)}{2\pi i} \frac{K_y}{\beta_+(\pm K_x, K)} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{e^{i\beta(\alpha, K)|y|-i\alpha x} d\alpha}{\beta_-(\alpha, K)(\alpha \mp K_x)}, \quad y \gtrless 0, \quad (18)$$

контур интегрирования находится в пределах полосы регулярности, то есть $-k_2 < c < -k_2 \cos \theta_0$.

При анализе полученного решения заметим, что в случае $y = 0$ подынтегральное выражение для $\varphi^{(d)}(x, 0)$ не содержит квадратный корень $\beta(\alpha, K)$, поэтому является функцией, регулярной в области $\tau < -k_2 \cos \theta_0$. Пользуясь леммой Жордана и замыкая путь интегрирования линией в нижней полуплоскости α ($\tau < c$), получим $\varphi^{(d)}(x, 0) = 0$ на продолжении препятствия ($x > 0$). Этот же результат следует и непосредственно из функционального уравнения

$$\Phi_+^{(d)}(\alpha, 0) = -\frac{1}{2} [\Phi_-^{(d)}(\alpha, +0) + \Phi_-^{(d)}(\alpha, -0)] = -S_-(\alpha),$$

которое получается при сложении уравнений в (9). Подынтегральное выражение в (18) для поля $\varphi^{(d)}(x, \pm 0)$ в области $\tau > -k_2$ является мероморфной функцией, замыкание контура для $x < 0$ выполняется в верхней полуплоскости α ($\tau > c$), и вычисление вычета в полюсе приводит к результату $\varphi^{(d)}(x, \pm 0) = \pm e^{-ik_0 x \cos \theta_0}$, который соответствует выделению отражённой волны $\varphi^{(r)}(x, +0)$ и взятой со знаком «минус» преломлённой волны $\varphi^{(t)}(x, -0)$, так что в области тени полное поле не содержит плоских волн.

В общем случае $y \neq 0$ интеграл в (18) допускает простую оценку поля на больших расстояниях от ребра полуплоскости ($|K|r \gg 1$) по методу перевала. С этой целью производится замена спектральной переменной $\alpha = -K \cos w$. Показатель экспоненты в (18) преобразуется к виду $\beta(\alpha, K)|y| - \alpha x = Kr \cos(w - |\theta|)$ с точкой перевала $w = w_s = |\theta|$, а весь интеграл принимает вид

$$\varphi^{(d)}(r, \theta) = \frac{-\text{sgn}(y)}{2\pi i} \frac{K_y}{K\beta_+(\pm K_x, K)} \int_C \frac{\beta_+(-K \cos w, K) e^{iKr \cos(w - |\theta|)} dw}{\cos w \pm \cos \theta_0}, \quad y \gtrless 0, \quad (19)$$

где в случае $y > 0$ кусочно-линейный контур C проходит в направлении $(+i\infty) \rightarrow (0) \rightarrow (\pi) \rightarrow (\pi - i\infty)$. В области вакуума подынтегральное выражение содержит полюс в точке $w = w_p = \pi - \theta_0$, поэтому в непосредственной окрестности полюса метод перевала неприменим, а для всех $w_s > w_p$ при деформации C в линию наискорейшего спуска происходит пересечение полюса, вычет в котором соответствует отражённой волне $\varphi^{(r)}$. Поэтому

$$\varphi^{(d)}(r, \theta) \approx \varphi^{(r)} \eta(\theta + \theta_0 - \pi) + \frac{e^{i(k_0 r - \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} \frac{2i \sin(\theta_0/2) \sin(\theta/2)}{\cos w + \cos \theta_0}, \quad \theta \neq \pi - \theta_0, \quad (20)$$

то есть на больших расстояниях от ребра дополнительное к геометрическому поле имеет вид прямой цилиндрической волны, расходящейся от ребра полуплоскости. Точное решение (19) допускает представление через интегралы Френеля (см., например, [8, 20])

$$\varphi^{(d)}(r, \theta) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-ik_0 r \cos(\theta + \theta_0)} F\left(\sqrt{2k_0 r} \cos \frac{\theta + \theta_0}{2}\right) - e^{-ik_0 r \cos(\theta - \theta_0)} F\left(\sqrt{2k_0 r} \cos \frac{\theta - \theta_0}{2}\right) \right], \quad (21)$$

где $F(z) = \int_z^\infty \exp(it^2) dt$ – комплексный интеграл Френеля. Объединяя выражение (21) с падающей волной (1) и используя свойство интегралов Френеля $F(z) + F(-z) = \sqrt{\pi} \exp(i\pi/4)$, получим представление для полного поля в области вакуума

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(r, \theta) + \varphi^{(d)}(r, \theta) = \\ = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-ik_0 r \cos(\theta + \theta_0)} F\left(\sqrt{2k_0 r} \cos \frac{\theta + \theta_0}{2}\right) + e^{-ik_0 r \cos(\theta - \theta_0)} F\left(-\sqrt{2k_0 r} \cos \frac{\theta - \theta_0}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

В области антивакуума аналогичное преобразование интеграла в формуле (19), который в этом случае является спектром обратных плоских волн, приводит к выражению

$$\begin{aligned} \varphi^{(d)}(r, |\theta|) = \\ = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-ik_0 r \cos(|\theta| + \theta_0)} F\left(\sqrt{-2k_0 r} \sin \frac{\theta_0 + |\theta|}{2}\right) + e^{-ik_0 r \cos(|\theta| - \theta_0)} F\left(\sqrt{-2k_0 r} \sin \frac{\theta_0 - |\theta|}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

В формуле (23) аргумент интеграла Френеля во втором слагаемом изменяет знак при пересечении углом $|\theta|$ границы тени ($|\theta| = \theta_0$), что приводит к выделению прошедшей плоской волны $\varphi^{(t)}$ для значений $|\theta| > \theta_0$.

Горизонтальная поляризация

На полуплоскости должны выполняться граничные условия обращения в нуль полного электрического поля: $\varphi^{(i)} + \varphi^{(d)} = 0$, $y = +0$, $x < 0$; $\varphi^{(t)} + \varphi^{(d)} = 0$, $y = -0$, $x < 0$ и условия непрерывности его на продолжении полуплоскости ($y = 0$, $x > 0$). Отсюда в отсутствие потерь следует непрерывность $\varphi^{(d)}$ на всей границе $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. Кроме того, на продолжении полуплоскости должна быть непрерывна касательная составляющая магнитного поля $H_x(x, 0)$, что даёт $\partial\varphi^{(d)}(x, +0)/\partial y + \partial\varphi^{(d)}(x, -0)/\partial y = 0$. После применения преобразования (7) решение в спектральной области $\Phi^{(d)}(\alpha, y)$, с учётом соотношения непрерывности $\Phi^{(d)}(\alpha, +0) = \Phi^{(d)}(\alpha, -0) = \Phi^{(d)}(\alpha, 0)$ для всех x , имеет вид

$$\Phi^{(d)}(\alpha, y) = A(\alpha) e^{\pm i\beta(\alpha, K)y}, \quad y \geq 0. \quad (24)$$

Комбинируя выражения для $\Phi'^{(d)}(\alpha, \pm 0)$, которые следуют из (24), и принимая во внимание условие $\Phi_+^{(d)}(\alpha, +0) + \Phi_+^{(d)}(\alpha, -0) = 0$, получим соотношение

$$S'_-(\alpha) = \frac{1}{2} [\Phi_-^{(d)}(\alpha, +0) + \Phi_-^{(d)}(\alpha, -0)] = i\beta(\alpha, K) A(\alpha). \quad (25)$$

Аналогично, складывая выражения (24) для значений $y = \pm 0$ и учитывая, что

$$S_-(\alpha) = \frac{1}{2} [\Phi_-^{(d)}(\alpha, +0) + \Phi_-^{(d)}(\alpha, -0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\alpha \mp K_x)}, \quad (26)$$

найдем

$$\frac{1}{2} [\Phi_+^{(d)}(\alpha, +0) + \Phi_+^{(d)}(\alpha, -0)] = S_+(\alpha) = A(\alpha) - S_-(\alpha).$$

Объединяя полученное выражение с формулой (25), приходим к уравнению Винера – Хопфа

$$S'_-(\alpha) = i\beta(\alpha, K) [S_+(\alpha) + S_-(\alpha)]. \quad (27)$$

Уравнение (27), как и уравнение (14), имеет точное решение, в процессе получения которого используется условие на ребре полуплоскости. Спектральная амплитуда $A(\alpha)$ вычисляется по формуле (25), после чего, применяя обратное преобразование Фурье к функции $\Phi^{(d)}(\alpha, y)$, находим

$$\varphi^{(d)}(x, y) = \frac{\beta_+(\pm K_x, K)}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{e^{\pm i\beta(\alpha, K)y - i\alpha x} d\alpha}{\beta_+(\alpha, K)(\alpha \mp K_x)}, \quad y \gtrless 0. \quad (28)$$

В области вакуума интеграл в формуле (28) выражается через интегралы Френеля, а после объединения $\varphi^{(d)}$ с первичным полем получим

$$\begin{aligned} & \varphi^{(i)}(r, \theta) + \varphi^{(d)}(r, \theta) = \\ & = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-ik_0 r \cos(\theta+\theta_0)} F\left(\sqrt{2k_0 r} \cos \frac{\theta+\theta_0}{2}\right) - e^{-ik_0 r \cos(\theta-\theta_0)} F\left(-\sqrt{2k_0 r} \cos \frac{\theta-\theta_0}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

В области антивакуума дифракционное поле имеет вид

$$\begin{aligned} & \varphi^{(d)}(r, |\theta|) = \\ & = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-ik_0 r \cos(|\theta|+\theta_0)} F\left(\sqrt{2k_0 r} \sin \frac{\theta_0+|\theta|}{2}\right) - e^{-ik_0 r \cos(|\theta|-\theta_0)} F\left(\sqrt{2k_0 r} \sin \frac{\theta_0-|\theta|}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Заключение

Точные аналитические решения задач дифракции вертикально и горизонтально поляризованных плоских электромагнитных волн на полуплоскости, расположенной на плоской поверхности раздела между вакуумом и антивакуумом, выражаются через интегралы Френеля. В области вакуума, откуда падает первичная волна, полное поле идентично полю при дифракции на полуплоскости в однородной среде (в вакууме). В области антивакуума дифракционное поле выражается через интегралы Френеля с модифицированными аргументами. Оно может быть вычислено в любой точке пространства, включая полутеневую зону. В дальней зоне дополнительное к геометро-оптическому поле имеет структуру обратной цилиндрической волны. В дифракционном поле не содержится боковая волна, потому что она не поддерживается поверхностью раздела сред с равными по абсолютной величине показателями преломления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lakhtakia A. // Int. J. Infrared Millim. Waves. – 2002. – V. 23. – No. 6. – P. 813–818.
2. Веселого В.Г. // УФН. – 1967. – Т. 92. – № 3. – С. 517–526.
3. Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., et al. // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 84. – No. 14. – P. 4184–4187.
4. Shelby R.A., Smith D.R., and Schultz S. // Science. – 2001. – V. 292. – No. 5514. – P. 77–79.
5. Pendry J.B. // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 85. – No. 18. – P. 3966–3969.
6. Анютин А.П. // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54. – № 9. – С. 1036–1042.
7. Sommerfeld A. // Mathem. Ann. – 1896. – B. 47. – H. 2–3. – S. 317–374.
8. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: ИЛ, 1962. – 280 с.
9. Hanson E.T. // Phil. Tr. R. Soc. Lond. A. – 1938. – V. 237. – No. 772. – P. 35–65.
10. Clemmow P.C. // Ibid. – 1953. – V. 246. – No. 905. – P. 1–55.
11. Horiuchi K. // J. Phys. Soc. Jpn. – 1957. – V. 12. – No. 3. – P. 170–176.
12. Stöckel H. // Ann. Phys. – 1963. – V. 467. – No. 3. – P. 156–185.
13. Kane J. and Karp S.N. // J. Res. NBS. – 1964. – V. D 68. – No. 3. – P. 303–310.
14. Millar R.F. // Radio Sci. – 1967. – V. 2. – No. 3. – P. 261–286.
15. Фисанов В.В. // Изв. вузов. Радиофизика. – 1971. – Т. 14. – № 2. – С. 217–227.
16. Jones D.S. // Quart. J. Math. – 1952. – V. 3. – No. 1. – P. 189–196.
17. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
18. Малюжинец Г.Д. // УФН. – 1959. – Т. 69. – № 2. – С. 321–334.
19. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 548 с.
20. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 328 с.

Сибирский физико-технический институт им. В.Д. Кузнецова
Национального исследовательского Томского государственного университета,
г. Томск, Россия
Бурятский научный центр СО РАН, г. Улан-Удэ, Россия
E-mail: fisanov@public.tsu.ru

Поступила в редакцию 11.05.10.