

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Молодежная научная конференция
«Все грани математики и механики»
(24–30 апреля 2015 г.)**

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

Исследование раздельно непрерывных и квазинепрерывных функций

В.Г. Клековкин, Т.Е. Хмылева

Томский государственный университет

E-mail: klekovkin.vladislav@gmail.com

Рассматривается взаимосвязь раздельно непрерывных и квазинепрерывных функций. Доказывается, что квазинепрерывность функции следует из раздельной непрерывности функции.

Ключевые слова: раздельная непрерывность, квазинепрерывность, теорема Бэра.

В данной работе приводится доказательство леммы, сформулированной в работе [1] без доказательства.

Определение 1. Пусть дана функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Для фиксированного значения x , мы определяем функцию f_x по формуле $f_x(y) = f(x, y)$. Аналогично можно определить функцию f_y . Будем говорить, что функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ раздельно непрерывна, если для каждого x и $y \in \mathbb{R}$ функции f_x и f_y - непрерывны.

Определение 2. Функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазинепрерывной в точке (x, y) , если для каждого $\varepsilon > 0$ и любых непустых открытых множеств U и V таких, что $x \in U$ и $y \in V$, существуют открытое множество $U_0 \subseteq U$, и открытое множество $V_0 \subseteq V$, для которых

$$f(U_0 \times V_0) \subseteq (f(x, y) - \varepsilon, f(x, y) + \varepsilon).$$

Будем говорить, что f квазинепрерывна, если она квазинепрерывна в каждой точке.

Лемма 3. Если функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ раздельно непрерывна, то она квазинепрерывна.

Доказательство. Пусть даны точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и функция $\varphi(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Нетрудно видеть, что для доказательства квазинепрерывности функции f в точке (x_0, y_0) достаточно доказать квазинепрерывность функции φ в этой точке.

Пусть $\varepsilon > 0$, (x_0, y_0) – произвольная точка, U и V – произвольные открытые множества такие, что $x_0 \in U$, $y_0 \in V$. Так как U открыто, то существуют δ_x^0, δ_y^0 такие, что $(x_0 - \delta_x^0, x_0 + \delta_x^0) \subseteq U$, $(y_0 - \delta_y^0, y_0 + \delta_y^0) \subseteq V$. Поскольку φ раздельно непрерывна в точке (x_0, y_0) , то существует $\delta > 0$ такое, что $|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |\varphi_{y_0}(x_0) - \varphi_{y_0}(x)| = |\varphi_{y_0}(x)| < \varepsilon/2$.

Далее будем рассматривать отрезок

$$D = [x_0, x_0 + \min(\delta, \delta_{x_0}^0)] \subseteq U.$$

В каждой точке $x \in D$ для $\varepsilon/2 > 0$ существует $\delta_x > 0$ такое, что $|y_0 - y| < \delta_x \Rightarrow |\varphi_x(y_0) - \varphi_x(y)| < \varepsilon/2$. Отсюда, учитывая, что $|\varphi_x(y_0)| = |\varphi_{y_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, получаем

$$|\varphi_x(y)| \leq |\varphi_x(y) - \varphi_x(y_0)| + |\varphi_x(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

при $x \in D$ и $|y - y_0| < \delta_x$.

Далее будем работать с числами δ_x для каждого $x \in D$. На основе этих чисел построим новые:

$$\Delta_x = \sup\{y - y_0 : y_0 < y' \leq y \Rightarrow |\varphi_x(y')| \leq \varepsilon\}.$$

Очевидно, что $\delta_x \leq \Delta_x$.

Из определения чисел Δ_x следует

- (1) Если $y \in [y_0, y_0 + \Delta_x]$, то $|\varphi_x(y)| \leq \varepsilon$.
- (2) Для любого $x \in D$ и для любого $\alpha > 0$ существует точка $y^* \in (y_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_x + \alpha)$, для которой $|\varphi_{y^*}(x)| > \varepsilon$.

Теперь рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N}$ подмножества D следующего вида:

$$F_n = \left\{x \in D : \Delta_x \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Очевидно, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = D$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ $F_n \subseteq F_{n+1}$. Докажем замкнутость F_n . Действительно, если существует точка $x^* \in \bar{F}_n \setminus F_n$, то $\Delta_{x^*} < \frac{1}{n}$ и по свойству (2) для некоторой точки $y^* \in (y_0 + \Delta_{x^*}, y_0 + \frac{1}{n})$ $|\varphi_{y^*}(x^*)| > \varepsilon$. Выберем последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in F_n$ такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$. Тогда $|\varphi_{y^*}(x_k)| = |\varphi_{x_k}(y^*)| \leq \varepsilon$, так как $\Delta_{x_k} \geq \frac{1}{n}$, а $y^* \in [y_0, y_0 + \frac{1}{n}] \subseteq [y_0, y_0 + \Delta_{x_k}]$. Так как функция φ_{y^*} непрерывна, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{y^*}(x_k) = \varphi_{y^*}(x^*) = \varphi_{x^*}(y^*)$, что невозможно, так как $|\varphi_{y^*}(x_k)| = |\varphi_{x_k}(y^*)| \leq \varepsilon$, а $|\varphi_{x^*}(y^*)| > \varepsilon$. Таким образом замкнутость F_n для всех $n \in \mathbb{N}$ доказана.

По теореме Бэра полное метрическое пространство D не может быть объединением счетного числа нигде не плотных множеств. Следовательно, существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\text{Int } F_n \neq \emptyset$, то есть существует интервал $(a, b) \subseteq F_n \subseteq D \subseteq U$. Нетрудно видеть, что $G = (a, b) \times \left(y_0, y_0 + \frac{1}{n}\right) \subseteq U \times V$ и функция $|\varphi(x, y)| < \varepsilon$ для $(x, y) \in G$. Таким образом, квазинепрерывность функции φ , а значит и функции f , в точке (x_0, y_0) доказана.

Поскольку точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ была выбрана произвольно, функция f квазинепрерывна.

Заметим, что обратное неверно. Для примера рассмотрим характеристическую функцию χ_A множества $A = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$. Эта функция в нуле квазинепрерывна, но не раздельно непрерывна.

Литература

1. Robert W. Vallin The Pointwise limit of separately continuous function // Real Analysis Exchange. 2008/2009. P. 139–146.