ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Т. 58, № 9 ФИЗИКА 2015

УДК 530.145, 530.1

А.И. БРЕЕВ,**, А.В. КОЗЛОВ**

ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С КОНФОРМНОЙ МЕТРИКОЙ [1]

В рамках метода орбит получены выражения для вакуумных средних тензора энергии-импульса скалярного поля с произвольной константой связи в пространстве времени с нестационарной метрикой типа Робертсона – Уокера, где пространство – однородное риманово многообразие. Показано, что вакуумные средние тензора энергии-импульса определяются полным набором решений редуцированного уравнения с меньшим количеством независимых переменных и алгебраическими характеристиками однородного пространства.

Ключевые слова: *метод некоммутативного интегрирования, метрика Робертсона – Уокера, поляризация вакуума.*

Введение

Тензор энергии-импульса (ТЭИ) является наиболее важной величиной, характеризующей материю в общей теории относительности (ОТО). ТЭИ играет роль источника гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна и описывает взаимодействие материи с гравитационным полем. В теории поля в искривленном пространстве-времени представляют интерес вакуумные ТЭИ квантовых полей, которые характеризуют эффект поляризации вакуума квантового поля и, если вакуумное состояние определено неоднозначно, то и эффекты рождения частиц гравитационным полем [1–3].

Практически все известные в настоящее время метрики пространства-времени, рассматривающиеся в ОТО, связаны с различными группами преобразований и, как правило, относятся к метрикам однородных римановых пространств [2]. Естественно возникает задача учета квантовых вакуумных эффектов на однородных пространствах.

С задачей учета квантовых эффектов тесно связана проблема точного интегрирования релятивистских волновых уравнений на многообразиях с кривизной и нетривиальной топологией. Основным методом решения является метод разделения переменных (МРП) [4, 5]. Но МРП учитывает только коммутативную алгебру симметрии уравнения, и существует класс пространств, не допускающих разделения переменных. Поэтому в большинстве случаев расчет вакуумных квантовых эффектов возможно провести, налагая на метрику пространства различные ограничения, позволяющие проинтегрировать волновые уравнения поля.

Настоящая работа посвящена вычислению вакуумных средних ТЭИ скалярного поля на однородных пространствах с инвариантной метрикой, конформно-эквивалентной метрике статического пространства-времени. Отметим, что в [6] при помощи метода орбит исследовался частный случай стационарной метрики и конформной связи с кривизной на однородном пространстве, а в [7, 8] – для вычисления вакуумных средних ТЭИ скалярных и спинорных полей на группах Ли.

Для решения поставленной задачи применяется метод орбит, который позволяет провести некоммутативную редукцию (метод некоммутативного интегрирования [9, 10]) волнового уравнения Клейна – Гордона к уравнению с меньшим количеством независимых переменных, на многообразии, обладающем более простой геометрией и топологией. Данный метод, в отличие от МРП, учитывает некоммутативную алгебру симметрии уравнения Клейна – Гордона. Причем решение строится глобально и не зависит от выбора локальных координат на однородном пространстве.

1. Уравнение Клейна – Гордона и энергии-импульса скалярного поля в конформно-эквивалентной метрике

Рассмотрим n-мерное пространство-время $\mathrm{R}_t^1 \times M$, где M – правое $(n–1)$-мерное однородное пространство с группой Ли преобразований G (в дальнейшем преполагаем, что группа Ли G связная и вещественная), с метрикой лоренцевой сигнатуры ($\mu, \nu = 0, \ldots, n–1$):

[1] Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров, а также в рамках госздания вузам «Наука», рег. № 1.676.2014/ К.

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau)ds^2, \quad ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = d\tau^2 - dl_M^2, \tag{1}$$

где $x = (\tau, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in M, \; dl_M^2 = \gamma_{ij}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}^i d\boldsymbol{x}^j$ – инвариантная метрика на однородном пространстве M ($i, j = 1, \ldots, n–1$). Из (1) следует $\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = a^{-2}(\tau)g^{\mu\nu}(x)$. Легко получить соответствующую связь между символами Кристоффеля второго рода связности Леви-Чивиты на однородном пространстве M:

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}(x) = \Gamma^\rho_{\mu\nu}(x) + c(\tau)\left[\delta_{\mu 0}\delta^\rho_\nu + \delta_{\nu 0}\delta^\rho_\mu - g_{\mu\nu}(x)g^{\rho 0}(x)\right], \quad c(\tau) \equiv \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)}.$$

Однородное пространство M диффеоморфно фактор-многообразию G/H правых смежных классов группы Ли G по замкнутой стационарной подгруппе H некоторой точки $\boldsymbol{x}_0 \in M$. Над областью тривиализации $U \in M$ главного расслоения (G, π, M, H), где $\pi: G \to M$ – естественная проекция, введем координаты g^A = ($\boldsymbol{x}^a$, h^α) прямого произведения $U \times H$ (a = 1, …, n–1, α = = n, …, dim$G$). В тривиализации U координаты точки $g \in G$ можно представить в виде $g = hs(\boldsymbol{x})$, где s: $G \to M$ – локальное гладкое сечение расслоения G. Метрический тензор инвариантной метрики на M определяется выражением [6]

$$\gamma^{ij}(\boldsymbol{x}) = G^{ab}\eta^i_a(\boldsymbol{x}, e_H)\eta^i_b(\boldsymbol{x}, e_H),$$

где e_H – единица группы H; $\eta^i_a(\boldsymbol{x}, e_H)$ – компоненты правоинвариантных векторных полей на группе Ли G в тривилизации U; G^{ab} – компоненты 2-формы $\boldsymbol{G}$, задающей метрику и удовлетворяющей условию Ad(H) – инвариантности:

$$G^{ad}C^c_{\alpha a} + G^{cb}C^d_{\alpha b} = 0,$$

где $C^D_{AB} = ([e_A, e_B])^D$ – структурные константы алгебры Ли L группы Ли G. Здесь и далее латинские индексы (A, B, ...) в верхнем регистре принимают значения от 1 до dim$G$, в нижнем регистре (a, b, …; i, j, …) – от 1 до n–1, греческие индексы в начале алфавита (α, β, …) – от n до dim$G$, греческие индексы в середине алфавита (μ, ν, …) – от 0 до (n–1).

Уравнение Клейна – Гордона для скалярного поля $\tilde{\varphi}(x)$ в метрике (1) имеет вид [1]

$$\left(\tilde{\Box} + m^2 + \varsigma\tilde{R}(\tau)\right)\tilde{\varphi}(x) = 0, \quad \tilde{\Box} = a^{-2}(\tau)\cdot\left(\partial^2_\tau + (n-2)c(\tau)\partial_\tau - \Delta_M\right), \tag{2}$$

где Δ_M – оператор Лапласа на M; ζ – конформный множитель; $\tilde{R}(\tau)$ – скалярная кривизна пространства-времени в метрике (1), которая связана со скалярной кривизной R в метрике ds^2 выражением

$$\tilde{R}(\tau) = a^{-2}(\tau)\left(R + (n-1)(n-2)c^2(\tau) + 2(n-1)\dot{c}(\tau)\right).$$

Базис решений уравнения (2), параметризованный набором σ, ищем в виде

$$\tilde{\varphi}_\sigma(x) = a^{\frac{2-n}{2}}(\tau)\varphi_\sigma(x), \quad \varphi_\sigma(x) = f_\Lambda(\tau)F_\sigma(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

где $\Lambda \in \sigma$ – параметр разделения переменных. Набор функций $\varphi_\sigma(x)$ в (3) описывает скалярное поле в стационарной метрике ds^2. На функцию $F(\boldsymbol{x})$ имеем уравнение Клейна – Фока на однородном пространстве M

$$-\Delta_M F(\boldsymbol{x}) = \Lambda^2 F(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

а на функцию $f(\tau)$ – уравнение вида

$$\ddot{f} + \Omega^2(\tau)f = 0, \quad \Omega^2(\tau) = \omega^2(\tau) + a^2(\tau)\tilde{R}(\tau)\Delta\zeta, \quad \Delta\zeta = \zeta - \zeta_c, \quad \zeta_c = \frac{n-2}{4(n-1)}, \tag{5}$$

где $\omega^2(\tau) = \Lambda^2 + a^2(\tau)m^2 + \zeta_c R$. На базис решений уравнения (2) накладывается условие нормировки

$$-i(\dot{\overline{f}}_\Lambda f_\Lambda - \overline{f}_\Lambda \dot{f}_\Lambda) = 1, \quad (F_\Lambda, F_{\Lambda'}) = \int_M \overline{F_\Lambda(\boldsymbol{x})}F_{\Lambda'}(\boldsymbol{x})\sqrt{\gamma(\boldsymbol{x})}d^{n-1}\boldsymbol{x} = \delta(\Lambda, \Lambda'), \tag{6}$$

где горизонтальная черта над функцией означает операцию комплексного сопряжения. Первое выражение в (6) есть условие на вронскиан решений уравнения (5), вторая формула является условием ортогональности собственных функций оператора Лапласа на однородном пространстве M. Полный набор решений

$$\tilde{\varphi}_{\sigma}^{(-)}(x)=\tilde{\varphi}_{\sigma}(x),\quad \tilde{\varphi}_{\sigma}^{(+)}(x)=\overline{\tilde{\varphi}_{\sigma}(x)}, \tag{7}$$

ортонормированный относительно скалярного произведения (6), можно рассматривать как отрицательно- и положительно-частотные решения в начальный момент времени $\tau=\tau_0$ соответственно.

Запишем тензор энергии-импульса скалярного поля $\tilde{\varphi}(x)$ в нестационарной метрике $d\tilde{s}^2$ [1, 2]:

$$\begin{gathered}\tilde{T}_{\mu\nu}(x)\{\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\}=(1-2\zeta)\overline{\tilde{\nabla}_{(\mu}\tilde{\varphi}}\tilde{\nabla}_{\nu)}\tilde{\varphi}+\left(2\zeta-\frac{1}{2}\right)\tilde{g}_{\mu\nu}\left(\overline{\tilde{\nabla}^{\rho}\tilde{\varphi}}\nabla_{\rho}\tilde{\varphi}-[m^2+\zeta\tilde{R}]\bar{\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}\right)-\\ -\zeta\left(\overline{\tilde{\nabla}_{(\mu}\tilde{\nabla}_{\nu)}\tilde{\varphi}}\,\tilde{\varphi}+\bar{\tilde{\varphi}}\tilde{\nabla}_{(\mu}\tilde{\nabla}_{\nu)}\tilde{\varphi}\right)-\zeta\tilde{R}_{\mu\nu}\bar{\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi},\end{gathered} \tag{8}$$

где скобки внизу обозначают симметризацию; $\tilde{\nabla}_{\mu}$ – ковариантная производная в метрике $d\tilde{s}^2$; $\tilde{R}_{\mu\nu}$ – тензор Риччи в метрике $d\tilde{s}^2$:

$$\tilde{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-(n-2)(c^2(\tau)-\dot{c}(\tau))\delta_{\mu0}\delta_{\nu0}+g_{\mu\nu}\left((n-2)c^2(\tau)+\dot{c}(\tau)\right).$$

Найдем связь между тензором энергии-импульса скалярного поля (8) с тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}\{\varphi,\varphi\}$ в стационарной метрике ds^2. Вторые ковариантные производные от $\tilde{\varphi}(x)$ представим в виде

$$\tilde{\nabla}_0\tilde{\nabla}_0\tilde{\varphi}=a^{\frac{2-n}{2}}(\tau)\left[\ddot{\varphi}-(n-1)\left(c(\tau)\dot{\varphi}+\zeta_c\left[2\dot{c}(\tau)-nc^2(\tau)\right]\varphi\right)\right],$$

$$\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_0\tilde{\varphi}=a^{\frac{2-n}{2}}(\tau)\left[\nabla_i\dot{\varphi}-\frac{n}{2}c(\tau)\nabla_i\varphi\right],$$

$$\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_j\tilde{\varphi}=a^{\frac{2-n}{2}}(\tau)\left[\nabla_i\nabla_j\varphi+c(\tau)g_{ij}\left(\frac{2-n}{2}c(\tau)\varphi+\dot{\varphi}\right)\right].$$

Подставляя данные выражения в (8), получим

$$\tilde{T}_{\mu\nu}\{\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\}=a^{2-n}(\tau)\left[T_{\mu\nu}\{\varphi,\varphi\}\Big|_{m\to a(\tau)m}+\Delta\zeta t_{\mu\nu}\{\varphi,\varphi\}\right], \tag{9}$$

где $t_{\mu\nu}\{\varphi,\varphi\}$ – добавочный тензор, возникающий в случае некомформной связи с кривизной и имеющий вид

$$\begin{gathered}t_{00}\{\varphi,\varphi\}=(n-1)\left[(\dot{\bar{\varphi}}\varphi+\bar{\varphi}\dot{\varphi})c(\tau)-\left(4\zeta\dot{c}(\tau)+\left(2\zeta+\frac{1}{2}\right)(n-2)c^2(\tau)\right)\right]\bar{\varphi}\varphi,\\ t_{0i}\{\varphi,\varphi\}=\frac{c(\tau)}{1-4\zeta_c}\left(\bar{\varphi}\nabla_i\varphi+\overline{\nabla_i\varphi}\varphi\right),\\ t_{ij}\{\varphi,\varphi\}=\gamma_{ij}(\boldsymbol{x})\left(\frac{c(\tau)}{1-4\zeta_c}(\dot{\bar{\varphi}}\varphi+\bar{\varphi}\dot{\varphi})+\left[4\zeta\dot{c}(\tau)+\left(2\zeta-\frac{1}{2}\right)(n-2)c^2(\tau)\right](n-1)\bar{\varphi}\varphi\right).\end{gathered} \tag{10}$$

2. Некоммутативная редукция уравнения Клейна – Фока на однородном пространстве

Кратко рассмотрим процедуру некоммутативной редукции уравнения Клейна – Фока (4) на однородном пространстве M (подробнее см. в [6–13]).

На однородном пространстве M определена алгебра $D(M)$ инвариантных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, коммутирующих с генераторами $X_A=X_A^i(\boldsymbol{x})\partial_i$ группы преобразований G, действующей на однородном пространстве M. Алгебре $D(M)$ соответствует пуассонова алгебра $F(M)$ H-инвариантных функций на кокасательном расслоении T^*M. Целое положительное число

$$d(M)=\dim M+i_M-s_M-\frac{1}{2}(\dim L+\operatorname{ind}L)$$

называется *дефектом однородного пространства* M. Если дефект не равен нулю, то алгебра $D(M)$ нетривиальна и однородное пространство M некоммутативно. Число s_M называется *степенью вырождения* однородного пространства M и характеризует максимальную размерность орбит $O_{\lambda}^{(sM)}$ коприсоединенного представления (К-орбит) группы Ли G, имеющих ненулевое пересечение с подпространством $\boldsymbol{h}^{\perp} = \{f\in L^*, f(Y)=0,\ Y\in \boldsymbol{h}\}$, где L^* – пространство линейных функционалов на L, λ – представитель К-орбиты. Число i_M называется *индексом однородного пространства M* и определяет количество независимых тождеств на однородном пространстве *M*. *Индекс алгебры Ли L* (ind *L*) определяется как количество независимых функций Казимира на сопряженном пространстве L^* относительно скобки Пуассона – Ли.

Согластно методу некоммутативного интегрирования, базис решений уравнения (4) будем искать в виде специального преобразования Фурье

$$F_\sigma(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(q)}}\int_V \psi_\Lambda(v,\lambda) D^\lambda_{qv}(\boldsymbol{x}) d\mu(v), \quad \sigma=(\Lambda,q,\lambda). \tag{11}$$

Переменные q принадлежат лагранжевому подмногообразию Q к орбите $O_\lambda^{(sM)}$; $\Delta(q)$ – модуль группы Ли G, записанный в переменных q; v – переменные из лагранжевого подмногообразия V симплектического листа $F(M)$ алгебры инвариантных функций. Справедливо разложение по матричным элементам λ-представления алгебры L, соответствующего орбите $O_\lambda^{(sM)}$:

$$D^\lambda_{qv}(\boldsymbol{x}) = \int c_A(q',v) D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1}) d\mu(q'), \quad g=(\boldsymbol{x},h).$$

Семейство обобщенных функций $D^\lambda_{q\overline{q'}}(g)$ обладает свойствами полноты и ортогональности:

$$\int \overline{D^{\tilde\lambda}_{\tilde q\overline{\tilde q'}}(g^{-1})} D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1}) d\mu(g) = \Delta(q)\delta(q,\overline{\tilde q})\delta(\tilde q',\overline{q'})\delta(\tilde\lambda,\lambda)\,; \tag{12}$$

$$\int \overline{D^\lambda_{q\overline{q'}}(\tilde g^{-1})} D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1}) d\mu_0(q) d\mu(q') d\mu(\lambda) = \delta(g,\tilde g)\,, \tag{13}$$

где $d\mu(q) = \Delta(q) d\mu_0(q)$. Функции $D^\lambda_{q\overline{q'}}(g)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$[\eta_X(g) + l_X(q,\lambda)] D^\lambda_{q\overline{q'}}(g) = 0, \quad [\xi_X(g) - \overline{l_X(q',\lambda)}] D^\lambda_{q\overline{q'}}(g) = 0\,, \tag{14}$$

где $l_X(q,\lambda)$ – операторы λ-представления алгебры L, косоэрмитовые относительно меры $d\mu_0(q)$; $\xi_X(x)$, $\eta_X(x)$ – левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля на группе Ли G соответственно ($X\in L$). Функции (11) образуют базис решений уравнения Клейна – Фока тогда и только тогда, когда набор функций $\psi_\Lambda(v,\lambda)$ удовлетворяет редуцированному уравнению

$$-H^\lambda(v,\partial_v)\psi_\Lambda(v,\lambda) = \Lambda^2\psi_\Lambda(v,\lambda) \tag{15}$$

с $d(M)$-независимыми переменными v. На решения редуцированного уравнения накладывается условие нормировки

$$\int_V \overline{\psi_{\tilde\Lambda}(v,\lambda)}\psi_\Lambda(v,\lambda) d\mu(v) = \delta(\Lambda,\tilde\Lambda),$$

где $d\mu(v)$ – мера, относительно которой оператор уравнения (15) является эрмитовым.

При выполнении условия $d(M) < 2$ исходное уравнение (4) редуцируется к алгебраическому или обыкновенному дифференциальному уравнению (15).

3. Вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля

При помощи правоинвариантных векторных полей $\eta_X(g)$ и соответствующих правоинвариантных 1-форм $\sigma^X(g)$, $(X\in L)$ перейдем к тетрадным компонентам ТЭИ на однородном пространстве:

$$\tilde T_{ab}\{\tilde\varphi,\tilde\varphi\} = \tilde T_{ij}\{\tilde\varphi,\tilde\varphi\}\eta^i_a(x,e_H)\eta^i_b(x,e_H), \quad \tilde T_{0a}\{\tilde\varphi,\tilde\varphi\} = \tilde T_{0i}\{\tilde\varphi,\tilde\varphi\}\eta^i_a(x,e_H). \tag{16}$$

Так как $\eta^i_a(\boldsymbol{x},e_H)\sigma^a_j(\boldsymbol{x}) = \delta^i_j$, $\eta^i_a(\boldsymbol{x},e_H)\sigma^b_i(\boldsymbol{x}) = \delta^b_a$, то переход (16) к тетрадным компонентам ТЭИ является взаимооднозначным.

Под вакуумными средними ТЭИ скалярного поля будем понимать выражение (с учетом (9))

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\tilde T}_{ab}\right\rangle_0 &= \int \tilde T_{ab}\{\tilde\varphi_\sigma,\tilde\varphi_\sigma\} d\mu(\sigma) = \\ &= a^{2-n}(\tau)\int\Big[T_{ab}\{\varphi_\sigma,\varphi_\sigma\}\big|_{m\to a(\tau)m} + \Delta\zeta t_{ab}\{\varphi_\sigma,\varphi_\sigma\}\Big] d\mu(\sigma),\end{aligned} \tag{17}$$

где φ_σ – полный набор решений уравнения Клейна – Гордона в стационарной метрике ds^2, нумеруемый набором квантовых чисел σ. Таким образом, вакуумные средние, которые мы рассматриваем, определяются набором (7). Подставим (10) в (17) и после ряда преобразований получим

$$\left\langle \tilde{\hat{T}}_{00} \right\rangle_0 = a^{2-n}(\tau)\left[\frac{\left\langle \dot{\hat\varphi}\dot{\hat\varphi}\right\rangle_0 + \Omega^2(\tau)\left\langle \hat\varphi\hat\varphi\right\rangle_0}{2}\right] +$$

$$+a^{2-n}(\tau)\Big(\Delta\zeta\Big(c(\tau)\left\langle \dot{\hat\varphi}\hat\varphi + \hat\varphi\dot{\hat\varphi}\right\rangle_0 - \left[(n-2)c^2(\tau)+\dot c(\tau)\right]\left\langle \hat\varphi\hat\varphi\right\rangle_0\Big)(n-1)\Big),$$

$$\left\langle \tilde{\hat{T}}_{0a} \right\rangle_0 = \frac{1}{2}a^{2-n}(\tau)\Big(\left\langle \dot{\hat\varphi}\eta_a\hat\varphi\right\rangle_0 - \left\langle \hat\varphi\eta_a\dot{\hat\varphi}\right\rangle_0\Big), \tag{18}$$

$$\left\langle \tilde{\hat{T}}_{ab} \right\rangle_0 = a^{2-n}(\tau)\left\{-\frac{1}{2}\left\langle \hat\varphi\{\eta_a,\eta_b\}_+\hat\varphi\right\rangle_0 - \left(2\zeta-\frac{1}{2}\right)\gamma_{ab}\left[\left\langle \dot{\hat\varphi}\dot{\hat\varphi}\right\rangle_0 - \Omega^2(\tau)\left\langle \hat\varphi\hat\varphi\right\rangle_0\right]\right\} +$$

$$+a^{2-n}(\tau)\left\{\Delta\zeta\gamma_{ab}\left((n-1)\dot c(\tau)\left\langle \hat\varphi\hat\varphi\right\rangle_0 + \frac{c(\tau)}{1-4\zeta_c}\left\langle \dot{\hat\varphi}\hat\varphi+\hat\varphi\dot{\hat\varphi}\right\rangle_0\right) - \zeta R_{ab}\left\langle \hat\varphi\hat\varphi\right\rangle_0\right\},$$

где γ_{ab} – тетрадные компоненты метрического тензора на M; R_{ab} – тетрадные компоненты тензора Риччи. При выводе данных формул мы воспользовались свойством вакуумных средних

$$\left\langle \hat\varphi\eta_a\hat\varphi\right\rangle_0 = -\left\langle (\eta_a\hat\varphi)\hat\varphi\right\rangle_0. \tag{19}$$

Выразим вакуумные средние в (18) через полный набор решений редуцированного уравнения Клейна – Фока на симплектическом листе F-алгебры инвариантных функций, пользуясь формулами (11) – (14):

$$\left\langle \eta_a\hat\varphi\eta_b\hat\varphi\right\rangle_0 = \int |f_\Lambda(\tau)|^2\,\overline{\left(\psi_\Lambda(v,\lambda)l_a(q',\lambda)c_\lambda(q',v)\right)}\left(\psi_\Lambda(\tilde v,\lambda)l_b(q',\lambda)c_\lambda(q',\tilde v)\right)d\mu,$$

$$\left\langle \dot{\hat\varphi}\eta_a\hat\varphi\right\rangle_0 = \int \overline{\dot f_\Lambda(\tau)}f_\Lambda(\tau)\overline{\left(\psi_\Lambda(v,\lambda)c_\lambda(q',v)\right)}\left(\psi_\Lambda(\tilde v,\lambda)l_a(q',\lambda)c_\lambda(q',\tilde v)\right)d\mu,$$

$$\left\langle \dot{\hat\varphi}\hat\varphi+\hat\varphi\dot{\hat\varphi}\right\rangle_0 = \int\left(\overline{\dot f_\Lambda(\tau)}f_\Lambda(\tau)+\overline{f_\Lambda(\tau)}\dot f_\Lambda(\tau)\right)\overline{\left(\psi_\Lambda(v,\lambda)c_\lambda(q',v)\right)}\left(\psi_\Lambda(\tilde v,\lambda)c_\lambda(q',\tilde v)\right)d\mu, \tag{20}$$

$$\left\langle \dot{\hat\varphi}\dot{\hat\varphi}\right\rangle_0 = \int|\dot f_\Lambda(\tau)|^2\,\overline{\left(\psi_\Lambda(v,\lambda)c_\lambda(q',v)\right)}\left(\psi_\Lambda(\tilde v,\lambda)c_\lambda(q',\tilde v)\right)d\mu,$$

$$\left\langle \hat\varphi\hat\varphi\right\rangle_0 = \int|f_\Lambda(\tau)|^2\,\overline{\left(\psi_\Lambda(v,\lambda)c_\lambda(q',v)\right)}\left(\psi_\Lambda(\tilde v,\lambda)c_\lambda(q',\tilde v)\right)d\mu,$$

где $d\mu = \gamma^{-1/2}d\mu(v)d\mu(\tilde v)d\mu_0(q')d\mu(\lambda)d\mu(\Lambda)$. Из выражений (20) легко видеть, что (19) есть следствие косоэрмитовости операторов λ-представления относительно меры $d\mu_0(q)$. Подставляя (20) в (18), окончательно получим

$$\left\langle \tilde{T}_{00} \right\rangle_0 = a^{2-n}(\tau)\int|f_\Lambda(\tau)|^2\,\overline{\psi_\Lambda(v,\lambda)}\psi_\Lambda(\tilde v,\lambda)c_\lambda(q',v)\left\{\frac{1}{2}\left(\Omega^2(\tau)+\frac{|\dot f_\Lambda(\tau)|^2}{|f_\Lambda(\tau)|^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\Delta\zeta(n-1)\left[\frac{(f_\Lambda(\tau)f_\Lambda(\tau))'}{|f_\Lambda(\tau)|^2}c(\tau)-\left(\dot c(\tau)+(n-2)c^2(\tau)\right)\right]\right\}c_\lambda(q',\tilde v)d\mu,$$

$$\left\langle \tilde{T}_{0a} \right\rangle_0 = \frac{i}{2}a^{2-n}(\tau)\int|f_\Lambda(\tau)|^2\,\overline{\psi_\Lambda(v,\lambda)}\psi_\Lambda(\tilde v,\lambda)c_\lambda(q',v)l_a(q',\lambda)c_\lambda(q',\tilde v)d\mu, \tag{*}$$

$$\left\langle \tilde{T}_{ab} \right\rangle_0 = -a^{2-n}(\tau)\int|f_\Lambda(\tau)|^2\,\overline{\psi_\Lambda(v,\lambda)}\psi_\Lambda(\tilde v,\lambda)c_\lambda(q',v)\left\{\frac{1}{2}\{l_a(q',\lambda),l_b(q',\lambda)\}_+ + \zeta R_{ab}+\right.$$

$$\left.+\left(2\zeta-\frac{1}{2}\right)\gamma_{ab}\left(\frac{|\dot f_\Lambda(\tau)|^2}{|f_\Lambda(\tau)|^2}-\Omega^2(\tau)\right)-\Delta\zeta\gamma_{ab}\left(\frac{(f_\Lambda(\tau)f_\Lambda(\tau))'}{|f_\Lambda(\tau)|^2}\frac{c(\tau)}{1-4\zeta_c}+(n-1)\dot c(\tau)\right)\right\}c_\lambda(q',\tilde v)d\mu.$$

Полученные выражения (*) для вакуумных средних ТЭИ скалярного поля не зависят от выбора локальных координат и определяются алгеброй инвариантных функций $F(M)$ и алгеброй Ли L группы преобразований G на однородном пространстве M.

4. Пример однородного пространства, обладающего нетривиальной алгеброй инвариантных операторов

Рассмотрим четырехмерное пространство-время $\mathrm{R}_t^1 \times M$, где M – однородное пространство с унимодулярной четырехмерной группой преобразований G, алгебра Ли L которой задается ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_4] = -e_2$$

относительно некоторого фиксированного базиса $\{e_A\}$. В качестве подгруппы изотропии H однородного пространства M выберем одномерную подгруппу $\exp(he_4) \subset G$. Степень вырождения и индекс однородного пространства M равны нулю, дефект равен единице. Плотность энергии вакуума для данного пространства в стационарной метрике рассматривалась в [6].

Алгебра L имеет нулевой индекс, и невырожденные К-орбиты $O^0_{(\pm)}$ параметризуются ковектором общего положения $\lambda = (\pm 1, \pm 1, 0, 0)$; λ-представление алгебры Ли L, отвечающее невырожденным К-орбитам, имеет вид

$$l_1(q, j) = \pm i e^{-q_1 - q_2}, \quad l_2(q, j) = \pm i e^{q_1 - q_2}, \quad l_3(q, j) = \partial_{q_2}, \quad l_4(q, j) = \partial_{q_1}, \tag{21}$$

где $q_1 \in [0, 2\pi), \quad q_2 \in R$. Операторы (21) косоэрмитовы относительно меры $d\mu(q) = dq_1 dq_2$.

Метрический тензор, тензор Риччи и скалярная кривизна пространства M в тетрадных компонентах имеют вид

$$\gamma^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad R_{ab} = -\frac{2c_1}{c_2}\delta_{a2}\delta_{b3}, \quad R = 6c_1, \quad c_1 \ge 0, \quad c_2 \ge 0. \tag{22}$$

Редуцированное уравнение (15) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение

$$c_1\left(\psi''(v) - 2\psi'(v)\right) + \left(2c_2 e^{2v} + \Lambda^2\right)\psi(v) = 0. \tag{23}$$

Легко найти полный и ортогональный набор решений уравнения (23):

$$\psi_n(v) = e^v J_{2n}\left(\sqrt{\frac{2c_2}{c_1}} e^v\right), \quad \Lambda_n^2 = c_1(4n^2 - 1), \quad \int(\bullet) d\mu(\Lambda) = 4\sum_{n=1}^{\infty} n(\bullet). \tag{24}$$

В нашем случае $c_\lambda(q', v) = \delta(q', v)$, и, подставляя выражения (21) – (24) в формулы (*), получим выражения для вакуумных средних ТЭИ скалярного поля на однородном пространстве M для произвольной константы ζ связи и конформного множителя $a(\tau)$.

Приведем выражение для плотности энергии для случая, когда $\zeta = \zeta_c = 1/6$:

$$\left\langle \hat{\tilde{T}}_{00} \right\rangle_0 = a^{-2}(\tau)\frac{\pi c_2^2}{\sqrt{c_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(4c_1 n^2 + a^2(\tau)m^2\right)\left|f_n(\tau)\right|^2 + \left|\dot{f}_n(\tau)\right|^2}{4n^2 - 1}, \tag{25}$$

где $f_n(\tau)$ определяется как решение уравнения

$$\ddot{f}_n(\tau) + \left[c_1(4n^2 + a^2(\tau)m^2)\right] f_n(\tau) = 0, \quad -i(\dot{\overline{f}}_n(\tau) f_n(\tau) - \overline{f}_n(\tau)\dot{f}_n(\tau)) = 1. \tag{26}$$

Пусть конформный множитель $a(\tau)$ определяется вакуумными уравнениями Эйнштейна с космологической постоянной $\Lambda_{\cos}$:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + \left(\Lambda_{\cos} - \tfrac{1}{2}\tilde{R}\right)\tilde{g}_{\mu\nu} = 0. \tag{27}$$

Тогда на $a(\tau)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-3\dot{a}^2(\tau) + \Lambda_{\cos} a^4(\tau) - 3c_1 a^2(\tau) = 0.$$

Сдвигом по конформному времени общее решение можно привести к виду

$$a(\tau) = \sqrt{\frac{3c_1}{\Lambda_{\cos}}}\left|\sec\left(\tau\sqrt{c_1}\right)\right|, \quad \Lambda_{\cos} \ne 0.$$

Отметим, что комфорный множитель обращается в бесконечность в точках $t_k = \pi k c_1^{-1/2} + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}$. Интегрируя уравнение (26) и подставляя в выражение (25), получим плотность энергии вакуума скалярного поля в конформно-эквивалентной метрике однородного пространства *M*, удовлетворяющей вакуумным уравнениям Эйнштейна (27).

В случае конформной связи $\zeta = \zeta_c$ и безмассового скалярного поля перенормированные вакуумные средние ТЭИ имеют вид

$$\left\langle \hat{\tilde{T}}_{00} \right\rangle_0 = a^{-2}(\tau) \frac{\pi c_2^2}{4} (\ln 4 - 2 + \gamma), \quad \left\langle \hat{\tilde{T}}_{0a} \right\rangle_0 = 0, \quad \left\langle \hat{\tilde{T}}_{ab} \right\rangle_0 = \frac{1}{3} \gamma_{ab} \left\langle \hat{\tilde{T}}_{00} \right\rangle_0, \tag{28}$$

где γ – постоянная Эйлера. При

$$a(\tau) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3c_1}} \left| \cos\left(\tau \sqrt{c_1}\right) \right|, \quad \varepsilon = 2\pi^2 G c_2^2 \left(2 - \ln 4 - \gamma\right),$$

метрика $d\tilde{s}^2 = a^2(\tau)\left(d\tau^2 - dl_M^2\right)$ пространства-времени будет удовлетворять уравнениям Эйнштейна

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{\mu\nu} = 8\pi\kappa \left\langle \hat{\tilde{T}}_{\mu\nu} \right\rangle_0,$$

где κ – гравитационная постоянная, описывающим самосогласованную космологическую модель с вакуумными средними (28).

Заключение

В работе получены соотношения, выражающие базис решений уравнения Клейна–Гордона через базис решений редуцированного уравнения и удовлетворяющие условию нормировки скалярного поля. Заметим, что для проведения некоммутативной редукции на однородном пространстве, обладающем ненулевым дефектом, существенно используется алгебра инвариантных операторов на однородном пространстве. Рассмотрен пример однородного пространства с трехмерной алгеброй инвариантных операторов и конформной метрикой, удовлетворяющей вакуумным уравнениям Эйнштейна. Построена самосогласованная космологическая модель, сжатие и расширение которой определяется поляризацией вакуума безмассового скалярного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. – М.: Наука, 1980.
2. Биррелл Н., Дэвис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. – М.: Мир, 1984.
3. Parker L. and Toms D. Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.
4. Bagrov V.G. and Gitman D.M. Exact Solutions of Relativistic Wave Equations, Mathematics and its Applications. – Dordrecht: Kluwer, 1990.
5. Kalnins E.G. Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature. – N. Y.: Longman Scientific & Technical, 1986.
6. Бреев А.И. // ТМФ. – 2014. – Т. 178. – № 1. – С. 69–87.
7. Бреев А.И. // Изв. вузов. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 4. – С. 34–40.
8. Бреев А.И., Широков И.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 8. – С. 51–57.
9. Шаповалов А.В., Широков И.В. // ТМФ. – 1995. – Т. 104. – № 2. – С. 195–213.
10. Широков И.В. К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений // Препринт. – Омск: ОмГУ, 1998.
11. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978.
12. Широков И.В. // ТМФ. – 2000. – Т. 123. – № 3. – С. 407–423.
13. Барановский С.П., Широков И.В. // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – № 4. – С. 737–745.

*Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
**Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия
E-mail: breev@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 16.03.15.

Бреев Александр Игоревич, к.ф.-м.н., доцент НИ ТГУ, ст. преподаватель НИ ТПУ;
Козлов Алексей Вадимович, магистрант.