

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ ТГУ



Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики

Международная молодежная научная конференция

17–19 ноября 2014 г., Томск



Издательство Томского университета
2015

ЗАДАЧА О СФЕРИЧЕСКОМ МАЯТНИКЕ

Д.В. Мамонов

Получено аналитическое решение задачи о сферическом маятнике посредством интегрирования соответствующего уравнения Якоби–Гамильтона. Уравнение траектории и зависимость координат от времени получены с помощью численного метода, что позволило обойтись без громоздкой процедуры обращения эллиптических интегралов.

PROBLEM ABOUT A SPHERICAL PENDULUM

D.V. Mamonov

In article the analytical decision of a problem on a spherical pendulum by means of integration of the corresponding equation of Jakobi-Hamilton is received. The equation of a trajectory and dependence of co-ordinates on time is received by means of a numerical method that has allowed to do without bulky procedure of the reference of elliptic integrals.

Решение методом Гамильтона–Якоби

Вопрос о колебаниях сферического маятника приводится к задаче о движении материальной точки на сфере радиуса r под действием силы тяжести. Введем сферические координаты r, ϑ, φ с полярной осью, направленной вниз так, что положению равновесия отвечает угол $\vartheta = 0$. Функция Гамильтона при движении в поле с потенциальной энергией

$$U = mgz = mgr(1 - \cos \vartheta) \quad (1)$$

имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + mgr(1 - \cos \vartheta), \quad (2)$$

где $p_\vartheta = mr^2 \dot{\vartheta}$, $p_\varphi = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$ – обобщенные импульсы. Отсюда для функции действия S получается уравнение [2]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2mr^2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + mgr(1 - \cos \vartheta) = 0. \quad (3)$$

Решая его методом разделения переменных, с учетом того, угол φ является циклической координатой, найдем, что общее решение уравнения (3) имеет следующий вид:

$$S = -Et + p_\varphi \cdot \varphi + \int \sqrt{2mr^2 [E - mgr(1 - \cos \vartheta)] - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta. \quad (4)$$

Решение содержит две произвольные постоянные: энергию материальной точки E и ее импульс p_φ , которые являются первыми интегралами движения. Известно, что если функцию S продифференцировать по параметрам E или p_φ , то получен-

ные выражения также не будут зависеть от времени, и они называются вторыми интегралами движения. Так, например, дифференцируя (4) по параметру p_φ , получим уравнение траектории

$$\varphi = p_\varphi \int \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{2mr^2 [E - mgr(1 - \cos \vartheta)] - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}}}. \quad (5)$$

Беря производную от выражения (4) по энергии E , найдем связь между углом ϑ и временем движения:

$$t = mr^2 \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{2mr^2 [E - mgr(1 - \cos \vartheta)] - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}}}. \quad (6)$$

Если ввести безразмерное время τ , безразмерную энергию \tilde{E} и импульс p_φ заменить параметром C по формулам

$$\tau = \sqrt{\frac{2g}{r}} t, \quad \tilde{E} = \frac{E}{mgr}, \quad C = \sin^2 \vartheta_0 \cdot \dot{\varphi}(0), \quad (7)$$

где ϑ_0 – начальное значение угла ϑ , то формулы (5) и (6) запишутся в виде

$$\varphi = C \int \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{\tilde{E} - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{C^2}{\sin^2 \vartheta}}}, \quad \tau = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\tilde{E} - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{C^2}{\sin^2 \vartheta}}}. \quad (8)$$

Из них следует, что масса не влияет на характер движения маятника, а от радиуса сферы зависит только масштаб движения по времени. Дальнейшие преобразования относятся к обращению эллиптических интегралов в формулах (8). Тогда получится, что движение маятника происходит в некотором шаровом поясе между углами $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ и угол $\vartheta(\tau)$ является периодической функцией времени с периодом, зависящим от величин \tilde{E} и C . В особом случае, когда $C = 0$, маятник колеблется в одной меридианной плоскости $\varphi = 0$ по закону

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = sn \left(\frac{\sqrt{\tilde{E}}}{2} \tau, \sqrt{\frac{2}{\tilde{E}}} \right) = \sqrt{\frac{\tilde{E}}{2}} sn \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{\tilde{E}}{2}} \right) = \sqrt{\frac{\tilde{E}}{2}} sn \left(t \sqrt{\frac{g}{r}}, \sqrt{\frac{\tilde{E}}{2}} \right), \quad (9)$$

где $sn(u, k)$ – эллиптическая функция Якоби.

Способ численного интегрирования

Точные решения многих задач динамики, полученные методом Якоби, редко доводятся до окончательного результата. Причиной являются сложность и громоздкость аналитических выкладок при обращении многозначных интегралов, встре-

чающихся в уравнениях типа (8). Этим трудностей можно избежать, если непосредственно применять способ численного интегрирования.

Обозначим через $K(\vartheta)$ радикал, входящий в формулы (8):

$$K(\vartheta) = \sqrt{\tilde{E} - 2\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{C^2}{\sin^2 \vartheta}}.$$

График вещественной части этого выражения, вычисленный при значениях $\tilde{E} = 2$ и $C = 0,5$, показан слева на рис. 1. Из него видны пределы изменения угла ϑ , зависящие от величин \tilde{E} и C .

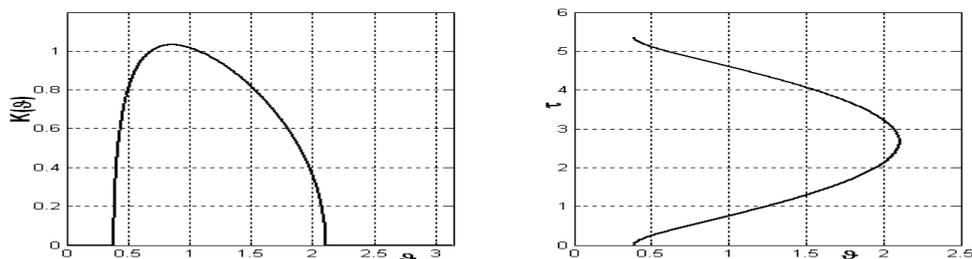


Рис. 1. Численное интегрирование

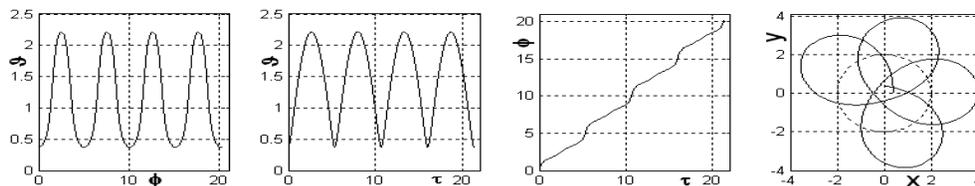


Рис. 2. Графики зависимостей $\vartheta(\varphi)$, $\vartheta(\tau)$, $\varphi(\tau)$ и траектория точки маятника в стереографической проекции

Подставляя эти данные во вторую формулу (8), можно численным интегрированием в прямом и обратном направлении по углу ϑ получить графическую зависимость времени от угла, которая показана справа на рис. 1. При интегрировании в обратном направлении изменяется знак у корня. Практическое построение зависимости $\tau(\vartheta)$ осуществляется программой

```
function tau=gamilton (E, C)
r=linspace(0.01, pi-0.01, 5000); K=E-2*sin(r/2).^2-C^2./sin(r).^2;
K=real(sqrt(K)); R= r(K>0); K= K(K>0); K=1./K;
R=[R, fliplr(R)]; K=[K, fliplr(-K)]; tau=cumtrapz(R,K); plot(R,tau);
```

Таким же способом получается и график функции $\varphi(\vartheta)$. Так как переменные φ и τ монотонно возрастают, то обратные зависимости $\vartheta(\tau)$ и $\vartheta(\varphi)$ получаются периодическими, причем периоды по переменным φ и τ могут не совпадать.

На рис. 2 показаны графики зависимостей угла ϑ от времени τ и от угла φ , а также траектория точки маятника в стереографической проекции для постоянных

величин: $\tilde{E} = 2$, $C=0,5$. Точки сферы единичного радиуса со сферическими координатами ϑ, φ в стереографической проекции отображаются на плоскость Римана формулой

$$z = x + iy = 2tg \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi}. \quad (10)$$

Поэтому экватор, для которого $\vartheta = \pi/2$, отображается на круг с центром в начале координат и с радиусом $r=2$, что и отмечено пунктиром на рис. 2. Из приведенного примера видно, что основные результаты из теории динамических колебаний проще и быстрее можно получать без использования трудоемких обращений многозначных интегралов.

Из рис. 3 и 4 видно поведение траекторий маятника в зависимости от начальной энергии и начального импульса.

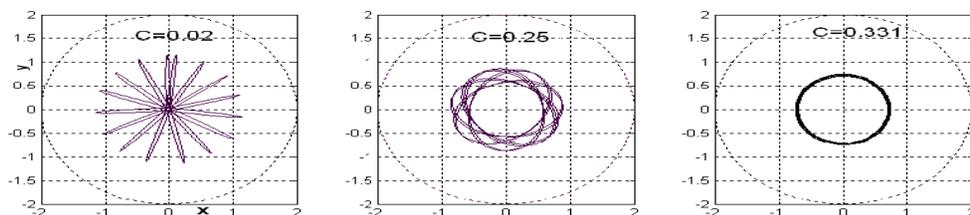


Рис. 3. Траектории центра масс сферического маятника при энергии $\tilde{E} = 0,5$ при различных значениях параметра C

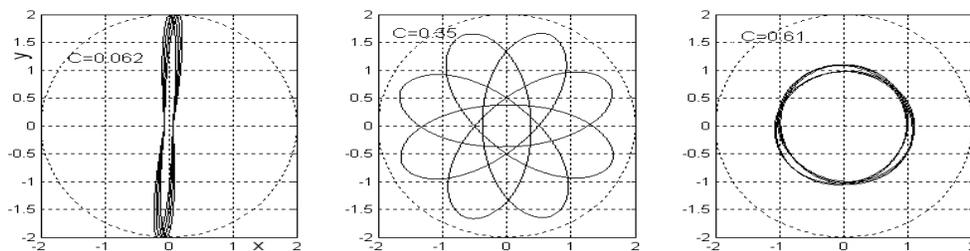


Рис. 4. Траектории центра масс сферического маятника при энергии $\tilde{E} = 1$ при различных значениях параметра C

Для заданной величины \tilde{E} существует предельный импульс C , при котором сливаются верхняя и нижняя границы колебаний по углу ϑ .

Заключение

Таким образом, в работе получено решение задачи о сферическом маятнике, которое содержит постоянную устранимую ошибку вычислений, связанную с численным определением интеграла. Это дает преимущество перед имеющимися численными методами решения эволюционных задач, в которых ошибка из-за применения пошаговых технологий постоянно накапливается.

Литература

1. Френкель Я.И. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. М.: Гостехиздат, 1940. 436 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Наука, 1969. Т. I: Механика. 767 с.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ФМ, 1961. 825 с.