УДК 519.172

ЭВОЛЮЦИОННО-ФРАГМЕНТАРНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПЛАНАРНОГО СУГРАФА

И. В. Козин, С. В. Курапов, С. И. Полюга

Запорожский национальный университет, г. Запорожье, Украина

Рассматривается задача нахождения максимального планарного суграфа в несепарабельном неориентированном графе. Показано, что эта задача может быть представлена как задача оптимизации на фрагментарной структуре. Предложен эволюционно-фрагментарный алгоритм поиска приближённых решений задачи.

Ключевые слова: *граф, максимальный планарный суграф, изометрические циклы, фрагментарная структура, эволюционно-фрагментарный алгоритм.*

DOI 10.17223/20710410/29/6

EVOLUTIONARILY-FRAGMENTED ALGORITHM FOR FINDING A MAXIMAL FLAT PART OF A GRAPH

I. V. Kozin, S. V. Kurapov, S. I. Poljuga

Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine

E-mail: ainc00@gmail.com, lilili5050@rambler.ru, veta99@mail.ru.

The problem of finding a maximal flat part of a separable undirected graph is considered. It is shown that this problem can be represented as an optimization problem on a fragmented structure. An evolutionary-fragmented algorithm for finding approximate solutions of the problem is proposed.

Keywords: *graph, maximally flat part of graph, isometric cycles, fragmented structure, evolutionarily-fragmented algorithm.*

Введение

При построении рисунка графа [1, 2] в автоматизированных системах проектирования плоских конструктивов, таких, как печатные платы, интегральные микросхемы, СБИС и т. д., возникает задача выделения плоской части графа [3, 4]. Будем рассматривать задачу построения максимальной плоской части графа $G(X, U)$. Известно, что эта задача является трудно решаемой [5, 6]. Поэтому оправдан поиск методов приближённого решения задачи.

Определение 1 [7]. Неориентированный граф без петель и кратных рёбер, без мостов и точек сочленения, без вершин с локальной степенью 1 и 2 будем называть несепарабельным неориентированным графом.

Определение 2. Планарный суграф с максимальным количеством рёбер графа называется максимальным планарным суграфом этого графа.

Множество суграфов в несепарабельном неориентированном графе можно рассматривать как линейное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$. Операция суммы $G_1 \oplus G_2$ суграфов G_1

и G_2 определена как суграф, множество рёбер которого является симметрической разностью множеств рёбер суграфов G_1 и G_2 [8].

В качестве базисной системы векторов пространства суграфов выбираются суграфы с единственным ребром. Размерность пространства суграфов графа G, состоящего из n вершин и m рёбер, равна m. В пространстве суграфов можно выделить два подпространства, которые называются подпространством разрезов и подпространством циклов графа. Размерность подпространства разрезов равна $n-1$, а элементы этого подпространства называются квалиразрезами. Размерность подпространства циклов равна $m-n+1$, а элементы этого подпространства называются квазициклами [9].

В любом несепарабельном неориентированном графе можно выделить подмножество простых циклов — множество C_τ изометрических циклов графа [10].

Определение 3 [11, 12]. Изометрическим циклом в графе называется простой цикл, для которого кратчайший путь между любыми двумя его вершинами состоит из рёбер этого цикла.

Будем искать приближённое решение задачи построения максимального планарного суграфа в виде суммы некоторого набора изометрических циклов.

1. Фрагментарная структура и фрагментарный алгоритм

Определение 4. Фрагментарной структурой (Y, E) на конечном множестве Y называется семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, такое, что

$$\forall E_i \in E, E_i \neq \varnothing \ \exists e \in E_i \ (E_i \setminus \{e\} \in E).$$

Элементы из множества E будем называть допустимыми фрагментами.

Таким образом, для любого допустимого фрагмента E_i существует нумерация его элементов $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{is_i}\}$, такая, что $\{e_{i1}, e_{i2}, \ldots e_{ik}\} \in E$ для всех $k = 1, 2, \ldots, s_i$.

Определение 5. Одноэлементные множества, которые являются допустимыми фрагментами, будем называть элементарными фрагментами.

Определение 6. Фрагмент называется максимальным, если он не является подмножеством никакого другого фрагмента.

Очевидны следующие свойства фрагментов:

Свойство 1. Пустое множество является допустимым фрагментом: $\varnothing \in E$.

Свойство 2. Пусть $M = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} |E_i|$. Тогда для любого целого числа m в интервале $0 \leqslant m \leqslant M$ найдётся элемент в множестве E, мощность которого равна m.

Теорема 1 [13]. Если (Y, E) — фрагментарная структура на множестве Y, то для любого непустого множества $A \in E$ существует нумерация его элементов $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, такая, что для всех $k = 1, 2, \ldots, m$ множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in E$.

Из теоремы вытекает, что всякий допустимый фрагмент можно построить из пустого множества, последовательно добавляя к нему элементы так, чтобы на каждом шаге такой процедуры полученное подмножество было допустимым фрагментом.

Максимальный фрагмент может быть построен с помощью следующего «жадного» алгоритма:

— элементы множества Y линейно упорядочиваются;
— на начальном шаге выбирается пустое множество $Y_0 = \varnothing$;
— на шаге с номером $k+1$ выбирается первый по порядку элемент $y \in Y \setminus Y_k$, такой, что $Y_k \cup \{y\} \in E$. Строится множество $Y_{k+1} = Y_k \cup \{y\}$;

— алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $y \in Y \setminus Y_k$ с требуемым свойством.

Приведённый алгоритм будем называть *фрагментарным алгоритмом*. Результат применения фрагментарного алгоритма определяется заданным линейным порядком на множестве Y. Таким образом, любой максимальный фрагмент может быть задан некоторой перестановкой элементов множества Y. Пусть $A \in E$. Условие для элемента $y \in Y$, при котором $A \cup \{y\} \in E$, будем называть условием присоединения элемента y.

2. Фрагментарная структура на множестве циклов

С множеством изометрических циклов в графе $G(X,U)$ связан ряд инвариантов графа [10]. Одним из таких инвариантов является мощность множества изометрических циклов $\operatorname{card} C_\tau$. Другим инвариантом может служить вектор количества изометрических циклов, упорядоченный по возрастанию их длин. Следующим инвариантом, по аналогии с вектором локальных степеней, является вектор количества изометрических циклов, проходящих по рёбрам графа, — будем называть его вектором циклов по рёбрам:

$$V_u = (a_{u_1}, a_{u_2}, a_{u_3}, \ldots, a_{u_m}),$$

где a_{u_i} — количество изометрических циклов суграфа, проходящих по ребру u_i.

Инвариантом является также вектор количества изометрических циклов, проходящих по вершинам графа. Будем называть его вектором циклов по вершинам:

$$V_x = (a_{x_1}, a_{x_2}, a_{x_3}, \ldots, a_{x_n}),$$

где a_{x_j} — количество циклов, проходящих через вершину x_j.

Для любого подмножества изометрических циклов C_τ мощностью k можно определить значение функционала Маклейна:

$$F(C_\tau)_k = \sum_{i=1}^{m} a_{u_i}^2 - 3\sum_{i=1}^{m} a_{u_i} + 2m, \tag{1}$$

где a_{u_i} — количество циклов, проходящих по ребру с номером i, а m — количество рёбер графа (суграфа).

Следует заметить, что функционал Маклейна принимает нулевое значение тогда, когда выбранное подмножество изометрических циклов определяет планарный суграф в графе G:

$$F(C_\tau)_k = 0. \tag{2}$$

Между количеством выбранных изометрических циклов k, количеством рёбер m и количеством вершин n для данного подмножества изометрических циклов существует связь (формула Эйлера):

$$k - m + n - 1 = 0. \tag{3}$$

Определение 7. Сумму элементов подмножества изометрических циклов мощностью k будем называть ободом:

$$c_{0k} = c_1 \oplus c_2 \oplus \ldots \oplus c_k.$$

Будем рассматривать множество циклов графа как фрагментарную структуру, причём изометрические циклы представляют элементарные фрагменты этой структуры. Любой планарный суграф графа G можно представить в виде суммы изометрических циклов (элементарных фрагментов).

Построение максимального фрагмента для задачи построения максимальной плоской части графа опишем с помощью приведённого выше фрагментарного алгоритма с соблюдением следующих свойств:

а) элементы множества изометрических циклов C_τ представляем в виде кортежа (упорядочиваем и нумеруем);
б) на начальном шаге выбираем пустое множество изометрических циклов $C_p = \varnothing$;
в) на шаге с номером k выбираем следующий по порядку элемент кортежа, имеющий общее ребро с внешним простым циклом (ободом), построенным как сумма циклов предыдущих шагов $c_{0k} = c_{0(k-1)} \oplus c_k$, при условии, что обод не является пустым множеством;
г) если выполнены условия (2) и (3), то выбранный изометрический цикл помещается в множество C_p;
д) алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $c_i \in C_\tau$ с требуемым свойством.

Рассмотрим работу данного алгоритма на примере.

Пример 1. Выделим плоскую часть графа G, представленного на рис. 1.

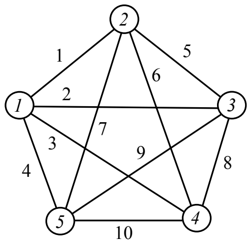

Рис. 1. Граф G

Множество изометрических циклов графа G представляем в виде кортежа:

$$\begin{gathered}
C_\tau = \langle c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10} \rangle : \\
c_1 = \{u_1, u_2, u_5\} \to (x_1, x_2, x_3)\,;\ c_2 = \{u_1, u_3, u_6\} \to (x_1, x_2, x_4)\,; \\
c_3 = \{u_1, u_4, u_7\} \to (x_1, x_2, x_5)\,;\ c_4 = \{u_2, u_3, u_8\} \to (x_1, x_3, x_4)\,; \\
c_5 = \{u_2, u_4, u_9\} \to (x_1, x_3, x_5)\,;\ c_6 = \{u_3, u_{10}, u_7\} \to (x_1, x_4, x_5)\,; \\
c_7 = \{u_3, u_6, u_8\} \to (x_2, x_3, x_4)\,;\ c_8 = \{u_5, u_7, u_9\} \to (x_2, x_3, x_5)\,; \\
c_9 = \{u_6, u_7, u_{10}\} \to (x_2, x_4, x_5)\,;\ c_{10} = \{u_8, u_9, u_{10}\} \to (x_3, x_4, x_5)\,.
\end{gathered}$$

Для простоты записи иногда рёбра будем обозначать числами.

Выбираем в множестве изометрических циклов первый по порядку цикл и помещаем его в список циклов, характеризующий плоскую часть графа:

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_5\} \to (x_1, x_2, x_3)\,,\ C_p = \{c_1\}\,.$$

Строим векторы циклов по рёбрам $V_u = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ и по вершинам $V_x = (1, 1, 1, 0, 0)$. Вычисляем значение функционала Маклейна (1) для выбранной системы циклов: $F(C_p) = 0$; ограничение (3) также выполнено: $1 - 3 + 3 - 1 = 0$.

Так как цикл единственный, его внешний простой цикл (обод) определяется самим циклом:

$$c_0 = \varnothing \oplus c_1 = \{u_1, u_2, u_5\}\,.$$

Выбираем в множестве изометрических циклов следующий по порядку пересекающийся (в множественном смысле) цикл $c_2 = \{u_1, u_3, u_6\} \to (x_1, x_2, x_4)$, $|c_0 \cap c_2| = 1$. Строим векторы $V_u = (2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ и $V_x = (2, 2, 1, 1, 0)$. Отсюда определяем значение функционала Маклейна (1) для выбранной системы циклов: $F(C_p) = 0$; ограничение (3) также выполнено: $2 - 5 + 4 - 1 = 0$. Обод определяется суммированием циклов c_1 и c_2:

$$c_0 = c_1 \oplus c_2 = \{1, 2, 5\} \oplus \{1, 3, 6\} = \{2, 3, 5, 6\}.$$

Обод $c_0 \neq \varnothing$. Все условия выполнены. Помещаем цикл c_2 в множество, характеризующее плоскую часть графа: $C_p = \{c_1, c_2\}$.

Выбираем в множестве изометрических циклов следующий пересекающийся цикл:

$$c_3 = \{u_1, u_4, u_7\} \to (x_1, x_2, x_5),\ |c_0 \cap c_3| = 1.$$

Но мы не можем поместить его в список циклов, характеризующий плоскую часть графа, так как значение функционала Маклейна для выбранной совокупности циклов больше нуля, согласно $V_u = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$.

Выбираем в множестве изометрических циклов следующий пересекающийся цикл:

$$c_4 = \{u_2, u_3, u_8\} \to (x_1, x_3, x_4),\ |c_0 \cap c_4| = 1.$$

Строим векторы $V_u = (2, 2, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$ и $V_x = (3, 2, 2, 2, 0)$. Отсюда определяем значение функционала Маклейна (1) для выбранной системы циклов: $F(C_p) = 0$; ограничение (3) также выполняется: $3 - 6 + 4 - 1 = 0$. Обод определяется как сумма предыдущего обода c_0 и c_4:

$$c_0 = \{2, 3, 5, 6\} \oplus \{2, 3, 8\} = \{5, 6, 8\}.$$

Все условия выполнены, помещаем цикл c_4 в множество, характеризующее плоскую часть графа: $C_p = \{c_1, c_2, c_4\}$.

Циклы c_5 и c_6 не имеют общих рёбер с ободом и исключаются из рассмотрения. Следующим циклом, имеющим с предыдущим ободом общее ребро, является цикл $c_7 = \{u_5, u_6, u_8\} \to (x_2, x_3, x_4)$. Но его присоединение нарушает ограничение (3): $4 - 6 + 4 - 1 \neq 0$. Кроме того, внешний простой цикл (обод) в этом случае есть пустое множество: $c_0 = \{5, 6, 8\} \oplus \{5, 6, 8\} = \varnothing$. Следовательно, цикл не может быть добавлен в множество C_p.

Просматривая далее список, последовательно присоединим цикл c_8, а затем c_9:

$$c_8 = \{u_5, u_7, u_9\} \to (x_2, x_3, x_5);\ c_9 = \{u_6, u_7, u_{10}\} \to (x_2, x_4, x_5).$$

Ограничения (2) и (3) выполняются и циклы c_8 и c_9 могут быть помещены в множество C_p.

В конечном итоге для множества $C_p = \{c_1, c_2, c_4, c_8, c_9\}$ получаем $V_u = (2, 2, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 2)$ и $V_x = (3, 4, 3, 3, 2)$. Значение функционала Мак-Лейна (1) для выбранной системы циклов равно нулю: $F(C_p) = 0$; ограничение (3) также выполнено: $5-9+5-1 = 0$. Обод определяется как сумма предыдущего обода и c_8 и c_9:

$$c_0 = \{5, 6, 8\} \oplus \{5, 7, 9\} \oplus \{6, 7, 10\} = \{8, 9, 10\}.$$

На последующих шагах не удается найти цикл, удовлетворяющий условиям (2) и (3); конец работы алгоритма выделения фрагментов (см. рис. 2).

Таким образом, мы выделили множество изометрических циклов, характеризующее плоскую часть графа, описываемую перестановкой $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$. Количество рёбер в данной плоской части $K_u = 9$, а количество вершин $K_x = 5$.

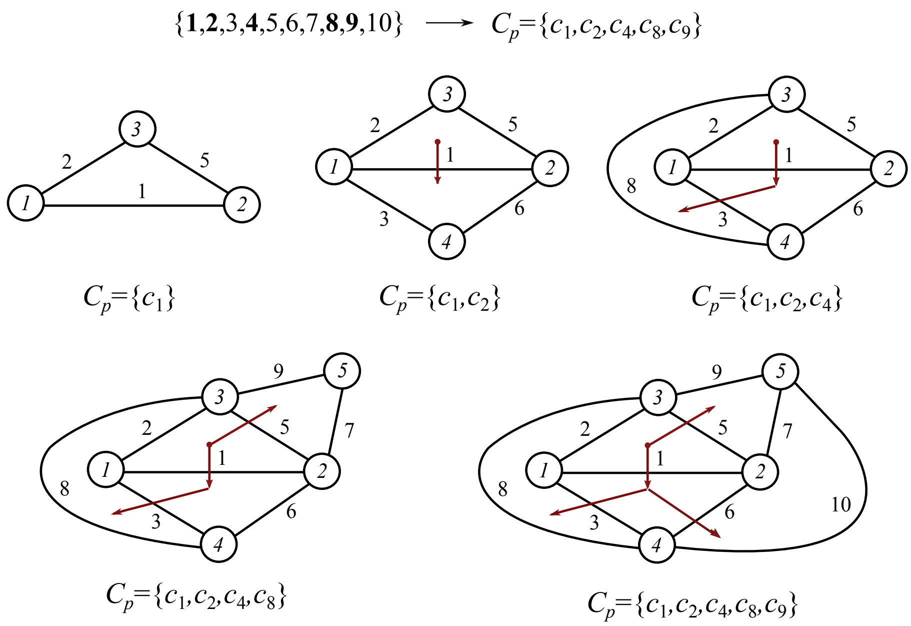

Рис. 2. Плоская часть графа

Отметим в заключение следующее свойство построенной фрагментарной модели задачи: любой максимальный планарный суграф в несепарабельном неориентированном графе G может быть построен предлагаемым методом при надлежащем выборе перестановки элементарных фрагментов. Это свойство фрагментарной модели называется свойством достижимости.

3. Приближённые алгоритмы поиска оптимальных решений на фрагментарных структурах

Из результатов п. 2 вытекает, что задача поиска планарного суграфа с максимальным числом рёбер сводится к поиску максимального фрагмента во фрагментарной структуре, т. е. к комбинаторной задаче $F(s) \xrightarrow[s \in S_N]{} \max$ отыскания некоторой экстремальной перестановки на множестве перестановок изометрических циклов (N — мощность множества изометрических циклов). При этом любая перестановка является допустимой.

Поставим в соответствие каждой перестановке значение критерия на соответствующем ей максимальном фрагменте, а именно число рёбер планарного суграфа. На множестве перестановок можно предложить несколько простых алгоритмов приближённого поиска оптимальной перестановки. Опишем некоторые из них.

а) Метод локального поиска. Множество перестановок может рассматриваться как метрическое пространство с некоторой метрикой $p : S_N \times S_N \to R^1_+$ [14]. Выбирается начальная перестановка и ищется оптимальная перестановка в её ϵ-окрестности. Эта найденная перестановка является базовой для следующего шага. Условие остановки алгоритма: в ϵ-окрестности не существует перестановки с лучшим критерием. В качестве ϵ можно брать любое натуральное число $1, 2, \ldots$

б) Хорошие результаты даёт эволюционная модель на фрагментарной структуре [13, 15]. В этой модели в качестве пространства поиска выбирается множество $S_N = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$ всех перестановок чисел $1, 2, \ldots, N$.

Оператор построения начальной популяции выделяет произвольное подмножество заданной мощности Q из множества Y. Правило вычисления критерия селекции устроено следующим образом: по заданной перестановке фрагментов с помощью фрагментарного алгоритма строится максимальный допустимый фрагмент. Вычисляется значение целевой функции для этого фрагмента.

Опишем оператор кроссовера Kr. Пусть $U = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ и $V = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ — две произвольные перестановки. Перестановка-потомок строится следующим образом: последовательности U и V просматриваются в порядке следования элементов. На k-м шаге выбирается минимальный из первых элементов последовательностей и добавляется в новую перестановку-потомок. Затем этот элемент удаляется из двух последовательностей-родителей. Например, $\mathrm{Kr}((4,7,3,2,8,1,6,5),(1,4,5,2,6,3,8,7)) = (1,4,5,2,6,3,7,8)$.

Оператор мутации M_α выполняет случайную транспозицию в перестановке. Оператор селекции выбирает случайным образом набор P пар из текущей популяции. Оператор отбора упорядочивает элементы промежуточной популяции по убыванию значения критерия селекции. В качестве новой текущей популяции выбираются первые Q элементов последовательности.

Обычное правило остановки — количество поколений достигло предельного значения L. Лучшая по значению критерия селекции перестановка из последней построенной популяции определяет приближённое решение задачи.

Оценим вычислительную сложность эволюционно-фрагментарного алгоритма. В соответствии с [12] трудоёмкость построения множества изометричных циклов определяется величиной $\mathrm{O}(m^2 n/\log_2 n + mn^2)$. Здесь n — число вершин, m — число рёбер графа. Максимально возможная мощность множества изометрических циклов равна $N = \mathrm{O}(n^3)$. Трудоёмкость фрагментарного алгоритма [15] в рассматриваемом случае ограничена величиной $\mathrm{O}(N^2)$. Таким образом, получаем оценку трудоёмкости эволюционно-фрагментарного алгоритма в виде $\mathrm{O}(QN\log_2 N + LPN^3)$. Следовательно, трудоёмкость приведённого в настоящей работе алгоритма выделения максимального плоского суграфа в графе может быть оценена величиной $\mathrm{O}(3Qn^3 \log_2 n + LPn^9)$.

С целью апробации результатов исследования в рамках программной системы «Эволюционно-фрагментарное моделирование» был поставлен численный эксперимент по отысканию максимального планарного суграфа. Для поиска решений использовалась авторская программа, реализующая эволюционную модель на перестановках. Программа написана на VBA под управлением WINDOWS XP/7. Вычисления проводились на компьютере ACPIx64-based PC с процессором 4x 3400 MHz. Время расчёта для каждой задачи было ограничено 3 мин. Количество поколений в разных задачах составляло от 500 до 1000, использовался пропорциональный принцип отбора родителей. Количество эволюций (отдельных запусков алгоритма) менялось от 1 до 10 в зависимости от задачи. Условием остановки являлось достижение границы времени расчёта.

Для оценки эффективности алгоритма было выполнено сравнение с алгоритмом локального поиска со случайным выбором начальной точки и с жадным алгоритмом со случайным выбором порядка элементов. Рассмотрено 100 тестовых задач. Граф в каждой задаче генерировался случайным образом в соответствии с моделью Эрдоша — Реньи [16]. Количество вершин графа менялось в диапазоне 100–500.

Параметры алгоритмов были следующие:

а) локальный поиск со случайным выбором начальной точки: для каждой задачи проводилось 250 запусков алгоритма, выбирался лучший результат;

б) жадный алгоритм со случайным выбором последовательности рёбер графа: количество запусков составляло 2500;

в) эволюционный алгоритм: размер популяции 500, количество поколений 100, количество пар скрещивания в каждом поколении 20, пропорциональный метод отбора пар.

В результате эксперимента установлено, что в 73 % тестов эволюционно-фрагментарный алгоритм даёт лучшие и в 97 % тестов не худшие результаты, чем локальный алгоритм и алгоритм случайного поиска.

Заключение

В работе предложен подход к поиску приближённого решения задачи построения максимальной плоской части графа на основе фрагментарной структуры на множестве изометрических циклов графа. Как следствие, задача поиска оптимального решения сводится к поиску оптимальной перестановки на множестве перестановок. Для таких задач эффективным является применение универсального эволюционно-фрагментарного алгоритма. Построена фрагментарная модель для решения рассматриваемой задачи. Показано, что оптимальное решение задачи выделения максимального планарного суграфа достижимо в рамках фрагментарной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.
2. *Tamassia R.* Handbook of Graph Drawing and Visualization. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2013. 844 p.
3. *Курапов С. В., Толок А. В.* Методы построения топологического рисунка графа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 9. С. 78–97.
4. *Курапов С. В., Давидовский М. В.* Два подхода к проведению соединений в плоских конструктивах // Компоненты и технологии. 2015. № 7. С. 142–147.
5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
6. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985. 512 с.
7. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
8. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. 455 с.
9. *Зыков Е. И.* Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 384 с.
10. *Курапов С. В., Похальчук Т. А.* Единичные циклы и разрезы для определения изоморфизма графов // Вiсник Запорiзького нацiонального унiверситету: Збiрник наукових праць. Фiз.-мат. науки. 2011. № 2. С. 61–68.
11. *Курапов С. В., Савин В. В.* Векторная алгебра и рисунок графа. Запорiжжя: ЗДУ, 2003. 200 с.
12. *Kavitha T., Liebchen C., Mehlhorn K., Michail D., et al.* Cycle bases in graphs — characterization, algorithms, complexity, and applications // Comput. Sci. Rev. 2009. No. 3. P. 199–243.
13. *Козин И. В., Полюга С. И.* Фрагментарные модели для некоторых экстремальных задач на графах // Математичнi машини i системи. 2014. № 1. С. 143–150.
14. *Деза Е. И., Деза М. М.* Энциклопедический словарь расстояний. М.: Наука, 2008. 432 с.
15. *Козин И. В., Полюга С. И.* О свойствах фрагментарных структур // Вiсник Запорiзького нацiонального унiверситету: Збiрник наукових праць. Фiз.-мат. науки. 2012. № 1. С. 99–106.

16. *ErdSos P. and Rя́enyi A.* On random graphs I // Publ. Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 290–297.

REFERENCES

1. *Kas'yanov V. N., Evstigneev V. A.* Grafy v programmirovanii: obrabotka, vizualizatsiya i primenenie [Graphs in Programming: Processing, Visualization and Application]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2003. 1104 p. (in Russian)
2. *Tamassia R.* Handbook of Graph Drawing and Visualization. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2013. 844 p.
3. *Kurapov S. V., Tolok A. V.* The topological drawing of a graph: Construction methods. Automation and Remote Control, 2013, vol. 74, iss. 9, pp. 1494–1509.
4. *Kurapov S. V., Davidovskiy M. V.* Dva podkhoda k provedeniyu soedineniy v ploskikh konstruktivakh [Two approaches to connections conducting in flat form factor]. Komponenty i tekhnologii, 2015, no. 7, pp. 142—147. (in Russian)
5. *Garey M. R. and Johnson D. S.* Computers and Intractability. San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1979. 338 p.
6. *Papadimitriou C. H. and Steiglitz K.* Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity. NJ, USA, Prentice-Hall, 1982.
7. *Harary F.* Graph Theory. Addison–Wesley, 1969.
8. *Swamy M. N. S. and Thulasiraman K.* Graphs, Networks and Algorithms. Wiley, 1980. 612 p.
9. *Zykov E. I.* Osnovy teorii grafov [Basics of Graph Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 384 p. (in Russian)
10. *Kurapov S. V., Pokhal'chuk T. A.* Edinichnye tsikly i razrezy dlya opredeleniya izomorfizma grafov [Single cycles and cuts to determine the graph isomorphism]. Vistnyk Zaporizkoho Natsionalnoho Universytetu: Zbirnyk naukovykh prats. Fiz.-mat. nauky, 2011, no. 2, pp. 61–68. (in Russian)
11. *Kurapov S. V., Savin V. V.* Vektornaya algebra i risunok grafa [Vector Algebra and Graph Drawing]. Zaporizhzhya, ZDU Publ., 2003. 200 p. (in Russian)
12. *Kavitha T., Liebchen C., Mehlhorn K., Michail D., et al.* Cycle bases in graphs — characterization, algorithms, complexity, and applications. Comput. Sci. Rev., 2009, no. 3, pp. 199–243.
13. *Kozin I. V., Polyuga S. I.* Fragmentarnye modeli dlya nekotorykh ekstremal'nykh zadach na grafakh [Fragmentary model for some extreme problems on graphs]. Matematychni mashyny i sistemy, 2014, no. 1, pp. 143–150. (in Russian)
14. *Deza E. I., Deza M. M.* Entsiklopedicheskiy slovar' rasstoyaniy [Encyclopedic Dictionary of Distances]. Moscow, Nauka Publ., 2008. 432 p. (in Russian)
15. *Kozin I. V., Polyuga S. I.* O svoystvakh fragmentarnykh struktur [Properties of fragmented structures]. Vistnyk Zaporizkoho Natsionalnoho Universytetu: Zbirnyk naukovykh prats. Fiz.-mat. nauky, 2012, no. 1, pp. 99–106. (in Russian)
16. *ErdSos P. and Rя́enyi A.* On random graphs I. Publ. Math. Debrecen, 1959, vol. 6, pp. 290–297.