АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК, 2015, том 49, № 1, с. 54–64

УДК 521.3

О ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ДВИЖЕНИЯ МАЛОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ВОЗМУЩЕННЫМИ ОРБИТАМИ, ПОСТРОЕННЫМИ ПО ДВУМ ВЕКТОРАМ ПОЛОЖЕНИЯ И ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ

В. А. Шефер[1], О. В. Шефер[2]

[1]*Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск*

[2]*Институт кибернетики, Томский политехнический университет, Томск*

e-mail: shefer@niipmm.tsu.ru

Поступила в редакцию 07.03.2014 г.

Рассматриваются предложенные ранее первым автором промежуточные возмущенные орбиты, определяемые по двум векторам положения и трем измерениям угловых координат малого небесного тела. Теоретически показывается, что при малом опорном интервале времени, охватывающем измерения, эти орбиты по степени аппроксимации реального движения приблизительно соответствуют орбите с касанием третьего порядка. Чем меньше опорный временной интервал, тем лучше выполняется это соответствие. Выводятся законы изменения погрешностей методов построения промежуточных орбит в зависимости от длины опорного интервала времени. Согласно этим законам скорость сходимости методов к точному решению при сокращении опорного интервала времени на два порядка выше, чем в традиционных методах, использующих невозмущенную кеплеровскую орбиту. Рассматриваемые орбиты являются одними из наиболее точных среди множества орбит своего класса, определяемого порядком касания. Теоретические результаты исследования подтверждаются численными примерами.

Ключевые слова: промежуточная возмущенная орбита, сверхоскулирующая орбита, определение первоначальной орбиты, метод Гаусса нахождения предварительной орбиты.

DOI: 10.7868/S0320930X15010077

ВВЕДЕНИЕ

В работах (Schäfer, 2002; Шефер, 2003а; 2003б) на основе развитой ранее теории сверхоскулирующих орбит (Шефер, 1998а; 1998б; Shefer, 2002a; 2002b) предложены методы построения промежуточных возмущенных орбит малых небесных тел по минимальному числу граничных условий. Это метод вычисления промежуточной орбиты по двум векторам положения и соответствующему интервалу времени и метод определения промежуточной орбиты по трем положениям на небесной сфере и соответствующим моментам времени. Методы позволяют учитывать основную часть возмущений в движении исследуемого тела. Построение орбит опирается на идею ввода фиктивного притягивающего центра с переменной массой. Движение по орбите относительно фиктивного центра описывается уравнениями задачи Гюльдена–Мещерского. Принимается, что гравитационный параметр, определяющий промежуточное движение, изменяется в соответствии с первым законом Мещерского вариации массы. Этот параметр может принимать не только положительные, но и отрицательные значения. Предполагается, что в общем случае фиктивный центр движется прямолинейно и равномерно. Таким образом, промежуточное движение складывается из движения фиктивного центра и движения относительно этого центра. Решение для промежуточного движения может быть представлено в замкнутой аналитической форме.

В данной статье рассматривается вопрос о точности аппроксимации возмущенного движения предложенными в (Schäfer, 2002; Шефер, 2003а; 2003б) промежуточными орбитами. Формулируются и доказываются два утверждения о законах изменения погрешностей методов построения промежуточных орбит. Справедливость этих законов подтверждается численными примерами.

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ВОЗМУЩЕННЫЕ ОРБИТЫ. ФОРМУЛИРОВКИ УТВЕРЖДЕНИЙ

Рассмотрим движение тела пренебрежимо малой массы (малое тело: астероид, комета, крупный метеороид, космический аппарат) под действием ньютоновского притяжения системы точечных масс (Солнце, планеты, спутники планет). Для изучения движения малого тела построим трехосную прямоугольную невращающуюся систему координат с началом, совмещенным с одной из притягивающих масс (основное тело). Дифференциальные уравнения движения в этой системе координат запишем в форме

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{K}{r^3}\mathbf{x} + \mathbf{F} \equiv \mathbf{G}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор положения малого тела, $r = |\mathbf{x}|$, $K = fM = \mathrm{const}$ (f — гравитационная постоянная, M — масса основного тела), $\mathbf{F}$ — вектор возмущающего ускорения, точка означает дифференцирование по времени t. Пусть в начальный момент $t = t_0$ известны векторы положения и скорости малого тела

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \ \ \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0. \tag{2}$$

Здесь и в последующих разделах статьи нижние индексы i, j ($i, j = 0, 1, 2, ...$), если это не оговаривается отдельно, означают, что данная величина определена при $t = t_i, t_j$; например, $\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}(t_i)$, $r_j \equiv r(t_j)$.

Движение, описываемое уравнениями (1) и условиями (2), назовем реальным.

Будем считать, что в интервале времени, в котором изучается движение малого тела, правые части (1) обладают производными по t любого порядка.

В приведенных ниже формулах введенные для реального движения величины, обозначенные символом *, сохраняют свой смысл, но относятся к промежуточному движению. Верхний индекс в скобках обозначает порядок производной по t. Записи $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ и $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ обозначают векторное и скалярное произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно.

Допустим, что известны векторы

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \ \ \mathbf{x}(t_3) = \mathbf{x}_3 \tag{3}$$

двух различных положений малого тела на реальной траектории в моменты времени t_1, t_3 ($t_1 < t_3$).

В работе (Шефер, 2003а; ниже S03a) решена задача построения промежуточной возмущенной орбиты, на которой положения и ускорения в моменты t_1 и t_3 совпадают с положениями, задаваемыми векторами (3), и суммарными ускорениями $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_3$ соответственно. Для краткости будем говорить о ней как об орбите *S2*.

Приведем необходимые нам формулы, связанные с построением орбиты *S2*.

Согласно S03a требуемые для орбиты *S2* граничные условия запишем в виде

$$\mathbf{q}_j^* = \mathbf{q}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{Z}_j, \ \ \ddot{\mathbf{q}}_j^* = \ddot{\mathbf{q}}_j = \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{G}_j; \ \ j = 1, 3, \tag{4}$$

где $\mathbf{Z}_j$ — вектор положения фиктивного притягивающего центра в момент t_j; $\mathbf{q}_j$, $\mathbf{q}_j^*$ — векторы положения малого тела на реальной и промежуточной орбитах относительно фиктивного центра в момент t_j.

Из условий (4) и уравнений промежуточного движения (см. S03a) следует

$$\mathbf{q}_j^* = -\lambda_j \mathbf{G}_j, \ \ \mu_j = \lambda_j \mathbf{G}_j^2 R_j^*, \ \ R_j^* = \left|\mathbf{q}_j^*\right|; \ \ j = 1, 3. \tag{5}$$

Здесь μ_j — значение гравитационного параметра фиктивного центра в момент t_j. Скалярные параметры λ_1 и λ_3 предлагается выбрать в виде

$$\lambda_1 = \frac{[\mathbf{H}_1 \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)]}{\mathbf{H}_1^2}, \ \ \lambda_3 = -\frac{[\mathbf{H}_3 \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)]}{\mathbf{H}_3^2}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{G}_1 - \frac{(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3)}{\mathbf{G}_3^2}\mathbf{G}_3 \neq 0.$$

$$\mathbf{H}_3 = \mathbf{G}_3 - \frac{(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_3)}{\mathbf{G}_1^2}\mathbf{G}_1 \neq 0.$$

Вектор скорости на орбите *S2* в момент t_j определяется по формуле

$$\dot{\mathbf{x}}_j^* = \dot{\mathbf{q}}_j^* + \dot{\mathbf{Z}}_j, \tag{7}$$

где

$$\dot{\mathbf{Z}}_j = (\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_1)/(t_3 - t_1); \ \ j = 1, 3, \tag{8}$$

а вектор $\dot{\mathbf{q}}_j^*$ вычисляется на момент t_j согласно описанной в S03a процедуре.

Сформулируем следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если решения задачи Коши* (1), (2) *являются функциями, аналитическими в открытом интервале, содержащем замкнутый интервал* $[t_1, t_3]$, *то промежуточная орбита S2 в пределе при* $t_3 \to t_1$ (*или* $t_1 \to t_3$) *является орбитой с касанием третьего порядка к траектории движения, описываемого уравнениями* (1) *и начальными условиями* (2). *При этом* $\mathbf{x}^*(t_j) = \mathbf{x}(t_j)$, $\ddot{\mathbf{x}}^*(t_j) = \mathbf{G}(t_j)$, *а величины* $\left|\dot{\mathbf{x}}^*(t_j) - \dot{\mathbf{x}}(t_j)\right|$ *и* $\left|\mathbf{x}^{*(3)}(t_j) - \dot{\mathbf{G}}(t_j)\right|$ *уменьшаются как* $(t_3 - t_1)^3$ *и* $(t_3 - t_1)$ *соответственно*; $j = 1, 3$.

Векторы $\mathbf{x}^{*(k)}(t_j) = \mathbf{q}^{*(k)}(t_j)$ ($k = 2, 3, 4$) находятся с помощью выражений (13)–(15) из (Шефер, 1998а), которые перепишем в виде

$$\ddot{\mathbf{q}}_j^* = -A\mathbf{q}_j^*, \quad \ddot{\mathbf{q}}_j^{*(3)} = A\left(C\mathbf{q}_j^* - \dot{\mathbf{q}}_j^*\right), \tag{9}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_j^{*(4)} = = A\left[\left(2C\frac{\dot{\mu}_j}{\mu_j} + 3\frac{\dot{\mathbf{q}}_j^{*2}}{R_j^{*2}} - 2A - 15B^2\right)\mathbf{q}_j^* + 2C\dot{\mathbf{q}}_j^*\right], \tag{10}$$

где

$$A = \frac{\mu_j}{R_j^{*3}}, \quad B = \frac{\left(\mathbf{q}_j^* \cdot \dot{\mathbf{q}}_j^*\right)}{R_j^{*2}}, \quad C = -\frac{\dot{\mu}_j}{\mu_j} + 3B,$$

$$\dot{\mu}_j = \frac{\mu_1\mu_3\left(\mu_3 - \mu_1\right)\left(t_3 - t_1\right)}{\left[\mu_1\left(t_j - t_1\right) + \mu_3\left(t_3 - t_j\right)\right]^2}.$$

Пусть мы имеем для каждого из трех моментов времени t_1°, t_2°, t_3° ($t_1^\circ < t_2^\circ < t_3^\circ$) пару наблюденных угловых координат (например, прямое восхождение α_i° и склонение δ_i°), определяющую видимое положение малого тела на небесной сфере с центром в точке наблюдения. Угловые координаты, наблюденные в момент t_i°, представим в виде единичного вектора $\mathbf{L}_i$, компонентами которого являются направляющие косинусы луча зрения на малое тело. Будем предполагать, что наблюденные величины не содержат ошибок и $\left[\left(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2\right) \cdot \mathbf{L}_3\right] \neq 0$.

Имеют место зависимости

$$\mathbf{x}_i = \rho_i\mathbf{L}_i - \mathbf{S}_i, \quad t_i = t_i^\circ - \frac{1}{c}\rho_i; \quad i = 1, 2, 3, \tag{11}$$

где $\mathbf{x}_i$ – вектор положения малого тела, определенный в момент t_i; $\mathbf{S}_i$ – вектор положения основного тела относительно точки наблюдения, определенный в момент t_i°; c – скорость света. Таким образом, вектор $\rho_i\mathbf{L}_i$ имеет один конец, определенный в момент t_i, а другой – в момент t_i°. Неизвестными в (11) являются вектор $\mathbf{x}_i$ и дальность ρ_i (расстояние от точки наблюдения до малого тела).

В работе (Шефер, 2003б; ниже S03b) изложено построение промежуточной возмущенной орбиты, точно удовлетворяющей трем указанным парам угловых измерений. Будем ссылаться на нее как на орбиту *S3*.

Применительно к орбите *S3* выражения (11) перепишутся соответственно в форме

$$\mathbf{x}_i^* = \rho_i^*\mathbf{L}_i - \mathbf{S}_i, \quad t_i^* = t_i^\circ - \frac{1}{c}\rho_i^*; \quad i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Отсюда ясно, что все величины, связанные с движением по *S3*, должны соотноситься с временем t^*. Ниже мы строго придерживаемся этого правила.

Фундаментальные уравнения метода построения орбиты *S3* имеют вид (см. S03b)

$$\begin{gathered} c_1\rho_1^*\mathbf{L}_1 - \rho_2^*\mathbf{L}_2 + c_3\rho_3^*\mathbf{L}_3 = \\ = c_1\left(\mathbf{S}_1 + \mathbf{Z}_1\right) - \left(\mathbf{S}_2 + \mathbf{Z}_2\right) + c_3\left(\mathbf{S}_3 + \mathbf{Z}_3\right), \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered} c_j = d_j\mu_j/\mu_2, \\ \mathbf{Z}_j = \mathbf{x}_j^* - \mathbf{q}_j^*, \quad \mathbf{q}_j^* = -\lambda_j\mathbf{G}_j^*, \\ \mu_j = \lambda_j\mathbf{G}_j^{*2}R_j^*, \quad R_j^* = \left|\mathbf{q}_j^*\right|; \quad j = 1, 3, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{Z}_2 = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\mathbf{Z}_1 + \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\mathbf{Z}_3, \quad \mathbf{q}_2^* = \mathbf{x}_2^* - \mathbf{Z}_2, \\ \mu_2 = \frac{\mu_1\mu_3 t_{13}^*}{\mu_1 t_{12}^* + \mu_3 t_{23}^*}, \end{gathered} \tag{15}$$

$$d_1 = \frac{\sigma_{13}\theta_{23}}{\sigma_{23}\theta_{13}}, \quad d_3 = \frac{\sigma_{13}\theta_{12}}{\sigma_{12}\theta_{13}}, \tag{16}$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mu_i}{\mu_1}\mathbf{q}_i^*, \quad \theta_i = \frac{\mu_i}{\mu_1}\left(t_i^* - t_1^*\right); \quad i = 1,2,3, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} t_{12}^* = t_2^* - t_1^*, \quad t_{23}^* = t_3^* - t_2^*; \quad t_{13}^* = t_3^* - t_1^*, \\ \theta_{12} = \theta_2 - \theta_1, \quad \theta_{23} = \theta_3 - \theta_2, \quad \theta_{13} = \theta_3 - \theta_1. \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь λ_1 и λ_3 находятся согласно выражениям (6), если подставить в них вместо векторов $\mathbf{x}_j$ и $\mathbf{G}_j$ векторы $\mathbf{x}_j^*$ и $\mathbf{G}_j^*$ соответственно. Векторы ускорения $\mathbf{G}_1^*$ и $\mathbf{G}_3^*$ вычисляются по тем же формулам, что и правые части уравнений реального движения (1), при подстановке в них вместо величин t и $\mathbf{x}$ найденных значений t_j^* и $\mathbf{x}_j^*$ соответственно. Величины σ_{12}, σ_{23}, σ_{13} есть гауссовские отношения площадей секторов конического сечения и треугольников, построенных для пар векторов $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ соответственно.

Решение уравнений (13) позволяет уточнить ρ_i^*. Затем с помощью (12) улучшаются t_i^* и $\mathbf{x}_i^*$. Вычисления повторяются до тех пор, пока после некоторого шага итерации не будет достигнута требуемая точность. По окончательно уточненным $\mathbf{x}_i^*$ и t_i^* находится вектор скорости $\dot{\mathbf{x}}_i^*$ на промежуточной орбите в момент t_i^* методом, изложенным в S03a; $i = 1, 2, 3$.

Запишем утверждение, состоящее в следующем:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если решения задачи Коши (1), (2) являются функциями, аналитическими в открытом интервале, содержащем замкнутый интервал* $\left[t_1, t_3\right]$, *то промежуточная орбита S3 в пределе при* $t_3 \to t_1$ (*или* $t_1 \to t_3$) *является орбитой с ка-*

санием третьего порядка к траектории движения, описываемого уравнениями (1) *и начальными условиями* (2). *При этом величины* $\left|t_i^* - t_i\right|$, $\left|\mathbf{x}^*(t_i^*) - \mathbf{x}(t_i)\right|$, $\left|\dot{\mathbf{x}}^*(t_i^*) - \dot{\mathbf{x}}(t_i)\right|$ *и* $\left|\ddot{\mathbf{x}}^*(t_i^*) - \mathbf{G}(t_i)\right|$ *уменьшаются как* $(t_3 - t_1)^2$, *а* $\left|\mathbf{x}^{*(3)}\left(t_i^*\right) - \dot{\mathbf{G}}\left(t_i\right)\right|$ – *как* $(t_3 - t_1)$; $i = 1, 2, 3$.

Векторы $\mathbf{x}^{*(k)}(t_i^*) = \mathbf{q}^{*(k)}(t_i^*)$ $(k = 2, 3, 4)$ находятся с помощью формул (9) и (10), в которых следует положить $j = i$.

Замечание 1. Согласно постановке задачи (1), (2) вектор $\mathbf{F}$ определяется ньютоновским притяжением возмущающих точечных масс. Это не означает, что методы построения орбит *S2* и *S3* не применимы в случае возмущающих сил более общего вида (см. S03a).

Перейдем к доказательствам приведенных утверждений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1

Обратимся к промежуточной орбите *S2.*

Равенство векторов положения и ускорения для промежуточного и реального движений в опорный момент времени t_j, т.е.

$$\mathbf{x}^*(t_j) = \mathbf{x}(t_j),\ \ \ddot{\mathbf{x}}^*(t_j) = \mathbf{G}(t_j);\ \ j = 1, 3, \tag{19}$$

следует из выполнения граничных условий (4).

Представим решения для реального и промежуточного движений в окрестности момента t_1 с учетом (19) тейлоровскими разложениями

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_1 + \dot{\mathbf{x}}_1(t - t_1) + \frac{1}{2}\mathbf{G}_1(t - t_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\dot{\mathbf{G}}_1(t - t_1)^3 + \frac{1}{24}\ddot{\mathbf{G}}_1(t - t_1)^4 + \cdots,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{x}_1 + \dot{\mathbf{x}}_1^*(t - t_1) + \frac{1}{2}\mathbf{G}_1(t - t_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\mathbf{x}_1^{*(3)}(t - t_1)^3 + \frac{1}{24}\mathbf{x}_1^{*(4)}(t - t_1)^4 + \cdots.\end{aligned} \tag{21}$$

Дифференцируя выражения (20) и (21) дважды по t, мы можем записать

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}_1 + \dot{\mathbf{G}}_1(t - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{G}}_1(t - t_1)^2 + \cdots, \tag{22}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{G}_1 + \mathbf{x}_1^{*(3)}(t - t_1) + \frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{*(4)}(t - t_1)^2 + \cdots. \tag{23}$$

Тогда из (21) и (23) при $t = t_3$ с учетом (19) получим

$$\dot{\mathbf{x}}_1^* = (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)/(t_3 - t_1) - \mathbf{G}_1(t_3 - t_1)/2 - \cdots, \tag{24}$$

$$\mathbf{x}_1^{*(3)} = (\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1)/(t_3 - t_1) - \mathbf{x}_1^{*(4)}(t_3 - t_1)/2 - \cdots. \tag{25}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t_3 \to t_1} \dot{\mathbf{x}}_1^* = \dot{\mathbf{x}}_1,\ \ \lim_{t_3 \to t_1} \mathbf{x}_1^{*(3)} = \dot{\mathbf{G}}_1. \tag{26}$$

Построив аналогичные выражения для производных более высоких порядков, в общем случае возмущенного движения будем иметь

$$\lim_{t_3 \to t_1} \mathbf{x}_1^{*(k)} \neq \mathbf{G}_1^{(k-2)};\ \ k = 4, 5, \ldots.$$

Вместе с (19) и (26) это означает, что полученная в пределе промежуточная орбита принадлежит к классу сверхоскулирующих орбит с касанием третьего порядка к реальной траектории. Отклонения положения на таких орбитах от реального положения малого тела в окрестности эпохи оскуляции t_1 прямо пропорциональны величине $(t - t_1)^4$.

Вычитая из (24) и (25) аналогичные выражения, получаемые с помощью (20) и (22), запишем

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1^* - \dot{\mathbf{x}}_1 &= -\frac{1}{6}\left(\mathbf{x}_1^{*(3)} - \dot{\mathbf{G}}_1\right)(t_3 - t_1)^2 - \\ &- \frac{1}{24}\left(\mathbf{x}_1^{*(4)} - \ddot{\mathbf{G}}_1\right)(t_3 - t_1)^3 - \cdots, \\ \mathbf{x}_1^{*(3)} - \dot{\mathbf{G}}_1 &= -\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_1^{*(4)} - \ddot{\mathbf{G}}_1\right)(t_3 - t_1) - \cdots.\end{aligned}$$

Поскольку предельная промежуточная орбита является орбитой с касанием третьего порядка, то из последних двух равенств следует, что $\left|\mathbf{x}^{*(3)}(t_1) - \dot{\mathbf{G}}(t_1)\right|$ есть величина первого порядка малости, а $\left|\dot{\mathbf{x}}^*(t_1) - \dot{\mathbf{x}}(t_1)\right|$ – величина третьего порядка малости относительно интервала $(t_3 - t_1)$.

Таким же образом можно доказать справедливость Утверждения 1 применительно к опорному моменту t_3.

Утверждение доказано для любых значений параметров λ_1 и λ_3, введенных с помощью (5), таких, что $\lambda_1\lambda_3 \neq 0$. Следовательно, оно справедливо и для орбиты *S2*, параметры λ_1 и λ_3 которой выбираются в виде (6).

Замечание 2. В S03a приводится альтернативное доказательство того, что промежуточная орбита *S2* в пределе при $(t_3 - t_1) \to 0$ является сверхоскулирующей орбитой с касанием третьего порядка к траектории реального движения.

Замечание 3. Выбор λ_1 и λ_3 в виде (6) означает, что в общем случае пространственного возмущенного движения малого тела движение фиктивного центра из положения $\mathbf{Z}_1$ в положение $\mathbf{Z}_3$ происходит по кратчайшему пути с наименьшей скоростью, а отклонения положений фиктивного центра и его гравитационного параметра от соответствующих невозмущенных значений $\mathbf{0}$ и K объясняются только влиянием возмущающих сил. Последние, как правило, малы по сравнению с эффектами невозмущенного движения. Исходя из этих обстоятельств, указанный выбор λ_1 и λ_3 с численной точки зрения следует считать одним из самых простых и удачных. Это видно на примере вычисления искомого вектора скорости (7), поскольку влияние ошибок, возникающих из-за использования формулы численного дифференцирования (8), будет в этом случае минимальным.

Замечание 4. В рамках традиционного подхода, основанного на построении по двум векторам положения невозмущенной кеплеровской орбиты, мы приходим в пределе при стремящемся к нулю опорном интервале $(t_3 - t_1)$ к орбите с касанием первого порядка (оскулирующая орбита). В этом случае $\mathbf{x}^*(t_j) = \mathbf{x}(t_j)$, а величина $\left|\dot{\mathbf{x}}^*(t_j) - \dot{\mathbf{x}}(t_j)\right|$ уменьшается как $(t_3 - t_1)$; $j = 1, 3$.

Замечание 5. Очевидно, что Утверждение 1 справедливо не только для определяемого параметрами λ_1 и λ_3 семейства промежуточных орбит, введенного в S03a, но и для любых орбит, аппроксимирующих движение (1), (2) аналитическими функциями и удовлетворяющих граничным условиям (4). Подробности более широкого подхода к построению промежуточных орбит с касанием третьего порядка можно найти в работах (Shefer, 2002a; 2002b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2

Введем обозначения

$$t_{12} = t_2 - t_1, t_{23} = t_3 - t_2, t_{13} = t_3 - t_1. \tag{27}$$

Тогда, используя тейлоровские разложения для реального движения в окрестности опорного момента t_2, можно записать следующие векторные соотношения:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -t_{12}\dot{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{2}t_{12}^2\mathbf{G}_2 - \frac{1}{6}t_{12}^3\dot{\mathbf{G}}_2 + \frac{1}{24}t_{12}^4\ddot{\mathbf{G}}_2 - \cdots, \tag{28}$$

$$\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 = t_{23}\dot{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{2}t_{23}^2\mathbf{G}_2 + \frac{1}{6}t_{23}^3\dot{\mathbf{G}}_2 + \frac{1}{24}t_{23}^4\ddot{\mathbf{G}}_2 + \cdots, \tag{29}$$

$$\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 = -t_{12}\dot{\mathbf{G}}_2 + \frac{1}{2}t_{12}^2\ddot{\mathbf{G}}_2 - \frac{1}{6}t_{12}^3\mathbf{G}_2^{(3)} + \cdots, \tag{30}$$

$$\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_2 = t_{23}\dot{\mathbf{G}}_2 + \frac{1}{2}t_{23}^2\ddot{\mathbf{G}}_2 + \frac{1}{6}t_{23}^3\mathbf{G}_2^{(3)} + \cdots. \tag{31}$$

Будем рассматривать интервалы (27) как малые величины первого порядка относительно максимальной из длин этих интервалов $\varepsilon \equiv t_{13}$.

Исключив из (30) и (31) последовательно $\dot{\mathbf{G}}_2$ и $\ddot{\mathbf{G}}_2$, а затем из (28) и (29) – $\mathbf{G}_2$, и разрешая полученные уравнения относительно $\mathbf{G}_2$, $\dot{\mathbf{G}}_2$ и $\dot{\mathbf{x}}_2$, будем иметь

$$\mathbf{G}_2 = \frac{t_{23}}{t_{13}}\mathbf{G}_1 + \frac{t_{12}}{t_{13}}\mathbf{G}_3 + \mathbf{O}\left(\varepsilon^2\right), \tag{32}$$

$$\dot{\mathbf{G}}_2 = \frac{1}{t_{13}}(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1) + \mathbf{O}\left(\varepsilon \mid \varepsilon^2\right), \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{t_{23}}{t_{12}t_{13}}\mathbf{x}_1 + \frac{t_{23} - t_{12}}{t_{12}t_{23}}\mathbf{x}_2 + \frac{t_{12}}{t_{23}t_{13}}\mathbf{x}_3 - \frac{t_{12}t_{23}}{6t_{13}} \times \\ \times \left(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1\right) + \mathbf{O}\left(\varepsilon^3 \mid \varepsilon^4\right).\end{aligned} \tag{34}$$

Здесь и ниже через $\mathbf{O}(\varepsilon^n)$ обозначен остаточный член соответствующей формулы, порядок которого не ниже n-го относительно ε. Запись $\mathbf{O}(\varepsilon^n \mid \varepsilon^m)$ означает, что при $t_{12} \neq t_{23}$ следует использовать $\mathbf{O}(\varepsilon^n)$, а при $t_{12} = t_{23}$ – $\mathbf{O}(\varepsilon^m)$ $(n,\ m = 1,\ 2,\ \ldots)$.

Исключим из (28) и (29) $\dot{\mathbf{x}}_2$ и, подставляя в полученное векторное уравнение выражения (32) и (33), с учетом (1) и (11) запишем

$$\begin{aligned}C_1\rho_1\mathbf{L}_1 - \rho_2\mathbf{L}_2 + C_3\rho_3\mathbf{L}_3 = \\ = C_1\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + C_3\mathbf{S}_3 + \mathbf{E} + \mathbf{O}(\varepsilon^4),\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$C_1 = \frac{t_{23}}{t_{13}}\left(1 + T_1b_1\right),\ C_3 = \frac{t_{12}}{t_{13}}\left(1 + T_3b_3\right),$$

$$T_1 = \frac{1}{6}\left(t_{13}^2 - t_{23}^2\right),\quad T_3 = \frac{1}{6}\left(t_{13}^2 - t_{12}^2\right),$$

$$b_j = K/r_j^3,\ r_j = |\mathbf{x}_j|;\ j = 1,\ 3,$$

$$\mathbf{E} = \frac{t_{23}}{t_{13}}T_1\mathbf{F}_1 + \frac{t_{12}}{t_{13}}T_3\mathbf{F}_3.$$

Коэффициенты C_1 и C_3 с точностью до членов второго порядка включительно равны отношениям площадей треугольников, построенных на векторах $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$ (Escobal, 1965; Субботин, 1968).

Отбрасывая остаточный член $\mathbf{O}(\varepsilon^4)$, запишем вместо (35) векторное уравнение

$$\begin{aligned}C_1^*\rho_1^*\mathbf{L}_1 - \rho_2^*\mathbf{L}_2 + C_3^*\rho_3^*\mathbf{L}_3 = \\ = C_1^*\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + C_3^*\mathbf{S}_3 + \mathbf{E}^*,\end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\begin{gathered}C_1^* = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\left(1 + T_1^*b_1^*\right),\ C_3^* = \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\left(1 + T_3^*b_3^*\right), \\ T_1^* = \frac{1}{6}\left(t_{13}^{*2} - t_{23}^{*2}\right), \\ T_3^* = \frac{1}{6}\left(t_{13}^{*2} - t_{12}^{*2}\right), \\ b_j^* = K/r_j^{*3},\ r_j^* = \left|\mathbf{x}_j^*\right|;\ j = 1,3, \\ \mathbf{E}^* = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}T_1^*\mathbf{F}_1^* + \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}T_3^*\mathbf{F}_3^*.\end{gathered} \tag{37}$$

Моменты t_1^*, t_2^*, t_3^* и векторы $\mathbf{x}_1^*$, $\mathbf{x}_3^*$ находятся согласно выражениям (12). Векторы возмущающего ускорения $\mathbf{F}_1^*$ и $\mathbf{F}_3^*$ вычисляются по тем же формулам, по которым определяются векторы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$, если подставить в эти формулы вместо t_j и $\mathbf{x}_j$ значения t_j^* и $\mathbf{x}_j^*$ соответственно.

Очевидно, что интервалы (17) и (27) являются величинами одного и того же порядка малости.

Выражение (36) соответствует некоторой промежуточной орбите. Назовем ее орбитой *P3*. Как и в случае орбиты *S3*, все величины, определяющие движение по *P3*, связаны с временем t^*.

Рассматривая (36) как систему линейных уравнений относительно неизвестных дальностей $\rho_i^* \equiv \rho^*(t_i^*)$ и полагая, что $C_1^* C_3^* \neq 0$, получим

$$\begin{aligned}\rho_1^* = &-\frac{1 - C_1^* - C_3^*}{C_1^*}(\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{S}_1) - \frac{1}{C_1^*}[\mathbf{U}_1 \cdot (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1)] + \\ &+ \frac{C_3^*}{C_1^*}[\mathbf{U}_1 \cdot (\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_1)] - \frac{1}{C_1^*}(\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{E}^*),\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\rho_2^* = &(1 - C_1^* - C_3^*)(\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{S}_2) + C_1^*[\mathbf{U}_2 \cdot (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1)] - \\ &- C_3^*[\mathbf{U}_2 \cdot (\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_2)] + (\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{E}^*),\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\rho_3^* = &-\frac{1 - C_1^* - C_3^*}{C_3^*}(\mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{S}_3) - \frac{C_1^*}{C_3^*}[\mathbf{U}_3 \cdot (\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_1)] + \\ &+ \frac{1}{C_3^*}[\mathbf{U}_3 \cdot (\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_2)] - \frac{1}{C_3^*}(\mathbf{U}_3 \cdot \mathbf{E}^*),\end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\mathbf{U}_1 = \frac{(\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_3)}{D}, \quad \mathbf{U}_2 = \frac{(\mathbf{L}_3 \times \mathbf{L}_1)}{D}, \quad \mathbf{U}_3 = \frac{(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2)}{D},$$
$$D = [(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{L}_3] \neq 0.$$

Векторы $(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1)$, $(\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_2)$, $(\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_1)$ имеют первый порядок малости, а векторы $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$ есть величины (–2)-го порядка. Согласно построению векторного уравнения (36) мы получили C_1^* и C_3^* с ошибками 3-го порядка относительно ε. Легко показать, что величины $(1 - C_1^* - C_3^*)$ и $\mathbf{E}^*$ находятся с ошибками 4-го порядка. Для этого достаточно сравнить их разложения в ряды по степеням t_{12}^*, t_{23}^* с разложениями точных значений отношений площадей треугольников (Escobal, 1965; Субботин, 1968) и разложением (35). Тогда из формул (38)–(40) следует, что в общем случае дальности ρ_i^* определятся с ошибками второго порядка. Таким образом, расхождение дальностей для движения по промежуточной орбите *P3* и реального движения в любой из опорных моментов времени t_i прямо пропорционально квадрату опорного интервала времени, т.е.

$$\left|\rho_i^* - \rho_i\right| \sim (t_3 - t_1)^2; \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{41}$$

Дальности $\rho_i \equiv \rho(t_i)$ для реального движения удовлетворяют нелинейным уравнениям (35). Из сравнения формул (11) и (12) с учетом (41) получим

$$\left|t_i^* - t_i\right| = \frac{1}{c}\left|\rho_i^* - \rho_i\right| \sim (t_3 - t_1)^2, \tag{42}$$

$$\left|\mathbf{x}^*(t_i^*) - \mathbf{x}(t_i)\right| = \left|\rho_i^* - \rho_i\right| \sim (t_3 - t_1)^2; \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{43}$$

Для промежуточной орбиты *P3* вместо (32)–(34) следует записать

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_2^* = &-\frac{t_{23}^*}{t_{12}^* t_{13}^*}\mathbf{x}_1^* + \frac{t_{23}^* - t_{12}^*}{t_{12}^* t_{23}^*}\mathbf{x}_2^* + \\ &+ \frac{t_{12}^*}{t_{23}^* t_{13}^*}\mathbf{x}_3^* - \frac{t_{12}^* t_{23}^*}{6 t_{13}^*}(\mathbf{G}_3^* - \mathbf{G}_1^*),\end{aligned} \tag{44}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_2^* = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\mathbf{G}_1^* + \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\mathbf{G}_3^*, \tag{45}$$

$$\mathbf{x}_2^{*(3)} = \frac{1}{t_{13}^*}(\mathbf{G}_3^* - \mathbf{G}_1^*). \tag{46}$$

Исключение остаточного члена $\mathbf{O}(\varepsilon^4)$ из (35) означает, что $\mathbf{x}_2^{*(k)} = 0$ при $k = 4,\ 5,\ \ldots$.

Согласно построению формула (45) точна до членов порядка ε включительно, если ее правая часть имеет ошибки не ниже 2-го порядка. Разложим правые части равенств (45) и (32) в ряды по степеням t_{12}^*, t_{23}^* и t_{12}, t_{23} соответственно, до членов первого порядка малости включительно. Выполнив простые преобразования и вычитая из первого полученного равенства второе, запишем

$$\ddot{\mathbf{x}}_2^* - \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2^* - \mathbf{G}_2 + \mathbf{O}(\varepsilon^2). \tag{47}$$

С учетом (1) имеем

$$\mathbf{G}_i^* - \mathbf{G}_i = -\frac{K}{r_i^{*3}}\mathbf{x}_i^* + \frac{K}{r_i^3}\mathbf{x}_i + \mathbf{F}_i^* - \mathbf{F}_i; \ \ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{48}$$

Входящие сюда векторы возмущающих ускорений представим в традиционной форме

$$\mathbf{F}_i = -\sum_{l=1}^{p} k^2 m_l \left[\frac{\Delta_l(t_i)}{\left|\Delta_l(t_i)\right|^3} + \frac{\mathbf{X}_l(t_i)}{\left|\mathbf{X}_l(t_i)\right|^3}\right], \tag{49}$$

$$\mathbf{F}_i^* = -\sum_{l=1}^{p} k^2 m_l \left[\frac{\Delta_l^*(t_i^*)}{\left|\Delta_l^*(t_i^*)\right|^3} + \frac{\mathbf{X}_l(t_i^*)}{\left|\mathbf{X}_l(t_i^*)\right|^3}\right], \tag{50}$$

где p — число возмущающих тел, m_l — масса l-го возмущающего тела, $\mathbf{X}_l(t_i)$ и $\mathbf{X}_l(t_i^*)$ — векторы положения тела с массой m_l относительно основного тела в моменты t_i и t_i^* соответственно, $\Delta_l(t_i) = \mathbf{x}(t_i) - \mathbf{X}_l(t_i)$, $\Delta_l^*(t_i^*) = \mathbf{x}^*(t_i^*) - \mathbf{X}_l(t_i^*)$.

Введем обозначение: $\boldsymbol{\delta}_i \equiv \mathbf{x}^*(t_i^*) - \mathbf{x}(t_i)$. Воспользовавшись приемом, указанным Roy (2005), сумму первых двух векторов в правой части (48) можно записать в виде

$$\frac{K}{r_i^3}\mathbf{x}_i - \frac{K}{r_i^{*3}}\mathbf{x}_i^* = \frac{K}{r_i^3}\left(Q_i\mathbf{x}_i^* - \boldsymbol{\delta}_i\right),$$

где

$$Q_i = \left(\frac{r_i^2 + r_i r_i^* + r_i^{*2}}{r_i + r_i^*}\right)\left[\frac{\boldsymbol{\delta}_i^2 + 2(\boldsymbol{\delta}_i \cdot \mathbf{x}_i)}{r_i^{*3}}\right].$$

Отсюда с учетом (43) следует

$$\left|\frac{K}{r_i^3}\mathbf{x}_i - \frac{K}{r_i^{*3}}\mathbf{x}_i^*\right| \sim |\boldsymbol{\delta}_i| \sim (t_3 - t_1)^2. \tag{51}$$

Аналогично можно показать, что

$$\left|\mathbf{F}_i^* - \mathbf{F}_i\right| \sim (t_3 - t_1)^2. \tag{52}$$

Тогда из (48) с учетом (51) и (52) получим

$$\left|\mathbf{G}_i^* - \mathbf{G}_i\right| \sim (t_3 - t_1)^2;\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{53}$$

Таким образом, из (47) в силу (53) будем иметь

$$\left|\ddot{\mathbf{x}}^*(t_2^*) - \mathbf{G}(t_2)\right| \sim (t_3 - t_1)^2. \tag{54}$$

Вычитая из формулы (46) формулу (33) и выполняя ряд простых преобразований, мы можем записать

$$\mathbf{x}_2^{*(3)} - \dot{\mathbf{G}}_2 = \frac{1}{t_{13}^*}\left[(\mathbf{G}_3^* - \mathbf{G}_3) - (\mathbf{G}_1^* - \mathbf{G}_1)\right] + \\ + \frac{t_{13} - t_{13}^*}{t_{13}t_{13}^*}(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1) + \mathbf{O}(\varepsilon \mid \varepsilon^2).$$

Отсюда, учитывая (42), (53) и то, что вектор ($\mathbf{G}_3$–$\mathbf{G}_1$) имеет первый порядок малости, в общем случае получим

$$\left|\mathbf{x}^{*(3)}(t_2^*) - \dot{\mathbf{G}}(t_2)\right| \sim t_3 - t_1. \tag{55}$$

В частном случае, когда $t_{12} = t_{23}$, вместо (55) справедлива зависимость $\left|\mathbf{x}^{*(3)}(t_2^*) - \dot{\mathbf{G}}(t_2)\right| \sim (t_3 - t_1)^2$.

Осталось рассмотреть формулу (44). Согласно построению в общем случае она точна до членов порядка ε^2 включительно, если ее правая часть имеет ошибки не ниже 3-го порядка. Однако можно убедиться в том, что

$$\left|\dot{\mathbf{x}}^*(t_2^*) - \dot{\mathbf{x}}(t_2)\right| \sim (t_3 - t_1)^2. \tag{56}$$

Действительно, используя (42), (43) и разложения в ряды, можно записать

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{x}}_2 t_{12} + \mathbf{O}(\varepsilon^2),\ \ \mathbf{x}_3^* = \mathbf{x}_2 + \dot{\mathbf{x}}_2 t_{23} + \mathbf{O}(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_2 + \mathbf{O}(\varepsilon^2),\ \ t_{12} = t_{12}^* + \mathrm{O}(\varepsilon^3),\ \ t_{23} = t_{23}^* + \mathrm{O}(\varepsilon^3).$$

С помощью этих подстановок из (44) после несложных преобразований, учитывая, что последний член в правой части (44) находится с ошибками 3-го порядка, получим (56).

Обратимся теперь к промежуточной орбите *S3*. Анализ этой орбиты удобно провести в сравнении с орбитой *P3*. Фундаментальные уравнения (13) с учетом (1), а также (14) и (15), перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\hat{C}_1^*\rho_1^*\mathbf{L}_1 - \rho_2^*\mathbf{L}_2 + \hat{C}_3^*\rho_3^*\mathbf{L}_3 = \\ &= \hat{C}_1^*\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + \hat{C}_3^*\mathbf{S}_3 + \hat{\mathbf{E}}^*, \end{aligned} \tag{57}$$

где

$$\hat{C}_1^* = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\left(1 + \hat{T}_1^* b_1^*\right),\ \ \hat{C}_3^* = \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\left(1 + \hat{T}_3^* b_3^*\right),$$

$$\hat{T}_1^* = \lambda_1\left(d_1\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{t_{13}^*}{t_{23}^*} - 1\right),\ \ \hat{T}_3^* = \lambda_3\left(d_3\frac{\mu_3}{\mu_2}\frac{t_{13}^*}{t_{12}^*} - 1\right),$$

$$b_j^* = K\big/r_j^{*3},\ \ r_j^* = \left|\mathbf{x}_j^*\right|;\ \ j = 1,\ 3,$$

$$\hat{\mathbf{E}}^* = \frac{t_{23}^*}{t_{13}^*}\hat{T}_1^*\mathbf{F}_1^* + \frac{t_{12}^*}{t_{13}^*}\hat{T}_3^*\mathbf{F}_3^*.$$

Отличие формул (36) и (57) заключается только в выражениях для T_j^* и $\hat{T}_j^*$. Используя известные разложения отношений площадей треугольников применительно к d_1 и d_3 по степеням интервалов фиктивного времени (18), можно показать, что

$$\begin{aligned} \hat{T}_1^* &= \lambda_1\left[\frac{\beta_2}{6}\left(\theta_{13}^2 - \theta_{23}^2\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^3)\right], \\ \hat{T}_3^* &= \lambda_3\left[\frac{\beta_2}{6}\left(\theta_{13}^2 - \theta_{12}^2\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^3)\right], \end{aligned} \tag{58}$$

где $\beta_2 = \mu_1/|\mathbf{u}_2|^3$. Теперь видно, что T_j^* и $\hat{T}_j^*$ являются величинами одинакового порядка малости.

Таким образом, из сравнения соотношений (36) и (57) с учетом (37) и (58) можно сделать вывод о том, что в общем случае возмущенного движения (36) и (57) есть формулы одного и того же порядка относительно ε. Следовательно, для промежуточной орбиты *S3*, определяемой согласно описанной в S03b итерационной процедуре, справедливы пропорциональные зависимости (42), (43), (54)–(56).

Однако, в отличие от (36), уравнения (57) построены по аналогии с фундаментальными уравнениями метода Гаусса, в котором отношения площадей треугольников, заключенных между опорными векторами положения, вычисляются точно. Речь идет о величинах d_1 и d_3, которые определяются с помощью формул (16).

Очевидно, что метод построения орбиты *S3* позволяет определить скорости $\dot{\mathbf{x}}_i^*$ во *все* опорные моменты времени, а не только для t_2^*, с точностью того же порядка, с которой определены положения $\mathbf{x}_i^*$, т.е.

$$\left|\dot{\mathbf{x}}^*(t_i^*) - \dot{\mathbf{x}}(t_i)\right| \sim (t_3 - t_1)^2;\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Также во *все* опорные моменты времени справедливы зависимости, аналогичные (54) и (55), т.е.

$$\begin{gathered}\left|\ddot{\mathbf{x}}^*(t_i^*) - \mathbf{G}(t_i)\right| \sim (t_3 - t_1)^2,\\ \left|\mathbf{x}^{*(3)}(t_i^*) - \dot{\mathbf{G}}(t_i)\right| \sim t_3 - t_1;\ i = 1,2,3.\end{gathered} \tag{59}$$

Для $\mathbf{x}^{*(k)}(t_i^*) = \mathbf{q}^{*(k)}(t_i^*)$ $(k = 4, 5, \ldots)$ имеет место $\left|\mathbf{x}^{*(k)}(t_i^*) - \mathbf{G}^{(k-2)}(t_i)\right| \sim (t_3 - t_1)^0$.

Таким образом, предельные значения параметров орбиты *S3* при стремящемся к нулю опорном временном интервале (при $t_3 \to t_1$ или $t_1 \to t_3$) задают сверхоскулирующую орбиту с касанием третьего порядка к реальной траектории. Этот вывод также следует, если опираться только на законы (42), (43), (59) и доказанное Утверждение 1. Причем согласно построению полученная орбита принадлежит к тому же типу, что и орбита *S2*.

Утверждение доказано.

Замечание 6. По формулам, задающим орбиту *P3*, невозмущенная кеплеровская орбита будет определяться с той же точностью, что и возмущенная. Что же касается орбиты *S3*, то согласно ее построению отклонения величин μ_i, λ_j, d_j, θ_{12}, θ_{23}, и θ_{13} от величин K, r_j^3/K, $\widehat{C}_j^*$, t_{12}, t_{23} и t_{13} соответственно могут быть вызваны только влиянием возмущающих сил. При отсутствии возмущений, т.е. при $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$, реальная орбита (в данном случае это кеплеровская орбита) методом, изложенным в S03b, определяется точно. Следовательно, отклонения параметров промежуточной орбиты *S3* от параметров реальной орбиты в общем случае пропорциональны не только квадрату опорного интервала $(t_3 - t_1)$, но и малому возмущающему параметру. Поэтому следует ожидать, что абсолютные значения ошибок определения орбиты при использовании *S3* в общем случае окажутся меньше, чем при использовании *P3*. В следующем разделе мы найдем этому подтверждение.

Замечание 7. Очевидно, что неучет возмущающих членов в формулах для промежуточных орбит *P3* и *S3* приводит в общем случае возмущенного движения к построению кеплеровских орбит, получаемых в рамках традиционного подхода. Для таких орбит с уменьшением опорного интервала $(t_3 - t_1)$ величины $\left|t_i^* - t_i\right|$, $\left|\mathbf{x}^*(t_i^*) - \mathbf{x}(t_i)\right|$ и $\left|\dot{\mathbf{x}}^*(t_i^*) - \dot{\mathbf{x}}(t_i)\right|$ остаются отличными от нуля постоянными [пропорциональны величине $(t_3 - t_1)^0$]; $i = 1,\ 2,\ 3$.

Замечание 8. Пропорциональная зависимость (52) может иметь место и для векторов возмущающих ускорений более общего вида, чем (49) и (50).

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для численной проверки полученных теоретических результатов нами были разработаны программы, реализующие методы построения промежуточных орбит *S2*, *S3* и *P3* при машинных расчетах. Для сравнения использовались также программы вычисления невозмущенных кеплеровских орбит классическими методами Гаусса, в основе которых лежит теория отношения площади сектора к площади треугольника: по двум пространственным положениям и по трем наблюдениям. Обозначим соответствующие методам Гаусса орбиты через *G2* и *G3*. Цифры в приведенных обозначениях орбит указывают число используемых положений (пространственных или угловых). Все программы составлены на алгоритмическом языке ФОРТРАН-95.

Ранее (Schäfer, 2002; S03a, S03b) на примерах определения орбиты малой планеты Икар (1566 Icarus) были выполнены вычисления по оценке ошибок методов построения орбит *G2*, *G3*, *S2* и *S3* в зависимости от длины опорного интервала времени. Эти вычисления показывают, что сформулированные и доказанные в предыдущих разделах утверждения, а также Замечания 4 и 7, находят практическое подтверждение.

В данной работе мы сочли необходимым рассмотреть еще несколько примеров с более подробным анализом. Речь идет о нахождении орбиты астероида Апофис (99942 Apophis). Движение астероида рассматривалось в гелиоцентрической системе координат, отнесенной к экватору и равноденствию стандартной эпохи J2000.0. Вычисления выполнялись на ПК Intel® Core™2 Duo CPU/3100 МГц с машинной точностью 2.22×10^{-16}.

Как и в предыдущих экспериментах (Schäfer, 2002; S03a, S03b), была поставлена задача оценить погрешности методов в зависимости от длины опорного интервала $(t_3 - t_1)$. Для решения этой задачи использовалась номинальная траектория Апофиса, полученная численным интегрированием дифференциальных уравнений движения астероида. Интегрирование выполнялось методом Эверхарта 15-го порядка. Начальная система оску-

Таблица 1. Погрешности методов определения орбит *G2* и *S2* на примерах построения орбиты Апофиса по двум гелиоцентрическим векторам положения

$t_3 - t_1$, сут	$\vartheta_3 - \vartheta_1$, град	*G2*			*S2*					
		Δv_1, а. е./сут	N_v	Δw_1, а. е./сут^2	Δv_1, а. е./сут	N_v	Δw_1, а. е./сут^2	$\Delta w_1'$, а. е./сут^3	$N_{w'}$	$\Delta w_1''$, а. е./сут^4
0.0625	0.063	2.9×10^{-9}		9.4×10^{-8}	4.1×10^{-14}		0.0	1.5×10^{-11}		4.9×10^{-10}
0.125	0.126	5.9×10^{-9}	2.0	9.4×10^{-8}	2.9×10^{-14}	–	0.0	3.1×10^{-11}	2.0	4.9×10^{-10}
0.25	0.252	1.2×10^{-8}	2.0	9.4×10^{-8}	3.1×10^{-13}	10.6	0.0	6.2×10^{-11}	2.0	4.9×10^{-10}
0.5	0.504	2.3×10^{-8}	2.0	9.4×10^{-8}	2.6×10^{-12}	8.2	0.0	1.2×10^{-10}	2.0	4.9×10^{-10}
1	1.008	4.7×10^{-8}	2.0	9.4×10^{-8}	2.1×10^{-11}	8.0	0.0	2.5×10^{-10}	2.0	4.9×10^{-10}
2	2.017	9.4×10^{-8}	2.0	9.3×10^{-8}	1.6×10^{-10}	8.0	0.0	4.9×10^{-10}	2.0	4.9×10^{-10}
4	4.034	1.9×10^{-7}	2.0	9.2×10^{-8}	1.3×10^{-9}	7.9	0.0	9.7×10^{-10}	2.0	4.8×10^{-10}
8	8.069	3.7×10^{-7}	2.0	8.8×10^{-8}	1.0×10^{-8}	7.8	0.0	1.8×10^{-9}	1.9	4.6×10^{-10}
16	16.154	7.0×10^{-7}	1.9	7.8×10^{-8}	7.0×10^{-8}	7.0	0.0	3.0×10^{-9}	1.7	4.1×10^{-10}

лирующих элементов орбиты астероида взята из каталога Боуэлла (E.Bowell, ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb/dat) на дату 2011 февраль 08.0 TDT. При построении номинальной траектории учитывались возмущения от восьми больших планет, Плутона и Луны на основе эфемерид DE405/LE405. Ошибки численного интегрирования не превышают: в векторе положения – 10^{-12} а. е., в векторе скорости – 10^{-14} а. е./сут. Положения и скорости на номинальной траектории принимаются точными.

На номинальной траектории мы выбрали совокупность гелиоцентрических положений $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, и $\mathbf{x}_3$, в эпохи t_1, t_2 и t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$) следующим образом: положения $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_3$ соответствуют эпохам, равноотстоящим от центральной эпохи t_2 = 2004 декабрь 20.0 TDT (JD 2453359.5). Эпоха t_2 выбрана в непосредственной близости к моменту наиболее тесного прохождения Апофиса относительно Земли в пределах интервала его наблюдений, имеющегося на дату данной публикации. Момент сближения и соответствующее минимальное геоцентрическое расстояние следующие: t = 2004 декабрь 21.39 TDT, $\rho_{\min} = 0.09639$ а. е. Значения гелиоцентрического и геоцентрического расстояний для астероида на эпоху t_2 таковы: $r_2 = 0.95984$ а. е., $\rho_2 = 0.09659$ а. е. Мы вычислили геоцентрические угловые координаты α_i° (прямое восхождение), δ_i° (склонение) и моменты времени t_i°, соответствующие гелиоцентрическим положениям $\mathbf{x}_i$ на номинальной траектории в выбранные моменты времени t_i (i = 1, 2, 3). Полученные величины использовались в качестве исходных данных для работы программ.

Результаты вычислений приводятся в табл. 1–3. В таблицах приняты обозначения: ϑ_i – значение истинной аномалии в момент t_i; $\Delta t_i = t_i^* - t_i$, $\Delta r_i = \left|\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_i\right|$, $\Delta v_i = \left|\dot{\mathbf{x}}_i^* - \dot{\mathbf{x}}_i\right|$, $\Delta w_i = \left|\ddot{\mathbf{x}}_i^* - \mathbf{G}_i\right|$, $\Delta w_i' = \left|\mathbf{x}_i^{*(3)} - \dot{\mathbf{G}}_i\right|$, $\Delta w_i'' = \left|\mathbf{x}_i^{*(4)} - \ddot{\mathbf{G}}_i\right|$ – ошибки в моменте времени, векторах положения, скорости, ускорения и производных 1-го и 2-го порядков от вектора ускорения, соответствующие эпохе t_i; N_t, N_r, N_v, N_w, $N_{w'}$ – отношения значений ошибок в моменте времени, векторах положения, скорости, ускорения и производной 1-го порядка от вектора ускорения, приведенных в данной строке таблицы, к значениям этих же ошибок, приведенных в предыдущей строке таблицы. Здесь $\mathbf{x}_i$, $\dot{\mathbf{x}}_i$, $\mathbf{G}_i$, $\dot{\mathbf{G}}_i$, $\ddot{\mathbf{G}}_i$ – векторы положения, скорости, ускорения и производных 1-го и 2-го порядков от вектора ускорения на номинальной траектории в момент t_i. Векторы $\mathbf{x}_i^*$, $\dot{\mathbf{x}}_i^*$, $\ddot{\mathbf{x}}_i^*$, $\mathbf{x}_i^{*(3)}$, $\mathbf{x}_i^{*(4)}$ на построенной орбите вычислены на момент t_i^* (для орбит *G2* и *S2* $t_i^* = t_i$). При $\left|\Delta t_i\right| < 2.22 \times 10^{-10}$ сут мы получили нулевые значения для Δt_i, поскольку в арифметике, которую мы использовали, полная юлианская дата определялась числом с 9-значной мантиссой. Длина опорного интервала ($t_3 - t_1$) уменьшалась в два раза до тех пор, пока ограничение на порядки чисел в компьютере не приводило к заметному ухудшению точности вычислений. Прочерк в таблицах означает, что отношение значений ошибок методов в данном случае не могло быть вычислено корректно из-за того, что ошибки округления оказались

Таблица 2. Погрешности методов определения орбит *G3* и *P3* на примерах построения орбиты Апофиса по трем геоцентрическим угловым положениям

$t_3 - t_1$, сут	*G3*				*P3*			
	Δt_1, сут	Δr_1, а. е.	Δv_1, а. е./сут	Δw_1, а. е./сут^2	Δt_2, сут	Δr_2, а. е.	Δv_2, а. е./сут	Δw_2, а. е./сут^2
0.0625	-7.8×10^{-7}	1.3×10^{-4}	6.6×10^{-6}	4.8×10^{-8}	-1.3×10^{-8}	2.3×10^{-6}	1.2×10^{-7}	8.6×10^{-10}
0.125	-7.8×10^{-7}	1.3×10^{-4}	6.7×10^{-6}	4.8×10^{-8}	-6.4×10^{-8}	1.1×10^{-5}	5.5×10^{-7}	4.1×10^{-9}
0.25	-7.8×10^{-7}	1.3×10^{-4}	6.7×10^{-6}	4.8×10^{-8}	-2.6×10^{-7}	4.4×10^{-5}	2.2×10^{-6}	1.6×10^{-8}
0.5	-7.8×10^{-7}	1.3×10^{-4}	6.7×10^{-6}	4.8×10^{-8}	-1.0×10^{-6}	1.8×10^{-4}	8.8×10^{-6}	6.5×10^{-8}
1	-7.8×10^{-7}	1.4×10^{-4}	6.7×10^{-6}	4.9×10^{-8}	-4.1×10^{-6}	7.2×10^{-4}	3.5×10^{-5}	2.6×10^{-7}
2	-7.9×10^{-7}	1.4×10^{-4}	6.7×10^{-6}	5.0×10^{-8}	-1.7×10^{-5}	2.9×10^{-3}	1.5×10^{-4}	1.1×10^{-6}
4	-8.0×10^{-7}	1.4×10^{-4}	6.9×10^{-6}	5.2×10^{-8}	-7.7×10^{-5}	1.3×10^{-2}	6.6×10^{-4}	4.9×10^{-6}
8	-8.6×10^{-7}	1.5×10^{-4}	7.3×10^{-6}	5.9×10^{-8}	-5.9×10^{-4}	1.0×10^{-1}	5.0×10^{-3}	3.8×10^{-5}
16	-1.1×10^{-6}	2.0×10^{-4}	9.4×10^{-6}	9.0×10^{-8}	Метод не сходится			

Таблица 3. Погрешности метода определения орбиты *S3* на примерах построения орбиты Апофиса по трем геоцентрическим угловым положениям

$t_3 - t_1$, сут	*S3*										
	Δt_1, сут	N_t	Δr_1, а. е.	N_r	Δv_1, а. е./сут	N_v	Δw_1, а. е./сут^2	N_w	$\Delta w_1'$, а. е./сут^3	$N_{w'}$	$\Delta w_1''$, а. е./сут^4
0.0625	$+2.3 \times 10^{-9}$		4.3×10^{-7}		2.1×10^{-8}		1.5×10^{-10}		1.9×10^{-11}		4.9×10^{-10}
0.125	-4.7×10^{-10}	–	4.2×10^{-8}	–	2.1×10^{-9}	–	1.5×10^{-11}	–	3.1×10^{-11}	1.6	4.9×10^{-10}
0.25	0.0	–	3.8×10^{-8}	–	1.9×10^{-9}	–	1.3×10^{-11}	–	6.2×10^{-11}	2.0	4.9×10^{-10}
0.5	-1.4×10^{-9}	–	2.6×10^{-7}	7.0	1.3×10^{-8}	7.0	9.4×10^{-11}	7.0	1.2×10^{-10}	2.0	4.9×10^{-10}
1	-6.0×10^{-9}	4.3	1.1×10^{-6}	4.1	5.3×10^{-8}	4.0	3.8×10^{-10}	4.1	2.4×10^{-10}	2.0	4.9×10^{-10}
2	-2.5×10^{-8}	4.1	4.3×10^{-6}	4.0	2.1×10^{-7}	4.0	1.6×10^{-9}	4.1	4.8×10^{-10}	2.0	4.9×10^{-10}
4	-1.0×10^{-7}	4.0	1.7×10^{-5}	4.0	8.6×10^{-7}	4.0	6.5×10^{-9}	4.2	9.5×10^{-10}	2.0	4.9×10^{-10}
8	-4.1×10^{-7}	4.1	7.2×10^{-5}	4.1	3.5×10^{-6}	4.1	2.9×10^{-8}	4.4	2.1×10^{-9}	2.2	4.8×10^{-10}
16	-1.9×10^{-6}	4.7	3.4×10^{-4}	4.7	1.6×10^{-5}	4.5	1.5×10^{-7}	5.4	7.9×10^{-9}	3.8	5.3×10^{-10}

сопоставимыми по величине с методическими погрешностями.

Полученные результаты дают наглядное представление о величине погрешности методов и об интервалах времени, на которых промежуточные орбиты *S2* и *S3* лучше представляют реальное движение, чем кеплеровские орбиты *G2* и *G3*. Сокращение опорного интервала $(t_3 - t_1)$ (при малых его размерах) в два раза приводит либо к уменьшению погрешностей сравниваемых методов приблизительно в 2, 2^2 и 2^3 раз, либо к сохранению погрешностей почти неизменными, что полностью согласуется с Утверждениями 1, 2 и Замечаниями 4, 7. Поскольку степень аппроксимации реального движения промежуточными орбитами *S2* и *S3* на два порядка выше, чем степень аппроксимации кеплеровскими орбитами *G2* и *G3*, то это приводит к тому, что с уменьшением опорной дуги траектории точность аппроксимации реального движения орбитами *S2* и *S3* становится существенно (по данным первых табличных строк на 3–5 порядков) выше по сравнению с точностью аппроксимации орбитами *G2* и *G3*.

Несмотря на то, что скорость сходимости метода построения орбиты *P3* к точному решению такая же, как и в методе построения орбиты *S3*, первый значительно уступает в точности второму для всех рассмотренных интервалов времени (приблизительно на 3 порядка). Из табл. 2 видно, что метод вычисления орбиты *P3* для интервалов $(t_3 - t_1) \gtrsim 0.5$ сут проигрывает по точности и методу нахождения кеплеровской орбиты *G3*. А при $(t_3 - t_1) \gtrsim 8$ сут его методические ошибки сравнимы по величине с оцениваемыми параметрами и он становится неприменимым. Основное объяснение этому состоит в том, что формулы построения орбиты *P3* опираются на разложения решений в ряды Тейлора, в которых отброшены члены четвертого и более высоких порядков. Остальные же из сравниваемых методов определения орбиты по трем наблюдениям, и классический метод Гаусса и предложенный в S03b метод, основаны на замкнутых (без разложения в ряды) выражениях, которые при отсутствии возмущений дают точную орбиту (см. Замечание 6).

Кроме рассмотренных примеров с равноотстоящими моментами времени ($t_{12} = t_{23}$) нами выполнены также численные эксперименты с набором положений Апофиса, соответствующим эпохам t_1 и t_3 таким, что вышеуказанный момент t_2 делит интервал ($t_3 - t_1$) на неравные части в отношении $t_{12} : t_{23} = 2 : 1$. Выбранные интервалы следующие: $t_3 - t_1 = 0.09375, 0.1875, 0.375, 0.75, 1.5, 3, 6, 12$. По результатам этих экспериментов справедливость Утверждения 2 и Замечания 7 также полностью подтверждается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрены разработанные ранее первым автором методы определения орбиты по двум векторам положения и трем наблюдениям, позволяющие учесть основную часть возмущений в движении исследуемого малого небесного тела. Выполнено теоретическое исследование вопроса о сходимости решений, получаемых с помощью этих методов, к точным решениям при сокращении опорного интервала времени. Результаты исследования сформулированы в виде двух утверждений. Справедливость полученных законов изменения погрешностей методов подтверждена ранее рассмотренными и новыми численными примерами.

Исследование первого автора в рамках данной работы выполнено по заданию № 2014/223 (код проекта 1567) Министерства образования и науки Российской Федерации. Исследование второго автора выполнено по заданию № 645 (код проекта 4.1349.2014) Министерства образования и науки Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.

Шефер В.А. Сверхоскулирующие промежуточные орбиты для аппроксимации возмущенного движения. Касание второго порядка // Астрон. журн. 1998а. Т. 75. № 6. С. 945–953. (*Shefer V.A.* Superosculating intermediate orbits for the approximation of perturbed motion. Second-order tangency // Astron. Rep. 1998a. V. 42. № 6. P. 837–844.)

Шефер В.А. Сверхоскулирующие промежуточные орбиты для аппроксимации возмущенного движения. Касание третьего порядка // Астрон. журн. 1998б. Т. 75. № 6. С. 954–960. (*Shefer V.A.* Superosculating intermediate orbits for the approximation of perturbed motion. Third-order tangency // Astron. Rep. 1998b. V. 42. № 6. P. 845–854.)

Шефер В.А. Определение промежуточной возмущенной орбиты по двум векторам положения // Астрон. вестн. 2003а. Т. 37. № 3. С. 265–272. (*Shefer V.A.* The determination of an intermediate perturbed orbit from two position vectors // Solar Syst. Res. 2003a. V. 37. № 3. P. 243–250.)

Шефер В.А. Метод определения промежуточной орбиты по трем положениям малого тела на небесной сфере // Астрон. вестн. 2003б. Т. 37. № 4. С. 356–363. (*Shefer V.A.* A Method for the determination of an intermediate orbit from three positions of the small body on the celestial sphere // Solar Syst. Res. 2003b. V. 37. № 4. P. 326–332.)

Escobal P.R. Methods of Orbit Determination. N.Y.–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1965. 463 p.

Roy A.E. Orbital Motion. Bristol–Philadelphia: IOP Publishing Ltd., 2005. 526 p.

Schäfer W.A. Determination of perturbed orbits from two positions and three observations // Proc. Conf. “Asteroids, Comets, Meteors (ACM 2002)”, 29 July–2 August 2002, Berlin, Germany (ESA SP-500) / Ed. Warmbein B. Noordwijk: ESA Publ. Div., 2002. P. 339–343.

Shefer V.A. Osculating and superosculating intermediate orbits and their applications // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2002a. V. 82. № 1. P. 19–59.

Shefer V.A. Osculating and superosculating intermediate orbits: theory and applications // Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy / Ed. Omarov T.B. N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2002b. P. 173–219.