

**Кемеровский государственный университет
Томский государственный университет
Кемеровский научный центр Сибирского отделения РАН
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске**

*Посвящается 65-летию Победы
в Великой Отечественной войне*



**НАУЧНОЕ
ТВОРЧЕСТВО МОЛОДЕЖИ**

**Материалы XIV Всероссийской
научно-практической конференции
15–16 апреля 2010 г.**

Часть 1

Издательство Томского университета

2010

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

А. А. Назаров, И. А. Семенова

Томский государственный университет

Рассмотрим RQ-систему (Retrial Queue), то есть однолинейную систему массового обслуживания с источником повторных вызовов, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Считается, что требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ . Если прибор занят, то поступившая заявка переходит в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его на случайное время обслуживания, если же он занят, то заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки случайной продолжительности [4].

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $l(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$l(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим

$$P\{l(t) = l, i(t) = i\} = P(l, i, t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии l и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Процесс $\{l(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(l, i, t)$ состояний $\{l, i\}$ рассматриваемой RQ-системы составим дифференциальные уравнения Колмогорова, по формуле полной вероятности записав равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P(0, i, t) + \mu P(1, i, t), \\ \frac{\partial P(1, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)P(1, i, t) + \lambda P(0, i, t) + \sigma(i + 1)P(0, i + 1, t) + \lambda P(1, i - 1, t). \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) получим систему уравнений, определяющих характеристические функции [1]

$$\begin{cases} -\sigma j \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} = -\lambda H(0, u) + \mu H(1, u), \\ \sigma j e^{-ju} \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} = \lambda H(0, u) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu)H(1, u), \end{cases} \quad (2)$$

решение $\{H(0,u), H(1,u)\}$ которой удовлетворяет условию нормировки

$$H(0,0) + H(1,0) = 1. \quad (3)$$

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой задержки в ИПВ, то есть при $\sigma \rightarrow 0$.

Метод асимптотического анализа в матричном виде

Для простоты и компактной записи вычислений дальнейшие исследования будем проводить в матричном виде [2].

Обозначив вектор-строку $H(u) = \{H(0,u), H(1,u)\}$, систему (4) перепишем в матричном виде

$$\sigma j \frac{\partial H(u)}{\partial u} A(ju) = H(u)B(ju), \quad (5)$$

$$H(0)E = 1, \quad (6)$$

где равенство (6) – условие нормировки, а матрицы $A(ju)$ и $B(ju)$ имеют вид

$$A(ju) = \begin{pmatrix} -1 & e^{-ju} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} A_v,$$

$$B(ju) = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & \lambda(e^{-ju} - 1) - \mu \end{pmatrix} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} B_v.$$

Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка обозначим $\sigma = \varepsilon$ и в системе (5–6) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad H(u) = F_1(w, \varepsilon). \quad (7)$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$j \frac{\partial F_1(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_1(w, \varepsilon)B(j\varepsilon w), \quad (8)$$

а равенство (6) запишем следующим образом:

$$F_1(0, \varepsilon)E = 1. \quad (9)$$

В задаче (8)–(9) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим систему [3]

$$\begin{cases} j \frac{\partial F_1(w)}{\partial w} A_0 = F_1(w)B_0, \\ F_1(0)E = 1, \end{cases}$$

решение $F_1(w)$ которой запишем в виде произведения

$$F_1(w) = R\Phi_1(w) = R \cdot \exp\{jw\kappa_1\} \quad (10)$$

вектора R , определяемого системой

$$\begin{cases} R(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0, \\ RE = 1 \end{cases} \quad (11)$$

и скалярной функцией $\Phi_1(w)$, вид которой определен равенством (10). Значения величины κ_1 определим следующим образом:

Сложим все уравнения системы (8), умножив это равенство справа на единичный вектор-столбец E , и выполним разложение матриц, получим

$$j \frac{\partial F_1(w, \varepsilon)}{\partial w} j \varepsilon w A_1 E = F_1(w, \varepsilon) j \varepsilon w B_1 E + O(\varepsilon^2),$$

где, выполнив предельный переход, получим нелинейное скалярное уравнение относительно величины κ_1

$$R(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0. \quad (12)$$

Откуда, выполнив обратные замены, получим функцию, которую будем называть *асимптотикой первого порядка* характеристической функции $h_1(u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов [3]

$$h_1(u) = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\sigma}\right\}. \quad (13)$$

Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (5) выполним замены

$$H(u) = \exp\left\{j \frac{u}{\sigma} \kappa_1\right\} H_2(u), \quad \sigma = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u) = F_2(w, \varepsilon).$$

Получим задачу

$$j \varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j \varepsilon w) = F_2(w, \varepsilon) \{B(j \varepsilon w) + \kappa_1 A(j \varepsilon w)\}, \quad (14)$$

$$F_2(0, \varepsilon)E = 1. \quad (15)$$

Далее, выполняя аналогичные действия, что и в первой асимптотике, получим асимптотику второго порядка характеристической функции $h_2(u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов

$$h_2(u) = \exp\left\{ju \frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\sigma}\right\},$$

где

$$\kappa_2 = \frac{-g_1(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \frac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E}{g(B_1 + \kappa_1 A_1)E + R A_1 E}, \quad (16)$$

А векторы g и g_1 определяются неоднородными системами линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} g(B_0 + \kappa_1 A_0) + R A_0 &= 0, \\ g_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1) &= 0. \end{aligned}$$

Асимптотика $(n+1)$ -го порядка

Для нахождения асимптотики произвольного порядка будем применять метод математической индукции.

Пусть вектор – функция $H_n(u)$ ($n \geq 3$) удовлетворяет уравнению

$$\sigma j \frac{\partial H_n(u)}{\partial u} A(ju) = H_n(u) \left\{ B(ju) + \kappa_1 A(ju) + \sum_{v=1}^{n-2} \frac{(ju)^v}{v!} \kappa_{v+1} A(ju) \right\}, \quad (17)$$

в которых известны все κ_v при $v=1,2,\dots,n-1$.

Пусть применяя уравнение (17), найдено значение величины κ_n , тогда в (17) выполним замены

$$H_n(u) = \exp\left\{ \frac{(ju)^n}{n!} \frac{\kappa_n}{\sigma} \right\} H_{n+1}(u), \quad \sigma = \varepsilon^{n+1}, \quad u = \varepsilon w, \quad H_{n+1}(u) = F_{n+1}(w, \varepsilon).$$

Получим задачу

$$j\varepsilon^n \frac{\partial F_{n+1}(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_{n+1}(w, \varepsilon) \left\{ B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{(j\varepsilon w)^v}{v!} \kappa_{v+1} A(j\varepsilon w) \right\} \quad (18)$$

$$F_{n+1}(0, \varepsilon) E = 1. \quad (19)$$

Далее, выполняя аналогичные действия, что и в первой, и во второй асимптотиках, получим асимптотику $(n+1)$ -го порядка характеристической функции $h_{n+1}(u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов [3]

$$h_{n+1}(u) = \exp\left\{ \sum_{v=1}^{n+1} \frac{(ju)^v}{v!} \frac{1}{\sigma} \kappa_v \right\}, \quad (20)$$

где

$$\kappa_{n+1} = - \left\{ g_n (B_1 + \kappa_1 A_1) E + \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} C_{n+1}^v f_v \left(B_{m+1-v} + \sum_{k=0}^{n-v} C_{n+1-v}^k \kappa_{k+1} A_{n+1-v-k} \right) E + \right. \\ \left. + \frac{1}{n+1} R \left(B_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k \kappa_{k+1} A_{n+1-k} \right) E \right\} / \left\{ g (B_1 + \kappa_1 A_1) E + R A_1 E \right\}.$$

А векторы g и g_n определяются неоднородными системами линейных алгебраических уравнений

$$g(B_0 + \kappa_1 A_0) + R A_0 = 0, \\ g_n(B_0 + \kappa_1 A_0) + \sum_{v=1}^{n-1} C_n^v f_v \left(B_{n-v} + \sum_{k=0}^{n-v} C_{n-v}^k \kappa_{k+1} A_{n-v-k} \right) + \\ + R \left(B_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \kappa_{k+1} A_{n-k} \right) = 0.$$

Таким образом, в работе получено асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов $(n+1)$ -го порядка, в условии большой задержки.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.
2. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.

3. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск : НТЛ, 2006. – 112 с.

4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: НТЛ, 2004. – 228 с.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

РАСЧЕТ ДИСПЕРСИЙ ЧИСЛЕННОСТИ ВОЗРАСТНЫХ ГРУПП В МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ТЕРРИТОРИИ

И. В. Новикова

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Рассматривается модель динамики возрастного состава населения [1], которая представлена в векторно-матричном виде следующим образом:

$$x(k+1) = A(k)x(k), x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k)$ – m -мерный вектор составов населения территории; $A(k)$ – матрица естественного движения населения.

Обозначим $M\{x_0\} = \bar{x}_0$; $D(0) = D(x_0) = D_0$.

Предположим, что коэффициенты рождаемости являются случайными последовательностями. Поэтому матрица A имеет вид:

$$A(k) = \bar{A} + \tilde{A}(k), \quad (2)$$

где \bar{A} – матрица естественного движения населения со средними значениями коэффициентов, а матрица \tilde{A} имеет вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_l & a_{l+1} & \dots & a_{l+m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $a_i (i = \overline{l, l+m})$ – случайные отклонения от средних значений, которые описываются стохастическими разностными уравнениями вида:

$$a_j(k+1) = \gamma_j a_j(k) + \rho_j w_j(k), \quad (4)$$

где $a_j(0) \sim N(0; \sigma_{a_j}^2)$; $w(k)$ – дискретный гауссовский белый шум с характеристиками $w_j \sim N(0;1)$; $w_j \perp w_i \forall i \neq j$.

Введем обозначения:

- 1) $\mu(k) = M\{x(k)\}$;
- 2) $\tilde{x}(k) = x(k) - \mu(k)$;
- 3) $D(k) = M\{\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)\}$;