Кемеровский государственный университет

Томский государственный университет

Кемеровский научный центр Сибирского отделения РАН

Филиал Кемеровского государственного университета

в г. Анжеро-Судженске

Посвящается 65-летию Победы

в Великой Отечественной войне

НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО МОЛОДЕЖИ

Материалы XIV Всероссийской

научно-практической конференции

15–16 апреля 2010 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2010

ИССЛЕДОВАНИЕ SM|M|∞ В УСЛОВИЯХ ПРЕДЕЛЬНО РЕДКИХ ИЗМЕНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ SM-ПОТОКА И РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. Е. Горбатенко, С. В. Лопухова

Томский государственный университет

Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает полумарковский поток (SM-поток) [1–4]. Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание, заявка покидает систему.

Полумарковский поток определяется полумарковской матрицей $A(x)$ с элементами $A_{vk}(x)$,

$$A_{\nu k}(x) = P\left\{\xi(n+1) = k, \tau(n+1) < x \middle| \xi(n) = \nu\right\},$$

где $\xi(n)$ – эргодическая цепь Маркова с дискретным временем [5] и матрицей $P = [p_{vk}]$ вероятностей перехода за один шаг; процесс $\tau(n)$ принимает неотрицательные значения из непрерывного множества.

Для элементов полумарковской матрицы в общем случае имеет место мультипликативная форма, которую можно записать в виде

$$A_{\nu k}(x) = G_{\nu k}(x)\, p_{\nu k},$$

где $G_{vk}(x)$ – условная функция распределения длины интервала полумарковского потока при условии, что в начале этого интервала вложенная цепь Маркова приняла значение v, а в конце его примет значение k.

Матрицу $A(x)$ можно записать в виде произведения Адамара

$$A(x) = G(x) * P \tag{1}$$

двух матриц $G(x)$ и P, и можно полагать, что полумарковский поток задан двумя матрицами $G(x)$ и P.

Условие предельно редких изменений состояний SM-потока

Исследование системы SM|M|∞ будем проводить в условии предельно редких изменений состояний (ПРИС) входящего потока [6, 7].

Условие предельно редких изменений состояний полумарковского потока формализуется следующим равенством для матрицы $P(\delta)$ вероятностей переходов его вложенной цепи Маркова

$$P(\delta) = I + \delta \cdot Q, \tag{2}$$

где δ – некоторый малый параметр ($\delta \to 0$), а I – единичная диагональная матрица.

Матрица Q с элементами q_{vk} аналогична матрице инфинитезимальных характеристик и имеет такие же свойства, то есть при $k \neq v$ элементы матрицы $q_{vk} > 0$, а также выполняются равенства

$$\sum_k q_{\nu k} = 0,\ \sum_{k \neq \nu} q_{\nu k} = -q_{kk}.$$

Пусть система функционирует в стационарном режиме [5-6]. Обозначим $i(t)$ – число приборов, занятых в момент времени t, тогда стационарное распределение вероятностей значений процесса $i(t)$ обозначим $\pi(i) = P\{i(t) = i\}$.

Рассмотрим трехмерный процесс $\{s(t), z(t), i(t)\}$, который является марковским [4]. Здесь процесс $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в рассматриваемом SM-потоке, процесс $s(t)$ принимает и сохраняет то значение, которое вложенная по моментам наступления событий в полумарковском потоке цепь Маркова $\xi(n)$ принимает в конце рассматриваемого интервала.

Для распределения вероятностей процесса $\{s(t), z(t), i(t)\}$ $P(s,z,i,t) = P\{s(t) = s, z(t) < z, i(t) = i\}$, из которого затем получим одномерное маргинальное распределение $\pi(i) = \sum_s P(s,\infty,i)$, нетрудно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова, которую перепишем для стационарного распределения вероятностей $P(s,z,i) \equiv P(s,z,i,t)$ в условии ПРИС [7] в виде

$$\frac{\partial P(s,z,i,\delta)}{\partial z} - \frac{\partial P(s,0,i,\delta)}{\partial z} - P(s,z,i,\delta)i\mu + P(s,z,i+1,\delta)(i+1)\mu +$$
$$+ \sum_\nu \frac{\partial P(\nu,0,i-1,\delta)}{\partial z} A_{\nu s}(z,\delta) = 0.$$

Обозначив $H(s,z,u,\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(s,z,i,\delta)$, для функций $H(s,z,u,\delta)$ получим систему уравнений, которую перепишем в матричном виде

$$\frac{\partial H(z,u,\delta)}{\partial z} + j\mu\left(1 - e^{-ju}\right)\frac{\partial H(z,u,\delta)}{\partial u} + \frac{\partial H(0,u,\delta)}{\partial z}\left\{e^{ju}A(z,\delta) - I\right\} = 0, \quad (3)$$

решение $H(z,u,\delta)$ которого, удовлетворяющее условию

$$H(z,0,\delta) = R(z,\delta), \quad (4)$$

определяет характеристическую функцию числа $i(t)$ приборов, занятых в стационарном режиме в системе SM|M|∞, равенством $h(u) = Me^{jui(t)} = H(\infty,u)E$.

Здесь вектор $R(z,\delta)$ с компонентами $R(s,z,\delta)$, имеет вид

$$R(z,\delta) = \kappa_1(\delta) r \int_0^z \left(P(\delta) - A(x,\delta)\right) dx,$$

где r – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова, величина $\kappa_1(\delta)$ определяется равенством

$$\kappa_1(\delta) = \frac{1}{rA(\delta)E},$$

а матрица $A(\delta)$ имеет вид

$$A(\delta)=\int_0^{\infty}\left(P(\delta)-A(x,\delta)\right)dx.$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре [9] об аналитической зависимости решения от параметра существует предел

$$\lim_{\delta\to 0}H(u,z,\delta)=H(u,z). \qquad (5)$$

Тогда в уравнении (3), с учетом (5), выполним предельный переход при $\delta\to 0$. Для функций $H(u,z,t)$, с учетом вида матрицы $A(z)$, получим совокупность независимых дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial H(s,z,u)}{\partial z}+j\mu\left(1-e^{-ju}\right)\frac{\partial H(s,z,u)}{\partial u}+\frac{\partial H(s,0,u)}{\partial z}\left\{e^{ju}G_{ss}(z)-1\right\}=0. \qquad (6)$$

Условие растущего времени обслуживания

Будем решать уравнение (6) в асимптотическом условии растущего времени обслуживания [4, 6, 8], полагая, что $\mu\to 0$. Обозначим $\mu=\varepsilon$ и в уравнении (6) выполним замены

$$u=\varepsilon w,\quad H(s,z,u)=F_1(s,z,w,\varepsilon), \qquad (7)$$

для $F_1(s,z,w,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\frac{\partial F_1(s,z,w,\varepsilon)}{\partial z}+j\left(1-e^{-j\varepsilon w}\right)\frac{\partial F_1(s,z,w,\varepsilon)}{\partial w}+\frac{\partial F_1(s,0,w,\varepsilon)}{\partial z}\left\{e^{j\varepsilon w}G_{ss}(z)-1\right\}=0. \qquad (8)$$

Рассмотрим такой класс решений $H(s,z,u)$ уравнения (6), для которых, в силу (7), функции $F_1(s,z,w,\varepsilon)$ обладают следующими свойствами: существуют конечные пределы при $\varepsilon\to 0$ функций $F_1(s,z,w,\varepsilon)$ и их производных по w, по z и по z в нуле

Теорема. При $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (8) имеет вид

$$F_1(s,z,w)=R(s,z)\exp\left\{jw\kappa_1\right\}, \qquad (9)$$

где стационарное распределение $R(z)$ двумерного марковского процесса $\{s(t),z(t)\}$ имеет вид $R(z)=\kappa_1 r\int_0^{z}(P-A(x))dx$. Здесь $A(x)=\lim_{\delta\to 0}A(x,\delta)$ – полумарковская матрица, $P=\lim_{\delta\to 0}P(\delta)$ – стохастическая матрица вероятностей переходов вложенной цепи Маркова, r – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова, а величина κ_1 определяется равенством $\kappa_1=\dfrac{1}{rAE}$, где матрица A определяется равенством $A=\int_0^{\infty}(P-A(x))dx$.

Следствие. Функцию

$$h_1(u)=\exp\left\{\frac{ju\kappa_1}{\mu}\right\}$$

будем называть асимптотикой первого порядка характеристической функции $h(u)$ стационарного процесса $i(t)$.

Заключение

В данной работе найдено асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе в условии предельно редких изменений состояний в SM-потоке и условии растущего времени обслуживания. Полученное распределение может быть многомодальным.

Литература

1. Lucantoni D. New results for the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochastic Models. – 1991. – V. 7. – P. 1–46.
2. Lucantoni D. M., Meier-Hellsten K. S., Neuts M. F. A single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes // Adv. Appl. Prob. – 1990. – №22. – P. 676–705.
3. Neuts M. F. A versatile Markovian arrival process // Journal of Appl. Prob. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
4. Лопухова С. В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: дис. … канд. физ.-мат. наук // Лопухова Светлана Владимировна. – Томск, 2008.
5. Назаров А. А. Теория вероятностей и случайных процессов: учебное пособие. – Томск: Изд. НТЛ, 2006.
6. Назаров А.А. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: НТЛ, 2006.
7. Горбатенко А. Е., Назаров А. А Метод асимптотического анализа MAP-потока в условии предельно редких изменений состояний потока // Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст.: в 2 ч. – Ч. 2 (mcIT – 2008). – Гродно: ГрГУ, 2008. – С. 30–32.
8. Горбатенко А. Е. Исследование квазиразложимого поумарковского потока // Теория вероятностей, математическая статистика и приложения: Материалы международной научной конференции. – Минск, 2010. – С. 53–59.
9. Эльсгольц Л. Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С ПОГРУЖЕННЫМ В ИДЕАЛЬНУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

И. В. Григорьева, И. Л. Теплова
Кемеровский государственный университет

Работа посвящена численному моделированию взаимодействия волн с погруженным телом в идеальной несжимаемой жидкости методом граничных элементов в линейной пространственной постановке. В качестве тестовых выбраны две различные задачи: задача о колебаниях