Кемеровский государственный университет

Томский государственный университет

Кемеровский научный центр Сибирского отделения РАН

Филиал Кемеровского государственного университета

в г. Анжеро-Судженске

Посвящается 65-летию Победы

в Великой Отечественной войне

НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО МОЛОДЕЖИ

Материалы XIV Всероссийской

научно-практической конференции

15–16 апреля 2010 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2010

МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ СУММАРНОГО ПОТОКА ОБРАЩЕНИЙ В ДВУХФАЗНОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СМО С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ

И. А. Ананина

Томский государственный университет

Рассматривается система массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Поступившая заявка занимает одну из свободных линий, начиная обслуживание с первой фазы. Линия считается занятой, если занята любая из её фаз. Завершив обслуживание на первой фазе, с вероятностью $1-r_1$ заявка покидает систему, а с вероятностью r_1 обслуживается повторно: с вероятностью $1-q$ на той же первой фазе, а с вероятностью q на второй. Завершив обслуживание на второй фазе, заявка с вероятностью $1-r_2$ покидает систему, а с противоположной вероятностью r_2 обслуживается на этой фазе вновь. Продолжительности фаз обслуживания стохастически независимы и определяются функциями распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$ для первой и второй фазы соответственно. Процессы обслуживания для различных линий одинаковы и стохастически независимы. Таким образом, формируются потоки повторных заявок, описываемые случайными процессами $n_1(t)$, $n_2(t)$, где $n_k(t)$ – число повторных обращений к *k*-й фазе, реализованных за время наблюдения *t* (рис. 1).

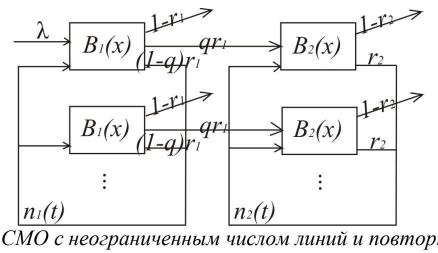

Рис. 1. Двухфазная СМО с неограниченным числом линий и повторными обращениями

Ставится задача исследования суммарного случайного процесса $n(t)=\nu(t)+n_1(t)+n_2(t)$ в рассматриваемой системе, где $\nu(t)$ – число первичных обращений к системе, и нахождение его производящей функции.

Для решения поставленной задачи предлагается метод предельной декомпозиции [1]. Суть этого метода заключается в следующем.

Входящий поток делится на *N* независимых простейших потоков с параметром λ/*N*, заявки каждого потока направляются для обслуживания на соответствующую линию. Таким образом, получаем совокупность *N* независимых однолинейных СМО. Будем полагать, что эти СМО с отказами.

То есть новая заявка, поступившая в систему, занятую обслуживанием, теряется. При $N\to\infty$ вероятностью потерь заявок можно пренебречь, и тогда суммарные характеристики совокупности N однолинейных СМО сходятся к характеристикам исходной модели. Таким образом, задача нахождения распределения вероятностей числа обращений в бесконечнолинейной СМО сводится к решению задачи нахождения распределения вероятностей числа обращений в однолинейной СМО с отказами.

Введем следующие обозначения: $k(t)$ – состояние прибора, то есть $k(t)=k$, когда занята k-я фаза, $k=1,2$ и $k(t)=0$, когда линия свободна, $z(t)$ – длина интервала от текущего момента времени t до момента окончания текущего обслуживания, если линия занята.

Тогда $P_0(n,t,N)=P\{k(t)=0, n(t,N)=n\}$ – вероятность того, что в момент времени t линия свободна и за это время к системе обратилось n заявок. $P_k(n,z,t,N)=P\{k(t)=k, n(t,N)=n, z(t)<z\}$ – вероятность того, что занята k-я фаза, за время t поступило n заявок и до конца обслуживания остается времени меньше z.

Составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [2]:

$$\frac{\partial P_0(n,t,N)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{2}(1-r_k)\frac{\partial P_k(n,0,t,N)}{\partial z}-\frac{\lambda}{N}P_0(n,t,N),$$

$$\frac{\partial P_1(n,z,t,N)}{\partial t}=\frac{\partial P_1(n,z,t,N)}{\partial z}-\frac{\partial P_1(n,0,t,N)}{\partial z}+(1-q)r_1B_1(z)\frac{\partial P_1(n-1,0,t,N)}{\partial z}+$$

$$+\frac{\lambda}{N}P_0(n-1,t,N)B_1(z),$$

$$\frac{\partial P_2(n,z,t,N)}{\partial t}=\frac{\partial P_2(n,z,t,N)}{\partial z}-\frac{\partial P_2(n,0,t,N)}{\partial z}+qr_1B_2(z)\frac{\partial P_1(n-1,0,t,N)}{\partial z}+$$

$$+r_2B_2(z)\frac{\partial P_2(n-1,0,t,N)}{\partial z}.$$

Рассмотрим функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^nP_0(n,t,N)=H_0(x,t,N),\ \sum_{n=0}^{\infty}x^nP_k(n,z,t,N)=H_k(x,z,t,N),\ k=1,2.$$

Перейдем к системе дифференциальных уравнений в частных производных [3] для $H_0(x,t,N)$, $H_1(x,z,t,N)$ и $H_2(x,z,t,N)$, решение которой будем искать в виде

$$H_0(x,t,N)=1-\frac{1}{N}F_0(x,t)+\mathrm{o}\left(N^{-2}\right),$$

$$H_k(x,z,t,N)=\frac{1}{N}F_k(x,z,t)+\mathrm{o}\left(N^{-2}\right),\ k=1,2.$$

Тогда уравнения для $F_0(x,t)$, $F_1(x,z,t)$ и $F_1(x,z,t)$ имеют вид:

$$\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}=\lambda-\sum_{k=1}^{2}(1-r_k)f_k(x,t),$$

$$\frac{\partial F_1(x,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial F_1(x,z,t)}{\partial z}+\lambda x B_1(z)+\left(r_1(1-q)xB_1(z)-1\right)f_1(x,t),$$
$$\frac{\partial F_2(x,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial F_2(x,z,t)}{\partial z}+r_1 qxB_2(z)f_1(x,t)+\left(r_2 xB_2(z)-1\right)f_2(x,t),$$
где $f_k(x,t)=\dfrac{\partial F_k(x,0,t)}{\partial z}$, $k=1,2$.

Воспользуемся начальными условиями, которые определяются той же системой при $x=1$, и получим частные решения:

$$F_0(x,t)=\frac{\lambda\left(r_1 qb_2+(1-r_2)b_1\right)}{(1-r_2)(1-r_1(1-q))}+\lambda t+(r_1-1)\int_0^t f_1(x,s)ds+(r_2-1)\int_0^t f_2(x,s)ds,$$

$$F_1(x,z,t)=\frac{\lambda}{1-r_1(1-q)}\int_0^{z+t}(1-B_1(y))dy+$$

$$+\int_0^t\left[\lambda xB_1(z+t-s)+(r_1(1-q)xB_1(z+t-s)-1)f_1(x,s)\right]ds,$$

$$F_2(x,z,t)=\frac{r_1 q\lambda}{(1-r_2)(1-r_1(1-q))}\int_0^{z+t}(1-B_2(y))dy+$$

$$+\int_0^t\left[r_1 qxB_2(z+t-s)f_1(x,s)+(r_2 xB_2(z+t-s)-1)f_2(x,s)\right]ds.$$

Учитывая, что

$$G(x,t)=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N}F_0(x,t)+\frac{1}{N}F_1(x,\infty,t)+\frac{1}{N}F_2(x,\infty,t)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)^N,$$

можно найти производящую функцию $G(x,t)$ случайного процесса $n(t)$:

$$G(x,t)=\exp\left\{(x-1)\left\{\lambda t+r_1\int_0^t f_1(x,s)ds+r_2\int_0^t f_2(x,s)ds\right\}\right\}.$$

Знание найденной производящей функции необходимо для определения основных числовых характеристик рассматриваемого процесса.

Литература

1. Морозова А. С., Моисеева С. П., Назаров А. А. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. – 2005. – Т. 13, вып. 5. – С. 88–92.
2. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М. : Наука, 1969. – 448 с.
3. Эльцгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)», проект № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».