Томский государственный университет
Механико-математический факультет

Научная конференция студентов механико-математического факультета ТГУ

Сборник конференции

24–30 апреля 2014 г.

Томск – 2014

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Матюшина М.В.
Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Матвиенко О.В.
Томский государственный университет
E-mail:sag@sibmail.com

Главная отличительная особенность турбулентных течений заключается в том, что все характеристики потока пульсируют случайным образом на фоне своих средних значений. Поэтому для математического исследования турбулентного течения целесообразно его мгновенные характеристики представить как сумму осредненного и пульсационного движения.

Разделяя мгновенную составляющую скорости и концентрации на осредненную и пульсационные составляющие

$$\vec{v}_p = \langle \vec{v}_p \rangle + \vec{v}'_p, \; M_p = \langle M_p \rangle + M'_p \tag{1}$$

и осредняя по Рейнольдсу уравнение сохранения массы дисперсной среды, получим уравнение турбулентной диффузии частиц:

$$\frac{\partial \rho_p \langle M_p \rangle}{\partial t} + div\left(\rho_p \langle M_p \rangle \langle \vec{v}_p \rangle\right) = -div\left(\rho_p \langle M'_p \rangle \langle \vec{v}'_p \rangle\right). \tag{2}$$

Таким образом, возникает задача определения турбулентного потока частиц: $-\rho_p \langle \vec{v}'_p M'_p \rangle$.

Для определение турбулентного диффузионного потока дисперсной фазы воспользуемся следующими предположениями:

- частицы дисперсной фазы предполагаются сферическими, взаимодействие между частицами не учитывается;
- период турбулентной пульсации может быть оценен как отношение турбулентной кинетической энергии k к скорости ее диссипации ε : $\delta t = k/\varepsilon$;
- величина пульсации скорости несущей среды может быть моделирована следующим образом:

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}' & 0 \le t < \dfrac{\delta t}{2}; \\ -\vec{v}' & \dfrac{\delta t}{2} \le t \end{cases} \tag{3}$$

- в начале пульсации частица движется вместе с основным потоком, так что скорость ее движения относительно потока равна нулю.

В рамках этих предположений уравнение движения одиночной частицы можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{3}{4}\frac{\rho}{\rho_p} C_D d_p^{-1} \left|\vec{v} - \vec{v}_p\right| \left(\vec{v} - \vec{v}_p\right). \tag{4}$$

Рассмотрим сначала турбулентный перенос дисперсной фазы вследствие турбулентных пульсаций, вызывающих движение частиц, описываемого законом сопротивления Стокса:

$$\vec{F}_D = 3\pi\mu d_p \left(\vec{v} - \vec{v}_p\right); \tag{5}$$

Интегрирование уравнения движения (5) позволяет оценить изменение массы частиц в элементарном объеме за период пульсации следующим образом:

$$M'_p = -\psi \vec{v}' \frac{k}{\varepsilon} \operatorname{grad}\left(\left\langle M_p \right\rangle\right), \tag{6}$$

где ψ - фактор, отражающий инерционность частиц:

$$\psi = 1 - \frac{1}{2\alpha}\frac{d_p}{L}\left[3 - exp\left(-\alpha\frac{L}{d_p}\right)\right]\left[1 - exp\left(-\alpha\frac{L}{d_p}\right)\right], \tag{7}$$

где $\alpha = 18\frac{\rho}{\rho_p}\mathbf{Re_t}^{-1}$ - безразмерный параметр обратный времени релаксации частиц, $L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ - масштаб турбулентности, $\mathbf{Re_t} = \frac{\rho\sqrt{k}d_p}{\mu}$ - турбулентное число Рейнольдса.

Анализ движения частиц в результате действия ньютоновской силы сопротивления позволяет определить инерционность частиц как

$$\psi = 1 - \frac{1}{2\beta}\left(\frac{d_p}{L}\right) ln\left[1 + 2\beta\left(\frac{L}{d_p}\right) + 2\left(\beta\frac{L}{d_p}\right)^2\right], \tag{8}$$

где $\beta = \frac{4}{3}\frac{\rho}{\rho_p}C_D^{-1}$ – безразмерный параметр, характеризующий путь релаксации.

Таким образом, уравнение сохранения массы дисперсной среды в случае турбулентного режима течения после осреднения по Рейнольдсу приобретает вид уравнения диффузии и может быть записано в виде

$$\frac{\partial \rho_p \langle M_p \rangle}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho_p \langle M_p \rangle \langle \vec{v}_p \rangle\right) = -\mathrm{div}\left(\rho_p \psi D_t \, grad \langle M_p \rangle\right), \qquad (18)$$

Анализ формул (7, 8) показывает, что в стоксовском режиме коэффициент турбулентной диффузии определяется отношением размера частицы к размеру энергосодержащего вихря d_p/L, а также интенсивностью пульсаций несущей среды, характеризуемой турбулентным числом Рейнольдса $\mathbf{Re_t}$. В ньютоновском режиме диффузия частиц определяется только их относительными размерами.

Коэффициент турбулентной диффузии частиц для мелких частиц достаточно высок, и частицы переносятся турбулентным потоком также как и жидкость. Однако с увеличением размера частиц подвижность частиц резко ослабевает. Таким образом, крупные частицы не могут диффундировать, несмотря на высокий уровень турбулентности.

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ БАЛКЛИ-ХЕРШЕЛЯ В ТРУБЕ

Павлова О. Д.

Научный руководитель: профессор, д.ф.м.н. Матвиенко О.В.

Томский государственный университет

E-mail: pod404@mail.ru

В случае нелинейной кривой течения вязкопластической среды говорят о нелинейно-вязкопластичных жидкостях. Трехпараметрическая модель Балкли-Хершеля, учитывающая нелинейность кривой течения при $n = 1$ сводится к модели Шведова-Бингама, причем $k = \mu_{pl}$, а при $\tau_Y = 0$ - к степенному закону Оствальда-де Виля.

Реологический закон Балкли-Хершеля нелинейно вязкопластических сред для установившегося течения в канале записывается в виде:

$$\tau_{rx} = -\tau_Y + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^n \qquad \text{если} \qquad \tau_Y < \mu\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^n, \qquad (1)$$