

# О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ ДИНАМИКЕ СЛАБО ПЕРЕТОРМОЖЕННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Ю. В. Брежнев<sup>a</sup>, С. В. Сазонов<sup>b\*</sup>

<sup>a</sup> Томский государственный университет  
634 050, Томск, Россия

<sup>b</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Рассмотрено движение нелинейных слабо переторможенных осцилляторов. Слабая переторможенность определяется как малое превышение декрементом затухания собственной частоты осциллятора. При определенной связи между декрементом и собственной частотой найдены точные решения и проведен анализ качественно различных режимов движения. Установлены пороговые условия, соответствующие сменам режимов, исследованы однокомпонентные модели с произвольной степенью нелинейности и детально рассмотрены квадратичная и кубическая нелинейности. Если в многокомпонентной модели нелинейность определяется однородной функцией, то преобразованием типа Куммера–Лиувилля при установленной связи между декрементом и собственной частотой задачу удастся свести к автономной системе дифференциальных уравнений второго порядка. Проанализированы некоторые интегрируемые многокомпонентные модели с квадратичной и кубической нелинейностями.

DOI: 10.7868/S0044451014110194

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные осцилляторы встречаются в различных областях современной физики, химии, биофизики, электротехники, электроники и др. Разработан широкий круг аналитических методов для исследования динамики осцилляторов как со слабой, так и с сильной нелинейностью [1]. В большинстве случаев помимо нелинейности важную роль играет диссипация (или вязкое трение).

Часто нелинейность и диссипация проявляют себя в задачах вида

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega^2 P + f(P) = 0, \quad (1)$$

$$P(t=0) \equiv P(0), \quad \dot{P}(t=0) \equiv \dot{P}(0),$$

где  $P$  — зависимая переменная (сдвиг или координата осциллятора), коэффициенты  $\gamma$  и  $\omega$  определяют соответственно вязкость и линейную часть упругости осциллятора,  $f(P)$  — некоторая функция, характеризующая нелинейность упругой возвращающей силы, точки над  $P$  обозначают производные по

времени. Здесь и ниже начальный момент времени отнесен к  $t = 0$ .

В пренебрежении нелинейностью ( $f(P) = 0$ ) уравнению (1) соответствуют два характеристических корня  $\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ . Если  $\gamma < \omega$ , имеем два комплексно-сопряженных корня  $\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ , что соответствует движению в режиме затухающих колебаний. В противном случае оба корня вещественны и линейная динамика имеет место в сугубо релаксационном аperiodическом движении. Тогда говорят, что осциллятор переторможен [2].

В отсутствие диссипации ( $\gamma = 0$ ) уравнение (1) интегрируется в квадратурах. То же самое справедливо в ситуации, когда можно пренебречь инерционным слагаемым  $\ddot{P}$ . В общем же случае уравнение (1) не имеет точных аналитических решений.

Аналитические методы для исследования движения нелинейных осцилляторов с затуханием хорошо разработаны при  $\gamma/\omega \ll 1$ , что соответствует слабой диссипации или осциллятору с высокой добротностью. Здесь хорошо зарекомендовали себя методы прямого разложения (или последовательных приближений), перенормировки, многих

\*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

масштабов, а также подходы Ван дер Поля, Линштедта–Пуанкаре и Крылова–Боголюбова–Митропольского [1]. В другом противоположном случае  $\gamma/\omega \gg 1$ , соответствующем сильной переторможенности, надежно проявили себя методы пограничного слоя, включающие подходы многих масштабов и сращивания асимптотических разложений [1].

В ряде случаев представляет интерес промежуточный случай, при котором параметр вязкости  $\gamma$  незначительно превышает параметр упругой возвращающей силы  $\omega$ :

$$\gamma/\omega \geq 1. \quad (2)$$

Такой тип нелинейного осциллятора находит свои приложения в биофизике [3], астрофизике, космологии ( $f(P) \sim P^3$ ) [4, 5] и динамике параметра порядка сегнетоэлектриков типа смещения ( $f(P) \sim P^2$  в сегнетофазе или  $f(P) \sim P^3$  в парафазе) [2]. Следуя работе [3], будем называть двойное неравенство

$$1 < \frac{\gamma}{\omega} < 1.1 \quad (3)$$

условием слабой переторможенности.

Естественным обобщением задачи (1) на  $N$ -компонентный случай является нелинейная диссипативная система вида

$$\ddot{P}_j + 2\gamma_j \dot{P}_j + \omega_j^2 P_j + f_j(\{P_k\}) = 0, \quad (4)$$

$$j, k = 1, \dots, N.$$

Оказывается, что существуют аналитические решения уравнений (1) и (4) при фиксированных значениях параметра переторможенности  $\gamma_j/\omega_j$ , незначительно превышающих единицу, и определенных условиях для функций  $f(\{P_k\})$ . Анализ некоторых таких ситуаций и посвящена настоящая работа.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 с помощью подстановки типа Куммера–Лиувилля и в предположении об однородности функции  $f(P)$  уравнение (1) при наложении жесткой связи между параметрами  $\gamma$  и  $\omega$  сводится к автономному нелинейному уравнению второго порядка, интегрируемому в квадратурах. Здесь же проводится общий анализ решений, выражающихся через гипергеометрическую функцию, и выделяются качественно различные (в зависимости от начальных условий) режимы поведения во времени динамического параметра  $P$ . В разд. 3 детально рассматриваются ситуации, соответствующие квадратичной и кубической нелинейностям. Раздел 4 посвящен анализу  $N$ -компонентных систем, нелинейно связанных слабо переторможенных осцилляторов. Рассмотрены специальные случаи с квадратичной и кубиче-

ской нелинейностями, которые допускают интегрируемые ситуации. В Заключение подведены итоги работы и намечены основные перспективы в обозначенной области исследований.

## 2. ВЫДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЕВ ДЛЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Поскольку система диссипативна, введем «диссипативную переменную»

$$\xi = e^{-\varepsilon t} \quad (5)$$

и зададимся целью прийти к уравнению автономного типа по этой переменной. Делая тогда в (1) замену  $P(t) = P(\xi)$ , получим уравнение

$$\varepsilon^2 \xi^2 R'' + \varepsilon(\varepsilon - 2\gamma)\xi R' + \omega^2 R + f(R) = 0,$$

которое, однако, никогда не редуцируется к требуемому типу в силу несоизмеримости коэффициентов при степенях  $\xi$ . Введем поэтому для компенсации дополнительную степенную зависимость

$$P(t) = \xi^\alpha R(\xi), \quad (6)$$

где  $\alpha$  и  $\varepsilon$  — подлежащие определению постоянные.

Следуя [6], назовем (6) преобразованием Куммера–Лиувилля. После подстановки (5) и (6) в уравнение (1) получим

$$\varepsilon^2 \xi^{\alpha+2} R'' + \varepsilon((2\alpha + 1)\varepsilon - 2\gamma)\xi^{\alpha+1} R' + (\alpha^2 \varepsilon^2 - 2\gamma\alpha\varepsilon + \omega^2)\xi^\alpha R + f(\xi^\alpha R) = 0.$$

Для автономности возможность согласовать степени  $\xi$  имеется, только если функция  $f(R)$  обладает свойством однородности, т. е.

$$f(\xi^\alpha R) = (\xi^\alpha)^n f(R), \quad (7)$$

где  $n$  — некоторая степень однородности.

Разумеется, однородная функция от одной переменной — это степенная функция, но в дальнейшем (в разд. 4) мы будем рассматривать и многокомпонентные системы. Итак, с учетом (7) имеем

$$\varepsilon^2 \xi^{\alpha+2} R'' + \varepsilon((2\alpha + 1)\varepsilon - 2\gamma)\xi^{\alpha+1} R' + (\alpha^2 \varepsilon^2 - 2\gamma\alpha\varepsilon + \omega^2)\xi^\alpha R + \xi^{\alpha n} f(R) = 0.$$

Равенство степеней  $\xi$  обязывает положить равными нулю коэффициенты при  $R'$  и  $R$ :

$$(2\alpha + 1)\varepsilon = 2\gamma, \quad \alpha^2 \varepsilon^2 - 2\gamma\alpha\varepsilon + \omega^2 = 0,$$

после чего степени  $\xi$  при  $R''$  и  $f(R)$  достаточно приравнять друг другу:

$$\alpha + 2 = \alpha n.$$

Разрешая получившиеся уравнения относительно  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  и  $\gamma$ , находим

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{n + 3}{2\sqrt{2n + 2}}, \tag{8}$$

$$\alpha = \frac{2}{n - 1}, \quad \varepsilon = \omega \frac{n - 1}{\sqrt{2n + 2}}. \tag{9}$$

При этом  $R$  станет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$R'' + \frac{2n + 2}{(n - 1)^2 \omega^2} f(R) = 0, \tag{10}$$

которое, очевидно, интегрируется в квадратурах.

Таким образом, при условиях (7) и (8) уравнение (1) оказывается точно решаемым. Его решение выражается соотношениями (5), (6), где  $\alpha$  и  $\varepsilon$  определяются согласно (9), а  $R(\xi)$  есть результат интегрирования уравнения (10).

В соответствии с (7) положим

$$f(P) = \beta P^n \tag{11}$$

с некоторой постоянной  $\beta$ ; такой тип нелинейности является наиболее простым и понятным с физической точки зрения.

Из соотношения (8) следует, что  $n > -1$  — некоторая постоянная, а степень однородности  $n > 1$  и, следовательно, условие (2) выполняется всегда. Ясно, что сдвигом  $P \rightarrow P + \Delta$  ( $\Delta = \text{const}$ ) мы можем выйти из класса однородных нелинейностей, а решаемость уравнения при этом не исчезнет.

Уравнение (1) при  $f(P)$ , определяемой согласно (11), является частным случаем обобщения известного уравнения Эмдена–Фаулера [6, 7]

$$(\xi Y'' + \alpha Y' + \xi^\alpha Y) + \xi^\beta Y^n = 0$$

при  $n = 3$ . Его линейная часть (выделена скобками) стандартной линейной перенормировкой функции  $Y$  всегда может быть приведена к форме  $Y'' + p(\xi)Y$  и поэтому в нашем случае канонической формой можно считать уравнение вида

$$Y'' = a\xi^\alpha Y + b\xi^\beta Y^3. \tag{12}$$

Оно привлекает к себе значительное внимание в связи с исследованием различных физических процессов и вопросов интегрируемости [6, 8]. При этом в

общем случае рассматриваются ситуации, когда коэффициенты в уравнении (1) явно зависят от независимой переменной [7, 9]. Насколько нам удалось установить, случай с параметрами (8), (11) является единственным полностью интегрируемым при данном типе нелинейности, а замены переменных типа  $Y(\xi) \rightarrow \xi^\nu Y(\xi^\mu)$  сводят неавтономные (интегрируемые) разновидности уравнения (12) к автономному уравнению  $Y'' = -2Y^3$ , т. е. уравнению типа (10). Исключительность случаев, которые мы будем рассматривать далее, по-видимому, до сих пор не отмечалась. При этом интегрируемость в эллиптических функциях уравнения (1) с соотношением (8) между параметрами была упомянута в работе [9] (без явного решения и анализа трансцендентных констант). Более общие уравнения типа Эмдена–Фаулера тоже встречаются в литературе; см., например, [7, 8] и ссылки в этих работах. Ограничимся случаями постоянных коэффициентов в (1), однако рассмотрим как однокомпонентные, так и многокомпонентные модели.

Потенциальная энергия  $U$ , соответствующая упругой возвращающей силе с нелинейной частью, определенной (11), запишется в виде

$$U = \frac{\omega^2}{2} P^2 + \frac{\beta}{n + 1} P^{n+1}. \tag{13}$$

Здесь следует выделить три случая, соответствующие качественно различным, анализирующимся ниже, движениям осциллятора: 1)  $\beta > 0$ ,  $n$  — нечетное; 2)  $\beta < 0$ ,  $n$  — нечетное; 3)  $\beta > 0$ ,  $n$  — четное. Ситуация, когда  $\beta < 0$ ,  $n$  — четное, переходит в случай 3) при замене  $P \rightarrow -P$ .

Остановимся на решении и анализе уравнений (10), (11) при начальных условиях (1). Моменту времени  $t = 0$  соответствует  $\xi = 1$ . Тогда, как видно из (5), (6) и (9),

$$R(1) = P(0), \quad R'(1) = -\frac{2}{n - 1} \lambda, \tag{14}$$

$$\lambda = P(0) + \sqrt{\frac{n + 1}{2}} \frac{\dot{P}(0)}{\omega},$$

где  $R(1) = R(\xi = 1)$ ,  $R'(1) = R'(\xi = 1)$ .

Как результат, квадратурная форма решения принимает вид

$$2 \frac{1 - \xi}{(n - 1)\omega} = \int_{P(0)}^R \frac{du}{\sqrt{g - \beta u^{n+1}}}, \tag{15}$$

где

$$g = \beta P^{n+1}(0) + \omega^2 \lambda^2. \tag{16}$$

Воспользуемся тем, что (15) — интеграл гипергеометрического  ${}_2F_1$ -типа, причем такого, что функция  ${}_2F_1(a, b; c|z)$  (стандартное обозначение [10, 11]) допускает представление в виде неопределенного интеграла [12]:

$$\int_0^z u^{\alpha-1}(u-1)^{-\beta} du = \frac{1}{\alpha} e^{\pi i \beta} z^\alpha {}_2F_1(\beta, \alpha; \alpha+1|z), \quad (17)$$

$\text{Re}(\alpha) > 0.$

Вид решения (15) зависит от знаков параметров  $g$  и  $\beta$ .

Пусть вначале  $g > 0$ . Тогда (15) с учетом (17) превращается в общее решение (1), (11):

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{g}}{n-1} \text{sgn}(\lambda) \frac{1-\xi}{\omega} = & R {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}; \frac{n+2}{n+1} \middle| \frac{\beta}{g} R^{n+1}\right) - \\ & - P(0) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}; \frac{n+2}{n+1} \middle| \frac{\beta}{g} P^{n+1}(0)\right), \quad (18) \end{aligned}$$

где  ${}_2F_1(a, b; c|z)$  — гипергеометрическая функция.

Из (16) видно, что условие  $g > 0$  вбирает в себя, как частный случай, линейный режим. Действительно, полагая в (16)  $\beta = 0$ , будем иметь  $g > 0$ . В этом случае гипергеометрическая функция в (18) обращается в единицу и, с учетом (5), (6), (9) мы приходим к решению в линейном случае:

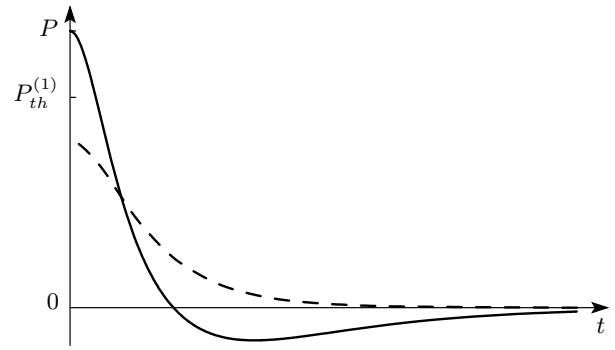
$$\begin{aligned} P = \left\{ P(0) + \frac{2}{n-1} \left( P(0) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{\dot{P}(0)}{\omega} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \exp\left(-\frac{n-1}{\sqrt{2n+2}} \omega t\right) \right] \right\} \times \\ \times \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{n+1}} \omega t\right), \quad (19) \end{aligned}$$

где под  $n$  надо понимать выражение  $n(\gamma/\omega)$ , взятое из (8).

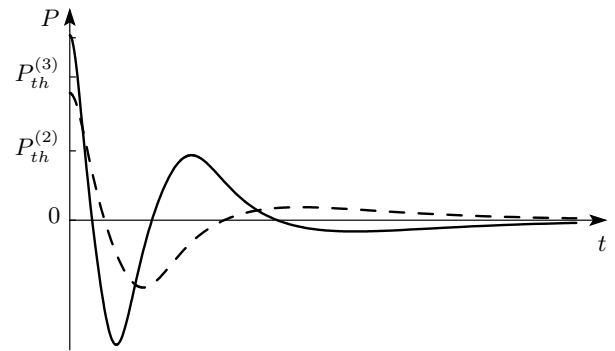
В то же время решение (18) обнаруживает эффект суперкомпенсации, являющийся пороговым по начальному отклонению и характерным только для общего «нелинейного решения» (18).

### 2.1. Анализ решений

Эффект суперкомпенсации, имеющий важное значение, например, в биофизических системах



**Рис. 1.** Суперкомпенсация первого порядка при  $P(0) > P_{th}^{(1)}$  (сплошная кривая) в случае нечетной нелинейности; если  $P(0) < P_{th}^{(1)}$ , приближение к равновесию происходит в монотонном релаксационном режиме (штриховая кривая)



**Рис. 2.** Квазиколебательные режимы релаксации при суперкомпенсации второго  $P(0) > P_{th}^{(2)}$  (штриховая кривая) и третьего  $P(0) > P_{th}^{(3)}$  (сплошная кривая) порядков в случае нечетной нелинейности

[2, 13], заключается в следующем. Пусть начальные условия имеют вид

$$P(0) \neq 0, \quad \dot{P}(0) = 0. \quad (20)$$

В этом случае при  $\beta = 0$  и условии переторможённости (2) происходит монотонное приближение  $P$  к равновесному значению  $P = 0$ , которое достигается при  $t \rightarrow \infty$  (см. (19) и рис. 1). В присутствии же нелинейности, когда  $\beta > 0$ , происходит динамическое увеличение жесткости осциллятора. Если к тому же начальное отклонение  $P(0)$  по абсолютной величине превосходит некоторое пороговое значение  $P_{th}^{(1)}$ , релаксация  $P$  к положению равновесия приобретает квазиколебательный характер: в некоторый момент времени кривая  $P(t)$  пересекает ось абсцисс (рис. 1; возникновение суперкомпен-

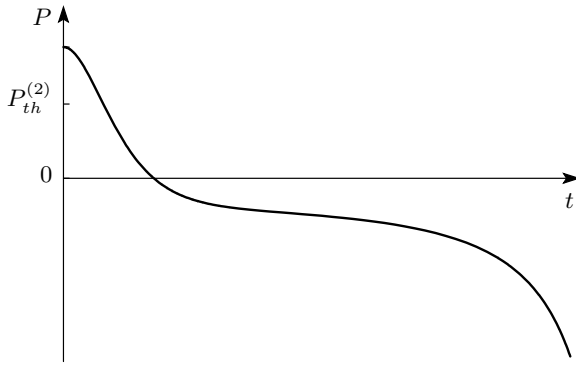


Рис. 3. Взрывная суперкомпенсация второго порядка  $P(0) > P_{th}^{(2)}$  в случае четной нелинейности

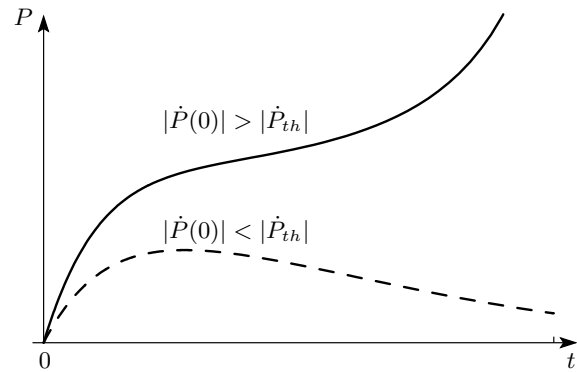


Рис. 4. Релаксационная (штриховая кривая) и взрывная (сплошная кривая) динамики в случае начального толчка из положения равновесия

сации [2, 13]). Можно также говорить о порядке  $k$  суперкомпенсации, который соответствует количеству пересечений кривой  $P(t)$  с осью абсцисс (рис. 1, 2). Соответствующие пороговые значения  $P_{th}^{(k)}$  найдем, полагая в (18)  $\xi = 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) и  $R = 0$ . Тогда после замены  $P(0) \rightarrow P_{th}^{(k)}$  получим трансцендентное уравнение для определения  $P_{th}^{(k)}$ :

$$\frac{2}{n-1} \sqrt{\Lambda^{(k)} + 1} = 2k \left( \frac{1}{\Lambda^{(k)}} + 1 \right)^{1/(n+1)} \times \\ \times {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}; \frac{n+2}{n+1} \middle| 1 \right) - \\ - {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}; \frac{n+2}{n+1} \middle| \frac{1}{\Lambda^{(k)} + 1} \right), \quad (21)$$

где  $\Lambda^{(k)} = \beta \omega^{-2} (P_{th}^{(k)})^{n-1} > 0$ .

Если  $n$  — целое нечетное число, то динамическое увеличение жесткости осциллятора происходит при  $\beta > 0$ . В этом случае нет принципиальных ограничений на порядок  $k$ . Если же  $n$  — целое четное число, то при  $k = 1$  из (21) получаем порог для суперкомпенсации первого порядка. В то же время при  $k = 2$  из (21) имеем порог на взрывной характер решения, когда за конечное время  $P \rightarrow -\infty$  (см. рис. 3 и детальнее следующий раздел). Это хорошо иллюстрируется потенциальной кривой (13): если начальное отклонение вправо превысит  $P_{th}^{(2)}$ , то при дальнейшем скатывании по данной кривой и при наличии встречного сопротивления осциллятор преодолет локальный левый максимум и далее  $P$  достигнет значения  $-\infty$ . При  $\beta < 0$  и четных  $n$  ситуация аналогична случаю  $\beta > 0$  с точностью до замены  $P_{th} \rightarrow -P_{th}$ . Если же  $n$  — нечетное, то при  $\beta > 0$  уравнение (21) не имеет корней, что соответствует динамическому уменьшению жесткости осциллято-

ра и, следовательно, отсутствию эффекта суперкомпенсации. Условие  $g > 0$  при нулевой начальной скорости эквивалентно в этом случае неравенству  $|\beta| \omega^{-2} P^{n-1}(0) < 1$ . Поведение решения здесь становится хорошо понятным из анализа потенциальной кривой (13): при  $|P(0)| < |\omega^2 / \beta|^{1/(n-1)} = P_m$  происходит монотонное асимптотическое приближение  $P$  к равновесному нулевому значению.

Рассмотрим теперь при  $g > 0$  ситуации, когда осциллятор в начальный момент времени из равновесного нулевого положения получает начальный толчок, т. е.

$$P(0) = 0, \quad \dot{P}(0) \neq 0. \quad (22)$$

В этих случаях возможны различные качественно отличающиеся друг от друга решения, в том числе отмеченные выше эффекты суперкомпенсации (четные/нечетные  $n$ ) и взрыва (четные  $n$ ), когда  $P$  в точках поворота достигает значений, превышающих найденные из (21). Остановимся здесь на условиях возникновения взрывных решений (рис. 4) в случаях как четных, так и нечетных значений  $n$ . Понятно, что если  $n$  — нечетное, то  $\beta < 0$  и неважно, в каком направлении происходит толчок. Пороговое условие на начальную скорость  $\dot{P}_{th}$  здесь можно получить непосредственно из (18), полагая там  $\xi = 0$ ,  $\dot{P}(0) = \dot{P}_{th}$ ,  $P(0) = 0$ ,  $R = \infty$ . Тогда

$$|\dot{P}_{th}| = \left( \frac{\omega^{n+1}}{|\beta|} \right)^{1/(n-1)} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \times \\ \times \left[ \frac{n-1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left( \frac{n-1}{2n+2} \right) \Gamma \left( \frac{n+2}{n+1} \right) \right]^{(n+1)/(n-1)}. \quad (23)$$

В следующем разделе мы применим данное выражение к квадратичной и кубической нелинейностям.

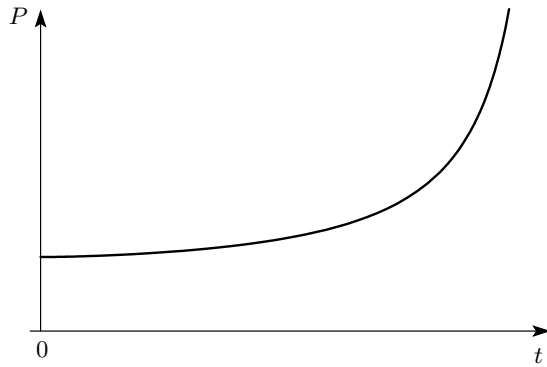


Рис. 5. Существенно нелинейное решение взрывного типа при  $|P(0)| > (\omega^2/|\beta|)^{1/(n-1)}$  и нулевой начальной скорости

Обратимся теперь к случаю  $g < 0$ . Решение имеет вид

$$\frac{1 - \xi}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{-\beta P^{n-1}(0)}} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2n+2}; \frac{3n+1}{2n+2} \middle| \frac{g}{\beta P^{n+1}(0)}\right) - \frac{1}{\sqrt{-\beta R^{n-1}}} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2n+2}; \frac{3n+1}{2n+2} \middle| \frac{g}{\beta R^{n+1}}\right). \quad (24)$$

Из формул (15) и (16) имеем  $\beta R^{n+1} < 0$ , а по абсолютной величине данный динамический параметр превосходит  $|g|$ . В этом случае доминирующую роль в (1) играет нелинейная часть  $\beta P^n$  упругой силы. Поэтому решение (24) является существенно нелинейным, т. е. оно не содержит в себе линейный случай.

Поскольку в случае четных  $n$  ситуации, когда  $\beta > 0$  и  $\beta < 0$ , переходят друг в друга при зеркальном отражении  $P \rightarrow -P$ , а при нечетных  $n$  неравенство  $g < 0$  возможно только, если  $\beta < 0$ , рассмотрим именно этот случай.

Пусть начальные условия таковы, что  $P(0) \neq 0$ ,  $\dot{P}(0) = 0$ . Тогда величина начального сдвига  $|P(0)| > (\omega^2/|\beta|)^{1/(n-1)}$ , т. е. находится за точкой невозврата к нулевому значению. Решение имеет взрывной характер (рис. 5). Полагая  $\beta R^{n-1} \rightarrow -\infty$  в (24), найдем время  $t_e$  продолжительности взрыва:

$$t_e = -\frac{\sqrt{2n+2}}{(n+1)\omega} \times \\ \times \ln \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\Lambda_0}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2n+2}; \frac{3n+1}{2n+2} \middle| 1 - \frac{1}{\Lambda_0}\right) \right\},$$

где  $\Lambda_0 = |\beta|\omega^{-2}P^{n-1}(0) > 1$ .

### 3. ОСЦИЛЛЯТОР С КВАДРАТИЧНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В настоящем и следующих разделах рассмотрим две характерные нелинейности (квадратичную и кубическую), чаще всего встречающиеся в различных приложениях. В этих случаях операция обращения гипергеометрической функции, необходимая в общих, но неявных решениях (18), (24), приводит к эллиптическим функциям и дает, таким образом, явные зависимости  $P(t)$ . Имея в виду физическую важность рассматриваемых случаев, результаты часто будем представлять не только с помощью вейерштрассовых обозначений, но и через эллиптические функции Якоби и лежандровские эллиптические интегралы [10, 11, 14].

#### 3.1. Случай $n = 2$

В этом случае, как видно из (8) и (9),

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{5}{\sqrt{24}} \approx 1.021, \quad \alpha = 2, \quad \varepsilon = \frac{\omega}{\sqrt{6}}. \quad (25)$$

Ниже для квадратичной нелинейности рассмотрим только случаи положительных значений  $\beta$ . Тогда, как отмечалось выше, ситуации, соответствующие  $\beta < 0$ , выразятся через рассмотренные с помощью замены  $P \rightarrow -P$ . Имеем

$$P = ae^{-2\omega t/\sqrt{6}} \left[ 1 - \sqrt{3} \operatorname{sgn}(a) \frac{1 - \operatorname{cn}(\chi, q)}{1 + \operatorname{cn}(\chi, q)} \right], \quad (26)$$

где

$$\chi = 2\sqrt{3} \operatorname{sgn}(a) \frac{\sqrt{\beta|a|}}{\omega} \times \\ \times \left( 1 - e^{-\omega t/\sqrt{6}} \right) - \mathbf{F}(\varphi_0; q), \\ a = \left( \frac{g}{\beta} \right)^{1/3} = \\ = \left[ P^3(0) + \frac{1}{\beta} \left( \omega P(0) + \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{P}(0) \right)^2 \right]^{1/3}, \quad (27)$$

а  $\mathbf{F}(\varphi_0; q)$  — стандартное обозначение для неполного эллиптического интеграла первого рода [11, 14] с модулем  $q$  и

$$\varphi_0 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a - P(0)}{\sqrt{3}|a|}}, \quad q = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{sgn}(a)}{2\sqrt{2}}.$$

Очевидно, что  $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(g)$ . Поэтому в данном решении представлены оба случая:  $g > 0$  и  $g < 0$ , которые в предыдущем разделе рассматривались отдельно друг от друга, но для произвольного  $n$ .

**3.2. Случай  $n = 3$  (слабо переторможенный осциллятор Дюффинга)**

Здесь параметры, согласно (8), (9), таковы

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{3}{\sqrt{8}} \approx 1.061, \quad \alpha = 1, \quad \varepsilon = \frac{\omega}{\sqrt{2}}. \quad (28)$$

Если

$$g = \beta P^4(0) + (\omega P(0) + \sqrt{2} \dot{P}(0))^2 > 0,$$

то решение имеет вид

$$P = a e^{-\omega t / \sqrt{2}} \operatorname{cn}^{\operatorname{sgn}(\beta)} \left( \chi; 1 / \sqrt{2} \right), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\sqrt{2|\beta|}}{\omega} a \left( 1 - e^{-\omega t / \sqrt{2}} \right) - \mathbf{F} \left( \varphi_0; 1 / \sqrt{2} \right), \\ a &= \left( \frac{g}{\beta} \right)^{1/4} = \\ &= \left[ P^4(0) + \frac{1}{\beta} \left( \omega P(0) + \sqrt{2} \dot{P}(0) \right)^2 \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (30)$$

и  $\varphi_0 = \arccos(P(0)/a)$ .

Выражения (29), (30) соответствуют решению (18) для произвольного  $n$ , содержащему линейный режим. Существенно нелинейное решение, соответствующее (24), т. е. при  $g < 0$ , имеет в случае кубической нелинейности вид

$$P = \frac{|a|}{\sqrt{2}} e^{-\omega t / \sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sn}(\chi + \pi/8, q)}{\operatorname{cn}(\chi + \pi/8, q)} \right\}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= \mathbf{F} \left( \varphi_0; 1 / \sqrt{2} \right) - \sqrt{\frac{3|\beta|}{2}} \frac{|a|}{\omega} \left( 1 - e^{-\omega t / \sqrt{2}} \right), \\ \varphi_0 &= \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{2}}{a} P(0) - 1 \right) - \frac{\pi}{8}, \quad q = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, данное решение имеет место только при  $\beta < 0$ .

Интересно отметить, что случаи  $n = 2, 3$ , когда решения выписываются через эллиптические функции, далеко не единственные. Даже простейшие степенные подстановки типа  $R^{n+1} = \{u^3, u^4\}$  сводят интегралы (15) к вычисляемым классическим эллиптическим интегралам вида

$$\begin{aligned} &\int \frac{u^m du}{\sqrt{u^3 - c}}, \quad \int \frac{u^m du}{\sqrt{u^4 - cu}}, \\ &\int \frac{u^m du}{\sqrt{u^4 - c}}, \quad m \in Z, \end{aligned} \quad (33)$$

но далеко не все из них после операции обращения приведут к явным зависимостям в виде рациональных/однозначных функций от эллиптических

наподобие решений (26), (29), (31). В общем случае результатом таких обращений будет появление алгебраических функций от эллиптических или даже более сложных трансцендентных зависимостей. К примеру, первый из интегралов (33) при  $m = 1$  ( $f(P) \sim \sqrt{P}$ ) приводит к решениям вида  $R = \wp^2(\zeta^{-1}(a\xi + b; 0, 1))$  в стандартных обозначениях Вейерштрасса  $\wp$  и  $\zeta$  [10]. Такого сорта многозначности могут, однако, приводить к однозначным (т. е. физическим) зависимостям в определенных локальных областях и могут использоваться в методах возмущений. Мы не обсуждаем обширные семейства таких решений, поскольку техника их получения вовлекает теорию редукции абелевых интегралов к эллиптическим, что выходит далеко за рамки настоящей работы. Достаточно ограничиться единым (неявным) представлением решений через гипергеометрическую функцию  ${}_2F_1$ .

**3.3. Уравнения для пороговых значений**

Выявленные в предыдущем разделе условия возникновения различных качественных режимов движения переторможенных нелинейных осцилляторов могут быть найдены непосредственно из анализа решений (26), (27), (29)–(32). Это можно сделать на основе общих выражений (21), (23), и нетрудно видеть, что оба подхода эквивалентны. Покажем, как получать аналитические выражения для пороговых величин на примере наиболее показательного случая  $n = 3$ . С учетом (8) уравнение (1) переписется в виде

$$\ddot{P} + \frac{3\omega}{\sqrt{2}} \dot{P} + \omega^2 P + \beta P^3 = 0.$$

Если его решение, т. е. (29), (30), переписать с использованием  $\theta$ -функций Якоби, то зависимость от констант интегрирования сильно упрощается:

$$\begin{aligned} P(t) &= \pm \pi \vartheta_2^2(i) \frac{\omega}{\sqrt{\beta}} A \xi \frac{\theta_1(A\xi - B|i)}{\theta_3(A\xi - B|i)}, \\ \xi &= e^{-\omega t / \sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\vartheta_2(i) = \theta_2(0|i) \approx 0.9136$ ,  $A, B, \dots$  — постоянные интегрирования.

Используемые здесь функции  $\theta_k$  определяются через стандартные тета-ряды [11, 14]

$$\begin{aligned} &\theta \left[ \begin{matrix} \varepsilon \\ \delta \end{matrix} \right] (x|\tau) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \pi i \left( k + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \tau + 2\pi i \left( k + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( z + \frac{\delta}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

как

$$\theta_1 = -\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\theta_3 = \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_4 = \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Примечательно, что параметры переторможенности (25) и (28) попадают практически в середину интервала (3), который является довольно узким, но именно на него приходится единственные нетривиальные интегрируемые случаи  $n = 2, 3$ .

Упомянутый выше пороговый эффект суперкомпенсации соответствует некоторым значениям констант  $A, B$ . Поскольку решение описывает несингулярный колебательный (затухающий) процесс, всегда имеются точки  $t_k$ , где  $\dot{P}(t_k) = 0$ , и мы можем взять без потери общности любую из них в качестве начального условия. С учетом автономности уравнения положим  $\dot{P}(0) = 0$ ; положим также временно  $\omega = \beta = 1$ , что несущественно. С такими начальными данными, т. е. при  $\xi = 1$ , уравнения для констант приобретают следующий вид:

$$P(0) = \pi \vartheta_2^2(i) A \frac{\theta_1}{\theta_3} (A - B|i),$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{\theta_1}{\theta_4} (A - B|i) = -\sqrt{2} P(0).$$

Входящие сюда отношения тета-функций  $\theta(A - B|i)$  пропорциональны эллиптическим функциям  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  и  $\operatorname{dn}$ , а они, в свою очередь, связаны алгебраически. Их можно исключить, получив выражение для  $A = A(P(0))$ :

$$A = \frac{\sqrt[4]{P^4(0) + P^2(0)}}{\pi \vartheta_2^2(i)}. \quad (35)$$

Подставляя найденное уравнение в первое из предыдущих, получаем уравнение для  $B = B(P(0))$ :

$$\sqrt[4]{1 + P^{-2}(0)} = \frac{\theta_3 (A(P(0)) - B|i)}{\theta_1 (A(P(0)) - B|i)}. \quad (36)$$

Отношение тета-функций здесь — это фактически эллиптический косинус:

$$\frac{\theta_1(z|i)}{\theta_3(z|i)} = \operatorname{cn}(2Kz - K, k)$$

(при стандартных [10, 11, 14] обозначениях  $K = K(k)$  и  $k = 1/\sqrt{2}$ ), удовлетворяющий уравнению  $2(\operatorname{cn}')^2 = 1 - \operatorname{cn}^4$ . Поэтому выражение для

$B(P(0))$  сведется к обращению эллиптического косинуса, т. е. к вычислению неполного интеграла Лежандра  $\mathbf{F}(z; i)$  [10]. После упрощающих преобразований получаем

$$B = \frac{1}{\pi \vartheta_2^2(i)} \mathbf{F} \left( -\sqrt[4]{1 + P^{-2}(0)}; i \right) + \frac{\sqrt[4]{P^4(0) + P^2(0)}}{\pi \vartheta_2^2(i)} - 1, \quad (37)$$

а окончательное решение дается формулами (34), (35) и (37).

Пороговое значение  $P_{th}$  соответствует ситуации, когда график функции  $P(t)$  при  $t > 0$  пересечет горизонтальную ось:  $P = 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (нуль «приходит из бесконечности»). Из решения (34) сразу видно, что это точки  $B(P_{th}) = 0, \pm 2, \dots$ . Они определяются решением уравнения (37), куда подставлены данные значения  $B$ , и которое рассматривается как трансцендентное уравнение для  $P(0) \rightarrow P_{th}$ . Его эквивалент — уравнение (36) — имеет вид

$$\sqrt[4]{1 + P_{th}^{-2}} = \frac{\theta_3}{\theta_1} \left( \frac{\sqrt[4]{P_{th}^4 + P_{th}^2}}{\pi \vartheta_2^2(i)} \middle| i \right). \quad (38)$$

Численное решение уравнения (38) дает (после возвращения на место параметров  $\omega$  и  $\beta$ )

$$\pm P_{th} = 1.472 \frac{\omega}{\sqrt{\beta}}. \quad (39)$$

Заметим, что такого рода константы характеризуют в некотором смысле уравнение (и физику системы) (1) в целом; как сказано выше, сдвигом времени  $t$  всегда можно привести начальные данные к выбранному выше типу. Точка  $\tilde{t}$ , в которой суперкомпенсация возникает (см. рис. 1), определяется как нуль функции  $\theta_1(A\xi - B|i)$ . Отбирая положительное значение  $\tilde{t}$ , получаем

$$\tilde{t} = \sqrt{2} \ln \frac{A(P(0))}{B(P(0))},$$

где выражения для  $A(P(0))$  и  $B(P(0))$  берутся из формул (35) и (37). Выполняя аналогичные вычисления, можно вывести уравнения (они всегда будут трансцендентными) для пороговых значений во всех оставшихся случаях.

Пусть начальные условия имеют вид (20). Тогда в случае квадратичной нелинейности условия возникновения эффекта суперкомпенсации найдем из (21), полагая  $n = 2$ . При  $k = 1$  и  $k = 2$  имеем соответственно  $P_{th}^{(1)} = 0.754\omega^2/\beta$ ,  $P_{th}^{(2)} = 4.742\omega^2/\beta$ . Если начальное отклонение  $P(0)$  превосходит порог



$P_{th}^{(1)}$ , осциллятор приближается к нулевому положению равновесия через режим суперкомпенсации первого порядка (рис. 1). Если же  $P(0) > P_{th}^{(2)}$ , осциллятор проскакивает данное положение равновесия и, преодолевая локальный максимум потенциальной кривой, за конечное время (в режиме взрыва) достигает значения  $-\infty$  (рис. 3).

Обратимся теперь к случаю кубической нелинейности для выявления характера эффекта суперкомпенсации ( $\beta > 0$ ). Полагая в (21)  $n = 3$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , найдем соответственно  $P_{th}^{(1)} = 1.472\omega/\sqrt{\beta}$  (вычисленное из (38), (39)),  $P_{th}^{(2)} = 3.995\omega/\sqrt{\beta}$ ,  $P_{th}^{(3)} = 6.593\omega/\sqrt{\beta}, \dots$  При превышении абсолютной величины начального отклонения  $P(0)$  данных пороговых значений имеем приближение  $P$  к нулевому равновесному значению в режимах суперкомпенсации первого, второго, третьего и т. д. порядков (рис. 2).

Вернемся к начальным условиям (22), чтобы с помощью (23) определить пороговое значение начальной скорости, превышение которого приводит к движению в режиме взрыва (рис. 4). Для квадратичной нелинейности получаем  $|\dot{P}_{th}| = 2.251\omega^3/\beta$ . Для кубической нелинейности при  $\beta < 0$  находим  $|\dot{P}_{th}| = 2.431\omega^2/\sqrt{|\beta|}$ . Здесь, в силу симметрии относительно отражения  $P \rightarrow -P$ , толчок можно проводить в произвольном направлении.

В заключение настоящего раздела заметим, что в случае нелинейного осциллятора с квадратичной и кубической нелинейностями, но в отсутствие вязкого трения также существуют решения взрывного характера. Однако пороги их возникновения значительно ниже. Соответствующие значения легко определяются из анализа потенциальных кривых (13): при  $n = 2$  имеем  $P_{th}^{(2)} = 0.408\omega^2/\beta$ ,  $|\dot{P}_{th}| = 0.5\omega^3/\beta$ ; в случае же  $n = 3$  получаем  $|\dot{P}_{th}| = 0.5\omega^2/\sqrt{|\beta|}$ . Таким образом, вязкое трение препятствует возникновению взрывных решений, однако предотвратить их не способно в принципе.

#### 4. N-КОМПОНЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим теперь многокомпонентную систему нелинейно связанных между собой переторможенных осцилляторов, описываемых уравнениями (4). Делая, как и ранее, подстановки Куммера–Лиувилля, можно положить  $P_k = \xi^{\alpha_k} R_k(\xi)$  и рассмотреть условия однородностей для функций  $f_j(\{R_k\})$  типа соотношений

$$f_j(\{\xi^{\alpha_k} R_k\}) = \xi^{\alpha_k n_j} f_j(\{R_k\}). \quad (40)$$

Но в случае нескольких переменных количество таких вариантов значительно увеличивается и анализ усложняется. Поэтому мы остановимся на симметричном случае

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_N = \gamma,$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N = \omega, \quad n_j = n,$$

положив также  $P_j = \xi^\alpha R_j(\xi)$ , где  $\xi$  по-прежнему определяется согласно (5).

Ограничения типа (8), (9) сохраняются и мы получим автономную систему уравнений

$$R_j'' + \frac{2n+2}{(n-1)^2\omega^2} f_j(R_1, \dots, R_N) = 0, \quad (41)$$

$$j = 1, \dots, N.$$

#### 4.1. Квадратичная нелинейность

Для начала рассмотрим  $N$ -компонентную квадратично нелинейную систему, т. е. положим  $n = 2$ . Один из вариантов интегрируемой системы такого вида можно получить, задав потенциальную упругую энергию в виде

$$U = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{j=1}^N P_j^2 + \frac{1}{3}\beta P_1^3 + \beta P_1 \left( \sum_{j=2}^N P_j \right)^2,$$

что соответствует следующим уравнениям движения:

$$\ddot{P}_1 + 2\gamma\dot{P}_1 + \omega^2 P_1 + \beta \sum_{j=1}^N P_j^2 + 2\beta \sum_{j \neq k \neq 1} P_j P_k = 0, \quad (42)$$

$$\ddot{P}_m + 2\gamma\dot{P}_m + \omega^2 P_m + 2\beta P_1 P_m = 0, \quad (43)$$

$$m = 2, 3, \dots, N.$$

Положим здесь для упрощения формул и без потери общности  $\omega = \beta = 1$ ; параметры при этом берутся из формулы (25). В данной системе динамическая компонента  $P_1$  играет выделенную роль в сравнении с остальными. Действительно, из уравнения (43) следует, что если в начальный момент времени  $P_m = 0$  ( $m \geq 2$ ), то эти компоненты будут отсутствовать все последующее время. Что же касается  $P_1$ , то из уравнения (42) видно, что эта составляющая способна возбуждаться другими компонентами. По этой причине  $P_1$  можно назвать рецессивной компонентой, а все остальные — доминантными. В данной связи важно заметить, что система (42), (43) инвариантна относительно операции отражения  $P_m \rightarrow -P_m$  сразу для всех доминантных компонент ( $m \geq 2$ ), но не имеет инвариантности по

отношению к инверсии  $P_1 \rightarrow -P_1$  рецессивной составляющей.

После использования преобразования Куммера – Лиувилля (6) приходим к системе (41), которая в нашем случае имеет вид

$$R_1'' + 6 \left( \sum_{j=1}^N R_j^2 + 2 \sum_{j \neq k \neq 1} R_j R_k \right) = 0, \quad (44)$$

$$R_m'' + 12R_1 R_m = 0, \quad m = 2, 3, \dots, N. \quad (45)$$

Введем функции

$$R_+ = R_1 + \sum_{j=2}^N R_j \quad \text{и} \quad R_- = R_1 - \sum_{j=2}^N R_j.$$

Нетрудно видеть, что для них справедливы уравнения

$$R_+'' + 6R_+^2 = 0, \quad R_-'' + 6R_-^2 = 0, \quad (46)$$

которые с очевидностью интегрируются в эллиптических функциях,

$$R_{\pm} = -\wp(\xi - \xi_0^{\pm}; 0, a^{\pm}),$$

с произвольными сдвигами  $\xi_0^{\pm}$ , вейерштрассовым параметром  $g_3 = a^{\pm}$  и нулевым параметром  $g_2$ . Из соотношений

$$R_1 = \frac{1}{2}(R_+ + R_-), \quad R_2 = \frac{1}{2}(R_+ - R_-)$$

получаем

$$\begin{aligned} 2R_1 &= -\wp(\xi - \xi_0^+; 0, a^+) - \wp(\xi - \xi_0^-; 0, a^-), \\ 2R_2 &= \pm \wp(\xi - \xi_0^+; 0, a^+) \mp \wp(\xi - \xi_0^-; 0, a^-), \end{aligned} \quad (47)$$

следовательно, оставшиеся компоненты  $R_m, m > 2$ , находятся путем интегрирования одного и того же линейного уравнения (45):

$$R_m'' = 6 \{ \wp(\xi - \xi_0^+; 0, a^+) + \wp(\xi - \xi_0^-; 0, a^-) \} R_m. \quad (48)$$

«Линейные константы» интегрирования этих уравнений будут, вместе с  $(\xi_0^{\pm}, a^{\pm})$ , константами и исходной нелинейной системы (44), (45).

В случае попарного равенства параметров  $(\xi_0^+, a^+) = (\xi_0^-, a^-)$  уравнение (48) превращается в хорошо известный (интегрируемый) случай трехзонного потенциала Ламе для уравнения Шредингера

$$\Psi'' - 12\wp(x; 0, g_3)\Psi = E\Psi$$

при фиксированном уровне энергии  $E = 0$ . Если  $a^+ = a^-$  и разность  $\xi_0^+ - \xi_0^-$  равна полупериоду  $p$  функции Вейерштрасса  $\wp$ , то получаем другой вариант уравнения:

$$\Psi'' = 6 \{ \wp(x; 0, g_3) + \wp(x - p; 0, g_3) \} \Psi,$$

который тоже относится к разряду конечнозонных интегрируемых, но уже эквивалентному двухзонному потенциалу Ламе  $u = 6\wp(x)$  [14]. Более любопытным и, по всей видимости, не фигурирующим в литературе является тот факт, что линейное уравнение (48) решается при всех значениях присутствующих там констант. Приведем решение для справок. Непосредственной проверкой устанавливается, что параметры  $\{\xi_0, a^{\pm}, 6, 0\}$  являются довольно «жесткими»; их вариации обобщаются лишь на следующее уравнение и его решение:

$$\Psi'' = 6 \{ \wp(x; b, a) + \wp(x - c; b, a') \} \Psi, \quad (49)$$

$$\Psi = \wp(x; b, a) - \wp(x - c; b, a'). \quad (50)$$

Разумеется, по соотношению однородности

$$\wp(z; g_2, g_3) = \alpha^{-2} \wp(\alpha^{-1}z; \alpha^4 g_2, \alpha^6 g_3)$$

уравнение (49) содержит только три эффективных параметра, т. е.

$$\Psi'' = 6 \{ \wp(x; 1, a) + \wp(x - c; 1, a') \} \Psi,$$

и с ними допустимы «операции» с вырождениями; например, простая сумма солитона с периодической кноидальной волной.

Второе решение, линейно независимое от  $\Psi$ , выписывается, как обычно, по формуле Лиувилля  $\Psi \int \Psi^{-2} dx$ , но представимость его в определенных функциях не известна; это однако не мешает уравнению быть интегрируемым в квадратурах.

Формальная интерпретация решения (50) такова, что оно представляет собой прямую сумму/наложение двух стандартных (вообще говоря, комплексных) кноидальных колебаний  $k_1^2 \text{sn}^2(ax; k_1)$  и  $k_2^2 \text{sn}^2(bx - \Delta; k_2)$  с произвольным взаимным расположением  $\Delta$ , произвольными якобиевыми периодами  $\{4K_1, 2iK_1'\}$ ,  $\{4K_2, 2iK_2'\}$  и с одним колебанием, смещенным вверх относительно другого. Вопросы вещественности и несингулярности оставляем в стороне. Использование затем обратного преобразования Куммера – Лиувилля даст представление для решений  $P_j(t)$ .

По причине исключительности интегрируемых диссипативных случаев и их важности в прикладных вопросах остановимся детальнее на двухкомпонентных вариантах.

Здесь можно временно отвлечься от системы (44), (45), записав более общую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{P}_1 + 2\gamma\dot{P}_1 + \omega^2 P_1 + \beta_1 P_1^2 + \beta_2 P_2^2 &= 0, \\ \ddot{P}_2 + 2\gamma\dot{P}_2 + \omega^2 P_2 + 2\beta_{12} P_1 P_2 &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

с некоторыми заданными  $\beta_1, \beta_2, \beta_{12}$ . После преобразования Куммера–Лиувилля получаем

$$R_1'' + b_1 R_1^2 + b_2 R_2^2 = 0, \quad R_2'' + 2b_{12} R_1 R_2 = 0,$$

где  $b_1 = 6\beta_1/\omega^2, b_2 = 6\beta_2/\omega^2, b_{12} = 6\beta_{12}/\omega^2$ .

Данные уравнения принадлежат к типу систем Хенона–Хейлеса [15–17], привлекающих к себе большое внимание последние десятилетия в связи с обширными приложениями и богатыми математическими свойствами. Помимо первоначального открытия данных систем для астрофизических объектов с хаотическим поведением, в последнее время были установлены их полностью интегрируемые случаи. Таких случаев немного, они соответствуют специфическим значениям параметров  $b$ , для них развиты соответствующие (порой нетривиальные [17]) процедуры интегрирования через разделение переменных Гамильтона–Якоби и есть смысл привести для справок замкнутый пример, укладывающийся в нашу схему (44). В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \ddot{P}_1 + 2\gamma\dot{P}_1 + P_1 + P_1^2 + P_2^2 &= 0, \\ \gamma &= \frac{5}{\sqrt{24}}, \\ \ddot{P}_2 + 2\gamma\dot{P}_2 + P_2 + 2P_1 P_2 &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Сделаем краткое отступление. Если нелинейность обладает свойством однородности (40) (см., например, кубически нелинейные двухкомпонентные системы в [18] или [19]), мы можем обратить нашу схему (6), (7) и генерировать диссипативные системы из консервативных. Таким образом, количество решаемых задач сокращается. Однако из-за проблем вещественности и подгонки параметров задачи  $\{\alpha, \gamma, \varepsilon\}$  к их реалистичным значениям, класс физически осмысленных диссипативных уравнений сужается еще более.

Возвращаясь к уравнениям (52), отметим, что данная модель описывает, например, динамику двухкомпонентного параметра порядка несимметричной фазы какой-либо среды в окрестности фазового перехода второго рода. Это может быть сегнетоэлектрик типа смещения [2] ниже температуры Кюри. В этом случае  $P_1$  и  $P_2$  есть соответственно параллельная и перпендикулярная к сегнетоэлектрической оси компоненты возмущения

поляризации сегнетоэлектрика. Возможно, система (52) найдет свои приложения и в биофизике для описания процесса восстановления организма после интенсивных нагрузок [13].

Итак, после преобразования Куммера–Лиувилля из системы (52) выводим уравнения

$$R_1'' + 6(R_1^2 + R_2^2) = 0, \quad R_2'' + 12R_1 R_2 = 0.$$

Их общее решение дается выражениями (47).

Поскольку вейерштрассовы параметры  $g_2, g_3$  соответствуют классической эквиангармонической ситуации  $g_2 = 0$  [11], мы можем свести их к каноническому случаю  $(g_2, g_3) = (0, 1)$  или одному якобиевскому модулю  $k^2 = (1 - i\sqrt{3})/2$ , из-за того что в этом случае  $k^4 - k^2 + 1 = 0$ . Конвертируя тогда результат в более привычные для приложений эллиптические функции Якоби (по правилу  $\wp \sim \text{sn}^2$  [11, 14]), получаем решение уравнений (52) в виде сложно скоррелированной суммы модулированных кноидальных колебаний с экспоненциально убывающими переменными:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \xi^2 R_1(\xi), \quad P_2(t) = \xi^2 R_2(\xi), \\ \xi &= e^{-t/\sqrt{6}}, \\ R_1(\xi) &= -\frac{k^2}{2} \left\{ a^2 \text{sn}^2(a\xi - \Delta_1; k) + \right. \\ &\quad \left. + b^2 \text{sn}^2(b\xi - \Delta_2; k) + \frac{1}{3}(k^2 - 2)(a^2 + b^2) \right\}, \\ R_2(\xi) &= \pm \frac{k^2}{2} \left\{ a^2 \text{sn}^2(a\xi - \Delta_1; k) - \right. \\ &\quad \left. - b^2 \text{sn}^2(b\xi - \Delta_2; k) + \frac{1}{3}(k^2 - 2)(a^2 - b^2) \right\}, \end{aligned} \quad (53)$$

где константы  $\Delta_1, \Delta_2, a, b$  произвольны.

Слегка более сложной в плане формул, но более удобной с точки зрения вещественности, может являться другая форма решения уравнения (46). Она связана с параметризацией эквиангармонической эллиптической кривой  $Y^2 = X^3 - 1$  якобиевой парой [14, с. 425]

$$X = 1 - \sqrt{3} \frac{1 - \text{cn}(\xi; \kappa)}{1 + \text{cn}(\xi; \kappa)}, \quad Y = 2\sqrt{27} \frac{\text{sn}(\xi; \kappa) \text{dn}(\xi; \kappa)}{(1 + \text{cn}(\xi; \kappa))^2}$$

с вещественным модулем

$$\kappa = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

и периодом  $4K(\kappa) \approx 6.393$ .

Заметим, что эта же параметризация объясняет и структуру решения (26) (см. также [11]). Итак, общее решение уравнений (46) можно переписать в виде

$$R_{\pm}(\xi) = -a_{\pm}^2 \left\{ \frac{1}{4} \frac{1 - \operatorname{cn}(a_{\pm}\xi - \Delta_{\pm}; \kappa)}{1 + \operatorname{cn}(a_{\pm}\xi - \Delta_{\pm}; \kappa)} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right\}$$

с последующей простой модификацией формул (53). Все вещественные решения тогда отбираются, как обычно в эквиангармоническом случае [11], из аргументов  $a_{\pm}\xi - \Delta_{\pm}$ , лежащих на границе  $(1/4)$ -параллелограмма периодов  $\{2K, K + iK'\}$  функции  $\operatorname{cn}$  при всевозможных вещественных или чисто мнимых значениях параметра  $a_{\pm}$ .

#### 4.2. Кубическая нелинейность

Рассмотрим теперь полиномиально кубические однородные нелинейности, т. е. положим  $n = 3$ . При этом количество осцилляторов  $N$  будем считать произвольным. Их естественно называть системой связанных осцилляторов Дюффинга. Итак, пусть

$$f_j = \sum_{k=1}^N b_{kj} R_k^2 R_j, \quad (54)$$

где  $b_{kj} = b_{jk}$ .

Система (41), (54) имеет первый интеграл

$$\sum_{j=1}^N R_j'^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N b_{jj} R_j^4 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_{jk} R_j^2 R_k^2 = \text{const.} \quad (55)$$

Рассмотрим далее «сферически»-симметричный случай  $b_{jk} = b$ . Тогда система (41) примет вид

$$\mathbf{R}'' + b|\mathbf{R}|^2 \mathbf{R} = 0, \quad (56)$$

а интеграл (55) запишется как

$$|\mathbf{R}'|^2 + \frac{b}{2} |\mathbf{R}|^4 = H, \quad H = \text{const}, \quad (57)$$

где мы ввели вектор  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)^T$  и  $|\mathbf{R}|^2 = R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_N^2$ .

Уравнения (56) являются частным случаем системы интегрируемых ангармонических осцилляторов [19, § 3.10]. Тем не менее из методических соображений очертим схему ее прямого интегрирования в квадратурах.

От набора переменных  $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  перейдем к  $N$ -мерной сферической системе координат  $(R, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{N-2})$  по правилу [20]

$$\begin{aligned} R_1 &= R \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2}, \\ R_2 &= R \sin \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2}, \\ R_3 &= R \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2}, \\ R_4 &= R \cos \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{N-2}, \\ &\dots \\ R_N &= R \cos \theta_{N-2}. \end{aligned}$$

Такой подход уже отмечался в лекциях Якоби [21, с. 163] в контексте другой динамической системы. Уравнение (57) примет вид

$$\begin{aligned} H &= (R')^2 + R^2 [(\varphi')^2 \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{N-2} + \\ &+ (\theta_1')^2 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{N-2} + \dots + (\theta_{N-3}')^2 \sin^2 \theta_{N-2} + \\ &+ (\theta_{N-2}')^2] + \frac{b}{2} R^4, \end{aligned}$$

при котором функцию  $H$  будем рассматривать как функцию Гамильтона

$$H = \mathbb{H}(R, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-2}; \theta_0', \theta_1', \dots, \theta_{N-2}')$$

от обобщенных координат  $(R, \theta)$  и обобщенных скоростей  $(R', \theta')$ . Потенциальной энергией будем считать последнее слагаемое  $bR^4/2$ , а остальные — кинетической энергией. Тогда в соответствующей функции Лагранжа

$$\begin{aligned} L(R, \theta, R', \theta') &= (R')^2 + R^2 \times \\ &\times \sum_{k=0}^{N-2} \theta_k'^2 \prod_{j=k+1}^{N-2} \sin^2 \theta_j - \frac{b}{2} R^4 \end{aligned}$$

координата  $\varphi = \theta_0$  будет, очевидно, циклической. Отсюда приходим к системе уравнений для угловых переменных:

$$\frac{d}{d\xi} \{R^2 \varphi' \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{N-2}\} = 0, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \{R^2 \theta_1' \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{N-2}\} &= \\ &= R^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 (\varphi')^2 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{N-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \{R^2 \theta_2' \sin^2 \theta_3 \dots \sin^2 \theta_{N-2}\} &= R^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \times \\ &\times \{(\varphi')^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_3 + (\theta_1')^2 \sin^2 \theta_3\}, \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \{R^2 \theta_{N-2}'\} &= R^2 \sin \theta_{N-2} \cos \theta_{N-2} \times \\ &\times \{(\varphi')^2 \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{N-3} + \\ &+ (\theta_1')^2 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{N-3} + \dots + (\theta_{N-3}')^2\}. \end{aligned}$$

Из уравнения (58) находим закон сохранения нулевой компоненты «момента импульса»:

$$R^2 \varphi' \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{N-2} = I_0.$$

Выражая отсюда  $\varphi'$  и подставляя в следующее за (58) уравнение, после домножения его на  $R^2 \theta_1' \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{N-2}$  приходим к еще одному интегралу движения

$$R^4 (\theta_1')^2 \sin^4 \theta_2 \dots \sin^4 \theta_{N-2} + \frac{I_0^2}{\sin^2 \theta_1} = 4I_1^2.$$

Далее по цепочке находим серию интегралов, которые можно представить в виде

$$R^4 \prod_{j=k+1}^{N-2} \sin^4 \theta_j (\theta_k')^2 + \frac{I_{k-1}^2}{\sin^2 \theta_k} = 4I_k^2, \quad (59)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-2.$$

Выразив  $(\theta_k')^2$  из (59) и подставив в (55), получим

$$(R')^2 + 4 \frac{I_{N-2}^2}{R^2} + \frac{1}{2} R^4 = H.$$

Это уравнение легко интегрируется в эллиптических функциях:

$$R = \sqrt{-2\wp(\xi + B; H, 2I_{N-2})}, \quad (60)$$

где  $B$  — постоянная интегрирования.

Теперь в обратном порядке, с  $k = N-2$  до  $k = 0$ , можно последовательно проинтегрировать цепочку (59), получая на каждом шаге уравнение вида

$$R^4 \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 = -\frac{h^4}{\sin^2 \theta} + a^2,$$

функциональная форма решения которого записывается как

$$\theta(\xi) : \quad \cos \theta = \sqrt{1 - h^4 a^{-2}} \times$$

$$\times \cos \left\{ \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\wp(x + c; b, a^2)} + \text{const} \right\}.$$

Итак, в развернутой форме имеем следующую серию квадратур для определения  $\theta_k = \theta_k(\xi)$ :

$$\cos \theta_{N-2} = \sqrt{1 - I_{N-3}^2 I_{N-2}^{-2}} \times$$

$$\times \cos \left\{ I_{N-2} \int \frac{dx}{R^2(x)} + B_{N-2} \right\},$$

$$\cos \theta_{N-3} = \sqrt{1 - I_{N-4}^2 I_{N-3}^{-2}} \times$$

$$\times \cos \left\{ I_{N-3} \int \frac{dx}{R^2(x) \sin^2 \theta_{N-2}(x)} + B_{N-3} \right\}, \quad (61)$$

$$\dots$$

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - I_0^2 I_1^{-2}} \times$$

$$\times \cos \left\{ I_1 \int \frac{dx}{R^2(x) \sin^2 \theta_{N-2}(x) \dots \sin^2 \theta_2(x)} + \right.$$

$$\left. + B_1 \right\}$$

и

$$\varphi = I_0 \int \frac{dx}{R^2(x) \prod_{j=1}^{N-2} \sin^2 \theta_j(x)} + B_0.$$

Здесь  $B_k$  — постоянные интегрирования.

В единой форме эти выражения можно записать как

$$\theta_k(\xi) : \quad \cos \theta_k = \sqrt{1 - I_{k-1}^2 I_k^{-2}} \times$$

$$\times \cos \left\{ I_k \int \frac{dx}{R^2(x) \prod_{j=k+1}^{N-2} \sin^2 \theta_j(x)} + B_k \right\} \quad (62)$$

при  $k = N-2, N-3, \dots, 1, 0$ , считая, что  $I_{-1} = 0$ .

Выписанная выше процедура последовательного интегрирования влечет следующее любопытное наблюдение чисто технического характера. Поскольку система (56) относится к разряду вполне интегрируемых из-за наличия  $[L, A]$ -пар [19, 22]), ее решения записываются в терминах общих тета-функций. С другой стороны, зацепляющаяся структура квадратур (61), (62) начинается от эллиптического интеграла (61). Отсюда следует, что данного вида вложенные интегралы от предыдущих интегралов берутся в тета-функциях, тогда как известно, что уже интегралы от эллиптических интегралов, вообще говоря, не выражаются в тета-функциях. Например, в случае трехкомпонентной системы  $(R, \varphi, \theta)$ , переходя к вейерштрассову базису функций  $\sigma, \zeta, \wp$  (в

нем, как известно, зависимости от параметров проще), нетрудно получить следующие формулы:

$$R^2 = -2\varphi(\xi + c),$$

$$\theta(\xi) : \quad \cos \theta = \sqrt{1 - h^4 a^{-2}} \times \\ \times \cos \left\{ \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\varphi(x + c)} + \text{const} \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \sqrt{1 - h^4 a^{-2}} \sqrt{S + S^{-1} + 2},$$

где

$$S = A \frac{\sigma(\xi + c - \alpha)}{\sigma(\xi + c + \alpha)} e^{2\zeta(\alpha)\xi},$$

а величину  $\alpha$  следует понимать как эллиптический интеграл в канонической форме Вейерштрасса

$$\alpha = \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - bz - a^2}} = \dots$$

Эта функция  $\alpha = \alpha(a, b)$  от констант интегрирования при необходимости представима через табличный объект — интеграл Лежандра:

$$\dots = -\frac{1}{\sqrt{e' - e''}} \mathbf{F} \left( \sqrt{1 - \frac{e'}{e}}, \sqrt{\frac{e'' - e}{e' - e}} \right),$$

где

$$4(z - e)(z - e')(z - e'') = 4z^3 - bz - a^2.$$

После всего фаза  $\varphi$  находится интегрированием выражения

$$\varphi = - \int \frac{a^2 h^2 dx}{\varphi(x+c) \{4a^2 - (a^2 - h^4)(S + S^{-1} + 2)\}} + \varphi_0,$$

которое и относится заведомо к отмеченному выше типу «интеграл от интеграла».

Добавим, что если свойство интегрируемости методами  $[L, A]$ -пар приложимо и к рассмотренной выше системе (44), (45) при  $N > 2$ , то второе линейно независимое решение (49), (50) тоже выражается в терминах тета-функций. Можно привести соображения, что это будут, по всей видимости, эллиптические тета-функции. Уравнение (49), с одной стороны, выглядит достаточно простым, а, с другой стороны, — нетривиальным, так как трансцендентным образом содержит три свободных параметра.

Таким образом, мы нашли решение  $N$ -компонентной системы переторможенных осцилляторов Дюффинга при условиях (8), (9) и «сферической симметрии» нелинейности в пространстве динамических компонент  $P_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Постоянные  $(H, B, I_k, B_k)$  интегрирования находятся из начальных условий

$$\{P_1(0), P_2(0), \dots, P_N(0), \dot{P}_1(0), \dot{P}_2(0), \dots, \dot{P}_N(0)\};$$

формулы показывают, что все решения вещественны.

Рассмотрим специальный класс начальных условий, имеющих вид (20) для каждой компоненты  $P_j$ . Легко видеть, что в этом случае все компоненты «углового момента»  $I_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 2$ , обращаются в нуль. Тогда  $\theta_j = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$  и нетрудно показать, что многокомпонентные решения (60), (62) переходят в (29) с учетом замены

$$R \rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^N P_j^2}.$$

При этом условия возникновения режима суперкомпенсации совпадают с найденными в предыдущем разделе, но при замене

$$P(0) \rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^N P_j^2(0)}.$$

Интересно, что возможна ситуация, когда величина начального отклонения  $P_j(0)$  каждого осциллятора меньше порогового значения  $P_{th}$ ; тем не менее дальнейшее приближение каждого из них к положению равновесия происходит в синхронном релаксационно-колебательном режиме с наличием фазы суперкомпенсации. Этот эффект становится понятен, так как при постоянных во времени углах  $\varphi$  и  $\theta_j$  можно провести такое преобразование поворота  $N$ -мерной сферы, что все компоненты, за исключением одной, обратятся в нуль. Тогда имеем сугубо однокомпонентный случай, рассмотренный в предыдущем разделе. Аналогичная ситуация имеет место при нахождении порогового условия для появления взрывного характера движения.

Аналогично тому, как это было сделано с квадратичной нелинейностью (51), сделаем замечание по двухкомпонентной системе осцилляторов Дюффинга:

$$\ddot{P}_1 + 2\gamma\dot{P}_1 + \omega^2 P_1 + \beta_1 P_1^3 + \beta_{12} P_2^2 P_1 = 0,$$

$$\ddot{P}_2 + 2\gamma\dot{P}_2 + \omega^2 P_2 + \beta_2 P_2^3 + \beta_{12} P_1^2 P_2 = 0.$$

В отличие от рассмотренной выше симметричной  $N$ -компонентной модели, здесь, вообще говоря,  $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_{12}$ . После преобразования Куммера–Лиувилля будем иметь отсюда

$$R_1'' + b_1 R_1^3 + b_{12} R_2^3 R_1 = 0, \quad R_2'' + b_2 R_2^3 + b_{12} R_1^3 R_2 = 0.$$

При определенных соотношениях между параметрами  $b$  системы такого типа тоже попадают в (немногочисленную) серию интегрируемых случаев, найденных в рамках нетривиальных обобщений классических уравнений Хенона–Хейлеса [17, 18].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренное в настоящей работе движение слабо переторможенных осцилляторов (1), (4) с произвольной степенью нелинейности сводится к интегрируемому случаю Эмдена–Фаулера (12). Особое внимание мы уделили случаям квадратичной и кубической нелинейностей. Для обеих ситуаций определены нелинейные пороговые условия для возникновения движений в режимах суперкомпенсации и взрыва. Здесь следовало бы сделать одно уточнение. Взрывной режим подразумевает устремление координаты осциллятора к бесконечности за конечное время. В таких условиях возникает естественный вопрос об ограниченной применимости нелинейности степенного характера. Обычно такая нелинейность возникает при разложении возвращающей силы в ряд Тейлора по малому параметру смещения  $P$ . Понятно, что при  $P \rightarrow \infty$  такая процедура теряет законную силу. Поэтому в таких ситуациях следует рассматривать более сложные зависимости  $f(P)$  и прибегать к численным методам. Этот же вопрос может касаться реализации высших порядков эффекта суперкомпенсации. С другой стороны, исследованные здесь аналитические решения, хорошо предсказывая взрывные режимы, указывают на определенные тенденции в динамике. Далее можно рассмотреть сложные (нестепенные) зависимости  $f(P)$ , например, разбивая их на несколько участков, внутри каждого из которых зависимость может быть аппроксимирована некоторой степенью  $P$ . Тогда, сшивая между собой решения на границах соседних участков, можно проследить динамику переторможенных осцилляторов на больших интервалах изменения координаты  $P$ .

Что касается многокомпонентных осцилляторов, то количество параметров здесь намного больше, чем в однокомпонентном случае: степени нелинейности и ее коэффициенты  $\beta_{jk}$ , однородности  $n_j$ , коэффициенты диссипации  $\gamma_j$  и частоты  $\omega_j$ . Их вы-

бор и поиск параметров  $\alpha_j$  следует подстраивать к получению автономных (по  $\xi$ ) уравнений с последующим выделением интегрируемых случаев [19, 22]. Это обстоятельство открывает перспективные возможности работы в данном направлении.

Для приближенного аналитического исследования (1) при условии (2), несмотря на то что есть малый параметр  $(\gamma - \omega)/\omega \ll 1$ , нельзя в качестве затравочного использовать решение линейного уравнения, соответствующего  $\beta = 0$ , так как нелинейность здесь качественным образом способна изменить характер движения. Данная ситуация в некоторой степени аналогична тому, что, как известно, метод последовательных приближений по параметру нелинейности оказывается непригодным для построения теории фазовых переходов. Естественным образом возникает вопрос о построении теории возмущений для движения нелинейных переторможенных осцилляторов на основе рассмотренных здесь затравочных точных решений. Построение такой схемы способствовало бы получению приближенных решений при значениях параметра  $\gamma/\omega$ , заполняющих всю вещественную ось.

Авторы благодарят А. А. Зайцева (Калининградский государственный технический университет), многолетнее сотрудничество и неформальное общение с которым способствовало появлению представленных в настоящей работе исследований.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-02-00199а), проекта № 2.3684.2011 Томского государственного университета и Федеральной целевой программы (контракт 14 В37.21.0911).

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Найфэ, *Введение в методы возмущений*, Мир, Москва (1984).
2. Б. А. Струков, А. П. Леванюк, *Физические основы сегнетоэлектрических явлений*, Наука, Москва (1983).
3. А. А. Зайцев, С. В. Сазонов, *Биофизика* **42**, 521 (1997).
4. А. Д. Долгов, Я. Б. Зельдович, М. В. Сажин, *Космология ранней Вселенной*, МГУ, Москва (1988).
5. А. Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, Москва (1990).

6. Л. М. Беркович, *Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений*, РХД, Москва (2002).
7. K. S. Govinder and P. G. L. Leach, *J. Nonlinear Math. Phys.* **14**, 443 (2007).
8. N. Euler, *J. Nonlinear Math. Phys.* **4**, 310 (1997).
9. N. Euler, W.-H. Steeb, and K. Cygus, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L195 (1989).
10. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции*, Наука, Москва (1967).
11. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений*, 4-е изд. Физматлит, Москва (1963).
13. Ю. В. Брежнев, А. А. Зайцев, С. В. Сазонов, *Биофизика* **56**, 342 (2011).
14. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа. II*, Физматлит, Москва (1963).
15. M. Henon and C. Heiles, *Astrophys. J.* **69**, 73 (1964).
16. Н. А. Кудряшов, *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, ИКИ, Москва–Ижевск (2004).
17. R. Conte and M. Musette, *The Painlevé Handbook*, Springer, Berlin (2008).
18. S. Baker, V. Z. Enolskii, and A. P. Fordy, *Phys. Lett. A* **201**, 167 (1995).
19. А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Наука, Москва (1990).
20. Д. Иваненко, А. Соколов, *Классическая теория поля*, Гостехиздат, Москва (1951).
21. К. Якоби, *Лекции по динамике*, ОНТИ, Москва–Ленинград (1936).
22. А. Б. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем*, ИКИ, Москва–Ижевск (2003).