ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Управление, вычислительная техника и информатика № 1 (30)

УДК 658.512

Ю.И. Параев, А.И. Рюмкин, С.А. Цветницкая

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРУДОВОЙ МИГРАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ

Предложена динамическая модель гипотезы Тибу для изучения межрегиональных потоков трудовых ресурсов. Эта модель позволяет формализовать процесс управления трудовой миграцией за счет перераспределения капитальных вложений между регионами. Рассмотрена задача об оптимальном распределении трудовых ресурсов между регионами с целью максимизации суммарной производственной эффективности всех регионов.
Ключевые слова: миграция населения; гипотеза Тибу; распределение трудовых ресурсов; бюджетный федерализм.

К числу важнейших проблем современного государственного управления относится эффективное разделение компетенции и необходимых управленческих ресурсов между уровнями управленческой иерархии. При наличии политической и экономической неоднородности юрисдикций (регионов, муниципалитетов) такие процессы получили название бюджетного федерализма.

Одной из возникающих здесь проблем является распределение трудовых ресурсов, в частности управление миграционными потоками. В 1956 г. Ч. Тибу [1] выдвинул гипотезу, что различие предпочтений населения относительно общественных благ и возможность перемещения между регионами (голосование ногами) позволяют обеспечить эффективное пространственное распределение населения между юрисдикциями. Работа Тибу долгое время оставалась невостребованной, но позднее породила большой поток публикаций, включая смежные задачи макроэкономики, например [2–10]. При этом следует отметить, что практически все эти работы ведутся в рамках статического равновесного анализа, привычного для математической экономики, но неадекватного, на наш взгляд, реальной динамической природе протекающих процессов. В настоящей работе предлагается динамическая модель гипотезы Тибу для изучения межрегиональных миграционных потоков. Исследован также процесс конкурентного ресурсного взаимодействия регионов, взаимосвязанных по миграции, зависящей от величин фондов развития региона.

1. Модель динамики миграции

Будем рассматривать n регионов, имеющих собственную экономику и основные производственные ресурсы, свободно перемещающиеся между ними. Полагаем, что численность населения региона является существенным показателем, характеризующим значимость его экономики. Обозначим через $x_i(k)$ количество трудового населения (далее просто населения) в i-м регионе на k-м временном шаге. Можно записать разностное уравнение для динамики изменения населения

$$x_i(k+1) = x_i(k) + W_i(k) - Y_i(k),\ \ i = 1,\ldots,n,\ k = 0,1,\ldots, \tag{1}$$

где $W_i(k)$ – количество населения, приехавшего в i-й регион; $Y_i(k)$ – количество населения, убывшего из этого региона. Здесь для простоты опущено естественное изменение (прирост или убыль) населения. Это связано с тем, что этот процесс достаточно медленный. Кроме того, данное изменение легко учесть в полученных ниже результатах. Из этого допущения следует, что общее количество населения во всех регионах на каждом временном шаге остается постоянным. Поскольку должно выполняться условие $0 \le Y_i(k) \le x_i(k)$, то удобно записать

$$Y_i(k) = \sum_{j=1}^{n} z_{ji}(k) x_i(k) \le x_i(k), \tag{2}$$

где $z_{ji}(k)$ – доля населения i-го региона, переехавшего в j-й регион. Очевидно, должны выполняться условия

$$z_{ii}(k) = 0,\ 0 \le z_{ji}(k) \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} z_{ji}(k) \le 1,\ i = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

Аналогично

$$W_i(k) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(k) x_j(k). \qquad (4)$$

Подставляя (2) и (4) в (1), получаем систему линейных разносных уравнений, которую удобно записать в векторной форме

$$x(k+1) = A(k)\, x(k),\ k = 0,1,\dots . \qquad (5)$$

Здесь $x(k)$ – вектор-столбец, составленный из $x_1(k),\dots, x_n(k)$,

$$A(k) = \begin{bmatrix} 1-w_1(k) & z_{12}(k) & \cdots & z_{1n}(k) \\ z_{21}(k) & 1-w_2(k) & \cdots & z_{2n}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1}(k) & z_{n2}(k) & \cdots & 1-w_n(k) \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

где

$$w_i(k) = \sum_{j=1}^{n} z_{ji}(k) \le 1,\ i = 1,\dots,n.$$

Коэффициент $z_{ji}(k)$ условно назовем коэффициентом миграции из i-го региона в j-й. Эти коэффициенты определяются факторами, присущими каждому региону. Данные факторы можно разделить на две группы. К первой группе относятся постоянные факторы, например климат, культурный уровень, политическая стабильность и т.п. Можно ввести некоторую обобщенную характеристику этих факторов – рейтинг i-го региона, которую обозначим через q_i. Ко второй группе относятся экономические факторы. В данной работе в качестве экономического фактора выбирается отношение капитальных вложений $Z_i(k)$ в i-й регион к количеству населения $x_i(k)$. Эту величину $U_i(k) = Z_i(k)/x_i(k)$ можно считать экономической характеристикой привлекательности i-го региона. Таким образом, суммарным фактором для i-го региона является величина

$$h_i(k) = q_i + \frac{Z_i(k)}{x_i(k)}.$$

Заметим, что факторы первого и второго видов имеют разную природу и, следовательно, разную размерность. Поэтому при их сложении факторы должны умножаться на какие-то весовые коэффициенты, которые на практике определяются в результате проведения соответствующего мониторинга. Здесь предполагается, что эти весовые коэффициенты уже учтены.

Согласно гипотезе Тибу [1], происходит перемещение населения из регионов с низким суммарным фактором в регионы с высоким суммарным фактором, причем пропорционально разности между этими факторами. Математически это можно представить как

$$z_{ji}(k) = b_{ji}\, \sigma\{h_j(k) - h_i(k)\}, \qquad (7)$$

где

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x \le 0, \end{cases}$$

b_{ji} – коэффициент, характеризующий активность жителей i-го региона переехать в j-й регион. Например, это может быть связано с наличием средств для проезда из региона в регион, менталитетом и т.п. Кроме того, выбор этих коэффициентов должен обеспечивать выполнение условия (3).

В схеме (5) возможен установившийся режим, когда миграции между регионами нет. Это соответствует случаю, когда факторы всех регионов одинаковы, т.е. когда

$$q_1 + \frac{Z_1(k)}{x_1(k)} = \dots = q_n + \frac{Z_n(k)}{x_n(k)} = h^*. \qquad (8)$$

В частности, если капитальные вложения заданы, т.е. $Z_i = \overline{Z}_i, i = 1,\dots,n,$ то соответствующее количество населения в установившемся режиме равно

$$\overline{x}_i = \frac{\overline{Z}_i}{h^* - q_i},\ i = 1,\dots,n.$$

2. Задача управления

Из предложенной модели следует, что управление миграцией населения может осуществляться за счет перераспределения капитальных вложений между регионами. Предлагается следующий подход к решению этой задачи. Эффективность экономической деятельности в регионе естественно отразить с помощью производственной функции. Пусть $V_i(x_i)$ – производственная функция i-го региона. Здесь будем учитывать зависимость этой функции только от количества трудового населения. Тогда за критерий эффективности всей системы регионов естественно принять сумму

$$J = \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i). \tag{9}$$

Можно поставить задачу об оптимальном распределении трудовых ресурсов по регионам, при котором функционал (9) максимален. Эта задача достаточно легко решается с помощью метода множителей Лагранжа. Поскольку производственные функции для регионов и общее количество населения постоянны, то получаем постоянные значения $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$, при которых (9) максимально. Например, следуя [11, 12], в качестве аппроксимации производственных возможностей региона можно взять квадратическую зависимость

$$V_i = c_i x_i - \frac{1}{2} d_i x_i^2,$$

где c_i и d_i – заданные коэффициенты. Тогда критерием эффективности всей системы регионов будет сумма

$$J = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i x_i - \frac{1}{2} d_i x_i^2 \right). \tag{10}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i x_i - \frac{1}{2} d_i x_i^2 \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - X_0 \right),$$

где μ – множитель Лагранжа, X_0 – общее количество трудовых ресурсов во всех регионах. Приравнивая к нулю производные функции L по x_i, получаем, что максимум этой функции достигается при значениях

$$\bar{x}_i = \frac{c_i + \mu}{d_i}, \; i = 1, ..., n. \tag{11}$$

Множитель Лагранжа находится из условия $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = X_0$. В результате получаем

$$\mu = \frac{X_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{d_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i}}.$$

Если оптимальные значения $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$ найдены, то из (8) можно найти соответствующие значения капитальных вложений $\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_n$ в регионы, при которых должен быть установившийся режим. Эти значения должны удовлетворять уравнениям

$$q_1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{x}_1} = ... = q_n + \frac{\bar{Z}_n}{\bar{x}_n} = h^*.$$

Отсюда

$$\bar{Z}_i = (h^* - q_i)\bar{x}_i, \;\; i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Неизвестный параметр h^* находится из условия

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_i = Z_0, \tag{13}$$

где Z_0 – общий объем капиталовложений, который предполагается также постоянным. Подставляя (12) в (13), получаем

$$h^* = \frac{Z_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i \overline{x}_i}{X_0}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

И окончательно

$$\overline{Z}_i = \left(\frac{Z_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i \overline{x}_i}{X_0} - q_i \right) \overline{x}_i, \; i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

В результате получается следующее решение проблемы миграции. Сначала находятся значения $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ согласно (11) и затем $\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_n$ согласно (14). Капитальные вложения $\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_n$ распределяются в регионы. В результате суммарный фактор i-го региона на k-м временном шаге становится равным

$$h_i(k) = q_i + \frac{\overline{Z}_i}{x_i(k)}.$$

Можно показать, что при таком формировании факторов решение уравнения (5) сходится к значениям $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. Действительно, если на каком-то k-м шаге $x_i(k) < \overline{x}_i$, то $h_i(k) > h^*$, что приводит к притоку населения и $x_i(k+1) > x_i(k)$. Если $x_i(k) > \overline{x}_i$, то $h_i(k) < h^*$, что приводит к оттоку населения и $x_i(k+1) < x_i(k)$. Скорость сходимости определяют коэффициенты b_{ji}, характеризующие активность жителей регионов.

Пример. Рассматриваются 4 региона. Постоянные факторы заданы в виде $q^T = [1, 2, 3, 4]$, т.е. рейтинг 4-го региона наибольший. Будем считать, что общее число жителей всех регионов $X_0 = 4$ (в условных единицах) и $Z_0 = 2{,}2$.

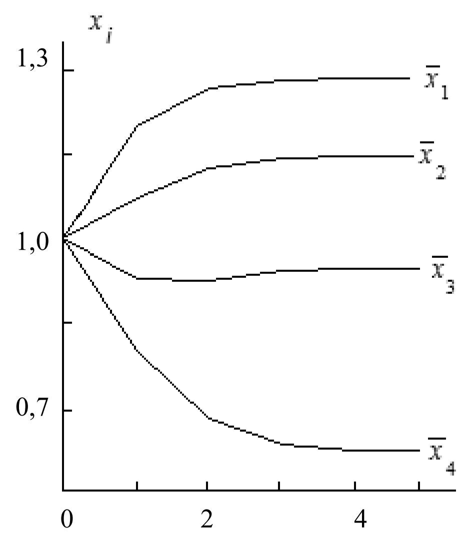

Рис. 1. Перемещение трудового населения

Пусть производственные возможности регионов заданы и в результате решения оптимизационной задачи найдены значения $\overline{x}^T = [0{,}34;\ 0{,}27;\ 0{,}24;\ 0{,}15]$. Тогда согласно (14) получаем $\overline{Z}^T = [4, 3, 2, 1]$, т.е. в экономическом отношении 1-й регион является предпочтительным. Решение уравнения (6) проводилось при начальных условиях $x_i(0) = 1$ и при коэффициентах $b_{ji} = 0{,}1$. Результаты решения приведены на рис. 1. Видно, что произошло перемещение населения, причем переход в устойчивое состояние реализовался за 4 шага.

Заключение

Предложена динамическая модель гипотезы Тибу для изучения межрегиональных миграционных потоков. Эта модель позволяет формализовать процесс управления перемещением населения за счет перераспределения капитальных вложений между регионами. В предложенной схеме имеет место установившийся режим, когда миграция между регионами отсутствует. Найдены условия существования такого режима. Рассмотрена задача об оптимальном распределении трудовых ресурсов между регионами с целью максимизации суммарной производственной эффективности всех регионов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tiebout C.* A Pure Theory of Local Expenditures // The Journal of Political Economy. 1956. V. 64. Issue 5. P. 416–424.
2. *Oates R., Wallace E.* An Essay on Fiscal Federalism // Journal of Economic Literature. 1999. No. 9. P. 1120–1149.
3. *Бесстремянная Г.Е.* Применение гипотезы Тибу для российских муниципалитетов // Препринт # BSP/00/045 R. M. : Российская экономическая школа, 2000. 47 с.
4. *О`Салливан А.* Экономика города. 4-е изд. М. : Инфра-М, 2002. 706 с.
5. *Макаров В.Л., Данков А.Н.* Межтерриториальная и электоральная конкуренция // Препринт WP/2002/032. М. : Рос. экономическая школа, 2002. 22 с.
6. *Пчелинцев О.С.* Региональная экономика в системе устойчивого развития. М. : Наука, 2004. 108 с.
7. *Итуэлл Дж., Милгейта М., Ньюмен П.* Экономическая теория. М. : ИНФРА-М, 2004. 931 с.
8. *Тихомиров Н.П.* Демография. Методы анализа и прогнозирования. М. : Экзамен, 2005. 256 с.
9. *Weingast B.R.* Second generation fiscal federalism: The implications of fiscal incentives // Journal of Urban Economics. 2009. No. 7. P. 279–293.
10. *Ларина С.Е.* Бюджетная децентрализация: теория, методология и опыт реализации в Российской Федерации. М. : Наука, 2009. 198 с.
11. *Ottaviano G.I.P., Thisse J.F.* Integration, agglomeration and the political economics of factor mobility // Journal of Public Economics. 2002. No. 4. P. 429–456.
12. *Kessler A.S., Lulfesmann C.* Tiebout and redistribution in a model of residential and political choice // Journal of Public Economics. 2005. No. 4. P. 501–528.

Параев Юрий Иванович, д-р техн. наук, проф. E-mail: paraev@mail.ru
Рюмкин Александр Иванович, д-р техн. наук. E-mail: airyumkin@mail.ru
Цветницкая Светлана Александровна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: svetasa@sibmail.com
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 13 января 2015 г.

Paraev Yury I., Ryumkin Alexander I., Tsvetnitskaya Svetlana A. (Tomsk State University, Russian Federation).
Mathematical model of labour population shift.
Keywords: population shift; Tiebout’s hypothesis; distribution of manpower; budgetary federalism.

The dynamic model of Tiebout’s hypothesis is offered to study interregional migratory streams. This model allows to formalize the regulation of the population movement by redistribution of capital investments between regions.

There are considered *N* identical regions having own economy and the main production resources. Let $x_i(k)$ be the amount of people living in the region *i* at the step *k.* Write the following difference equation for dynamics of change of the population:

$$x_i(k+1)= x_i(k) + W_i(k) - Y_i(k),\ i=1,\ldots,n,\ k=0,1,\ldots, \qquad (1)$$

where $W_i(k)$ is the amount of people which arrives to region *i* at the step *k*, $Y_i(k)$ is the amount of the population which leaves region *i* at the step *k.* Here, for simplicity, natural change (increasing or decreasing) of the population is omitted. It is connected with the fact that this process rather slow. It follows from this assumption that the total population in all regions at each time step remains constant. Then,

$$Y_i(k) = \sum_{j=1}^{n} z_{ji}(k)x_i(k) \le x_i(k),\ W_i(k) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(k)x_j(k), \qquad (2)$$

where $z_{ji}(k)$ is the population share of the region *i* moved to the region *j*. It is obvious that the following conditions have to be satisfied:

$$z_{ii}(k) = 0,\ 0\le z_{ji}(k) \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} z_{ji}(k) \le 1,\ i = 1,\ldots,n.$$

Substituting (2) in (1), we obtain the equations

$$x_i(k+1) = \left(1-\sum_{j=1}^{n} z_{ij}(k)\right)x_i(k) + \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(k)x_j(k),\ \ i=1,\ldots,n,\ k=0,1,\ldots. \qquad (3)$$

The coefficients $z_{ji}(k)$ are defined by the region factors, which can be presented as follows:

$$h_i(k) = q_i + \frac{Z_i(k)}{x_i(k)},\ i = 1,\ldots,n,\ k = 0,1,\ldots,$$

where q_i are constant factors (climate, cultural level, political stability, etc.), $Z_i(k)/x_i(k)$ are economic factors: the ratio of capital investments $Z_i(k)$ into the region i to the amount of the people $x_i(k)$. According to Tiebout's hypothesis, there is a movement of the population from regions with the low total factor to regions with the high total factor proportionally to the difference of these factors. Mathematically it can be presented as

$$z_{ji}(k) = b_{ji}\,\sigma\{h_j(k) - h_i(k)\},$$

where

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{if} \quad x > 0, \\ 0, & \text{if} \quad x \le 0, \end{cases}$$

b_{ji} is the coefficient characterizing activity of inhabitants of the region i to remove to the region j. Note that in (3) it is possible a steady state when the migration between regions is lacking. It corresponds to a case when total factors of all regions are identical.

The regulation of migration is carried out by redistribution of capital investments between regions. The task of optimum distribution of manpower resources between regions to maximize the total production efficiency is solved.

REFERENCES

1. Tiebout C. A Pure Theory of Local Expenditures. *The Journal of Political Economy*, 1956, vol. 64, iss. 5, pp. 416-424. DOI: 10.1086/257839
2. Oates R., Wallace E. An Essay on Fiscal Federalism. *Journal of Economic Literature*, 1999, no. 9, pp. 1120-1149. DOI: 10.1257/jel.37.3.1120
3. Besstremyannaya G.E. *Primenenie gipotezy Tibu dlya rossiyskikh munitsipalitetov* [Application of a Tiebout's hypothesis for the Russian municipalities]. Moscow: Rossiyskaya ekonomicheskaya shkola Publ., 2000. 47 p.
4. O`Sallivan A. *Ekonomika goroda* [City economy]. Translated from English by V.P. Pipeykin. Moscow: Infra-M Publ., 2002. 706 p.
5. Makarov V.L., Dankov A.N. *Mezhterritorial'naya i elektoral'naya konkurentsiya* [Interterrioial and electoral competition]. Moscow: Rossiyskaya ekonomicheskaya shkola Publ., 2002. 22 p.
6. Pchelintsev O.S. *Regional'naya ekonomika v sisteme ustoychivogo razvitiya* [Regional economy in system of a sustainable development]. Moscow: Nauka Publ., 2004. 108 p.
7. Ituell J., Milgeyta M., Newman P. *Ekonomicheskaya teoriya* [The Economic Theory]. Translated from English. Moscow: INFRA-M Publ., 2004. 931 p.
8. Tikhomirov N.P. *Demografiya. Metody analiza i prognozirovaniya* [Demography. Methods of the analysis and forecasting]. Moscow: Ekzamen Publ., 2005. 256 p.
9. Weingast B.R. Second generation fiscal federalism: The implications of fiscal incentives. *Journal of Urban Econom-ics*, 2009, no. 7, pp. 279-293. DOI: 10.1016/j.jue.2008.12.005
10. Larina S.E. *Byudzhetnaya detsentralizatsiya: teoriya, metodologiya i opyt realizatsii v Rossiyskoy Federatsii* [Budgetary decentralization: theory, methodology and experience of realization in the Russian Federation]. Moscow: Nauka Publ., 2009. 198 p.
11. Ottaviano G.I.P., Thisse J.F. Integration, agglomeration and the political economics of factor mobility. *Journal of Public Economics*, 2002, no. 4, pp. 429-456. DOI: 10.1016/S0047-2727(00)00166-3
12. Kessler A.S., Lulfesmann C. Tiebout and redistribution in a model of residential and political choice. *Journal of Public Economics*, 2005, no. 4, pp. 501-528. DOI: 10.1016/j.jpubeco.2003.09.007