

УДК 532.582.92

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ВСПЛЫТИИ ПУЗЫРЬКА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

© 2015 г. В. А. АРХИПОВ*, И. М. ВАСЕНИН*, А. С. ТКАЧЕНКО**, А. С. УСАНИНА*

*Томский государственный университет, Физико-технический факультет, Томск

**Томский государственный педагогический университет,
Факультет технологии и предпринимательства, Томск
e-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Поступила в редакцию 20.05.2014 г.

Исследуется всплытие из состояния покоя малых пузырьков в вязкой несжимаемой жидкости. Получено выражение для силы Бассе, действующей на пузырек в вязкой жидкости, которое отличается множителем от силы, полученной Бассе для твердой сферы. Аналитически решена задача о нестационарном всплытии пузырька. Экспериментально исследовано всплытие пузырьков, и проведено сравнение экспериментальных и теоретических результатов.

Ключевые слова: пузырек, вязкая жидкость, нестационарный режим, сила Бассе.

Исследования закономерностей движения пузырьков в жидкости — это одна из классических задач гидродинамики. Интерес к динамике пузырьков обусловлен их ролью в целом ряде прикладных задач, связанных с двухфазными течениями в энергоустановках, теплообменом при кипении, кавитацией, подводной акустикой, флотацией, охлаждением ядерных реакторов и другими физическими процессами. В указанных задачах одним из существенных факторов является изменение скорости движения пузырьков в жидкости.

Анализ научной литературы по проблеме показал, что существует ограниченное количество работ по нестационарному движению одиночного пузырька. Большинство экспериментов посвящено исследованию стационарного всплытия одиночного пузырька (закон сопротивления, потеря устойчивости формы) и высококонцентрированной системы пузырьков. Теоретический анализ закономерностей нестационарного движения частиц дисперсной фазы проведен преимущественно для твердых сферических частиц [1, 2]; также в [1] приведены результаты экспериментального исследования.

Среди экспериментальных работ по движению одиночного пузырька с учетом нестационарных и “наследственных” эффектов можно отметить работы [3, 4]. В [3] методом анализа размерностей для чисел Рейнольдса $Re = 0.01 \div 100$ получена эмпирическая зависимость коэффициента сопротивления пузырька от Re с учетом нестационарных и “наследственных” сил. Однако полученные результаты невозможно использовать для практических расчетов ввиду неопределенности некоторых входящих в нее параметров. Анализ экспериментальных результатов [4] по скорости нестационарного всплытия пузырька не представляется возможным, так как отсутствуют данные по физическим свойствам жидкости.

Из теоретических работ, посвященных нестационарному движению пузырька в вязкой жидкости, отметим исследования [5–8]. Движение твердой, жидкой и газообразной сферической частиц изучалось путем приближенного решения линеаризованных

уравнений Навье—Стокса операционным методом. Основной результат [5–8] сформулирован в выводе, согласно которому, безразмерные скорости u/u_∞ для твердой частицы и газового пузырька тех же размеров близки по величине.

Подробный обзор результатов теоретических и экспериментальных работ по нестационарному всплытию пузырька представлен в работе [9]. Цель настоящей работы — экспериментально-теоретическое исследование нестационарного режима всплытия одиночного сферического пузырька в вязкой жидкости.

1. Теоретический анализ. Рассматривая только прямолинейное движение центра пузырька, оценим силу сопротивления F_C , действующую на пузырек при его нестационарном движении в вязкой жидкости. Используется подход [10] для нахождения F_C в случае твердого шарика.

Аналогично [10] изучается течение жидкости при малых числах Рейнольдса и предполагается сферическая форма пузырька. Различие заключается только в том, что в случае твердого шарика на границе применяются условия прилипания жидкости, а в случае пузырька, заполненного газом с малой вязкостью, — условия непротекания через его границу, а также равенство нулю на этой границе касательных напряжений.

Сначала вычислим силу сопротивления, действующую на пузырек радиусом R при его гармонических колебаниях со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m \exp(-i\omega t)$, где u_m — амплитуда колебаний; ω — частота колебаний; t — время. Так же, как и в [10], скорость жидкости будем находить в виде

$$\mathbf{V} = \exp(-i\omega t) \text{rot rot}(f(r)\mathbf{u}_m) \quad (1.1)$$

Подставим (1.1) в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{V} = \nu \Delta \text{rot} \mathbf{V}$$

в котором через ν обозначена кинематическая вязкость жидкости. Для функции $f(r)$ получим уравнение

$$\Delta^2 f + \frac{i\omega}{\nu} \Delta f = 0 \quad (1.2)$$

Интегрируя (1.2), имеем

$$f' = a \frac{\exp(icr)}{r^2} \left(r - \frac{1}{ic} \right) + \frac{b}{r^2} \quad (1.3)$$

где a, b — постоянные интегрирования. Поскольку $ic = -(1-i)\sqrt{\omega/2\nu}$, правая часть (1.2) при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю. В сферических координатах компоненты скорости $\vec{V}$ с учетом (1.1) записываются как

$$V_r = \exp(-i\omega t) (\text{rot rot} \mathbf{u}_m)_r = 2 \exp(-i\omega t) u_m \cos \theta \frac{f'}{r} \quad (1.4)$$

$$V_\theta = \exp(-i\omega t) (\text{rot rot} \mathbf{u}_m)_\theta = \exp(-i\omega t) \left(\frac{ica \exp(icr)}{r} - \frac{f'}{r} \right) u_m \sin \theta \quad (1.5)$$

где θ — полярный угол, отсчитываемый от направления вектора скорости пузырька.

Поскольку проекция радиальной скорости движения жидкости на поверхности пузырька равна скорости точек его поверхности в направлении радиуса r , для радиальной скорости при $r = R$ из (1.4) получим

$$\frac{f'(R)}{R} = -\frac{1}{2} \quad (1.6)$$

Тогда условие отсутствия на поверхности пузырька касательных напряжений

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right)_{r=R} = 0$$

с учетом (1.6), примет вид

$$\frac{3}{R} + \left(\frac{3}{R} - ic \right) \frac{ica \exp(icR)}{R} = 0$$

Откуда следует, что

$$\frac{ica \exp(icR)}{R} = \frac{-1}{1 - icR/3} = \frac{-1}{1 - (i-1)Rq/3}$$

где $q = \sqrt{\omega/2\nu}$.

Для ограниченных значений ω и малых R таких, что $(R/3)\sqrt{\omega/2\nu} \ll 1$, пренебрегаем величиной $(1-i)(R/3)\sqrt{\omega/2\nu}$ в знаменателе по сравнению с единицей и полагаем

$$\frac{ica \exp(icR)}{R} = -1 \quad (1.7)$$

Проекция силы сопротивления пузырька F_C на направление $\mathbf{u}_m$ вычисляется по формуле

$$F_C = \int_0^\pi \left(-P \cos \theta + 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta \right) 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \quad (1.8)$$

где P — давление; μ — динамическая вязкость жидкости. Здесь учтено, что касательные напряжения на поверхности пузырька равны нулю.

Распределение давления при $r = R$ находится путем интегрирования проекции уравнения движения жидкости на направление θ по θ при $r = R$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (1.9)$$

где ρ — плотность жидкости. После подстановки скорости в (1.9) с учетом (1.6) и (1.7) и интегрирования по θ находим, что

$$P = P_0 \exp(-i\omega t) + \nu \rho \cos \theta u_m \exp(-i\omega t) \left(\frac{1}{R} - ic + R(ic)^2 - \frac{i\omega \rho R}{2\mu} \right) \quad (1.10)$$

Поскольку интеграл (1.8) от константы P_0 равен нулю, эта константа не вычислялась.

После подстановки в (1.8) давления P и производной $\partial V_r / \partial r$ находим выражение для силы сопротивления пузырька, совершающего гармонические колебания со скоростью $\mathbf{u}_m \exp(-i\omega t)$

$$F_C = -\pi \rho R^2 u_m \exp(-i\omega t) \left[\frac{4\nu}{R} - \frac{2}{3} i\omega + \frac{2}{3} (1-i) \frac{\sqrt{2\nu}}{R} \sqrt{\omega} \right] \quad (1.11)$$

где знак “—” указывает на направление силы сопротивления, противоположное направлению скорости пузырька.

Вычислим силу сопротивления, действующую на пузырек, движущийся с произвольной скоростью $u(t)$. Представим скорость пузырька через интеграл Фурье

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega} \exp(-i\omega t) d\omega \quad (1.12)$$

$$\text{где } u_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \exp(i\omega \tau) d\tau.$$

Сила сопротивления для данного случая представляется в виде интеграла от сил сопротивления, получающихся при движении со скоростями, равными компонентам Фурье $u_{\omega} \exp(-i\omega t)$. Эти силы рассчитываются по формуле (1.12), принимающей с учетом $(du/dt)_{\omega} = -i\omega u_{\omega}$ вид

$$-\pi \rho R^3 \exp(-i\omega t) \left(\frac{4\nu}{R^2} u_{\omega} + \frac{2}{3} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\omega} + \frac{2\sqrt{2\nu}(1+i)}{3R\sqrt{\omega}} \right) \quad (1.13)$$

Соотношение (1.13) отличается от аналогичной формулы для твердого шарика [10] только множителями в первом и третьем слагаемых. Поэтому и интеграл Фурье будет отличаться от аналогичного интеграла для твердого шарика лишь этими коэффициентами. Повторяя выкладки, приведенные в [10], получим

$$F_C = -2\pi \rho R^3 \left(\frac{1}{3} \frac{du}{dt} + \frac{2\nu}{R^2} u + \frac{2}{3} R \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right) \quad (1.14)$$

Первое слагаемое в выражении (1.14) описывает силу, обусловленную присоединенными массами при потенциальном обтекании сферы. Второе дает вклад в вязкое сопротивление в соответствии с формулой Рыбчинского—Адамара для пузырька. Третье слагаемое описывает силу Бассе, которая для пузырька в $9/2$ раз меньше, чем для твердого шарика.

Рассмотрим модель всплытия пузырька в неограниченной вязкой жидкости. С учетом сил тяжести, Архимеда и сопротивления уравнение его движения имеет вид

$$V_p \rho_p \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} V_p \rho \frac{du}{dt} - 4\pi \mu R u - V_p (\rho_p - \rho) g - \frac{4}{3} \pi R^2 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (1.15)$$

где V_p — объем пузырька; ρ_p — плотность газа; g — ускорение свободного падения. Поскольку $\rho_p \ll \rho$, слагаемыми с ρ_p в (1.15) пренебрегаем.

Вводя характерный временной масштаб $T_0 = \rho R^2 / 6\mu$ и безразмерное время $\bar{t} = t/T_0$, уравнение (1.15) запишем как

$$\frac{du}{d\bar{t}} + u + \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{t}} \frac{du}{d\bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{t}-\bar{\tau}}} = 2gT_0 \quad (1.16)$$

Используя условия $u(0) = 0$ и $du/d\bar{t} = 0$ при $\bar{t} < 0$, представим (1.16) в форме

$$\frac{du}{d\bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} \frac{du}{d\bar{\tau}} d\bar{\tau} + \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int_0^{\bar{t}} \frac{du}{d\bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{t}-\bar{\tau}}} = 2gT_0$$

Вводя ускорение $a = du/d\bar{t}$, запишем

$$a + \int_0^{\bar{t}} a d\bar{t} + \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int_0^{\bar{t}} a \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{t} - \bar{\tau}}} = 2gT_0$$

Последнее уравнение имеет точное решение

$$a(\bar{t}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} g T_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{t} x\right) \left(\cos \sqrt{\frac{10}{3}} \bar{t} x - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{\frac{10}{3}} \bar{t} x \right) \exp(-x^2) dx$$

которое находится операционным методом с применением преобразования Лапласа [11].

После нахождения ускорения скорость вычисляется как $u(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} a(\bar{\tau}) d\bar{\tau}$.

2. Экспериментальное исследование. Эксперименты проводились на установке, состоящей из прозрачной кюветы с плоскопараллельными стенками, наполненной рабочей жидкостью, устройства для генерации пузырьков и системы визуализации процесса всплытия одиночного пузырька (фиг. 1).

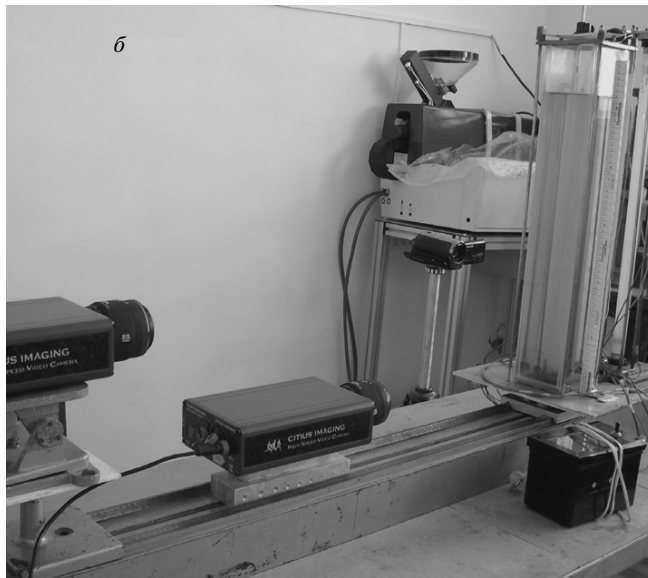
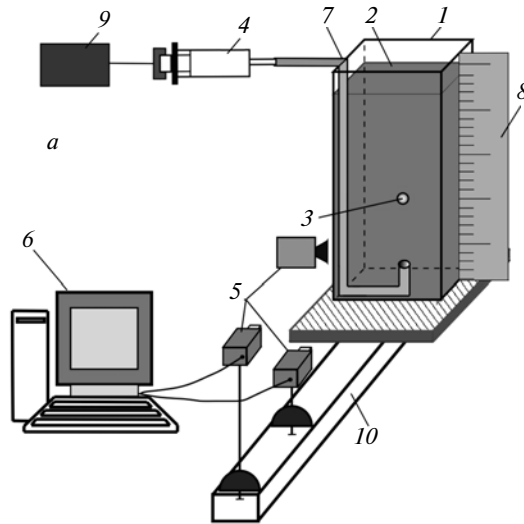
Кювета призматической формы размером $150 \times 150 \times 600$ мм изготовлена из оптического стекла толщиной 5 мм. Для варьирования размера пузырька использовались иглы, расположенные в основании кюветы, с различным диаметром выходного отверстия.

Система визуализации включала источники света (люминесцентные лампы мощностью 18 Вт), установленные на задней панели по всей высоте кюветы, цифровую видеокамеру Panasonic HDC-SD60 и две высокоскоростные видеокамеры Citius C100. Многоракурсная видеосъемка исследуемого процесса позволила повысить точность и обеспечить контроль за изменением параметров всплытия пузырька на различных стадиях его движения. Первая камера фиксировала динамику пузырька на начальном нестационарном этапе движения, вторая – на всей траектории пузырька. Видеосъемка проводилась с разрешением 1280×670 со скоростью свыше 700 кадр/с и временем экспозиции 1/500–1/2000 с. Третья камера использовалась для определения размера пузырька; область съемки составляла 5×5 см с увеличением в 2 раза.

Для повышения точности получаемых экспериментальных данных в настоящей работе использовалась жидкость со стабильными физико-химическими свойствами в диапазоне рабочих температур $17\text{--}22^\circ\text{C}$ – раствор кастрового масла в спирте.

В экспериментах определялись следующие параметры: коэффициент динамической вязкости μ_l и плотность ρ_l раствора, диаметр D и скорость всплытия u пузырька. По экспериментально измеренным параметрам рассчитывались значения числа Рейнольдса Re и коэффициента сопротивления C . Плотность исследуемой жидкости определялась ареометром ($\rho_l = 935\text{--}960$ кг/м³). Вязкость раствора $\mu_l = 0.23 \div 1.13$ Па · с оценивалась из формулы Стокса при гравитационном осаждении твердой частицы. Диаметр пузырька $D = 3.2\text{--}5.5$ мм определялся путем обработки результатов видеосъемки процесса всплытия. Пройденный пузырьком путь и скорость определялись путем покадровой обработки результатов скоростной видеосъемки. Скорость всплытия пузырька на некоторой высоте h_i вычислялась по формуле

$$u(h_i) = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{\Delta t_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

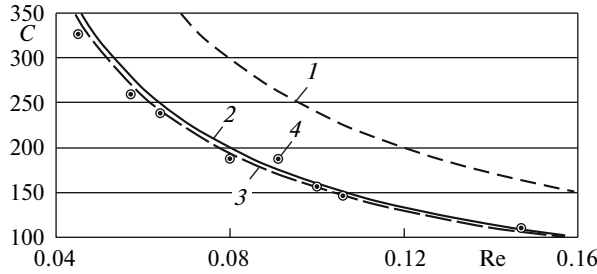


Фиг. 1. Схема (а) и фотография (б) экспериментальной установки: 1 – кювета; 2 – рабочая жидкость; 3 – пузырек; 4 – генератор пузырьков; 5 – видеокамеры; 6 – компьютер; 7 – трубка; 8 – масштабная линейка; 9 – электродвигатель; 10 – оптическая скамья

где h_{i-1} , h_{i+1} – пройденное пузырьком расстояние на $i-1$ и $i+1$ кадрах, соответственно; Δt_i – интервал времени между $i-1$ и $i+1$ кадрами; N – количество кадров.

В уравнение движения пузырька входит закон сопротивления вязкого обтекания. При малых $Re < 1$ коэффициент сопротивления сферической частицы определяется по формуле Рыбчинского–Адамара

$$C = \frac{24}{Re} \left(\frac{3\mu_* + 2}{3 + 3\mu_*} \right), \quad Re = \frac{\rho_l u D}{\mu_l}, \quad (2.1)$$



Фиг. 2. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса: 1–3 – $A = 24, 16, 15.5$; 4 – экспериментальные значения C_e

где $\mu_* = \mu/\mu_l$ – отношение коэффициентов динамической вязкости дисперсной μ и дисперсионной μ_l фаз. В предельных случаях из (2.1) определяется коэффициент сопротивления в виде

$$C = \frac{A}{\text{Re}} \quad (2.2)$$

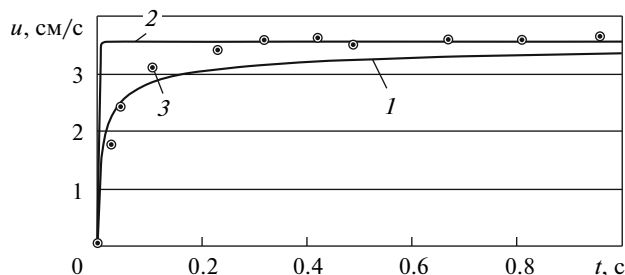
где $A = 16$ для пузырька ($\mu_* \rightarrow 0$), $A = 24$ для твердой сферы ($\mu_* \rightarrow \infty$).

Для уточнения коэффициента сопротивления в стационарном режиме выполнена серия экспериментов, результаты которой приведены в таблице: экспериментальные значения стационарной скорости всплытия пузырька u_e , числа Рейнольдса Re и коэффициента сопротивления C_e . При расчете числа Рейнольдса использовались экспериментальные данные: стационарная скорость всплытия пузырька, его размер, физические свойства жидкости. Величина экспериментального коэффициента сопротивления C_e определялась из уравнения движения пузырька в стационарном режиме по формуле

$$C_e = \frac{4}{3} g(\rho_l - \rho) \frac{D}{\rho_l u_e^2}$$

Результаты экспериментов по стационарному всплытию пузырька

D , мм	ρ_l , кг/м ³	μ_l , Па · с	u_e , см/с	Re	$A = 16$	$A = 15.5$	C_e
3.7	960	1.13	0.88	0.028	571.4	553.6	624
3.6	960	0.92	1.2	0.045	355.5	344.4	326
3.9	960	0.92	1.4	0.057	280.7	271.9	260
4.1	960	0.92	1.5	0.064	250.0	242.2	238
4.4	960	0.92	1.75	0.08	200.0	193.7	188
5.5	960	1.13	1.96	0.091	175.8	170.3	187
4.8	960	0.92	2.0	0.1	160.0	155	157
4.9	960	0.92	2.09	0.106	150.9	146.2	146
5.5	960	0.92	2.55	0.146	109.6	106.2	110
3.2	935	0.23	3.6	0.47	34.0	32.9	28.9
3.4	935	0.23	4.0	0.56	28.6	27.7	27.7



Фиг. 3. Зависимость скорости всплытия пузырька от времени с учетом (1) и без учета (2) силы Бассе; 3 – данные эксперимента

Относительная погрешность определения C_e рассчитывалась по формуле

$$\delta C_e = \delta D + 2\delta u_e$$

где $\delta D = 3\%$, $\delta u_e = 0.1\%$. В оценках δC_e не учитывались погрешности измерения плотности ρ и ρ_l в силу их малости. Для условий проведенных экспериментов погрешность экспериментального определения коэффициента сопротивления не превышала 3%. По аналогии с (2.2) зависимость $C_e(\text{Re})$ аппроксимировалась формулой

$$C_e = \frac{15.5}{\text{Re}} \quad (2.3)$$

Значения коэффициентов сопротивления, рассчитанные по формуле (2.2) для $A = 16$ и $A = 15.5$, приведены в таблице. На фиг. 2 показаны расчетные и экспериментальные значения коэффициента сопротивления в диапазоне чисел Рейнольдса $\text{Re} = 0.03\text{--}0.55$. Наименьшее отклонение теоретического от экспериментального коэффициента сопротивления C_e наблюдается для зависимости (2.3) со среднеквадратичным отклонением $\delta = 1.9\%$. Для зависимости Рыбчинского–Адамара ($A = 16$) отклонение $\delta = 2.2\%$. Стоксовское выражение для коэффициента сопротивления ($A = 24$) дает результаты, существенно отличающиеся от экспериментальных данных (фиг. 2).

3. Сравнительный анализ результатов. На фиг. 3 приведена зависимость скорости всплытия пузырька от времени, полученная из решения уравнения движения (1.15) с учетом всех действующих сил (кривая 1). Расчеты проведены для указанных выше параметров экспериментов. Для константы в силе вязкого сопротивления принято экспериментальное значение $A = 15.5$. Здесь же приведена зависимость $u(t)$, в которой учтена сила, связанная с присоединенной массой [12], но не учтена сила Бассе (кривая 2).

Анализ приведенных на фиг. 3 данных показывает, что зависимость $u(t)$, полученная расчетом без учета силы Бассе (2), не отражает реальную динамику всплытия пузырька на нестационарном участке его траектории, однако адекватно описывает стационарный режим.

Зависимость $u(t)$, рассчитанная с учетом силы Бассе, удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными на начальном участке траектории (расхождение не превышает 5%). При этом расчетные зависимости $u(t)$ характеризуются медленным выходом на стационарный режим; расхождение расчетных и экспериментальных данных по скорости пузырька для $t > t_* = 0.15$ с составляет не более 9%. Отметим, что аналогичный “затянутый” выход скорости частиц на стационарный режим получен в тео-

ретических работах по нестационарному движению дисперсной частицы [3, 13]. Расхождение расчетных и экспериментальных данных по динамике всплытия пузырька связано, по-видимому, с неточностью соблюдения условия $u = 0$ при $t = 0$ в экспериментах.

Заключение. Результаты теоретического исследования нестационарного всплытия пузырька в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса показали, что нестационарная сила Бассе оказывает существенное влияние на закономерности всплытия пузырька.

Сравнение теоретических и экспериментальных данных по скорости всплытия пузырька на нестационарном участке показало удовлетворительное согласование результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (№ МК-1259.2013.1) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания № 2014/223 (код 1567).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Водопьянов И.С., Петров А.Г., Шундерюк М.М. О нестационарном осаждении сферической твердой частицы в вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 2. С. 97–106.
2. Висицкий Е.В., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Движение частицы в вязкой жидкости под действием силы тяжести и вибрации при наличии силы Бассе // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 5. С. 763–775.
3. Li Zhang, Chao Yang, Zai-Sha Mao. Unsteady motion of a single bubble in highly viscous solution and empirical correlation of drag coefficient // Chem. Eng. Sci. 2008. № 63. P. 2099–2106.
4. Park W.C., Klausner J.F., Mei R. Unsteady forces on spherical bubbles // Exp. Fluids. 1995. № 19. P. 167–172.
5. Sangani A.S., Zhang D.Z., Prosperetti A. The added mass, Basset, and viscous drag coefficients in nondilute bubbly liquids undergoing small-amplitude oscillatory motion // Phys. Fluids. V. A 3. № 12. 1991. P. 2955–2970.
6. Mei R., Klausner J.F. Unsteady force on a spherical bubble at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 1. P. 63–70.
7. Parmar M., Balachandar S., Haselbacher A. Equation of motion for a drop or bubble in viscous compressible flows // Phys. Fluids. 2012. V. 24. P. 056103.
8. Бронштейн Б.И., Фишбеин Г.А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 280 с.
9. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. Bubbles, drops and particles. New York: Acad. Press, 1978. 398 p.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
12. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С. Экспериментальное исследование нестационарных режимов всплытия одиночного пузырька // Инж.-физ. журн. 2013. Т. 86. № 5. С. 1097–1106.
13. Dorgan A.J., Loth E. Efficient calculation of the history force at finite Reynolds numbers // Int. J. Multiphase Flow. 2007. V. 33. P. 833–848.