МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

II Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 16–17 мая 2014 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2014

κ_1 является решением уравнения

$$\lambda = (\lambda + \kappa_1)\int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa_1)x} dB(x),$$

величины R_0, $R_1(z)$, R_1, $R_1^*(\lambda + \kappa_1)$ удовлетворяют следующим выражениям

$$R_0 = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa_1)z} dB(z) = B^*(\lambda + \kappa_1),$$

$$R_1(z) = e^{(\lambda+\kappa_1)z}(\lambda + \kappa_1)\int_0^z e^{-(\lambda+\kappa_1)x}(R_0 - B(x))dx,$$

$$R_1 = 1 - R_0,$$

$$R_1^*(\lambda + \kappa_1) = \int_0^\infty z e^{-(\lambda+\kappa_1)z} dB(z).$$

Найдем характеристическую функцию $h(u)$ числа заявок в ИПВ. Выполнив обратные к (8) замены, получим

$$h(u) = \exp\left\{ ju\frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma} + \frac{(ju)^3}{6}\frac{\kappa_3}{\sigma} \right\}.$$

Выводы

В работе найдена асимптотика третьего порядка характеристической функции числа заявок в ИПВ. Данная функция определяется одним параметром σ и тремя асимптотическими семиинвариантами κ_1, κ_2, κ_3. В дальнейшем планируется выполнить исследование рассматриваемой RQ-системы, когда не существует стационарного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Falin G. I., Templeton J .G. C.* Retrial queues. – London : Chapman & Hall, 1997.
2. *Falin G. I.* Asymptotic investigation of fully available switching systems with high repetition intensity of blocked calls // Moscow University Mathematics Bulletin. – 1984. – Vol. 39, № 6. – P. 72–77.
3. *Falin G. I.* A Survey of Retrial Queues // Queuing Systems. – 1990. –Vol. 7. –P. 127–167.
4. *Artalejo J. R., Gomez-Coral A.* Retrial queueing systems: A computational approach. –Berlin : Springer, 2008.
5. *Artalejo J. R., Joshua V. C., Krashnamoorthy A.* An M/G/1 retrial gueue witn orbital search by the server, Advances in Stochastic Modeling / J.R. Artalejo, A. Krishnamoopthy (Eds). – New Jersey : Notable publications, 2002. – P. 41–54.
6. *Назаров А. А., Судыко Е. А.* Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа // Проблемы передачи информации. – 2010. – № 1. – С. 94–111.
7. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
8. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. – М. : Наука, 1980. – 381 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ MMPP|M|1 С ФАЗОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОВТОРНОГО ВРЕМЕНИ

А. А. Назаров, Н. И. Яковлев

Томский государственный университет
E-mail: yakovlev_steppy@mail.ru

В работе рассмотрена RQ-система (Retrial Queueing System) с фазовым распределением повторного времени.

Первая международная научная конференция по RQ-системам состоялась в Мадриде в 1998 году. К настоящему времени по этой тематике опубликованы сотни научных работ, в том числе ряд монографий, одной из первых среди которых является книга

G. I. Falin, G. C. Tempelton [6]. В монографии J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral [3] список публикаций содержит более 700 наименований.

Актуальность этих исследований определяется фундаментальной ролью повторного обращения заявок к обслуживающему прибору в таких реальных обслуживающих системах как: классические телефонные системы [8, 9], колцентры [10], мобильные телефонные системы [11], локальные компьютерные сети, управляемые протоколами случайного множественного доступа [12] и других коммуникационных систем [13, 14].

Исследование RQ-систем с неэкспоненциальным повторным временем мотивировано реальными компьютерными и телекоммуникационными сетями, в которых повторное время вряд ли экспоненциально.

1. Математическая модель

В качестве математической модели RQ-системы рассмотрим марковскую однолинейную систему массового обслуживания. Имеется прибор, обслуживающий случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. На вход системы поступает MMPP поток с матрицей интенсивности λ, управляемый цепью Маркова с матрицей инфинитезимальных характеристик Q. Заявка, придя из потока, осуществляет попытку захвата прибора. Если прибор свободен, то попытка считается удачной и заявка встает на обслуживание. Если же прибор занят, то заявка отправляется в источник повторных вызовов, где получает случайное время задержки, распределенное согласно PH-закону с параметрами (V,θ) по истечении которого она опять осуществляет попытку захвата прибора. Подробное описание распределения фазового типа см. [4].

Пусть $i_n(t)$ – число заявок на n-ой фазе PH-распределения, $n=1,2,...,N$, $k(t)$ определяет состояние управляющей потоком цепи Маркова, $k=1,2,..,K$, а $s(t)$ определяет состояние прибора как

$$s(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен,}\\ 1, \text{ если прибор занят.}\end{cases}$$

Обозначим

$$P\{s(t)=s,k(t)=k,i_1(t)=i_1,i_2(t)=i_2,...,i_N(t)=i_N\}=P_s(i_1,i_2,..,i_N,t)=P_s(i,k,t),$$
$$s=0,1,\ k=0,1,..,K$$

вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок на каждой из фаз PH-распределения, где $i=\{i_1,i_2,..i_N\}$. Процесс $\{s(t),k(t),i(t)\}$ изменений во времени состояний рассматриваемой системы MMPP|M|1 является $(N+1)$-мерной цепью Маркова, в которой лишь одна компонента $k(t)$ принимает конечное число значений, а остальные N компонент имеют счетное множество значений.

Требуется найти распределение вероятностей значений процесса $\sum i_k$ – числа заявок в ИПВ. Этот процесс является немарковским, поэтому его исследование выполним методом введения дополнительных компонент, рассматривая $(N+1)$-мерную цепь Маркова $\{s(t),k(t),i(t)\}$, для стационарного распределения вероятностей $P_s(i,k,t)=P_s(i,k)$ которой запишем систему уравнений Колмогорова для l-ого ($l=1,2,...,K$) состояния управляющей цепи:

$$\begin{cases} -(\lambda_l + \sum\limits_{k=1}^{N}\theta_{k,0} i_k + \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{\nu\neq k}\theta_{k,\nu} i_k) P_0(i,l) + \sum\limits_{k=1}^{N}(i_k+1)\sum\limits_{\nu\neq k}\theta_{k,\nu} P_0(i+e_k-e_\nu,l) + \\ \qquad\qquad + \mu P_1(i,l) + \sum\limits_{k=1}^{K} P_0(i,k) q_{k,l} = 0, \\ -\left[\lambda_l + \mu + \sum\limits_{k=1}^{N} i_k \sum\limits_{\nu\neq k}(\theta_{k,\nu}V + \theta_{k,\nu})\right] P_1(i,l) + \sum\limits_{K=1}^{N}(i+1)\theta_{k,0} P_0(i+e_k,l) + \\ + \sum\limits_{k=1}^{K} P_1(i,k) q_{k,l} + \lambda_l P_0(i,l) + \sum\limits_{k=1}^{N}(i_k+1)\sum\limits_{\nu\neq k}(\theta_{k,0}V_\nu + \theta_{k,\nu}) P_1(i+e_k-e_\nu,l) + \\ \qquad\qquad + \lambda_l \sum\limits_{k=1}^{N} V_k P_1(i-e_k,l) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Характеристическая функция распределения вероятностей состояний системы

Применяя систему уравнений Колмогорова (1), составим систему уравнений для определения частичных характеристических функций

$$H_s(u) = \sum_i P_s(i,k)\exp\{j\sum_{n=1}^{N} u_n i_n\}, \; s = 0,1, \; k = 0,1,..,K,$$

где u является вектором с компонентами $u_1, u_2, ..., u_N$, а $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Из (1) получим

$$\begin{cases} -\lambda_l H_0(u,l) + \mu H_1(u,l) + j\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\partial H_0(u,l)}{\partial u_k}\theta_{k,0} + j\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\partial H_0}{\partial u_k}\sum\limits_{\nu\neq k}\theta_{k,\nu}(1-\exp(j(u_\nu - u_k))) + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{k=1}^{K} H_0(i,k) q_{k,l} = 0, \\ -\lambda_l H_1(u,l) - \mu H_1(u,l) + \lambda_l H_0(u,l) - j\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\partial H_0(u,l)}{\partial u_k}\theta_{k,0}\exp(-ju_k) + \\ \lambda_l H_1(u,l)\sum\limits_{k=1}^{N} V_k \exp(ju_k) + j\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\partial H_1(u,l)}{\partial u_k}\sum\limits_{\nu\neq k}(\theta_{k,\nu} + \theta_{k,0}V_\nu)(1-\exp(j(u_\nu - u_k))) + \\ \qquad\qquad \sum\limits_{k=1}^{K} H_1(i,k) q_{k,l} = 0. \end{cases}$$

Уравнения в скалярной форме записи в дальнейшем приводят к довольно громоздким выкладкам. Поэтому осуществим переход к матричной форме записи системы уравнений (2).

Для этого введем ряд обозначений. Диагональная матрица:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & u_N \end{bmatrix}.$$

Характеристическая функция в векторном виде:

$$H_s(u) = \left[H_s(u,1)\; H_s(u,2) ... H_s(u,K)\right], \; s = 0,1.$$

Матрица частных производных:

$$\frac{\partial H_s(u)}{\partial u} = \left[\frac{\partial H_s(u,k)}{\partial u_i}\right], \; s = 0,1, \; k = 1,2,...,K, \; i = 1,2,...,N.$$

Диагональная матричная экспонента:

$$\exp(jU)=\left[\begin{array}{c|c:c}\exp ju_1 & \dots & 0\\ \hline \dots & \dots & \dots\\ \hline 0 & \dots & \exp ju_N\end{array}\right].$$

Вектор-столбец начального распределения:

$$V=\begin{bmatrix}V_1 & \dots & V_N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Единичный вектор-столбец:

$$E=\begin{bmatrix}1 & \dots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Матрица θ – неполная матрица инфинитезимальных характеристик. Вектор $(-\theta E)$ имеет смысл интенсивностей обращений заявок к прибору с соответствующей фазы PH-распределения.

С учетом матричных обозначений, перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases}-\lambda H_0(u)+\mu H_1(u)-j\dfrac{\partial H_0(u)}{\partial u}\exp\{-jU\}\theta\exp(jU)E+Q^{\mathrm{T}}H_0(u)=0,\\ -\mu H_1(u)+\lambda H_0(u)+\lambda H_1(u)(V^{\mathrm{T}}\exp\{jU\}-1)+j\dfrac{\partial H_0(u)}{\partial u}\exp\{-jU\}\theta E+\\ \qquad +j\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}\exp\{-jU\}(\theta EV^{\mathrm{T}}-\theta)\exp\{jU\}E+Q^{\mathrm{T}}H_1(u)=0.\end{cases}\qquad(2)$$

Система уравнений (3) служит основой для исследования рассматриваемой RQ-системы методом асимптотического анализа. В качестве предельного условия для использования этого метода выбрано условие неограниченно растущего повторного времени. Применение метода асимптотического анализа разбивается на две части – асимптотик первого и второго порядков. Результатом асимптотики первого порядка является вектор средних значений числа заявок в ИПВ на каждой фазе, а результатом асимптотики второго порядка – доказательство того факта, что асимптотическое распределение вероятностей является многомерным гауссовским и выводится уравнение, определяющее его матрицу ковариаций.

3. Асимптотика первого порядка

В системе (3) обозначим $\theta=\theta'$ и будем полагать, что матрица θ' имеет вид $\theta=\dfrac{\theta'}{T}$, где T – большой параметр, $T\to\infty$. Обозначим далее $\dfrac{1}{T}=\varepsilon$ и выполним следующие замены: $u=\varepsilon w$, $H_s(u)=F_s(w,\varepsilon)$, $s=0,1$. С учетом этого, перепишем систему уравнений (2) в условиях растущего повторного времени:

$$\begin{cases}-\lambda F_0(w,\varepsilon)+\mu F_1(w,\varepsilon)-j\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}\exp\{-j\varepsilon W\}\theta\exp(j\varepsilon W)E+Q^{\mathrm{T}}F_0(w,\varepsilon)=0,\\ -\mu F_1(w,\varepsilon)+\lambda F_0(w,\varepsilon)+\lambda F_1(w,\varepsilon)(V^{\mathrm{T}}\exp\{j\varepsilon W\}-1)+j\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}\exp\{-j\varepsilon W\}\theta E+\\ \qquad +j\dfrac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}\exp\{-j\varepsilon W\}(\theta EV^{\mathrm{T}}-\theta)\exp\{j\varepsilon W\}E+Q^{\mathrm{T}}F_1(w,\varepsilon)=0.\end{cases}\qquad(3)$$

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Предельные значения $F_s(w)$ решений $F_s(w,\varepsilon)$ системы уравнений (4) при $\varepsilon\to 0$ определяются как

$$F_s(w)=R_s\exp(jaw).$$

При этом верно:

$$a = -\frac{E^{\mathrm{T}} \lambda R_1}{E^{\mathrm{T}} R_0} V^{\mathrm{T}} \theta^{-1}, \tag{4}$$

$R_1 = \left(I - \frac{Q^{\mathrm{T}}}{\mu} \right)^{-1} \frac{\lambda \pi}{\mu}$, $E^{\mathrm{T}}(R_0 + R_1) = 1$, где π – стационарное распределение вероятностей управляющей входящим потоком цепи Маркова.

4. Асимптотика второго порядка

В системе (2) обозначим $\theta = \theta'$ и будем полагать, что матрица θ' имеет вид $\theta' = \frac{1}{T}\theta$, где T – большой параметр, $T \to \infty$. Теперь обозначим $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$ и выполним следующие замены:

$$H_s(u) = H_s^{(2)}(u) \exp\{jau\}, \ s = 0,1 .$$

Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{cases} -\lambda H_0^{(2)}(u) + \mu H_1^{(2)}(u) - j\left[\dfrac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + jaH_0^{(2)}(u) \right] \exp\{-jU\}\theta \exp(jU)E + Q^{\mathrm{T}} H_0(u) = 0, \\ -\mu H_1^{(2)}(u) + \lambda H_0^{(2)}(u) + \lambda H_1^{(2)}(u)(V^{\mathrm{T}} \exp\{jU\} - 1) + Q^{\mathrm{T}} H_1(u) + \\ \qquad + j\left[\dfrac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + jaH_0^{(2)}(u) \right] \exp\{-jU\}\theta E + \\ \qquad\qquad + j\left[\dfrac{\partial H_1^{(2)}(u)}{\partial u} + jaH_1^{(2)}(u) \right] \exp\{-jU\}(\theta E V^{\mathrm{T}} - \theta) \exp\{jU\}E = 0. \end{cases}$$

Введя замены $u = \varepsilon w$, $H_k^{(2)}(u) = F_k(w, \varepsilon)$, $k = 0,1$ и подставляя их в последнюю систему, получим:

$$\begin{cases} -\lambda F_0(w,\varepsilon) + \dfrac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial z} - j\left[\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} \varepsilon + jaF_0(w,\varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\}\theta \exp(j\varepsilon W)E + Q^{\mathrm{T}} F_0(w,\varepsilon) = 0, \\ -\mu F_1(w,\varepsilon) + \lambda F_0(w,\varepsilon) + \lambda F_1(w,\varepsilon)(V^{\mathrm{T}} \exp\{j\varepsilon W\} - 1) + Q^{\mathrm{T}} F_0(w,\varepsilon) + \\ \qquad + j\left[\dfrac{\partial F_0}{\partial w} \varepsilon + jaF_0(w,\varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\}\theta E + \\ \qquad\qquad + j\left[\dfrac{\partial F_1}{\partial w} \varepsilon + jaF_1(w,\varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\}(\theta E V^{\mathrm{T}} - \theta) \exp\{j\varepsilon W\}E = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. Предельные значения $F_k(w)$ решений $F_k(w,\varepsilon)$ в системе уравнений (6) при $\varepsilon \to 0$ определяются как

$$F_s(w) = R_s \exp\left\{ -\frac{1}{2} E^{\mathrm{T}} WKWE \right\}, \ s = 0,1 .$$

При этом матрица ковариаций K является решением обратного матричного уравнения Ляпунова (см. [15]):

$$(K - \mathrm{diag}(a))A + A^{\mathrm{T}}(K - \mathrm{diag}(a)) + 2B = 0 , \tag{6}$$

где

$$A=\theta\left[EV^{\mathrm{T}}\left(\frac{E^{\mathrm{T}}R_1}{\mu}-2E^{\mathrm{T}}R_1\right)+I\right],\ B=\frac{VV^{\mathrm{T}}}{E^{\mathrm{T}}R_0}\left[-\frac{(E^{\mathrm{T}}\lambda R_1)^2}{\mu}+E^{\mathrm{T}}R_1E^{\mathrm{T}}R_1\right].$$

Результаты теорем 1, 2 показывают возможность аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов многомерным гауссовским распределением и устанавливают его параметры — вектор средних (4) и ковариационную матрицу (6).

5. Сравнение с имитационным подходом

Для рассматриваемой RQ-системы реализована имитационная модель. С ее помощью численно получено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов.

Определим исходные параметры системы следующим образом:

$$\lambda=\begin{bmatrix}0.30 & 0 & 0\\ 0 & 0.50 & 0\\ 0 & 0 & 0.70\end{bmatrix},\ \mu=1,\ V^{\mathrm{T}}=[0.40\ 0.25\ 0.35],\ \theta=\varepsilon\begin{bmatrix}-0.30 & 0.10 & 0.10\\ 0.10 & -0.20 & 0.05\\ 0.15 & 0.15 & -0.60\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}-0.40 & 0.20 & 0.20\\ 0.10 & -0.20 & 0.15\\ 0.15 & 0.45 & -0.60\end{bmatrix},\ \varepsilon=\{0.2,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.01\}.$$

Для заданного набора параметров с помощью имитационной модели получены ряды распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Для сравнения с асимптотическими результатами, определяемыми формулами (5) и (7), установим критерий сравнения – расстояние Колмогорова

$$d=\max_{1\le m<\infty}\left|\sum_{i=1}^{m}P(i)-\sum_{i=1}^{\mathrm{m}}G(i)\right|.$$

Здесь $P(i)$ есть ряд распределения вероятностей, полученный подстановкой целых значений в функцию плотности вероятности нормального распределения, которое получено путем суммирования всех компонент вектора многомерного нормального распределения, а $G(i)$ есть ряд распределения вероятностей, полученный с помощью имитационного моделирования.

На графиках ниже приведены гистограммы рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ, полученных асимптотически (сплошная линия) и имитационно (пунктирная линия) при значениях вышеуказанных параметров:

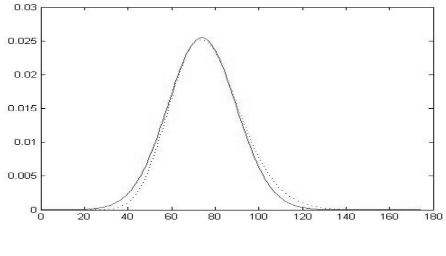

Рис. 1. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon=0.1$

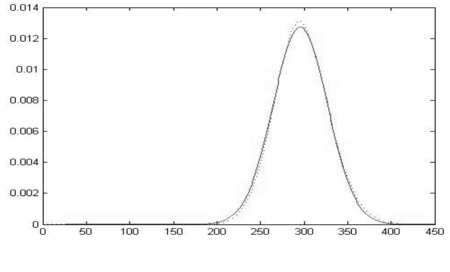

Рис. 2. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon=0.2$

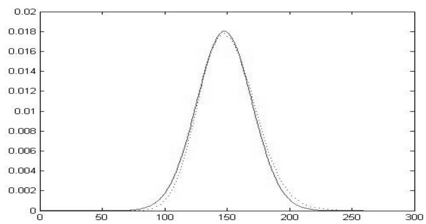

Рис. 3. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0.05$

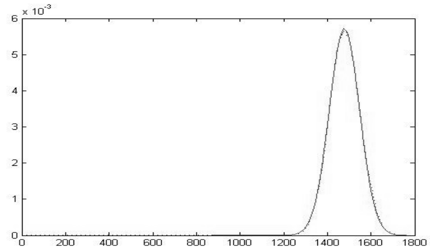

Рис. 4. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0.01$

Приведем таблицу расстояний Колмогорова для тех же параметров системы, которые соответствуют графикам на рис. 1–4.

Таблица 1

ε	*d*
0.20	0.059
0.10	0.039
0.05	0.030
0.01	0.012

Данные табл. 1 указывают на то, что при уменьшении параметра ε расстояние между асимптотическим и имитационным распределениями вероятностей уменьшается. Полагая допустимым погрешность в 0.05, можно считать, что допустимым применение асимптотических результатов при значении ε менее 0.1.

Заключение

В работе показана возможность гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов и получены параметры для данного приближения. Построены графики асимптотического и имитационного распределений вероятностей состояний системы. Приведены табличные данные расстояния Колмогорова между имитационным и асимптотическим распределениями вероятностей в условии неограниченно растущего повторного времени. Сделан вывод о том, что при увеличении повторного времени расстояние между распределениями вероятностей сокращается. Установлена область применимости гауссовской аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания М. : Физматгиз, 1963. 15 с.
2. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
3. *Jesus R. Artalejo, Antonio Gomez-Corral* Retrial Queue Systems. A computational approach, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
4. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. М. : Издательство РУДН, 1995. С. 98–108.
5. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Издательство НТЛ, 2006. С. 131–134.
6. *Falin G. I., J. G. C. Templeton* Retrial oueues. Chapman &Hall, 1997.
7. *T. Yang, M. J. M. Posner, J. G. G. Templeton, H. Li* An approximation methods for M/G/1 retrial queue with general retrial times, Europian Journal of Operational Research 76, 552–562.
8. *Elldin A., Lind G.* Elementary telephone traffic theory, Ericson Public Telecommunications. 1967.
9. *Syski R.*. Introduction to congestion theory in telephone systems. Amterdam : ElsevierSciencePublisher, 1968.
10. *Stollez R.* Performance analysis and optimization of Inbound Call Centers. Berlin : Springer, 2003.
11. *Wesolowski K.* Mobile communication systems. New York : John Wiley & Sons, 2002.
12. *G. Giambene* Queueing Theory and telecommunications: Networks and Applications. New York : Springer, 2005.
13. *J. L. Hammond, P. J. P. O`Reilly.* Performance analysis of local computer networks. Massachusetts : Addison-Wesley, 1998.
14. *H. Bruneel, B. G. Kim.* Discrete-Time models for communication systems including ATM. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1993.
15. *Параев Ю. И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1989. – 168 с.