

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
II Всероссийской молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 16–17 мая 2014 г.

*Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2014

ны аналитические выражения для первого и второго моментов числа занятых приборов в системе и числа суммарных обращений в систему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А. А., Моисеева С. П. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
2. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов: учебное пособие. – 2-е изд., испр. – Томск : Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М. : Наука, 1969. – 400 с.
4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. – Томск : Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.
5. Эльзгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М. : Наука, 1969. – 424 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $\text{HIMMP}[(M|\infty)^K$ С «РАСПАКОВКОЙ» ЗАЯВОК

Н. В. Минаева, А. А. Назаров

Томский государственный университет
E-mail: minaevanv@sibmail.com

1. Постановка задачи

В работе рассмотрена многофазная система массового обслуживания с входящим высокоинтенсивным HIMMP -поток, неограниченным числом приборов на каждой фазе, время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону. Заявка, обслуживавшаяся на k -й фазе, распаковывается (порождает, распадается) на $n = 0, 1, 2, \dots$ заявок с вероятностью $p(n)$, каждая из которых попадает на $(k+1)$ -ую фазу и обслуживается на ней (рис. 1).

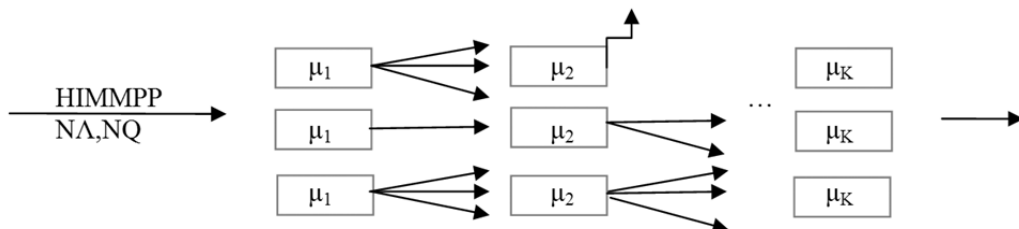


Рис. 1

Цель исследования – нахождение распределения вероятностей многомерного процесса $i(t) = \{i_1(t), i_2(t), \dots, i_K(t)\}$, где $i_k(t)$ – число заявок на k -ой фазе в момент времени t .

Двумерный случайный процесс $\{i(t), k(t)\}$, где $k(t)$ – управляющая цепь Маркова входящего потока, является марковским, а значит, для него можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Обозначим $P(i, k, t) = P\{i(t) = i, k(t) = k\}$.

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{i}, k, t + \Delta t) = & P(\mathbf{i}, k, t)(1 + Nq_{kk}\Delta t)(1 - N\lambda_k\Delta t) \prod_{l=1}^K (1 - \mu_l i_l \Delta t) + P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_1, k, t)N\lambda_k\Delta t + \\
 & + P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_K, k, t)(i_K + 1)\mu_K\Delta t + \sum_{v \neq k} P(\mathbf{i}, v, t)Nq_{vk}\Delta t + \\
 & + \sum_{l=1}^{K-1} \sum_{n_l=0}^{\infty} P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_1 - n_l \mathbf{e}_{l+1}, k, t)p_l(n_l)(i_l + 1)\mu_l\Delta t + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

2. Асимптотический анализ

Для исследования системы будем использовать характеристическую функцию вида

$$H(\mathbf{u}, k, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{j\mathbf{u}i} P(\mathbf{i}, k, t)$$

Для введенной функции в стационарном режиме уравнение системы примет вид

$$\begin{aligned} -H(\mathbf{u}, k) \lambda_k (1 - e^{ju_k}) + j \sum_{l=1}^{K-1} \mu_l \left(1 - \sum_{n_l=0}^{\infty} p_l(n_l) e^{-ju_l} e^{jn_l u_{l+1}} \right) \frac{\partial H(\mathbf{u}, k)}{\partial u_l} \frac{1}{N} + \\ + j \frac{\partial H(\mathbf{u}, k)}{\partial u_K} \mu_K (1 - e^{-ju_K}) \frac{1}{N} + \sum_v H(\mathbf{u}, v) q_{vk} = 0. \end{aligned}$$

Для нахождения асимптотики первого порядка, введены замены:

$$\varepsilon = \frac{1}{N}, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H(\mathbf{u}, k) = F(\mathbf{w}, \varepsilon, k),$$

где N будем устремлять к ∞ . Результатом первой асимптотики является вектор средних распределения числа занятых приборов.

$$M\{i_s(t)\} = j \frac{\lambda N}{\mu_s} \prod_{d=1}^{s-1} g_d,$$

где $\lambda = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{E}$.

Для нахождения асимптотики второго порядка вводятся замены:

$$H(\mathbf{u}, k) = H_2(\mathbf{u}, k) \exp \left(\sum_{s=1}^K j \frac{\lambda N}{\mu_s} u_s \prod_{d=1}^{s-1} g_d \right), \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{N}, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad H_2(\mathbf{u}, k) = F_2(\mathbf{w}, \varepsilon, k).$$

В результате получено уравнение для матрицы ковариации случайных процессов числа занятых приборов на каждой фазе системы ρ :

$$(\mu - \mathbf{A}^T \mu \mathbf{G}) \rho + \rho (\mu - \mathbf{G} \mu \mathbf{A}) = \mathbf{I}_1 (\lambda - \kappa) + \lambda (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^T),$$

которое является уравнением Ляпунова

$$\mathbf{B} \rho + \rho \mathbf{C} = \mathbf{D},$$

$$\mathbf{B} = \mu - \mathbf{A}^T \mu \mathbf{G},$$

$$\mathbf{C} = \mu - \mathbf{G} \mu \mathbf{A} = \mathbf{B}^T,$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}_1 (\lambda - \kappa) + \lambda (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^T),$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & g_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & g_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & g_1 g_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & g_1 g_2 g_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & g_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & g_1 g_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sum_{n_1=0}^{\infty} n_1^2 p_1(n_1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & g_1 \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2^2 p_2(n_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Матрицу ковариаций можно найти из уравнения $\mathbf{X} = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{B})^{-1} \mathbf{V}$. Здесь $\mathbf{X}$ и $\mathbf{V}$ — разложенные в вектора матрицы ρ и $\mathbf{D}$ соответственно, а $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

3. Метод моментов

Система была исследована методом моментов, ниже приведены полученные характеристики.

Моменты первого порядка

$$M\{i_m(t)\} = \frac{\lambda}{\mu_m} \prod_{r=1}^{m-1} g_r.$$

Моменты второго порядка

$$M\{i_1(t)i_m(t)\} = \frac{R\Lambda^2 E}{\mu_1 \mu_m} \prod_{r=1}^{m-1} g_r,$$

$$M\{i_m(t)i_s(t)\} = \frac{1}{\mu_s + \mu_m} (\mathbf{m}_{m,s-1} \mu_{s-1} g_{s-1} \mathbf{E} + \mathbf{m}_{m-1,s} \mu_{m-1} g_{m-1} \mathbf{E}), \quad m, s \neq 1, \quad s \neq m, \quad s \neq m-1,$$

$$M\{i_m(t)i_{m-1}(t)\} = \frac{1}{\mu_{m-1} + \mu_m} (\mathbf{m}_{m,m-2} \mu_{m-2} g_{m-2} \mathbf{E} + \mathbf{m}_{m-1}^{(2)} \mu_{m-1} g_{m-1} \mathbf{E} - \mathbf{m}_{m-1} \mu_{m-1} g_{m-1} \mathbf{E}),$$

$$M\{i_1^2(t)\} = \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{R\Lambda^2 E}{\mu_1^2}, \quad M\{i_m^2(t)\} = \frac{1}{2\mu_m} (2\mathbf{m}_{m-1,m} \mu_{m-1} g_{m-1} \mathbf{E} + \mathbf{m}_{m-1} \mu_{m-1} g_{m-1}^{(2)} \mathbf{E} + \mathbf{m}_m \mu_m \mathbf{E}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. – Томск : НТЛ, 2010.
2. Назаров А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1991.
3. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 3-е изд. – М. : КомКнига, 2005.

СТАБИЛЬНОСТЬ RQ-СИСТЕМЫ M|GI|1 С КОНФЛИКТАМИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Н. А. Поморцева

Томский государственный университет

E-mail: natashafpmk@gmail.com

Большое количество важных практических задач, возникающих в связи с бурным развитием информационных, компьютерных, телекоммуникационных систем, может быть решено благодаря теории массового обслуживания.

Для анализа и исследования таких систем используют модели с повторной очередью (Retrial queueing systems), которые адекватно описывают процессы и явления, происходящие в них. Исследованию RQ-систем посвящено огромное количество литературы, однако некоторые задачи все еще остаются не решенными и интересными для исследования. В большинстве работ проводится исследование RQ-систем без конфликтов заявок, а классу RQ-систем с конфликтами заявок уделяется гораздо меньше внимания, несмотря на то, что он представляет не меньший интерес для исследования.

Исследованием RQ-систем с конфликтами заявок занимались Krishna Kumar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., Sadiq Basha S.[5], Artalejo J. R. [2, 7, 9], А. А. Назаров [8, 10] и другие.

Свойства RQ-систем с конфликтами заявок значительно отличаются от свойств систем без конфликтов.

В данной работе рассмотрено свойство стабильности для RQ-системы M|GI|1 с конфликтами заявок.