МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

II Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 16–17 мая 2014 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2014

Результаты второго эксперимента продемонстрированы в табл. 4.

Таблица 4

Результаты второго эксперимента

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	…	t_{18}
t_{MAP}	0.063	0.328	1.253	1.773	3.975	4.314	4.843	5.802	6.148	6.239	…	10.929
λ	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_2	λ_1	λ_2	λ_2	λ_1	λ_1	…	λ_1
	t_1				t_2				t_3		…	t_5
t	0.063				3.975				6.148		…	10.929

Как и ожидалось, во втором эксперименте событий MAP-потока наступило больше, т.к. был увеличен параметр λ_1 и вероятность $P_1(\lambda_1/\lambda_1)$. Но в наблюдаемом потоке заявок больше не стало из-за наличия мертвого времени.

Заключение

В данной работе описан MAP-поток событий с двумя состояниями, получена основная формула для построения имитационной модели MAP-потока, приведены численные результаты экспериментов. Таким образом, сравнивая начальные данные и значения, приведенные в таблицах, можно сделать вывод об адекватности работы построенной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – М. : Наука, 1966. – Гл. 1 : Задачи теории массового обслуживания в простейших предпосылках. – С. 12–91.

2. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Математическое моделирование : о связи МС-потоков и MAP-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1. – С. 13–21.

3. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 311 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ

Е. А. Дейс, А. А. Назаров

Томский государственный университет
E-mail: katedeys@gmail.com

В связи с необходимостью повышения надежности прогнозирования и обработки информации, современные экономические и вычислительные системы становятся более многопараметрическими, на их функционирование влияет множество факторов. Применение для построения и исследования математических моделей таких систем классических моделей теории массового обслуживания не всегда дает адекватные результаты, так как необходимо учитывать как характерные особенности систем, так и специфику происходящих экономических процессов.

Модель отрицательной (альтернативной) заявки может быть применена для описания процесса продажи актива, в противовес положительной — покупки, или наоборот.

Альтернативные заявки реализуют один из классов алгоритмов:

1. При поступлении в пустую систему, отрицательная заявка теряется.

2. Отрицательная заявка, поступая в систему, ожидает прихода новой положительной заявки, находящиеся на приборах положительные заявки завершают обслуживание.

Одним из примеров модели упрощенной экономической системы рассмотрим систему $M \mid GI \mid \infty$.

Описание системы

На вход системы поступает два потока – поток положительных заявок с параметром λ^{+} и альтернативный поток – с параметром γ^{-}. Продолжительности обслуживания положительных заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют произвольную функцию распределения $B(x)$. Обозначим $i(t)$ число положительных заявок в системе, $l(t)$ – число альтернативных заявок.

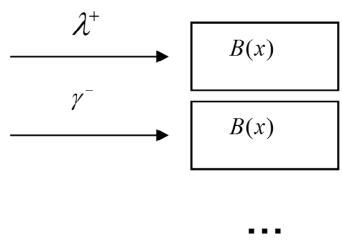

Рис. 1. Система $M \mid GI \mid \infty$ с альтернативными заявками

Метод просеянного потока

Отметим, что при произвольной функции распределения времени обслуживания, случайный процесс $\{i(t), l(t)\}$ не является марковским, вследствие этого исследование выполнено методом просеянного потока.

Пусть на вход системы поступают два потока заявок. Для потока положительных и альтернативных заявок на оси времени t отметим моменты наступления события данных потоков. Рассмотрим некоторый момент времени $t_1 = 0$. Предположим, что заявка входящего отрицательного потока, поступившая в систему в момент времени $t < t_1 = 0$, с вероятностью $s(t) = 1 - B(-t)$ формирует наступление события в просеянном потоке, соответственно, с вероятностью $1 - s(t)$ заявка не рассматривается. Для потока положительных заявок характеристики входящего в систему потока и соответствующего ему просеянного совпадают.

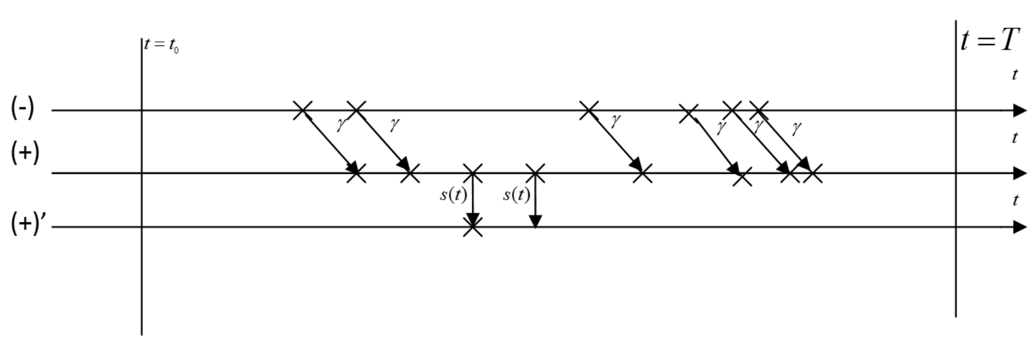

Рис. 2. Метод просеянного потока

Обозначим $n(t)$ – число положительных заявок в просеянном потоке, $l(t)$ – число альтернативных заявок в просеянном потоке, $P\{n(t) = n,\ l(t) = l\} = P(n, l, t)$. Так как процесс $\{n(t), l(t)\}$ является марковским, для вероятностей $P(n,l,t)$ получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{cases} P(n,l,t+\Delta t) = P(n,l,t)(1-\gamma\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + P(n-1,l,t)\gamma\Delta t + P(n,l+1,t)\lambda\Delta t, \\ P(n,0,t+\Delta t) = P(n,0,t)\left[(1-\lambda\Delta t)(1-\gamma\Delta t) + \lambda\Delta t(1-s(t))\right] + \\ +P(n-1,0,t)s(t)\lambda\Delta t + P(n,1,t)\lambda\Delta t. \end{cases} \quad (1)$$

Разделив на Δt, при $\Delta t \to 0$ получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(n,0,t)}{\partial t} = -P(n,0.t)\big(\gamma + \lambda s(t)\big) + P(n-1,0,t)\lambda s(t) + \lambda P(n,1,t), \\ \dfrac{\partial P(n,l,t)}{\partial t} = -P(n,l,t)(\lambda+\gamma) + P(n,l-1,t)\gamma + P(n,l+1,t). \end{cases} \quad (2)$$

От системы (2) перейдем к системе для частичных характеристических функций: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n,l,t) = H(u,l,t)$, $j = \sqrt{-1}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,0,t)}{\partial t} = -H(u,0,t)\left[\gamma + \lambda s(t)(1-e^{ju})\right] + \lambda H(u,1,t), \\ \dfrac{\partial H(u,l,t)}{\partial t} = -H(u,l,t)(\lambda+\gamma) + \gamma H(u,l-1,t) + \lambda H(u,l+1,t). \end{cases} \quad (3)$$

Метод асимптотического анализа

Аналитическое решение системы (3) затруднено, поэтому применим метод асимптотического анализа.

1. Асимптотика первого порядка

В системе (3) выполним следующие замены: $u = w\varepsilon$, $H(u,l,t) = F(w,l,t,\varepsilon)$, $\lambda^{+} = \lambda N$, $\gamma^{-} = \gamma N$, $\varepsilon = \dfrac{1}{N}$. Получим:

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial F(w,0,t,\varepsilon)}{\partial t} = -F(w,0,t,\varepsilon)\left[\gamma - \lambda s(t) jw\varepsilon\right] + \lambda F(w,1,t,\varepsilon), \\ \varepsilon\dfrac{\partial F(w,l,t,\varepsilon)}{\partial t} = -F(w,l,t,\varepsilon)(\lambda+\gamma) + \gamma F(w,l-1,t,\varepsilon) + \lambda F(w,l+1,t,\varepsilon). \end{cases} \quad (4)$$

При $\varepsilon \to 0$ система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} -F(w,0,t)\gamma + F(w,1,t)\lambda = 0, \\ -F(w,l,t)(\gamma+\lambda) + F(w,l-1,t)\gamma + F(w,l+1,t)\lambda = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Представим $F(w,l,t) = \Phi(w,t)R(l)$:

$$\begin{cases} -R(l)(\lambda+\gamma) + \gamma R(l-1) + \lambda R(l+1) = 0, \\ -\gamma R(0) + \lambda R(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Получим: $R(l) = \dfrac{\left(\dfrac{\gamma}{\lambda}\right)^{l}}{1-\left(\dfrac{\gamma}{\lambda}\right)}$. Найдем $\Phi(w,t)$. Просуммируем по l все уравнения системы (4):

$$\varepsilon\frac{\partial F(w,t,\varepsilon)}{\partial t}=-F(w,0,t,\varepsilon)jw\varepsilon\lambda s(t)\,;\;\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}=-R(0)\Phi(w,t)jw\lambda s(t)\,;$$

$$\Phi(w,t)=\exp\left\{-jw(\lambda-\gamma)\int_{t_0}^{t}s(t)dt\right\};$$

$$H(u,l,t)=R(l)\exp\left\{jw\kappa\int_0^{\infty}s(t)dt\right\},\;\kappa=-(\lambda-\gamma) \tag{7}$$

Выражение (7) для $H(u,l,t)$ будем называть **первой асимптотикой системы** $M\,|\,GI\,|\,\infty$ с альтернативными заявками.

2. Асимптотика второго порядка

В системе (3) заменим $H(u,l,t)=H^{(2)}(u,l,t)e^{ju n\kappa\int_{t_0}^{t}s(t)}dt$:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{N}\dfrac{\partial H^{(2)}(u,0,t)}{\partial t}=-H^{(2)}(u,0,t)\left[\gamma+\lambda s(t)\left(1-e^{ju}\right)+ju\kappa s(t)\right]+\lambda H^{(2)}(u,1,t),\\ \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial H^{(2)}(u,l,t)}{\partial t}=-H^{(2)}(u,l,t)\left[\gamma+\lambda+ju\kappa s(t)\right]+\lambda H^{(2)}(u,l+1,t)+\gamma H^{(2)}(u,l-1,t).\end{cases} \tag{8}$$

Преобразовав (8) и выполнив замену $u=w\varepsilon$, $H^{(2)}(u,l,t)=F(w,l,t,\varepsilon)$, $\lambda^{+}=\lambda N$, $\gamma^{-}=\gamma N$, $\varepsilon^{2}=\dfrac{1}{N}$, получим:

$$\begin{cases}\varepsilon^{2}\dfrac{\partial F(w,0,t,\varepsilon)}{\partial t}=-F(w,0,t,\varepsilon)\left[\gamma+\lambda s(t)(1-e^{jw\varepsilon})+ju\kappa s(t)\right]+\lambda F(w,1,t,\varepsilon),\\ \varepsilon^{2}\dfrac{\partial F(w,l,t,\varepsilon)}{\partial t}=-F(w,l,t,\varepsilon)\left[\lambda+\gamma+ju\kappa s(t)\right]+\gamma F(w,l-1,t,\varepsilon).\end{cases} \tag{9}$$

Представим $F(w,l,t,\varepsilon)$ в виде разложения: $F(w,l,t,\varepsilon)=\Phi(w,t)\left\{R(l)+jw\varepsilon s(t)f(l)\right\}+o(\varepsilon)$ и подставим в систему (9). Разделим на $jw\varepsilon$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\begin{cases}0=R(0)(\lambda+\kappa)+\gamma f(0)+\lambda f(1),\\ 0=\kappa R(l)-(\gamma+\lambda)f(l)+\gamma f(l-1)+\lambda f(l+1).\end{cases} \tag{10}$$

Система (10) – неоднородная система линейных конечно-разностных уравнений для функций $f(l)$. Для решения рассматриваемой системы найдем решение соответствующей ей однородной системы. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda z^{2}-(\lambda+\gamma)z+\gamma=0\,. \tag{11}$$

Корнями уравнения являются $z_1=1$, $z_2=\dfrac{\gamma}{\lambda}$. Следовательно, $f(l)=C\left(\dfrac{\gamma}{\lambda}\right)^{l}$, корень, равный единице не рассматривается, исходя из определения функции $F(w,l,\varepsilon)$. Константу C найдем из граничного условия системы (10):

$$C=\frac{\lambda-\gamma}{\lambda}\,. \tag{12}$$

Для решения исходной системы уравнений, подберем некоторое частное решение. Будем искать частное решение системы (10) в виде: $f(l)=A\left(\dfrac{\gamma}{\lambda}\right)^{l}$. Окончательно получим: $f(l)=(-\gamma+C)\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^l$, где константа C определяются равенством (12). Далее, для определения $\Phi(w,t)$ просуммируем уравнения системы (9) по всем $l=\overline{0,\infty}$. Заметим, что $\sum_l F(w,l,t,\varepsilon)=\sum_l \Phi(w,l)\{R(l)+jw\varepsilon s(t)f(l)\}=\Phi(w,l)(1+jw\varepsilon f)$, $f=\sum_l f(l)$. Получим:

$$\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}=-\frac{(jw)^2}{2}\left[2s^2(t)\left(f-f(0)\right)+\kappa s(t)\right]\Phi(w,t),$$

$$\Phi(w,t)=\exp\left\{-\frac{(jw)^2}{2}\left[\kappa\int_{t_0}^{t}s(t)dt+2\left(f(0)-f\right)\int_{t_0}^{t}s^2(t)dt\right]\right\}.$$

Обозначив $\kappa_2=\left[2\left(f(0)-f\right)\right]$, получим

$$H(u,l)=R(l)\exp\left\{jw\kappa+\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}. \tag{13}$$

Выражение (13) будем называть второй асимптотикой системы $M\,|\,GI\,|\,\infty$ с альтернативными заявками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ayyappan G., Muthu Ganapthi Subramanian A.* M/M/1 Retrial queueing system with negative arrival // Applied Mathematical Sciences. 2010. Vol. 4, № 48. pp. 2355–2367.
2. *Gelenbe E., Glynn P., Sigman K.* Queues with negative arrivals // Journal of Applied Probability. 1991. Vol. 28. P. 245–250.
3. *Gelenbe E.* Product-form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. 1991. Vol. 28. pp. 656–663.
4. *Yang W. S., Bong D. C.* A queue with positive and negative arrivals governed by a Markov chain // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 09/2003. 17(04). pp. 487–501.
5. *Yechiali U.* Analysis and control of polling systems // Performance evaluation of computer and communication systems. Springer-Verlag, 1993. pp. 630–650.
6. *Мандзо Р., Касконе Н., Разумчик Р. В.* Экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок // АиТ. 2008. № 9. С. 103–113.
7. *Назаров А. А.* Исследование процесса изменения числа заявок в нестационарной немарковской бесконечнолинейной системе массового обслуживания // Вестник ТГУ. 2013. С. 230–231.
8. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ GI|M|∞ С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ

Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева

Томский государственный университет
E-mail: zhidkovala@mail.ru, smoiseeva@mail.ru

Введение

СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов являются математическими моделями сложных технических систем, таких как распределенные вычислительные и информационные системы [1], а также различных социально-экономических систем, в том числе торговых и страховых компаний [2]. Одной из модификаций СМО с неограниченным числом приборов являются системы массового обслуживания с повторными обращениями. В работах [3, 4] в качестве математических моделей изменения числа клиентов торговых компаний предлагается использовать СМО с неограниченным числом приборов, пуассоновским входящим потоком и повторными обращениями.