ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Т. 57, № 8 ФИЗИКА 2014

УДК 517.986.6, 517.968.74

А.И. БРЕЕВ

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА СВЕРТКИ НА ГРУППАХ ЛИ И КОММУТАТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Рассматривается уравнение Шредингера с нелокальной нелинейностью типа свертки на группах Ли и коммутативных однородных пространствах. Показано, что в частном случае абелевой группы уравнение Шредингера допускает решение в виде суперпозиции невзаимодействующих солитонов. В случае коммутативного однородного пространства проведена некоммутативная редукция уравнения Шредингера. Найдено общее решение в частном случае, когда нелинейность факторизуется по пространственным переменным.

Ключевые слова: *метод орбит, λ-представление, уравнение Шредингера с нелинейностью типа свертки.*

Введение

Нелинейные уравнения математической физики являются основой описания широкого класса физических явлений. Особый интерес представляют уравнения в многомерных пространствах с переменными коэффициентами (внешними полями) и различными видами нелинейности. Разработка аналитических методов интегрирования таких уравнений представляет актуальную проблему математической физики.

В настоящей работе рассматривается уравнение Шредингера с нелокальной нелинейностью типа свертки на группах Ли и коммутативных однородных пространствах с инвариантной метрикой, обобщающее уравнение Шредингера на унимодулярной группе Ли, исследованное в [1]. В случае группы Ли уравнение имеет лагранжеву форму и может быть получено вариацией соответствующего действия. Отметим, что в работе [2] при помощи метода орбит построено семейство частных решений нелокального уравнения Клейна – Гордона на коммутативном однородном пространстве. В работе [3] исследовалось уравнение Клейна – Гордона с нелокальной нелинейностью типа свертки трех волновых функций на унимодулярной группе Ли.

Отметим, что метод орбит [4] применяется в методе некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [5]. В работах [6, 7] при помощи данного метода рассматривался эффект поляризации вакуума на основе решений уравнений Клейна – Гордона и Дирака на группах Ли и однородных пространствах. Метод орбит при помощи обобщенного преобразования Фурье позволяет учесть некоммутативные симметрии уравнения и редуцировать исходное линейное уравнение к более простому уравнению на К-орбите с меньшим количеством независимых переменных. В случае уравнения Шредингера с нелинейностью типа свертки также возможно провести некоммутативную редукцию. Редуцированное уравнение в случае коммутативного однородного пространства представляет собой интегродифференциальное уравнение первого порядка по временной переменной, а в случае абелевой группы Ли – обыкновенное дифференциальное уравнение. В работе рассмотрен частный случай нелинейности, когда удается линеаризовать данное уравнение и получить общее решение.

1. Метод орбит и гармонический анализ на группах Ли

Кратко изложим основы метода орбит и гармонического анализа на группах Ли, следуя в основном работам [4, 8, 9].

Пусть G – связная вещественная группа Ли, L – ее алгебра Ли. Группа Ли G действует на сопряженном пространстве L^* *коприсоединенным* представлением $\mathrm{Ad}^*\colon G\times L^*\to L^*$, которое расслаивает L^* на К-орбиты размерности $\dim L - \mathrm{ind}\, L - 2k$, где число k принимает значения от 0 до $(\dim L - \mathrm{ind}\, L)/2$. *Индекс* алгебры $\mathrm{ind}\, L$ определяется как количество независимых функций Казимира на сопряженном пространстве L^* относительно скобки Пуассона – Ли $\{,\}^{\mathrm{Lie}}$. Коалгебра L^* является объединением связных инвариантных алгебраических поверхностей $M_{(s)}$, где каждая связная поверхность $M_{(s)}$ является объединением К-орбит размерности $\dim L - \mathrm{ind}\, L - 2s$. Непостоянные на

---

[1] Работа поддержана Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров и выполнена в рамках госзадания вузам «Наука», рег. № 1.604.2011.

$M_{(s)}$ функции $K^{(s)}{}_{\mu}(f)$, коммутирующие с любой функцией на $M_{(s)}$, называются *функциями Казимира* (s)*-типа*. Через $F^{(s)}{}_{\alpha}(f)$, ($\alpha = 1, \ldots, \dim L - r_{(s)}$) обозначим независимый набор функций, определяющих поверхность $M_{(s)}$.

Пусть далее O_λ – К-орбита s-типа (т.е. принадлежащая $M_{(s)}$), содержащая ковектор λ. Форма Кириллова ω_λ задает на К-орбите O_λ симплектическую структуру. Введем на К-орбите канонические координаты Дарбу $(p,q)\in P\times Q$, в которых форма Кириллова ω_λ принимает канонический вид: $\omega_\lambda = dp^a\wedge dq_a$, $a = 1, \ldots, 1/2 \dim O_\lambda$. Определим *каноническое вложение* f: $O_\lambda\to L^*$, когда ковектору $f\in L^*$ставятся в соответствие его канонические координаты на соответствующей К-орбите. Каноническое вложение однозначно определяется функциями $f_X(p, q, \lambda)$, $X\in L$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\{f_X, f_Y\}^{\mathrm{Lie}} = f_{[X,Y]}, \quad f_X(0,0,\lambda) = \lambda(X), \quad F_\alpha^{(s)}(f) = 0, \quad X, Y \in L .$$

Перейдем от алгебры Ли L к соответствующему комплексному расширению L_{C} и рассмотрим каноническое вложение, линейное по переменным p:

$$f_X(q,p,\lambda) = \alpha_X^a(q)p_a + \chi_X(q,\lambda), \quad X \in L_C, \quad a = 1,\ldots,\dim Q . \tag{1}$$

Для существования линейного канонического вложения (1) орбиты O_λ необходимо и достаточно, чтобы функционал λ допускал *поляризацию* $\boldsymbol{n} \subset L$ [4, 10]. Отметим, что поляризация $\boldsymbol{n}$ является подалгеброй изотропии алгебры L_{C} локальной группы G_{C}, действующей на локальном однородном пространстве $Q \approx G_{\mathrm{C}}/\exp(\boldsymbol{n})$. Операторы

$$l_X(q,\lambda) \equiv if_X(q,-i\partial_q,\lambda) = \alpha_X^a(q)\partial_{q^a} + i\chi_X(q,\lambda), \quad a = 1,\ldots,\dim Q, X \in L ,$$

реализуют неприводимое представление алгебры Ли L в пространстве гладких функций $L_2(Q, \boldsymbol{n}, \lambda)$, которое называется λ*-представлением* алгебры Ли. Введем на многообразии Q меру $d\mu_0(q)$ и скалярное произведение

$$\left(\psi_1,\psi_2\right) = \int_Q \overline{\psi_1(q)}\psi_2(q)d\mu(q), \quad d\mu(q) = \Delta(q)d\mu_0(q),$$

где $\Delta(q) = \Delta(s(q), e_H)$; $\Delta(g)$ – модуль группы Ли G; e_H – единица локальной группы $\exp(\boldsymbol{n})$, s: $Q \to G_{\mathrm{C}}$ – гладкое сечение расслоения G_{C} с базой Q и слоем $\exp(\boldsymbol{n})$, $g \in G$. Потребуем, чтобы операторы λ-представления были косоэрмитовы относительно меры $d\mu_0(q)$. Введем поднятие λ-представления алгебры Ли L до локального представления ее группы Ли G:

$$T^\lambda(g)\varphi(q) = \int D^\lambda_{q\overline{q'}}(g)\varphi(q')d\mu(q'), \quad \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} T^\lambda(\exp(tX))\varphi(q) = l_X(q,\lambda)\varphi(q),$$

где $\varphi\in L_2(Q, d\mu(q))$. Из условия $T^\lambda(g_1)T^\lambda(g_2) = T^\lambda(g_1g_2)$ следует соотношение для «матричных» элементов представления $T^\lambda(g)$:

$$D^\lambda_{q\overline{q'}}(g_1g_2) = \int_Q D^\lambda_{q\overline{q''}}(g_1)D^\lambda_{q''\overline{q'}}(g_2)d\mu(q''), \quad D^\lambda_{q\overline{q'}}(e) = \delta(q,\overline{q'}). \tag{2}$$

Отметим, что функции $D^\lambda_{q\overline{q'}}(g)$ определены глобально на всей группе Ли G только для К-орбит, удовлетворяющих условию Кириллова целочисленности орбиты O_λ [9]. Можно показать, что обобщенные функции $D^\lambda_{q\overline{q'}}(g)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$[\eta_X(g) + l_X(q,\lambda)]D^\lambda_{q\overline{q'}}(g) = 0, \quad [\xi_X(g) - \overline{l_X^\dagger(q',\lambda)}]D^\lambda_{q\overline{q'}}(g) = 0, \tag{3}$$

где $\xi_X(x)$, $\eta_X(x)$ – левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля на группе Ли G соответственно ($X\in L$). Из системы уравнений (3) следует полезное соотношение

$$D^\lambda_{q\overline{q'}}(g) = \frac{\Delta(q)}{\Delta(q')}\overline{D^\lambda_{q'\overline{q}}(g^{-1})}. \tag{4}$$

Инвариантному подпространству $M_{(s)}$ пространства L^* сопоставим инвариантное функциональное подпространство $L_{(s)}= \{\varphi \in L_2(G, d\mu(g)) \mid F^{(s)}{}_{\alpha}(\xi)\varphi(g) = 0\}$ пространства $L_2(G,d\mu(g))$, где $d\mu(g)$ – правая мера Хаара на группе Ли G. Семейство обобщенных функций $D^\lambda_{q\overline{q'}}(g)$ обладает свойствами полноты и ортогональности:

$$\int \overline{D^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{q}\overline{\tilde{q}'}}(g^{-1})} D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g^{-1})d\mu(g) = \Delta(q)\delta(q,\overline{\tilde{q}})\delta(\tilde{q}',\overline{q'})\delta(\tilde{\lambda},\lambda); \tag{5}$$

$$\int \overline{D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(\tilde{g}^{-1})} D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g^{-1})d\mu_0(q)d\mu(q')d\mu(\lambda) = \delta(g,\tilde{g}). \tag{6}$$

Для каждой функции $\varphi(g)$ из $L_{(s)}$ определено прямое и обратное преобразование Фурье:

$$\psi(q,q',\lambda) = \Delta^{-1}(q)\int\varphi(g)\overline{D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g^{-1})}d\mu(g); \tag{7}$$

$$\varphi(g) = \int\psi(q,q',\lambda)D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g^{-1})d\mu(q)d\mu(q')d\mu(\lambda), \tag{8}$$

где $d\mu(\lambda)$ – спектральная мера операторов Казимира $K_{\mu}(\eta)$ на группе Ли G. Для невырожденных орбит прямое и обратное преобразование (7), (8) определено на всем пространстве $L_{(0)} = L_2(G, d\mu(g))$.

2. Гармонический анализ на коммутативных пространствах и уравнение Клейна – Фока

Приведем основные факты из теории однородных пространств и обобщения гармонического анализа, построенного на методе орбит, на случай коммутативных однородных пространств (подробнее см. работы [6, 8, 11]).

Пусть M – правое однородное пространство с группой преобразований G; H – замкнутая стационарная подгруппа некоторой точки $x_0\in M$, $\boldsymbol{h}$ – ее алгебра Ли. Известно, что однородное пространство M диффеоморфно фактор-многообразию G/H правых смежных классов группы Ли G по подгруппе изотропии H, а группу преобразований G можно рассматривать как расслоение (G, π, M, H) со структурной группой H, базой M и канонической проекцией π: $G\to M$.

Над областями тривиализации $U\in M$ в расслоенном пространстве G введем координаты $g^A = (x^a, h^\alpha)$ прямого произведения $U\times H$ ($a = 1, \ldots, \dim M$, $\alpha = \dim M + 1, \ldots, \dim G$). При этом координаты произвольной точки $g\in G$ можно представить в виде $g = hs(x)$, где s: $G\to M$ – локальное гладкое сечение расслоения G. Здесь и далее латинские индексы в нижнем регистре принимают значения от 1 до $\dim M$, греческие индексы – от $\dim M + 1$ до $\dim G$.

Введем на однородном пространстве M инвариантную метрику. Метрический тензор инвариантной метрики на однородном пространстве M определяется выражением

$$\gamma^{ij}(x) = G^{ab}\eta^i_a(x,e_H)\eta^j_b(x,e_H),$$

где e_H – единица группы H; G^{ab} – компоненты 2-формы $\boldsymbol{G}$, задающей метрику и удовлетворяющей условию $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантности:

$$G^{ad}C^c_{\alpha a} + G^{cb}C^d_{\alpha b} = 0,$$

где $C^D_{AB} = ([e_A, e_B])^D$ – структурные константы алгебры Ли L.

Каждой группе Ли G, действующей на однородном пространстве M, соответствует алгебра инвариантных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, коммутирующих с генераторами группы. Целое положительное число

$$d(M) = \dim M + i_M - s_M - \frac{1}{2}(\dim L + \mathrm{ind}\, L)$$

называется *дефектом однородного пространства* M. Число s_M называется *степенью вырождения* однородного пространства M и характеризует максимальную размерность К-орбит, имеющих ненулевое пересечение с подпространством $\boldsymbol{h}^{\perp} = \{f\in L^*,\ f(X) = 0,\ X\in \boldsymbol{h}\}$. Число i_M называется *индексом однородного пространства* M и определяет количество независимых тождеств на однородном пространстве M.

Однородные пространства, для которых дефект равен нулю, называются *коммутативными* пространствами, так как алгебра инвариантных операторов для таких пространств абелева.

Мы будем использовать процедуру построения гармонического анализа на однородном пространстве M с нулевым дефектом, следуя в основном работам [3, 8]. Рассмотрим гармонический анализ функций, принадлежащих гильбертову пространству $L_2(M, d\mu(x))$, снабженному римановой мерой $d\mu(x)$, построенной по инвариантной метрике на однородном пространстве M.

Любой гладкой функции $\varphi(g)$ на группе Ли G, постоянной на слоях H главного расслоения (G, π, M, H), однозначно соответствует функция $(\pi^*\varphi)(x) = \varphi(s(x))$ на однородном пространстве M

(проекция функции φ на M). Другими словами, имеет место изоморфизм $C^{\infty}(M) \approx F_G$, где функциональное пространство F_G, ввиду связности группы Ли H, определяется равенством

$$F_G \equiv \{\varphi \in C^{\infty}(G) \mid \eta_X \varphi(g) = 0, \quad X \in \boldsymbol{h}, \quad g \in G\}.$$

Так как $F^{(sM)}(\xi) = 0$, то пространство $L_2(M, d\mu(x))$ изоморфно пространству $L_{(sM)} \cap F_G$. Инвариантному пространству $L_{(sM)}$ соответствует инвариантное подпространство $M_{(sM)}$, состоящее из К-орбит $O_\lambda^{(sM)}$, представители которых лежат в $\boldsymbol{h}^{\perp}$. Построим λ-представление алгебры L, соответствующее К-орбите $O_\lambda^{(sM)}$. Так как $\lambda \in \boldsymbol{h}^{\perp}$, то на параметры λ налагается условие $\tilde{K}_\mu^{(s_P)}(\lambda) = 0$, где $\tilde{K}_\mu^{(s_M)}(f)$ – *тривиальные* функции Казимира (s_M)-типа (тривиальные функции Казимира равны нулю для всех $f \in \boldsymbol{h}^{\perp}$); λ-представление, удовлетворяющее данному требованию, будем называть *соответствующим однородному пространству M*.

Поднимем λ-представление алгебры L (s_M)-типа, соответствующее однородному пространству M, до представления группы Ли G. Набор функций $D^{\lambda}_{q\bar{q}'}(g^{-1})$ в силу полноты и ортогональности образует базис функционального пространства $L_{(sM)}$.

Определим параметрическое семейство функций $D_q^{\lambda}(x)$, задающих базис в функциональном пространстве $L_2(M, d\mu(x)) \approx L_{(sM)} \cap F_G$, в виде разложения по функциям $D^{\lambda}_{q\bar{q}'}(g^{-1})$:

$$D_q^{\lambda}(x) = \int c_\lambda(q') D^{\lambda}_{q\bar{q}'}(g^{-1}) d\mu(q'), \quad g = (x, h). \tag{9}$$

Для того чтобы правая часть выражения (9) принадлежала классу функций F_G, на коэффициенты разложения необходимо наложить условие

$$l_X(q', \lambda) c_\lambda(q') = 0, \quad X \in \boldsymbol{h}. \tag{10}$$

Коэффициенты $c_\lambda(q')$ определяются из (10) с точностью до постоянного множителя. Функции $D_q^{\lambda}(x)$ образуют полный и ортогональный набор:

$$\int_M \overline{D_{\tilde{q}}^{\tilde{\lambda}}(x)} D_q^{\lambda}(x) d\mu(x) = \Delta(q) \delta(q, \bar{\tilde{q}}) \delta(\lambda, \tilde{\lambda}), \quad \int \overline{D_q^{\lambda}(x)} D_q^{\lambda}(x') d\mu_0(q) d\mu(\lambda) = \delta(x, x').$$

И любую функцию $\varphi \in L_2(M, d\mu(x))$ можно разложить в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \int \psi(q, \lambda) D_q^{\lambda}(x) d\mu_0(q) d\mu(\lambda), \quad \psi(q, \lambda) = \int \varphi(x) \overline{D_q^{\lambda}(x)} d\mu(x). \tag{11}$$

Для коммутативных пространств система (10) всегда имеет решение. В общем случае, когда однородное пространство имеет ненулевой дефект, при построении гармонического анализа необходимо учитывать алгебру инвариантных операторов однородного пространства.

Гармонический анализ, изложенный выше, позволяет провести точное интегрирование уравнения Клейна – Фока на коммутативном однородном пространстве M :

$$\Delta_M \varphi(x) = \Lambda^2 \varphi(x), \tag{12}$$

где Δ_M – оператор Лапласа, построенный по инвариантной метрике. Для коммутативных однородных пространств оператор Лапласа является оператором Казимира. Поэтому при обобщенном преобразовании Фурье (11) оператор Лапласа переходит в функцию, зависящую только от параметра орбиты: $H(l(q', \lambda)) = \kappa(\lambda)$. Отсюда следует, что функции $D_q^{\lambda}(x)$ образуют базис решений уравнения Клейна – Фока (12), а функция $\kappa(\lambda)$ определяет спектр оператора Лапласа.

3. Уравнение Шредингера с нелокальной нелинейностью типа свертки на абелевой группе

Рассмотрим в пространстве $M^n = R^1{}_t \otimes R^n{}_x$ уравнение Шредингера с нелокальной нелинейностью типа свертки:

$$(i\partial_t + \Delta_n)\varphi(\boldsymbol{x}) + \varepsilon^2 (V(t) * \varphi(t))(\boldsymbol{x}) + \tau^2 (W(t) * \varphi(t) * \varphi(t) * \tilde{\varphi}(t))(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in R^n, t \in R^1, \tag{13}$$

где ε, τ – константы; $V(t, \boldsymbol{x})$, $W(t, \boldsymbol{x})$ – формфакторы; свертку двух функций $f(t, \boldsymbol{x})$ и $g(t, \boldsymbol{x})$ в пространстве R^n определяем следующим образом:

$$(f(t) * g(t))(\boldsymbol{x}) = \int_{R^n} f(t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) g(t, \boldsymbol{y}) d^n \boldsymbol{y}, \quad \tilde{f}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \overline{f(t, -\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n .$$

Уравнение Шредингера (13) в частном случае $V(t, \boldsymbol{x}) = 0$, $W(t, \boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x})$ рассматривалось в [1].

Можно показать, что если функции $V(t, \boldsymbol{x})$, $W(t, \boldsymbol{x})$ являются вещественными и четными по $\boldsymbol{x}$, то уравнение (13) имеет лагранжеву форму с действием $S = \int L(t, \boldsymbol{x}) d^n \boldsymbol{x} dt$, где

$$L = \frac{i}{2}\Big[\varphi(t,\boldsymbol{x})\partial_t \overline{\varphi(t,\boldsymbol{x})} - \overline{\varphi(t,\boldsymbol{x})}\partial_t \varphi(t,\boldsymbol{x})\Big] + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x^i} \overline{\varphi(t,\boldsymbol{x})} \partial_{x^i} \varphi(t,\boldsymbol{x}) -$$
$$-\varepsilon^2 \int_{R^n} V(t, |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \varphi(t,\boldsymbol{y}) \overline{\varphi(t,\boldsymbol{x})} d^n \boldsymbol{y} -$$
$$-\frac{\tau^2}{2} \int_{R^{3n}} W(t, |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}|) \varphi(t,\boldsymbol{x_1}) \varphi(t,\boldsymbol{x}_2) \overline{\varphi(t,\boldsymbol{x}_3)\varphi(t,\boldsymbol{x})} d^n \boldsymbol{x_1} d^n \boldsymbol{x}_2 d^n \boldsymbol{x}_3.$$

Введем преобразование Фурье по пространственным переменным для функций из $L_2(M^n)$:

$$(F\varphi)(t,\boldsymbol{p}) = \hat{\varphi}(t,\boldsymbol{p}) = \int_{R^n} \varphi(t,\boldsymbol{x}) e^{i\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle} d^n \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{p} \in R^n; \tag{14}$$

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) = (F^{-1}\hat{\varphi})(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{\varphi}(t,\boldsymbol{p}) e^{-i\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle} d^n \boldsymbol{p}. \tag{15}$$

При преобразовании Фурье (14), (15) свертка функций преобразуется в произведение их фурье-образов. Подставляя в (13) решение в виде (15), получим обыкновенное дифференциальное уравнение с кубичной нелинейностью:

$$-i\dot{\hat{\varphi}}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{p}^2 \hat{\varphi}(t,\boldsymbol{p}) = \varepsilon^2 \hat{V}(t,\boldsymbol{p}) \hat{\varphi}(t,\boldsymbol{p}) + \tau^2 \hat{W}(t,\boldsymbol{p}) |\hat{\varphi}(t,\boldsymbol{p})|^2 \hat{\varphi}(t,\boldsymbol{p}). \tag{16}$$

Отметим, что, формально проведя замену $\boldsymbol{p}^2 \to \Delta_n$, из (16) получаем n-мерное нелинейное уравнение Шредингера с потенциалом $\hat{V}(t,\boldsymbol{p})$ и переменной константой связи $\hat{W}(t,\boldsymbol{p})$. Интегрируя уравнение (16) с начальным условием $\hat{\varphi}(0,\boldsymbol{p}) = \hat{\varphi}(\boldsymbol{p})$ и проводя обратное преобразование Фурье, получим общее решение исходного уравнения (13) в виде

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) \exp\left\{-i\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle - \boldsymbol{p}^2 t + i\int_0^t \left(\varepsilon^2 \hat{V}(t',\boldsymbol{p}) + \tau^2 \hat{W}(t',\boldsymbol{p}) |\hat{\varphi}(\boldsymbol{p})|^2\right) dt'\right\},$$

где $\hat{\varphi}(\boldsymbol{p}) = (F\varphi)(0,\boldsymbol{p})$. Выбирая начальное условие специальным образом, можно получить решение в виде суперпозиции N невзаимодействующих солитонов:

$$\varphi_N(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(t,\boldsymbol{x}),$$
$$\varphi_j(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{M_j} \sqrt{\frac{\langle \boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{p}\rangle + \boldsymbol{p}^2 - \varepsilon^2 \hat{V}(\boldsymbol{p})}{\tau^2 \hat{W}(\boldsymbol{p})}} \exp\left\{-i\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_j t\rangle + i\varphi_j(\boldsymbol{p})\right\} d^n \boldsymbol{p}. \tag{17}$$

Здесь M_j – открытые непересекающиеся области в R^n, такие, что сходится интеграл по $\boldsymbol{p}$; $\boldsymbol{v}_j$ – параметр, задающий скорость j-го солитона; $\varphi_j(\boldsymbol{p})$ – вещественная функция, такая, что сходится соответствующий интеграл.

4. Уравнение Шредингера с нелокальной нелинейностью на однородном пространстве

Заметим, что нелинейность вида $(W(t) * \varphi(t) * \varphi(t) * \tilde{\varphi}(t))(\boldsymbol{x})$ в уравнении (13) можно представить в виде

$$\int_{R^{4n}} \tilde{W}(t, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4) \varphi(t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_1) \varphi(t, \boldsymbol{x}_2) \overline{\varphi(t,\boldsymbol{x}_3)} d^n \boldsymbol{x}_1 d^n \boldsymbol{x}_2 d^n \boldsymbol{x}_3 d^n \boldsymbol{x}_4. \tag{18}$$

Действительно, при выполнении преобразования Фурье мы имеем $\hat{\tilde{W}}(t,\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}) |\hat{\varphi}(t,\boldsymbol{p})|^2 \hat{\varphi}(t,\boldsymbol{p})$. Переобозначая $\hat{W}(t,\boldsymbol{p}) \equiv \hat{\tilde{W}}(t,\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p})$ и выполняя обратное преобразование Фурье, получим исходную нелинейность.

Обобщим уравнение Шредингера с нелинейностью в форме (18) на случай $\dim L$-мерной некоммутативной группы Ли G:

$$(i\partial_t + \Delta_G)\varphi(t,g) = \varepsilon^2 \int_G V(t, gg'^{-1}) \varphi(t,g') d\mu(g') +$$
$$+\tilde{\tau}^2 \int_{G^4} W(t, g_2 g_1^{-1}, g_3 g_4^{-1}) \varphi(t, g g_4 g_1^{-1}) \varphi(t, g_2) \overline{\varphi(t, g_3)} d\mu(g_1) d\mu(g_2) d\mu(g_3) d\mu(g_4). \tag{19}$$

В работе [1] построено параметрическое семейство частных решений данного уравнения в случае $V(t,g)=0, W(t,g_1,g_2)=\delta(g_1)\delta(g_2)$.

Пользуясь изоморфизмом $C^\infty(M)\approx F_G$, легко получить соответствующее уравнение на однородном пространстве M, а именно: пусть искомая функция $\varphi(t,g)$ и формфактор $W(t,g_1,g_2)$ принадлежат подпространству F_G. Заметим, что $d\mu(g)=d\mu(x)d\mu(h)$, где $d\mu(x)$ – риманова мера на однородном пространстве M, построенная по инвариантной метрике G; $d\mu(h)$ – правая мера Хаара на подгруппе изотропии H. Проведем интегрирование по H в (19) и получим уравнение Шредингера на однородном пространстве M

$$\left(i\partial_t+\Delta\right)\varphi(t,x)=H[\varphi]\varphi(t,x),\quad \tau=\tilde{\tau}/\operatorname{Vol}(H), \tag{20}$$

с нелокальным членом вида

$$\begin{gathered}H[\varphi]\varphi(t,x)=\varepsilon^2\int_G V(t,xg'^{-1})\varphi(t,x)d\mu(g)+\\ +\tau^2\int_{G^2M^2}W(t,x_2g_1^{-1},x_3g_4^{-1})\varphi(t,xg_4g_1^{-1})\varphi(t,x_2)\overline{\varphi(t,x_3)}d\mu(g_1)d\mu(g_4)d\mu(x_2)d\mu(x_3),\end{gathered} \tag{21}$$

где $\tau=\tilde{\tau}/\operatorname{Vol}(H)$. В работе [2] рассматривалось уравнение Клейна – Гордона на коммутативном пространстве с нелокальной нелинейностью вида (21), когда $V(t,x)=0, W(t,x,y)=\delta(x)\delta(y)$. Очевидно, что для тривиальной подгруппы изотропии из (20) мы получим уравнение Шредингера на группе Ли (19). Частное решение уравнения (20) будем искать в виде

$$\varphi(t,x)=\int_{J'}\sqrt{\Delta(q)}\psi_\lambda(t,q)D_q^\lambda(x)d\mu_0(q)d\mu(\lambda),\quad J'\subseteq J. \tag{22}$$

Подмножество J' ненулевой меры сконструируем как объединение непересекающихся открытых связных подмножеств из J с условием сходимости интеграла по спектральной мере $d\mu(\lambda)$. В абелевом случае роль спектрального параметра играют параметры $\boldsymbol{p}\in R^n$. Формфакторы $V(t, x)$ и $W(t, x_1, x_2)$ представим в виде

$$W(t,x_1,x_2)=\int W(t;q_1,\lambda_1;q_2,\lambda_2)\overline{D_{q_1}^{\lambda_1}(x_1)}D_{q_2}^{\lambda_2}(x_2)d\mu_0(q_1)d\mu_0(q_2)d\mu(\lambda_1)d\mu(\lambda_2), \tag{23}$$

$$V(t,x)=\int_Q V_\lambda(t,q)D_q^\lambda(x)d\mu_0(q)d\mu(\lambda).$$

Подставляя (22) и (23) в исходное уравнение (20) и пользуясь сооотношениями (2), (4). (5), получим интегродифференциальное уравнение на функцию $\psi_\lambda(t, q)$:

$$\begin{gathered}i\dot{\psi}_\lambda(t,q)+\kappa(\lambda)\psi_\lambda(t,q)=\varepsilon^2\psi_\lambda(t,q)\int_Q c_\lambda(q')V(t,q')d\mu(q')+\\ +\tau^2\int_Q W_\lambda(t;q',q)\psi_\lambda(t,q')d\mu(q')\int_Q\left|\psi_\lambda(t,q'')\right|^2d\mu(q''),\end{gathered} \tag{24}$$

где введено обозначение

$$W_\lambda(t;q',q)\equiv\sqrt{\Delta(q')\Delta(q)}W(t;q',\lambda;q,\lambda).$$

Уравнение (24) обобщает уравнение (16) на случай коммутативного однородного пространства. Неабелева группа преобразований в редуцированном уравнении проявляется в наличии интегралов по дополнительным переменным q.

Рассмотрим точно решаемый частный случай, когда формфактор W представляется в виде произведения двух функций от каждого аргумента, где только одна функция зависит от времени:

$$W(t,x_1,x_2)=\overline{W_1(t,x_1)}W_2(x_2), \tag{25}$$

$$W_1(t,x)=\int W_1(t;q_1,\lambda_1)D_{q_1}^{\lambda_1}(x)d\mu_0(q_1)d\mu(\lambda_1),\quad W_2(x)=\int W_2(q_2,\lambda_2)D_{q_2}^{\lambda_2}(x)d\mu_0(q_2)d\mu(\lambda_2).$$

В этом случае $W(t;q',q)=\sqrt{\Delta(q_1')\Delta(q)}\overline{W_1(t;q',\lambda)}W_2(q,\lambda)$ и решение уравнения (20) можно представить в виде $\psi_\lambda(t,q)=\sqrt{\Delta(q)}f_\lambda(t)W_2(q,\lambda)$. Тогда на функцию $f_\lambda(t)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$i\dot{f}_\lambda(t)+\Phi_\lambda^\varepsilon(t)f_\lambda(t)=\tau^2I_\lambda(t)\left|f_\lambda(t)\right|^2f_\lambda(t), \tag{26}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi_\lambda^\varepsilon(t) \equiv \kappa(\lambda) - \varepsilon^2 \int_Q V(t,q')c_\lambda(q')d\mu(q'),$$

$$I_\lambda(t) \equiv \int_Q \Delta(q'')\left|W_2(q',\lambda)\right|^2 d\mu(q')\int_Q W_\lambda(t;q,q)d\mu(q).$$

Из (26) следует дифференциальное уравнение на $\left|f_\lambda(t)\right|^2$:

$$\frac{1}{2}\partial_t\left\{\left|f_\lambda(t)\right|^2\right\} = \tau^2 \operatorname{Im} I_\lambda(t)\left|f_\lambda(t)\right|^4 - \operatorname{Im}\Phi_\lambda^\varepsilon(t)\left|f_\lambda(t)\right|^2.$$

Общее решение имеет вид

$$\left|f_\lambda(t)\right|^2 = \frac{\left|f_\lambda(0)\right|^2 \alpha_\lambda^\varepsilon(t)}{1 - 2\tau^2\left|f_\lambda(0)\right|^2 \int\limits_0^t \alpha_\lambda^\varepsilon(t')\operatorname{Im} I_\lambda(t')dt'}, \quad \alpha_\lambda^\varepsilon(t) \equiv \exp\left(-2\int\limits_0^t \operatorname{Im}\Phi_\lambda^\varepsilon(t')dt'\right).$$

Подставляя $\left|f_\lambda(t)\right|^2$ в уравнение (26), получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое легко интегрируется:

$$f_\lambda(t) = f_\lambda(0)\exp\left\{-i\int\limits_0^t \Phi_\lambda^\varepsilon(t')dt' - i\tau^2\left|f_\lambda(0)\right|^2 \int\limits_0^t \frac{\alpha_\lambda^\varepsilon(t')I_\lambda(t')dt'}{1 - 2\tau^2\left|f_\lambda(0)\right|^2 \int\limits_0^{t'} \alpha_\lambda^\varepsilon(t'')\operatorname{Im} I_\lambda(t'')dt''}\right\}.$$

Решение исходного уравнения Шредингера (20) будет иметь вид

$$\varphi(x) = \int_{J'} f_\lambda(t)\left(\int_Q W_2(q,\lambda)D_q^\lambda(x)d\mu(q)\right)d\mu(\lambda). \tag{27}$$

Отметим, что в полученном решении остается произвол в выборе начального условия $f_\lambda(0)$, и мы можем построить семейство частных решений в виде набора из N невзаимодействующих локализованных состояний.

Заключение

В работе проведена некоммутативная редукция уравнения Шредингера с нелокальной нелинейностью типа свертки на коммутативном однородном пространстве. Редуцированное уравнение является интегродифференциальным уравнением первого порядка по временной переменной и может быть исследовано, например, квазиклассическими методами. В случае, если нелинейность может быть факторизована в смысле выражения (25), найдено общее решение (27). При специальном выборе начального условия данное решение может быть представленно в виде N невзаимодействующих локализованных состояний, обобщающих N солитонное решение (17) данного уравнения Шредингера на абелевой группе Ли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаровский М.М., Широков И.В. // ТМФ. – 2009. – Т. 161. – № 3. – С. 332–345.
2. Бреев А.И., Гончаровский М.М., Широков И.В. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 7. – С. 8–14.
3. Углирж А.Ю., Широков И.В. // Изв. вузов. Физика. – 2007. – Т. 50. – № 5. – С. 63–68.
4. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978.
5. Шаповалов А.В., Широков И.В. // ТМФ. – 1995. – Т. 104. – № 2. – С. 195–213.
6. Бреев А.И. // ТМФ. – 2014. – Т. 178. – № 1. – С. 69–87.
7. Бреев А.И., Широков И.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 51. – № 8. – С. 51–57.
8. Широков И.В. К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений / Препринт. – Омск: ОмГУ, 1998.
9. Широков И.В. // ТМФ. – 2000. – Т. 123. – № 3. – С. 407–423.
10. Барановский С.П., Широков И.В. // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – № 4. – С. 737–745.
11. Широков И.В. // ТМФ. – 2001. – Т. 126. – № 3. – С. 393–408.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия
E-mail: breev@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 23.04.14.

Бреев Александр Игоревич, к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.