

На правах рукописи



Сорокин Константин Сергеевич

Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2014

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», на кафедре алгебры.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Крылов Петр Андреевич**

Официальные оппоненты:

Туганбаев Аскар Аканович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ», кафедра высшей математики, профессор

Ельцова Тамара Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», кафедра математики, доцент

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»

Защита диссертации состоится 17 декабря 2014 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.21, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, ул. Ленина, 36 (корпус 2, ауд. 304).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: http://www.tsu.ru/content/news/announcement_of_the_dissertations_in_the_tsu.php

Автореферат разослан «___» октября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

Малютина
Александра Николаевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Пусть R — кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется чистым, если его можно представить в виде $r = u + e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R . Кольцо R называется чистым, если всякий его элемент является чистым.

Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 году как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала [23]. То есть каждое чистое кольцо является заменяемым кольцом. Кроме того, Николсоном было доказано [23], что кольцо с центральными идемпотентами является чистым тогда и только тогда, когда оно заменяемо. В то же время имеется пример регулярного кольца, которое не является чистым [20]. Согласно [23], регулярные кольца являются заменяемыми кольцами, следовательно, класс чистых колец является собственным подклассом класса заменяемых колец.

В 1936 году фон Нейман предложил определение регулярного элемента: элемент r кольца R называется регулярным, если найдется такой элемент $x \in R$, что $r = rxr$; кольцо R называется регулярным (по фон Нейману), если каждый его элемент r — регулярный. Элемент r кольца R называется обратимо-регулярным, если найдется такой элемент $v \in U(R)$, что $r = rvr$, или, что эквивалентно, $r = u \cdot e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R . Кольцо R называется обратимо-регулярным, если всякий его элемент является обратимо-регулярным. Таким образом, чистые кольца являются аддитивным аналогом обратимо-регулярных колец.

Доказано, что полусовершенные и обратимо-регулярные кольца являются чистыми [10], [9]. Кроме того, если кольцо не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов, то свойства кольца быть заменяемым, чистым и полусовершенным совпадают [9].

Понятие чистоты также было рассмотрено применительно к кольцам без единицы, в том числе была показана справедливость приведённого выше результата: кольцо с центральными идемпотентами является чистым тогда и только тогда, когда оно заменяемо [26] (согласно определению Ара [6]).

Ряд авторов продолжил изучение чистых колец, наделённых дополнительными свойствами. Например, рассмотрены примеры чистых колец, в которых

разложение каждого элемента кольца в виде суммы идемпотента и обратимого элемента определены единственным образом. Удалось показать связь колец, удовлетворяющих данному свойству, с булевыми кольцами [27].

Отдельным направлением в изучении чистоты колец стали строго чистые кольца: в этом случае каждый элемент кольца должен быть представим в виде суммы идемпотентного и обратимого элементов, которые коммутируют между собой [12], [24].

Большое количество работ посвящено изучению чистоты и строгой чистоты треугольных матриц [14], [7], а также произвольных матриц над различными кольцами [29]: коммутативными [15], [13], [8], локальными [21], [30].

В случае, когда R является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля, появляются новые описания свойства чистоты, которые могут оказаться полезными при изучении условий чистоты кольца R . В частности, если f — чистый элемент кольца эндоморфизмов модуля M , это означает, что существует такой идемпотентный эндоморфизм e модуля M , что f совпадает на $\text{Ker}(e)$ с некоторым автоморфизмом модуля M . Эта тематика привлекла в последнее время внимание многих специалистов. Например, было доказано, что является чистым кольцо линейных операторов векторного пространства над полем произвольной размерности [28]. Впоследствии была доказана справедливость данного результата для векторного пространства над телом [25]. Кроме того, доказана чистота колец эндоморфизмов непрерывного модуля [11], проективного модуля над правым совершенным кольцом [25].

Следует отметить, что в теории абелевых групп большой интерес вызывает вопрос о связи элементов кольца эндоморфизмов абелевых групп и его обратимых элементов — автоморфизмов [17], в том числе те случаи, когда эндоморфизмы представимы в виде суммы автоморфизмов [22]. В связи с этим появляется дополнительный интерес к изучению свойства чистоты.

В своей работе [18] Голдсмит и Вамош рассмотрели вопросы чистоты колец эндоморфизмов периодических абелевых групп. Было показано, что кольцо эндоморфизмов тотально проективной периодической группы является чистым тогда и только тогда, когда эта группа ограничена.

Отметим, что чистые кольца также привлекают внимание российских учёных: данному классу колец посвящён параграф в монографии Туганбаева

А.А. [4].

Таким образом, изучение свойства чистоты колец эндоморфизмов различных модулей, в том числе абелевых групп, является актуальной задачей, привлекающей внимание специалистов в области теории колец, модулей и абелевых групп.

Цель работы. Целью диссертационной работы является изучение вопросов чистоты колец эндоморфизмов различных классов абелевых групп: вполне разложимых групп (группы без кручения), прямых сумм циклических групп (периодические группы), SP -групп (смешанные группы).

Общая методика исследования. В диссертации используются методы и приёмы теории абелевых групп, колец и модулей.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. Ниже перечислены основные результаты.

- Дано полное описание вполне разложимых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов.
- Найдены достаточные условия чистоты эндоморфизмов прямых сумм циклических групп.
- Доказана чистота колец эндоморфизмов самомалых SP -групп конечного ранга без кручения.
- Найдены достаточные условия, при которых чистота кольца эндоморфизмов SP -группы конечного ранга влечет самомалость самой группы.
- Доказана чистота колец эндоморфизмов SP -групп ранга 1 и 2 с циклическими p -компонентами без бесконечных периодических прямых слагаемых.
- Найдены достаточные условия чистоты эндоморфизмов SP -групп конечного ранга с циклическими p -компонентами.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по теории абелевых групп и модулей, а также при чтении спецкурсов для бакалавров, магистрантов и аспирантов.

Апробация результатов. Результаты диссертационной работы докладывались на Международных молодежных научных форумах «Ломоносов-2011», «Ломоносов-2013» (Москва, 2011. 2013), на всероссийских симпозиумах «Абелевы группы и модули» (Бийск, 2010. 2012), на Всероссийской конферен-

ции по математике и механике, посвященной 135-летию Томского государственного университета и 65-летию Механико-математического факультета (Томск, 2013).

Основные результаты неоднократно докладывались на семинарах кафедры алгебры Томского государственного университета и дважды — на семинаре кафедры алгебры Московского педагогического государственного университета (2011, 2013). По теме диссертации опубликовано 9 работ, три из них — в журналах, которые включены в перечень российских рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций (из них одна статья в российском журнале, переводная версия которой индексируется в базе данных Scopus).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, двух глав и списка литературы. Работа изложена на 110 страницах. Библиография содержит 30 наименований.

Содержание работы.

Все рассматриваемые в работе группы являются абелевыми.

В первой главе диссертации рассматриваются вопросы чистоты колец эндоморфизмов для некоторых классов абелевых групп: вполне разложимых абелевых групп (группы без кручения) и прямых сумм циклических групп (периодические группы).

В первом параграфе данной главы вводится ключевое понятие чистоты кольца, излагаются общие результаты, дающие необходимые и достаточные условия чистоты кольца эндоморфизмов абелевой группы. Ниже приведено определение чистого кольца.

Пусть R — кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется чистым, если его можно представить в виде $r = u + e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R . Кольцо R называется чистым, если всякий его элемент является чистым.

Во втором параграфе приводятся достаточные условия чистоты эндоморфизмов прямых сумм циклических групп. Основным результатом второго параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.13 Пусть $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = \bigoplus_{i \in I_n} \langle a_n^i \rangle$, $\langle a_n^i \rangle \cong \mathbb{Z}(p^n)$,

$f \in E(A)$. Если $L = \bigoplus_{j \in J} B_j$, где $J \subseteq \mathbb{N}$, причём $f(A) \subseteq L$ и $f|_L$ — чистый элемент кольца $E(L)$, то f — чистый элемент в $E(A)$.

В третьем параграфе даётся полное описание вполне разложимых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов. Основным результатом третьей главы является следующая теорема.

Теорема 1.16 *Если B — вполне разложимая группа с редуцированной частью A , то кольцо эндоморфизмов группы B — чистое тогда и только тогда, когда*

$$A = \bigoplus_{p \in \Pi} \left(\bigoplus_{i=1}^{n_p} A_i^p \right),$$

где Π — некоторое множество простых чисел, $A_i^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($p \in \Pi, i = 1, \dots, n_p, n_p \in \mathbb{N}$).

Во второй главе изучаются SP -группы с чистыми кольцами эндоморфизмов. Данные группы были введены в работах А. А. Фомина [16] и П. А. Крылова [2]. В начале главы приводится определение SP -группы. Напомним определение SP -группы.

Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p -компонент называется SP -группой, если естественное вложение $\bigoplus_p A_p \longrightarrow \prod_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \longrightarrow \prod_p A_p$. Здесь и далее предполагается, что p пробегает множество всех простых чисел $\mathbb{P}$, относящихся к A , то есть таких, что $A_p \neq 0$.

В первом параграфе приводятся результаты, описывающие самые малые SP -группы с чистыми кольцами эндоморфизмов. Ниже приведены основные результаты данного параграфа.

Теорема 2.2 *Пусть A — самая малая SP -группа конечного ранга. Тогда кольцо эндоморфизмов группы A является чистым.*

Теорема 2.5 *Пусть A — SP -группа конечного ранга, не имеющая бесконечных периодических прямых слагаемых, и $A_p \cong \mathbb{Z}_p$ для всякого $p \in \mathbb{P}$. Если при этом кольцо эндоморфизмов группы A является чистым, то A — самая малая группа.*

Второй параграф посвящён исследованию строения колец эндоморфизмов SP -групп ранга 1 с циклическими p -компонентами: доказана их чистота, найдено описание радикала Джекобсона колец эндоморфизмов данных групп.

Основные результаты данного параграфа приведены в следующих теоремах.

Теорема 2.7 *Для любого эндоморфизма f SP -группы группы A ранга 1 с циклическими p -компонентами найдётся такое конечное множество $\Omega \subset \mathbb{P}$, что справедливо одно из условий:*

- f — автоморфизм группы C (если $fA \subseteq T(A)$),
- $1 - f$ — автоморфизм группы C (если $fA \not\subseteq T(A)$),

где C — дополнительное прямое слагаемое к $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$.

Теорема 2.9 $J(E(A)) = H(A)$.

В теореме $H(A) = \{\alpha \in E(A) \mid \alpha|_{A[p]} \in H(A_p) \text{ для каждого } p \in \mathbb{P}\}$ — аналог идеала Пирса для SP -групп, предложенный Крыловым П.А. (см. [3]).

Третий параграф содержит результаты, дающие достаточные условия чистоты эндоморфизмов SP -групп конечного ранга с циклическими p -компонентами, а также доказательство чистоты колец эндоморфизмов SP -групп ранга 2 с циклическими p -компонентами. Ниже приведены основные результаты данного раздела.

Теорема 2.11 *Пусть A — SP -группа конечного ранга с циклическими p -компонентами. Для любого эндоморфизма $f \in \text{Hom}(A, T(A))$ найдётся такое конечное множество $\Omega \subset \mathbb{P}$, что $1 - f$ — автоморфизм группы C , где C — дополнительное прямое слагаемое к $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$.*

Теорема 2.13 *Кольцо эндоморфизмов SP -группы ранга 2 с циклическими p -компонентами, не имеющей бесконечных периодических прямых слагаемых, является чистым.*

Автор выражает искреннюю признательность научному руководителю профессору Петру Андреевичу Крылову за неоценимый вклад в развитие данной работы: помощь в постановке задачи, внимание к научной работе, помощь в оформлении статей и данной диссертации.

Список литературы

- [1] Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов — М.: Факториал Пресс, 2006.
- [2] Крылов П.А. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и Механика. — 2000. — Т. 269. — С. 29–34.
- [3] Крылов П.А. Радиал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. — 2004. — Т.43, №1 — С. 60–76.
- [4] Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
- [5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы — М.: Мир, 1974.
- [6] Ara P. Extensions of exchange rings // J. Algebra — 1997. — Vol. 197. — P. 409-423.
- [7] Borooah G., Diesl A.J., Dorsey T.J. Strongly clean triangular matrix rings over local rings // J. Algebra — 2007. — Vol. 312. — P. 773-797.
- [8] Borooah G., Diesl A.J., Dorsey T.J. Strongly clean matrix rings over commutative local rings // Journal of Pure and Applied Algebra — 2008. — Vol. 212. — P. 281-296.
- [9] Camillo V.P., Hua-Ping Yu. Exchange rings, units and idempotents // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22, №12. — P. 4737-4749.
- [10] Camillo V.P., Khurana D. A characterization of unit-regular rings // Commun. Algebra . — 2001. — Vol. 29, №6. — P. 2293–2295.
- [11] Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean // J. Algebra. — 2006. — Vol. 304. — P. 94–111.
- [12] Chen W. A question on strongly clean rings // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34, №7. — P. 2374–2350.
- [13] Chen J., Yang X., Zhou Y. When is the 2×2 matrix ring over a commutative local ring strongly clean? // J. Algebra. — 2006. — Vol. 301. — P. 280-293.

- [14] Chen J., Yang X., Zhou Y. On strongly clean matrix and trianglular matrix rings // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34, №10. — P. 3659–3674.
- [15] Couchot F. Strong cleanness of matrix rings over commutative rings // Commun. Algebra. — 2008. — Vol. 26, №2. — P. 346-351.
- [16] Fomin A. A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian groups and modules, Trends in Math. — 1999. — P. 87-100.
- [17] Fuchs L. Recent Results and Problems on Abelian Groups // Topics in Abelian Groups, Scott Foresman. Chicago. — 1963. — P. 9-40.
- [18] Goldsmith B., Vámos P. A note on clean abelian groups // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. — 2007. — Vol. 117. — P. 181–191.
- [19] Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, №6. — P. 2589–2595.
- [20] Handelman D. Perspectivity and cancellation in regular rings // J. Algebra — 1977. — Vol. 48. — P. 1–16.
- [21] Li Y. Strongly clean matrix rings over local rings // J. Algebra — 2007. — Vol. 312. — P. 397-404.
- [22] Meehan C. Sums of automorphisms of free Abelian groups and modules // Proc. Royal Irish Academy. — 2004. — Vol. 104A. — P. 59-66.
- [23] Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977.— Vol. 229. — P. 269–278.
- [24] Nicholson W.K. Strongly clean rings and Fitting’s lemma // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27. — P. 3583–3592.
- [25] Nicholson W.K., Varadarajan K., Zhou Y. Clean endomorphism rings // Arch. Math. — 2004. — Vol. 83. — P. 340–343.
- [26] Nicholson W.K., Zhou Y. Clean general rings // J. Algebra — 2005. — Vol. 291. — P. 297–311.

- [27] Nicholson W.K., Zhou Y. Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit // Glasgow Math. J. — 2004. — Vol. 46. — P. 227-236.
- [28] Searcoid M. Ó. Perturbation of linear operators by idempotents // Irish Math. Soc. Bulletin. — 1997. — Vol. 39. — P. 10-13.
- [29] Yang X. A survey of strongly clean rings // Appl Math. — 2009. — Vol. 108. — P. 157-173.
- [30] Yang Y., Zhou Y. Strong cleanness of the 2×2 matrix ring over a general local ring // J. Algebra. — 2008. — Vol. 320. — P. 2280-2290.

Статьи, опубликованные в журналах, которые включены в перечень российских рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций:

- [1*] Сорокин К. С. Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 105–108. — 0.4 п.л.
- [2*] Sorokin K. S. Completely decomposable abelian groups with clean endomorphism rings // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 197, № 5. — P. 655-657. — 0.3 п.л.
- [3*] Сорокин К. С. SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика — 2014. — № 4(30). — С. 24–36. — 1 п.л.

Статьи в других научных изданиях:

- [4*] Сорокин К. С. Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы: материалы всероссийского симпозиума (Бийск, 19–25 авг., 2010). — Бийск, 2010. — С. 49–52. — 0.19 п.л.
- [5*] Сорокин К. С. Прямые суммы циклических абелевых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов // Научная студенческая конференция

механико-математического факультета: сборник тезисов конференции (Томск, 12–19 апр., 2011). — Томск, 2011. — С. 14-15. — 0.6 п.л.

- [6*] Сорокин К. С. Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2011. — URL: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2011/1257/30957_4bdd.pdf (дата обращения 27.08.2014 г.) — ISBN 978-5-317-03634-8. — 0.12 п.л.
- [7*] Сорокин К. С. Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы: материалы всероссийского симпозиума (Бийск, 20-25 авг., 2012). — Бийск, 2012. — С. 43–46. — 0.16 п.л.
- [8*] Сорокин К. С. Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2013. — URL: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2191/30957_67f7.pdf (дата обращения 27.08.2014 г.) — ISBN 978-5-317-04429-9. — 0.12 п.л.
- [9*] Сорокин К. С. Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 135-летию Томского государственного университета и 65-летию механико-математического факультета: сборник тезисов (Томск, 2-4 окт., 2013). — Томск, 2013. — С. 36. — 0.6 п.л.