УДК 519.48

Г.Г. Пестов, А.А. Тоболкин

K-ПЛОСКОСТИ В *N*-МЕРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

Теория линейно упорядоченных групп – хорошо разработанная область математики [1]. Определения *n*-упорядоченного множества были предложены в работах Novoa [2] и Пестова [3]. Эти определения неэквивалентны. Геометрия *n*-упорядоченных множеств исследована в [4]. Циклически упорядоченные группы изучены в [5–10]. По логике вещей за этим началось изучение *n*-мерно упорядоченных групп [10–11].

Теорема 1. Пусть A и B – две грани множества M, $|A|=|B|$. Если $B \subset P_A$, то $P_A = P_B$.

Доказательство. Эта теорема непосредственно вытекает из следствия 1.7 работы А.И. Терре [7]. Пусть M есть n-упорядоченное множество. Тогда для любых k-граней X_k, Y_k некоторой k-плоскости и всякого $U_{n-k-1} \subset M$ условия $\zeta(X_k, U_{n-k-1}) \neq 0$ и $\zeta(Y_k, U_{n-k-1}) \neq 0$ эквивалентны.

Лемма 2. Пусть A – k-грань множества $< M, \zeta >$, a – произвольный элемент из A, $B = A \setminus \{a\}$, тогда $P_B \subset P_A$.

Доказательство. Выберем произвольный элемент x из плоскости P_B. Тогда для любых элементов $c_1, ..., c_{n-k} \in M$ справедливо равенство $\zeta(B, c_1, ..., c_{n-k}, x) = 0$. Если положить $c_{n-k} = a$, то получим, что для любых $c_1, ..., c_{n-k-1} \in M$ выполняется $\zeta(B, c_1, ..., c_{n-k-1}, a, x) = 0$ или $\zeta(A, c_1, ..., c_{n-k-1}, x) = 0$. Последнее утверждение равносильно тому, что $x \in P_A$. Итак, если $x \in P_B$, то $x \in P_A$, значит, $P_B \subset P_A$.

Определение 1. Пусть $< M, \zeta >$ есть n-упорядоченное множество, $A \subset M$. Назовем множество A k-гранью в n-упорядоченном множестве $< M, \zeta >$, если существует $B \subset M$, $|B| = n-k$ такое, что $\zeta(A, B) \neq 0$ [5].

Определение 2. Пусть $< M, \zeta >$ есть n-упорядоченное множество, A – k-грань множества M [5]. Назовем следующее множество k-плоскостью в n-упорядоченном множестве $< M, \zeta >$:

$$P_A = \left\{ x \in M \mid \forall C \in M^{n-k-1} (\zeta(A, C, x) = 0) \right\}.$$

Следствие 3. Пусть A – k-грань множества $< M, \zeta >$, $B \subset A$, $B \neq \varnothing$, тогда $P_B \subset P_A$.

Лемма 4. Если кортеж $C = (c_1, ..., c_n)$ элементов группы G принимает всевозможные значения из G^n, то $\forall x, y \in G$ кортеж $xCy = (xc_1y, ..., xc_ny)$ также будет принимать всевозможные значения из G^n.

Лемма 5. Пусть A – k-грань n-упорядоченной группы $< G, \zeta >$, u, v – произвольные элементы из G. Тогда uAv есть k-грань множества $< G, \zeta >$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, ..., a_{k+1}\}$, тогда $uAv = \{ua_1v, ..., ua_{k+1}v\}$. Из определения k-грани следует, что существуют такие $c_1, ..., c_{n-k}$, что $\zeta(a_1, ..., a_{k+1}, c_1, ..., c_{n-k}) \neq 0$. Следовательно, $\zeta(ua_1v, ..., ua_{k+1}v, uc_1v, ..., uc_{n-k}v) \neq 0$. Итак, для элементов $ua_1v, ..., ua_{k+1}v$ нашлись такие элементы $uc_1v, ..., uc_{n-k}v$, что $\zeta(ua_1v, ..., ua_{k+1}v, uc_1v, ..., uc_{n-k}v) \neq 0$. Это и означает, что uAv есть k-грань множества $< G, \zeta >$.

Теорема 6. Пусть A – k-грань n-упорядоченной группы $< G, \zeta >$, u, v – произвольные элементы из G, тогда uP_Av есть k-плоскость в $< G, \zeta >$ и справедлива формула $uP_Av = P_{uAv}$.

Доказательство. Выберем произвольный элемент x из множества uP_Av, тогда существует $y \in P_A$ такой, что $x = uyv$. Так как $y \in P_A$, то $\forall C \in G^{n-k-1}$ ($\zeta(A, C, y) = 0$). Следовательно, $\forall C \in G^{n-k-1}$ ($\zeta(uAv, uCv, uyv) = 0$), т.е. $\forall C \in G^{n-k-1}$ ($\zeta(uAv, uCv, x) = 0$). По лемме 4 $x \in P_{uAv}$, тем самым докано включение $uP_Av \subseteq P_{uAv}$. Выберем теперь произвольный элемент x из множества P_{uAv}, тогда $\forall C \in G^{n-k-1}$ ($\zeta(uAv, C, x) = 0$). Следовательно, $\forall C \in G^{n-k-1}$ ($\zeta(A, u^{-1}Cv^{-1}, u^{-1}xv^{-1}) = 0$), т.е. $u^{-1}xv^{-1} \in P_A$, что равносильно $x \in uP_Av$. Таким образом, доказано включение $P_{uAv} \subseteq uP_Av$. Два включения $uP_Av \subseteq P_{uAv}$ и $P_{uAv} \subseteq uP_Av$ эквивалентны равенству $uP_Av = P_{uAv}$.

Теорема 7. Пусть $< G, \zeta >$ – n-упорядоченная группа, множество $A = \{a_1, ..., a_{k+1}\}$ – k-грань $< G, \zeta >$. Для того чтобы плоскость P_A была подгруппой группы G, необходимо и достаточно, чтобы $\forall i, j \in \overline{1, k+1}$ ($a_ia_j \in P_A$).

Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $\forall i, j \in \overline{1, k+1}$ ($a_ia_j \in P_A$). Покажем, что $P_A < G$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in P_A$, тогда

$$\forall C \in G^{n-k-1} \ (\zeta(A, C, x) = 0).$$

Функция порядка ζ согласована с алгебраической структурой группы G, поэтому

$$\forall i \in \overline{1, k+1} \ \ \forall C \in G^{n-k-1} \ (\zeta(Aa_i, Ca_i, xa_i) = 0).$$

Из леммы 5 получаем, что Aa_i и xA являются k-гранями $<G,\zeta>$. Из леммы 4 вытекает, что для всех i справедливо $xa_i \in P_{Aa_i}$; тогда $xA \subset P_{Aa_i}$. По теореме 1 получаем, что $P_{xA} = P_{Aa_i}$. По условию для всех i выполнено $Aa_i \subset P_A$, следовательно (теорема 1)

$$P_{Aa_i} = P_A .$$

Таким образом, $P_A = P_{xA}$. Пусть теперь y произвольный элемент P_A, тогда

$$\forall C \in G^{n-k-1} \ (\zeta(xA, C, y) = 0).$$

Умножая слева все аргументы функции ζ на x^{-1}, получим

$$\forall C \in G^{n-k-1} \ (\zeta(A, x^{-1}C, x^{-1}y) = 0).$$

Из леммы 4 получаем $yx^{-1} \in P_A$.

Таким образом, для любых x и y из P_A элемент yx^{-1} тоже принадлежит P_A. Поэтому $P_A < G$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кокорин А.И., Копытов В.М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
2. *Novoa L.G.* On n-ordered sets and order completeness // Pacific J. Math. 1965. Vol. 15, № 4. P. 1337–1345.
3. *Пестов Г.Г.* *n*-упорядоченные множества // Труды Иркутского государственного университета. 1983. Т. 74, вып. 6. С. 146–169.
4. *Терре А.И.* Элементы геометрии n-мерного порядка. Томск, 1982. 35 с.
5. *Забарина А.И.* О циклически упорядоченных группах: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск, 1985.
6. *Пестов Г.Г.* О классе циклически упорядочиваемых групп // Вестник Томского государственного университета: Бюл. опер. науч. информ. 2004. № 21. Томск: ТГУ, 2004. С. 39–43.
7. *Rieger L.S.* On the ordered and cyclically ordered groups I-III // Věstnik Kral. České Spol. Nauk. 1946. № 61–31; 1947. № 1. P. 1–33; 1948. № 1. P. 11–26.
8. *Swierczkowski S.* On cyclically ordered groups // Fund. Math. 1953. № 47. P. 161–167.
9. *Желева С.Д.* О циклически упорядоченных группах // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17 (5). С. 1046–1051.
10. *Забарина А.И., Пестов Г.Г.* О критерии циклической упорядочиваемости группы // Межвузовский научный сборник. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. Вып. 9. С. 19–24.
11. *Забарина А.И., Пестов Г.Г.* Об *n*-мерно упорядоченных группах // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 40–43.
12. *Тоболкин А.А.* Теорема о мультипликативной группе кватернионов. Актуальные проблемы математики и методики её преподавания // Материалы заочной Всероссийской научно-практической конференции. Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2007. С. 21–31.

Статья поступила в редакцию журнала 4 декабря 2006 г., принята к печати 11 декабря 2006 г.