

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

Сборник научных трудов
X Международной конференция студентов и молодых ученых

РОССИЯ, ТОМСК, 23–26 апреля 2013 г.

PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

X INTERNATIONAL CONFERENCE OF STUDENTS AND YOUNG SCIENTISTS

RUSSIA, TOMSK, April 23–26, 2013

Томск 2013

информации и мониторинга» Российской академии образования [5]. В докладе демонстрируются результаты вычислительных экспериментов, интерфейс, режимы работы, функциональные возможности комплекса программ SafeDec и его применение для вычисления древовидной ширины графа [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tarjan R.E. Decomposition by clique separators // Discrete Mathematics. – 1985. – № 55. – P. 221–232.
2. Leimer H.G. Optimal decomposition by clique separators // Discrete Mathematics. – 1993. – № 113. – P. 99–123.
3. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев [и др.]. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 392 с.
4. Berry A. A wide range algorithm for minimal triangulation from an arbitrary ordering / A. Berry, J.P. Bordat, P. Heggernes, G. Simonet, Y. Villanger. – J. Algorithms. – 2006. – № 1(58). – P. 33–66.
5. Быкова В.В., Болхолец В.О. Комплекс программ SafeDec для разложения графа минимальными сепараторами: Свидетельство о государственной регистрации № 17337 от 19.07.2011 (ИНИМ РАО, ОФЕРНиО). – Инв. номер ВНТИЦ 50201151064.
6. Быкова В.В. Вычислительные аспекты древовидной ширины графа // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 3(13). – С. 65–79.

ГАРАНТИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА AR(1)– GARCH(1,1)

Н.А. Вааль

Научный руководитель: профессор, д. ф-м. н. С.Э. Воробейчиков

Томский государственный университет, Россия, г.Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: vaal@sibmail.com

GUARANTEED ESTIMATION OF UNKNOWN PARAMETERS OF THE PROCESS AR(1) – GARCH(1,1)

N.A. Vaal

Scientific Supervisor: Prof., Dr. S.E. Vorobejchikov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: vaal@sibmail.com

In this article we consider class of AR(1)-GARCH(1,1) processes, in which the mean is modelled by a first order auto-regressive AR(1), with a GARCH(1,1) error. For this process the estimate of the vector of unknown parameters found using the modified weighted least squares method.

В данной работе рассматривается случайный процесс AR(1)-GARCH(1,1)
$$X_{n+1} = \lambda X_n + \sigma_{n+1} \varepsilon_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \sigma_{n+1}^2 = a_0 + aX_n^2 + b\sigma_n^2, \quad \text{где } \{\varepsilon_{n+1}\} - \text{последовательность}$$
 независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\varepsilon_{n+1} = 0$ и $D\varepsilon_{n+1} = 1$. В векторной форме процесс AR(1)-GARCH(1,1) представляется в виде

$$Y_{n+1} = \Lambda U_n + B_n \eta_{n+1}, \quad (1)$$

$$\text{где } Y_{n+1} = \frac{X_{n+1}^2}{m_n}, \quad \Lambda = (\lambda \quad a_0 \quad a), \quad U_n = (\gamma_n \quad u_n \quad \omega_n)^T, \quad \gamma_n = \frac{|X_{n+1}X_n|}{m_n}, \quad u_n = \frac{b^{n+1}-1}{b-1},$$

$$m_n = \max \left\{ \frac{b^{n+1}-1}{b-1}, \sum_{i=0}^n X_i^2 b^{n-i} \right\}, \quad \omega_n = \frac{\sum_{i=0}^n X_i^2 b^{n-i}}{m_n}, \quad B_n =$$

$$= \frac{a_0 \frac{b^{n+1}-1}{b-1} + a \sum_{i=0}^n X_i^2 b^{n-i}}{m_n}, \quad (\varepsilon_{n+1}^2 - 1) = \eta_{n+1}.$$

Целью настоящей работы является получение оценки вектора неизвестных параметров Λ с гарантированной точностью. Используя модифицированный взвешенный метод наименьших квадратов [1], построена вспомогательная статистика Γ_n вида

$$\Gamma_n = \sum_{k=n_0}^n \frac{(|X_{n+1}| + |X_n|)^2}{\min \left(\frac{b^{n+1-k}-1}{b-1}, \sum_{i=0}^{n-k} X_i^2 b^{n-k-i} \right)} \cdot M \left(\sum_{k=n_0}^n \eta_{n+1-k}^2 \right)^{-1}.$$

При построении статистики предполагается, что наблюдения $X_{n_0}, \dots, X_n$ на промежутке $[n_0, n]$ отличны от нуля, иначе выбирается первый промежуток, для которого выполняется условие

$$(a_0 + a) \min \left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}, \sum_{i=0}^n X_i^2 b^{n-i} \right) (\eta_{n+1}^2) \leq (X_{n+1} - \lambda X_n)^2 \leq (|X_{n+1}| + |X_n|)^2.$$

Статистика Γ_n необходима для компенсации влияния неизвестных параметров a_0 и a процесса $\{Y_{n+1}\}$.

Далее, на основе статистики получаем оценку вектора параметров Λ вида

$$\Lambda^*(n_1) = \left(\sum_{k=n+1}^{n_1} Y_{k+1} v(k, x) U_k^T \right) A^{-1}(n_1), \quad A^{-1}(n_1) = \sum_{k=n+1}^{n_1} v(k, x) U_k^T U_k.$$

Для фиксированного значения $H > 0$ определим момент остановки $\tau = \tau(H)$:

$$\tau = \tau(H) = \inf \{ n_1 > n + 1 : v_{\min}(n_1) \geq H \},$$

где $v_{\min}(n_1)$ - минимальное собственное значение матрицы $A^{-1}(n_1)$. Пусть q – наименьшее значение n_1 , для которого матрица $A^{-1}(n_1)$ не вырождена, тогда положительные весовые функции $v(k, x)$ на интервале $[n + 1, n + q - 1]$ задаются следующим соотношением $v(k, x) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_n U_k^T U_k}}$.

На интервале $[n + q, \tau - 1]$ веса $v(k, x)$ находятся из условий $\frac{v_{\min}(n_1)}{\Gamma_n} = \sum_{k=n+q}^{n_1} v^2(k, x) U_k^T U_k$.

Последняя весовая функция $v(\tau, x)$ имеет вид $\frac{v_{\min}(\tau)}{\Gamma_n} \geq \sum_{k=n+q}^{\tau} v^2(k, x) U_k^T U_k$, $v_{\min}(\tau) = H$.

Тогда оценка параметров $\Lambda^*(H)$ в момент времени τ имеет следующий вид

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{k=n+1}^{\tau} Y_{k+1} v(k, x) U_k^T \right) A^{-1}(\tau), \quad A^{-1}(\tau) = \sum_{k=n+1}^{\tau} v(k, x) U_k^T U_k.$$

Теорема 1. Среднеквадратическое отклонение оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров Λ удовлетворяет неравенству:

$$M\{\|\Lambda^*(H) - \Lambda\|^2\} \leq \frac{H + 1}{H^2}.$$

Доказательство. Оценка $\Lambda^*(H)$ в момент времени τ имеет следующий вид

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{k=n+1}^{\tau} Y_{k+1} v(k, x) U_k^T \right) A^{-1}(\tau), \quad A^{-1}(\tau) = \sum_{k=n+1}^{\tau} v(k, x) U_k^T U_k$$

Учитывая вид процесса (1) получим

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{k=n+1}^{\tau} B_n v(k, x) U_k^T \eta_{n+1} \right) A^{-1}(\tau).$$

Рассмотрим среднеквадратическое отклонение $\Lambda^*(H)$ истинного значения вектора параметров Λ . Используя неравенство Коши-Буняковского получаем

$$\begin{aligned} M\{|\Lambda^*(H) - \Lambda|^2\} &\leq M\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{\tau} B_n v(k, x) U_k^T \eta_{n+1}\right| A^{-1}(\tau)\right\}^2 \leq \\ &\leq M\{(\sum_{k=n+1}^{\tau} B_n v(k, x) U_k^T \eta_{n+1})\}^2 \cdot \{A^{-1}(\tau)\}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, что $\{A(n1)\} \geq v_{\min}(n1)$, а также условия для выбора весовых функций, соотношение (2) можно записать следующим образом

$$M\{|\Lambda^*(H) - \Lambda|^2\} \leq \frac{1}{H^2} M\{(\sum_{k=n+1}^{\tau} B_n v(k, x) U_k^T \eta_{n+1})\}^2. \quad (3)$$

Введем усеченный момент остановки $\tau(N1) = \min(\tau, N1)$, тогда $\tau(N1) \rightarrow \tau$, при $N1 \rightarrow \infty$. Выражение (3) изменится только пределом суммирования. Найдем математическое ожидание. Обозначим через $F_k = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ – σ алгебру, порожденную случайными величинами $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$, тогда $\tau = \tau(H) = \inf\{n1 > n + 1 : v_{\min}(n1) \geq H\}$ – марковский момент относительно $\{F_k\}$. Используя свойства условных математических ожиданий получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} M\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{\tau(N1)} B_n v(k, x) U_k^T \eta_{n+1}\right|\right\}^2 &= \frac{1}{H^2} MM\left\{\sum_{k=n+1}^{N1} B_n^2 v^2(k, x) U_k^T U_k \eta_{k+1}^2 \chi_{(k \leq \tau)} \middle| F_k\right\} + \\ &+ \frac{2}{H^2} MM\left\{\sum_{k=n+2}^{\tau} \sum_{i=n+1}^{k-1} B_i B_k v(i, x) v(k, x) U_k^T U_k \eta_{i+1} \eta_{k+1} \chi_{(k \leq \tau)} \middle| F_k\right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Оценим первое слагаемое из соотношения (4).

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} MM\left\{\sum_{k=n+1}^{N1} B_n^2 v^2(k, x) U_k^T U_k \eta_{k+1}^2 \chi_{(k \leq \tau)} \middle| F_k\right\} &= \frac{1}{H^2} M\left\{\sum_{k=n+1}^{\tau(N1)} B_n^2 v^2(k, x) U_k^T U_k \chi_{(k \leq \tau)}\right\} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{H^2} M\left\{\sum_{k=n+1}^{\tau} B_n^2 v^2(k, x) U_k^T U_k\right\} &= \frac{1}{H^2} \left(M \sum_{k=n+1}^{n+q-1} B_n^2 v^2(k, x) U_k^T U_k + M \sum_{k=n+q}^{\tau} B_n^2 v^2(k, x) U_k^T U_k\right). \end{aligned}$$

Так как B_n ограничена величиной $(a_0 + a)$ и учитывая соотношения для определения весовых функций первое слагаемое соотношения (4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} \left(M \sum_{k=n+1}^{n+q-1} B_n^2 v^2(k, x) U_k^T U_k + M \sum_{k=n+q}^{\tau} B_n^2 v^2(k, x) U_k^T U_k\right) &\leq \frac{1}{H^2} (a_0 + a)^2 M\left(\frac{H+1}{\Gamma_n}\right) = \\ &= \frac{H+1}{H^2} M\left(\frac{(a_0 + a)^2}{\Gamma_n}\right), \end{aligned}$$

при этом $M\left(\frac{(a_0 + a)^2}{\Gamma_n}\right) \leq 1$. Аналогично можно показать, что второе слагаемое в (4) равно нулю, таким образом $M\{|\Lambda^*(H) - \Lambda|^2\} \leq \frac{H+1}{H^2}$. Теорема доказана.

Полученную оценку вектора неизвестных параметров можно использовать при построении прогноза доходностей акций и индексов фондового рынка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meder N., Vorobejchikov S.E. On guaranteed estimation of parameters of random processes by the weighted least square method //Proc. 15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control. Barcelona. – 2002. – P. 1200.