МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

Сборник научных трудов
X Международной конференция студентов и молодых ученых

РОССИЯ, ТОМСК, 23–26 апреля 2013 г.

PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

X INTERNATIONAL CONFERENCE OF STUDENTS AND YOUNG SCIENTISTS

RUSSIA, TOMSK, April 23–26, 2013

Томск 2013

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В МНОГОМЕРНОЙ GARCH МОДЕЛИ

А.О. Кудрявцева
Научный руководитель: профессор, д. ф.-м.н. В.В.Конев
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г.Томск, пр. Ленина, 34, 634050
E-mail: yourXoblivion@gmail.com

IDENTIFICATION AND PREDICTION IN MULTIVARIATE GARCH MODEL

A.O. Kudryavtseva
Scientific Supervisor: Prof., Dr. V.V.Konev
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 34, 634050
E-mail: yourXoblivion@gmail.com

This essay discusses multivariate GARCH model, its special cases (VECH, BEKK), describes the estimation of the model parameters by maximum likelihood and states the problem of time series prediction using the classical approach.

В финансовой эконометрике и управлении прогнозирование зависимостей в параллельной динамике доходностей активов имеет большое значение. Например, цена актива зависит от ковариации различных активов в портфеле. Поэтому важно рассмотреть их взаимную динамику. В этом случае удобно пользоваться многомерными моделями волатильности. Волатильность – это статистический показатель, характеризующий изменчивость цены. Волатильность является важнейшим финансовым показателем в управлении финансовыми рисками, где представляет собой меру риска использования финансового инструмента за заданный промежуток времени. На нее влияют многие факторы: макроэкономическая ситуация в целом, темпы роста процентных ставок, политические события и многое другое.

Описание модели. Многомерная GARCH модель по своей сути во многом аналогична одномерной. Предположим, что $u_t = (u_{1t},\ldots,u_{kt})^T$ - *k*-мерный вектор, $Eu_t = 0$. Пусть F_{t-1}- информация, порождаемая наблюдаемым рядом до времени $t-1$. Тогда: $u_t = H_t^{1/2}\varepsilon_t$, с учетом множества F_{t-1} [1]. H_t - условная ковариационная матрица для u_t, ε_t - *k*-мерный белый шум, ε_t ~$(0, I_K)$. В многомерной GARCH модели условная ковариационная матрица для u_t имеет вид:

$$vech(H_t) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{q}\Gamma_j vech(u_{t-j}u_{t-j}^T) + \ldots + \sum_{j=1}^{m} G_j vech(H_{t-j}).$$

Матричный оператор *vech*() берет верхне-треугольную часть матрицы и складывает ее элементы в вектор-столбец, γ_0 - $\frac{1}{2}K(K+1)$-мерный вектор констант и Γ_j - $(\frac{1}{2}K(K+1) * \frac{1}{2}K(K+1))$ -мерные матрицы коэффициентов. Эта модель, предложенная Боллерслевом, Инглом и Вулдриджем в 1988 году, получила название VECH – от названия матричного оператора *vech*( ). Например, многомерное нормальное условное распределение может быть рассмотрено в виде: $\varepsilon_t \sim N(0, I_K)$, тогда $u_t | F_{t-1} \sim N(0, H_t)$. Хотя такое распределение, возможно, не самое подходящее для многих финансовых временных рядов. Условные распределения процессов, представляющих финансовые временные ряды, чаще всего являются распределениями с тяжелыми хвостами, такими как t-распределение с малым количеством степеней свободы [4]. Двумерная модель записывается следующим образом:

$$vech(H_t) = \gamma_0 + \Gamma vech(u_{t-1}u_{t-1}^T) + Gvech(H_{t-1}),$$

где H_t - условная ковариационная матрица размером 2*2, u_t- вектор инноваций размера 2*1, γ_0 - вектор параметров размера 3*1, Γ и G - матрицы параметров размера 3*3. Модель всего имеет 21 параметр (3 у вектора γ_0, по 9 у матриц). Для двух активов в развернутом виде:

$$vech\begin{bmatrix} H_{11,t} & H_{12,t} \\ H_{21,t} & H_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11,t} \\ H_{12,t} \\ H_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \gamma_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 \\ u_{1,t-1}u_{2,t-1} \\ u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix},$$
$$+\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11,t-1} \\ H_{12,t-1} \\ H_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

где уже применен оператор *vech*() следующим образом:

$$vech(H_t) = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix}, \; vech(u_t u_t^T) = vech\left(\begin{bmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1,t} & u_{2,t} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u^2{}_{1,t} \\ u^2{}_{2,t} \\ u_{1,t}u_{2,t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно получить уравнения в явном виде:

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= \gamma_{10} + \gamma_{11}u^2{}_{1,t-1} + \gamma_{12}u^2{}_{2,t-1} + \gamma_{13}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + g_{11}h_{11,t-1} + g_{12}h_{22,t-1} + g_{13}h_{12,t-1} \\ h_{22,t} &= \gamma_{20} + \gamma_{21}u^2{}_{1,t-1} + \gamma_{22}u^2{}_{2,t-1} + \gamma_{23}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + g_{21}h_{11,t-1} + g_{22}h_{22,t-1} + g_{23}h_{12,t-1}\,. \\ h_{12,t} &= \gamma_{30} + \gamma_{31}u^2{}_{1,t-1} + \gamma_{32}u^2{}_{2,t-1} + \gamma_{33}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + g_{31}h_{11,t-1} + g_{32}h_{22,t-1} + g_{33}h_{12,t-1} \end{aligned}$$

Для остальных моделей получается аналогично.

Пространство параметров GARCH модели имеет большую размерность, поэтому его стоит ограничить, чтобы гарантировать единственность представления и получить подходящие свойства условных ковариаций. Чтобы уменьшить пространство параметров, была предложена диагональная модель VECH GARCH (или DVECH), где Γ_j, G_j являются диагональными матрицами. Она описывается выражением:

$$h_{ij,t} = \omega_{ij} + \alpha_{ij}u_{i,t-1}u_{j,t-1} + \beta_{ij}h_{ij,t-1},\; i, j = 1,2,$$

где ω_{ij}, α_{ij}, β_{ij} - параметры. Даже простая модель такого типа может создать хорошую динамику волатильности. Поэтому данная модель достаточно часто используется на практике из-за своей простоты. Но, несмотря на простую структуру, могут возникнуть проблемы. Одна из них заключается в том, что параметры должны быть такими, чтобы условные ковариационные матрицы H_t были положительно определены. Это свойство особенно важно для многих финансовых задач, например, для управления рисками. Проблему, связанную с положительной полуопределенностью, можно избежать, используя BEKK-модель (Baba, Engle, Kraft, Kroner - 1990), для которой матрица H_t всегда положительно полуопределена (двумерная модель): $H_t = \gamma_0{}^T\gamma_0 + \Gamma^T vech(u_{t-1}u_{t-1}^T)\Gamma + G^T vech(H_{t-1})G$, где γ_0 – верхне-треугольная матрица параметров, Γ и G - матрицы параметров размера 2*2.Несмотря на это, она имеет ряд недостатков, например, большое количество параметров, а также отсутствие их прямой интерпретации [3].

Оценивание параметров. Оценивание параметров моделей является важным этапом моделирования процессов и построения прогноза. Если $\varepsilon_t \sim (0, I_K)$, тогда условное распределение u_t - гауссовское, и если u_t - наблюдаемые величины, тогда логарифмическая функция правдоподобия общей GARCH модели для величин $u_1,\ldots,u_T$ запишется в виде: $\ln l(\delta) = \sum_{t=1}^{T} \ln l_t(\delta)$, где $\delta = vec(\gamma_0, \Gamma_1,\ldots,\Gamma_q, G_1,\ldots,G_m)$ - вектор неизвестных параметров.

$$\ln l_t(\delta) = -\frac{K}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln|H_t| - \frac{1}{2}u_t' H_t^{-1} u_t,\ t = 1,\ldots,T,$$

где начальные значения H_t известны. Логарифмическая функция правдоподобия может быть также использована с диагональной и BEKK моделями. Полученная функция максимизируется по параметрам, затем ищется решение. Это трудоемкий процесс, так как функция нелинейная, поэтому удобнее пользоваться BEKK моделью, для которой функцию правдоподобия тоже нетрудно получить. Следует отметить, что если используется логарифмическая функции правдоподобия, а истинное распределение ε_t не является нормальным (например, оно может быть распределением Стьюдента), то в результате полученные оценки будут квази-оценками ML [4].

Прогнозирование. Обычно оптимальным прогнозом всегда является условное математическое ожидание. Поэтому, принимая во внимание этот факт, запишем формулу для рекурсивного прогноза в VECH GARCH модели: $E_{t-1}(H_{t+k}) = vech(\gamma_0) + \Gamma E_{t-1}\left[vech(u_{t+k-1}u_{t+k-1}^T)\right] + GE_{t-1}\left[vech(H_{t+k-1})\right]$, где $E(H_t) = \left[I - \Gamma - G\right]^{-1} vech(\gamma_0)$.

Моделирование процесса и анализ данных. Моделируется двумерный GARCH процесс. Задаются начальные значения параметров. Затем берутся реальные временные ряды – данные по акциям или финансовым индексам. Оцениваются параметры методом максимального правдоподобия (берется условное нормальное распределение). Далее по найденным оценкам параметров строится одношаговый прогноз – будущее значение волатильности финансового актива (построение многошагового прогноза – достаточно сложная задача). Затем делаются выводы о применении данной модели на практике, ее плюсах и минусах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Silvennoinen A., Terasvirta T. Multivariate GARCH models // Handbook of Financial Time Series. – 2009.
2. Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.. Multivariate GARCH Models: A Survey. // Journal of Applied Econometrics. – 2006. – №21. – pp. 79–109.
3. Brooks C. Introductory Econometrics for Finance. – New York:[Б.и.], 2008. – 674 p.
4. Lutkepohl H. New Introduction to Multiple Time Series Analyses. – Berlin: Springer, 2005. – 764 p.