

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Архипов, А.С. Усанина

**ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ
ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ
В НЕСУЩЕЙ СРЕДЕ**

Учебное пособие

*Допущено Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений РФ по образованию в области авиации,
ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
161700 «Баллистика и гидроаэродинамика»*

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2014

УДК 532.529
ББК 22.253.3я73
A875

Архипов В.А., Усанина А.С.

A875 Движение частиц дисперсной фазы в несущей среде :
учеб. пособие. – Томск : Издательский Дом
Томского государственного университета, 2014. – 252 с.

ISBN 978-5-9462-1458-2

Учебное пособие посвящено изложению физических основ процессов, связанных с движением частиц дисперсной фазы в несущей среде. Даны классификация гетерогенных систем и методы измерения дисперсных характеристик частиц. Рассмотрены процессы динамического взаимодействия частиц с несущей средой и при взаимных столкновениях. Проанализировано влияние нестационарных эффектов и концентрации частиц на их движение, рассмотрены условия потери устойчивости формы капель и пузырьков при их движении в прямолинейном и закрученном потоках.

Пособие написано по материалам дисциплины «Закономерности движения дисперсных систем».

Для студентов, обучающихся по направлению 161700 «Баллистика и гидроаэродинамика», а также аспирантов, научных и инженерно-технических работников, специализирующихся в области гидрогазодинамики гетерогенных потоков.

УДК 532.529
ББК 22.253.3я73

Рецензенты:

профессор кафедры механики СПбГУА, д-р физ.-мат. наук, профессор

С.А. Исаев;

зав. кафедрой авиа- и ракетостроения ОмГТУ, д-р техн. наук, профессор

Г.С. Аверьянов

ISBN 978-5-9462-1458-2

© Архипов В.А., Усанина А.С., 2014

© Томский государственный университет, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	6
ВВЕДЕНИЕ	8
1. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ	10
1.1. Гетерогенные течения в природе, технологических процессах и технических устройствах	10
1.2. Классификация и основные характеристики дисперсных систем	12
2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ	20
2.1. Представление распределения частиц по размерам	20
2.2. Унимодальные функции распределения	24
2.3. Определение параметров распределений по их геометрическим характеристикам	29
2.4. Средние размеры и удельная поверхность частиц	31
3. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ПРИ ОПИСАНИИ ДИНАМИКИ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ	33
3.1. Основное правило моделирования	33
3.2. Подобие явлений	36
3.3. Метод анализа размерностей	38
3.4. П-теорема	42
3.5. Основные критерии подобия в динамике дисперсных систем	45
3.6. Критерии подобия в специальных задачах механики двухфазных потоков	54
4. ДВИЖЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ЧАСТИЦЫ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ	60
4.1. Основные подходы к математическому описанию движения гетерогенных сред	60
4.2. Режимы движения частицы	61
4.3. Коэффициент сопротивления	64
4.4. Влияние формы частиц на их движение	65
4.5. Уравнение движения частицы дисперсной фазы	69

5. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В НЕСУЩЕМ ПОТОКЕ	74
5.1. Движение частицы в стоксовском режиме	74
5.2. Движение частицы в промежуточном режиме	78
5.3. Движение частицы в автомоделном режиме	81
6. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ	85
6.1. Движение частицы в стоксовском режиме	86
6.2. Влияние силы, связанной с присоединенной массой	90
6.3. Расчет скорости стационарного осаждения частицы по критериальному уравнению	93
7. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ	98
7.1. Уравнение движения частицы	98
7.2. Анализ сил, действующих на частицу	101
7.3. Траектория и скорость движения частицы	105
7.4. Ускорение частицы	108
7.5. Экспериментальное исследование движения капли в закрученном потоке	110
8. ТЕОРИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКИ	114
8.1. Устройство и принцип действия	114
8.2. Теория центробежной форсунки для идеальной жидкости	116
8.3. Теория центробежной форсунки для вязкой жидкости	122
8.4. Процесс распыливания	125
9. ДВИЖЕНИЕ СОВОКУПНОСТИ ЧАСТИЦ	129
9.1. Режимы движения системы частиц	129
9.2. Предельные значения объемной концентрации частиц	132
9.3. Движение частиц в частично продуваемом облаке	138
9.4. Коэффициент захвата	143
10. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ	146
10.1. Экспериментальные данные по динамике всплытия пузырька	146
10.2. Теоретический анализ задачи	154
11. ДЕФОРМАЦИЯ КАПЕЛЬ И ПУЗЫРЬКОВ	159
11.1. Механизм потери устойчивости формы частицы	159
11.2. Потеря устойчивости формы капли в закрученном потоке	161
11.3. Потеря устойчивости формы пузырька	169

12. КОАГУЛЯЦИЯ И ДРОБЛЕНИЕ КАПЕЛЬ ПРИ ВЗАИМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ	173
12.1. Типы взаимодействия невязких капель	173
12.2. Типы взаимодействия вязких капель	177
12.3. Устойчивость вращающихся вязких капель	179
12.4. Элементарная теория критических условий слияния капель идеальной жидкости при столкновениях	181
12.5. Обобщенная зависимость для параметра коагуляции и дробления	186
13. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ РАЗМЕРОВ ЧАСТИЦ	191
13.1. Метод микроскопирования	191
13.2. Ситовой анализ	193
13.3. Методы седиментации	194
13.4. Фотоседиментационный метод	196
13.5. Центробежная сепарация	198
13.6. Кондуктометрический метод	199
13.7. Измерение удельной поверхности	201
14. ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДИСПЕРСНОСТИ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ	203
14.1. Характеристики взаимодействия излучения с частицей	203
14.2. Метод спектральной прозрачности	210
14.3. Метод малых углов	213
14.4. Метод полной индикатрисы	217
14.5. Лидарный метод	219
14.6. Метод измерения среднего размера и концентрации частиц	221
15. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ	231
ЛИТЕРАТУРА	240
ПРИЛОЖЕНИЯ	245

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

C_D – коэффициент сопротивления

C_m, C_n, C_V – массовая, счетная и объемная концентрация частиц

D, R – диаметр и радиус сферической частицы

D_0 – модальный диаметр частиц

D_S – диаметр сферического облака частиц

D_e – эквивалентный диаметр частицы произвольной формы

$f(D), F(D)$ – дифференциальная и интегральная функции счетного распределения частиц по размерам

F_A – сила Архимеда

$F_{A\phi}$ – центробежная сила Архимеда

F_B – сила Бассе

F_g – сила тяжести

F_m – сила сопротивления, связанная с присоединенной массой

F_S – сила вязкого сопротивления

F_S – сила Саффмена

F_ω – сила Магнуса

g – ускорение свободного падения

$G(D), G(D)$ – дифференциальная и интегральная функции массового распределения частиц по размерам

G, Q – массовый и объемный секундный расход жидкости

m – масса частицы

p – давление

t – время

T_λ – спектральный коэффициент пропускания

\vec{u} – вектор скорости дисперсионной среды

u_z, u_r, u_ϕ – аксиальная, радиальная и тангенциальная компоненты вектора скорости потока (дисперсионной среды)

\vec{u}_p – вектор скорости частицы дисперсной фазы

$u_{pz}, u_{pr}, u_{p\phi}$ – аксиальная, радиальная и тангенциальная компоненты вектора скорости частицы

$\vec{U} = \vec{u}_p - \vec{u}$ – вектор скорости относительного движения частицы и дисперсионной среды

V_p – объем частицы

z – массовая доля частиц дисперсной фазы в двухфазном потоке

ε – пористость

λ – длина волны зондирующего излучения

μ , μ_p – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды и материала частицы дисперсной фазы

ρ , ρ_p – плотность дисперсионной среды и материала частицы дисперсной фазы

σ – коэффициент поверхностного натяжения

Ω – безразмерный момент вращения

Критерии подобия

A – геометрическая характеристика форсунки

Ar – число Архимеда

Bo – число Бонда

Ca – число капиллярности

Fr – число Фруда

L_p – число Лапласа

Mo – число Мортон

Oh – число Онезорге

Re – число Рейнольдса

Stk – число Стокса

We – число Вебера

β – параметр дифракции (параметр Ми)

Сокращения

АСД – алюминий сферический дисперсный

ГР – гамма-распределение

ЛДА – лазерно-доплеровская анемометрия

ЛНР – логарифмически нормальное распределение

ММУ – метод малых углов индикатрисы рассеяния

МПИ – метод полной индикатрисы рассеяния

МСП – метод спектральной прозрачности

ПИ – приемник излучения

ЦБФ – центробежная форсунка

PIV – Particle Image Velocimetry

ВВЕДЕНИЕ

Дисперсное состояние является основным состоянием материи, так как большая часть вещества во Вселенной находится в виде пыли. В земных условиях человеку приходится сталкиваться с большим разнообразием дисперсных (аэрозольных) систем – атмосферные аэрозоли (облака, туманы), от которых зависит погода и климат на Земле, аэрозоли в различных сферах производства (порошковая металлургия, угольная промышленность, технология лакокрасочного производства и т.д.), а также бытовые аэрозоли, образующиеся при распыливании различных пестицидов, освежителей воздуха, парфюмерных жидкостей и т.д.

Многофазные (в простейшем случае двухфазные) течения играют важную роль в ряде технологий и в рабочих процессах энергетических и двигательных установок. В качестве примеров можно привести нанесение функциональных покрытий на конструкционные материалы, процессы барботаж, флотации, седиментации, получение порошков металлов распыливанием расплавов, распыливание и движение капель горючего в камерах сгорания жидкостных ракетных двигателей, движение частиц конденсированной фазы в сопловых блоках твердотопливных ракетных двигателей, процессы сжигания распыленного твердого топлива в котельных установках и т.д.

Многофазные течения подчиняются основным законам сохранения гидрогазодинамики. Однако при этом уравнения имеют более сложную структуру, чем в случае однофазных течений. В многофазных системах обязательно присутствуют поверхности раздела фаз, на которых свойства сплошной среды изменяются скачкообразно. Это принципиально отличает многофазные системы от однофазных (в том числе и многокомпонентных), где таких скачков нет.

При исследовании двухфазных потоков, содержащих взвесь аэрозольных частиц (дисперсная фаза) в несущей среде (дисперсионная среда), важно правильно выбрать основные параметры, определяющие систему, и адекватно описать реальный процесс при помощи математической модели. В связи с этим глубокое знание принципов и законов, определяющих физику динамического поведения двухфазных систем с учетом свойств дисперсной и дисперсионной фаз, является необходимым для специалиста в области механики двухфазных потоков.

Фундаментальные основы динамики многофазных сред достаточно подробно изложены в монографиях [1–8] и обзорных статьях [9, 10].

Среди учебной литературы можно отметить пособия [11–13], в которых рассмотрены основные характеристики двухфазных течений. Вместе с тем ряд физических аспектов процессов динамического взаимодействия частиц дисперсной фазы с несущим потоком и при взаимных столкновениях, а также экспериментальные методы определения характеристик частиц рассмотрены в основном в журнальных публикациях.

Целью настоящего учебного пособия является лаконичное изложение основных закономерностей движения твердых и деформируемых (жидких и газообразных) частиц дисперсной фазы в дисперсионной среде с учетом физических процессов, протекающих на границе раздела фаз. Ввиду сложности рассматриваемых систем и процессов для их описания привлекаются сведения из теории вероятностей, статистической физики, газовой динамики, гидромеханики и других разделов естествознания. В этом смысле настоящее пособие является непосредственной демонстрацией приложений и связей знаний и навыков, получаемых студентами при изучении базовых дисциплин направления, и, несомненно, должно способствовать закреплению фундаментальных физических и математических знаний, полученных студентами ранее. Задачей пособия является освоение общих принципов и законов, определяющих динамику частиц дисперсной фазы в несущем потоке.

В пособии приведены основные понятия и терминология, основы теоретических и экспериментальных методов исследования характеристик дисперсных систем, механизмы возникновения потери устойчивости формы частицы (капли или пузырька), влияние нестационарных эффектов и концентрации частиц на параметры движения. Рассмотрены основные физико-математические модели, применяемые в физике дисперсных систем.

При написании настоящего пособия использовались как литературные данные, так и результаты экспериментальных и теоретических исследований авторов, проведенных на базе Томского государственного университета и НИИ прикладной математики и механики ТГУ. Авторы надеются, что учебное пособие будет полезным не только для учебных целей, но и в практической работе инженеров и исследователей, специализирующихся в области физики и механики дисперсных сред.

Пособие подготовлено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 2014/223 (код проекта 1567).

1. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Гетерогенные (многофазные) системы, представляющие собой совокупность двух и более фаз с четко выраженной поверхностью раздела, широко распространены в природе, в повседневной техногенной деятельности человека, а также играют исключительную роль в большинстве промышленных процессов. Предметом изучения в настоящем курсе являются системы, состоящие из двух фаз, одна из которых образует непрерывную дисперсионную среду, а вторая – дисперсную фазу, распределенную в дисперсионной среде в виде твердых частиц, капель или пузырьков.

1.1. ГЕТЕРОГЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПРИРОДЕ, ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ И ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

К числу дисперсных систем относятся столь резко различающиеся по химическому и фазовому составам, физическим свойствам, областям существования и применения объекты, как аэрозоли (туманы, дымы, космическая пыль), золи металлов и природных минералов, донные отложения рек, морей и океанов, грунты и почвы, мелкие пески, сырая нефть и природные битумы, пигменты и высокодисперсные наполнители для композиционных материалов, керамические массы, водоугольные суспензии и золы от сжигания твердых топлив, водные суспензии целлюлозных волокон для производства бумаги, катализаторные массы, сырьевые шламы многих химических производств. К дисперсным системам относятся также все многообразные виды пен и эмульсий. Перечисленные примеры свидетельствуют о широком распространении и большом значении дисперсных сред как в природных явлениях, так и при проведении разнообразных технологических процессов, осуществляемых с их участием.

Многие виды дисперсных систем являются основой для получения композиционных материалов, таких как бетоны, лакокрасочные материалы, высоконаполненные резины и пластики, гетерогенные твердые ракетные топлива, керамические и металлокерамические материалы, бумага и картон, искусственные кожи и множество других материалов.

Дисперсные системы могут как приносить пользу человеку в отдельных областях его жизни, так и наносить в ряде случаев существенный урон. На сегодняшний день одной из основных проблем дисперсных сред стала экологическая. Причины загрязнения атмосферы связаны с деятельностью промышленных предприятий, выбрасывающих в окружающую среду вредные вещества (сероводород, сероуглерод, сернистый ангидрид, оксид углерода, окислы азота, соединения хлора и фтора, частицы золы и сажи). При взаимодействии этих веществ с атмосферной влагой возможно образование капель азотной, соляной и серной кислоты с последующим выпадением кислотных дождей. Выбросы оксида углерода, попадающие в атмосферу в результате сжигания твердых отходов, способствуют повышению температуры на планете (парниковый эффект).

Тем не менее в большинстве случаев дисперсные системы играют положительную роль. Приведем примеры применения дисперсных систем в некоторых технологических процессах и устройствах.

Дисперсные системы широко используются в процессе обогащения полезных ископаемых, предназначенном для разделения исходных минеральных частиц на соответствующие продукты. В зависимости от плотности разделяемых минералов частицы помещаются либо в водную, либо в воздушную среду, где они движутся под действием гравитационных или центробежных сил. При флотационном методе обогащения флотационная дисперсная среда помимо твердых минеральных частиц состоит из пузырьков газа или капель масла, которые прилипают к плохо смачиваемым частицам и поднимают их к поверхности.

Важную роль дисперсные среды играют в ракетной технике. В частности, в жидкостных ракетных двигателях топливо из центробежной форсунки выходит в виде полой конической пелены, состоящей из мелких капель. Это позволяет повысить полноту сгорания компонентов жидких ракетных топлив, интенсивность процессов тепломассопереноса и эффективность процессов горения.

Дисперсные среды успешно применяются в современных порошковых средствах пожаротушения. В качестве огнетушащего вещества используется аэрозоль, состоящий из высокодисперсных твердых частиц и инертного газа. Процесс тушения основывается на сжигании вещества особого химического состава в твердом виде. После сгорания вещества образуется струя пара и твердых частиц. Она блокирует доступ кислорода и гасит огонь. Данный метод локализации пожаров является экологически безвредным и не токсичен.

Кроме перечисленных примеров применения дисперсных сред в отдельных технологиях можно привести процесс центрифугирования, ис-

пользуемый в атомной, пищевой, нефтяной и химической отраслях промышленности. Центрифугирование применяется для разделения многофазных систем на фракции, например жидкость – твердые частицы. Метод центрифугирования часто используется в биологии для отделения макромолекул в физиологических растворах.

Одной из бурно развивающихся областей применения дисперсных систем является технология получения порошков с заданными свойствами. В частности, в основе плазмохимического синтеза керамических порошков заложен высокочастотный способ генерации теплоносителя, подаваемого в реакторную часть установки совместно с жидкими каплями реагента в условиях закрученного потока. Эффективность данной технологии во многом определяется закономерностями движения и эволюции жидких частиц распыленного реагента при их взаимодействии с несущей газовой фазой и явлениями, происходящими в капле реагента.

Это далеко не весь перечень областей применения дисперсных систем. Однако даже из приведенных примеров очевидно, что для повышения эффективности отдельных технологических процессов, снижения энергозатрат и получения целевого продукта или результата необходимы адекватные физико-математические модели динамического взаимодействия частиц дисперсной фазы с несущей средой с учетом конкретных условий.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

В природе и в технологических процессах встречаются дисперсные системы, характеристики которых могут изменяться в широких пределах. Многочисленные дисперсные системы можно классифицировать по различным признакам. Существуют общие признаки, которые характерны для всех дисперсных систем, и частные, распространяющиеся лишь на отдельные виды аэрозолей. Рассмотрим классификацию дисперсных систем на основе следующих общих признаков [14, 15].

- Агрегатное состояние частиц и несущей среды.
- Вид дисперсной фазы.
- Размер частиц.
- Концентрация частиц.

Классификация дисперсных систем по агрегатному состоянию

Дисперсионной средой могут быть жидкость (Ж) или газ (Г), дисперсной фазой могут быть твердые частицы (Т), капли жидкости (Ж) или газовые пузырьки (Г). Каждая система имеет свое обозначение в виде дроби, где в числителе указывается агрегатное состояние дисперсной фазы, а в знаменателе – дисперсионной среды. Система Т/Ж, например, это взвесь твердых частиц в жидкости; система Ж/Г – жидкие капли в газе и т.д. Классификация дисперсных систем по агрегатному состоянию приведена в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.1

Классификация дисперсных систем по агрегатному состоянию

Дисперсионная среда	Дисперсная фаза		
	твердая	жидкая	газообразная
Жидкая	Т/Ж (гидрозоли, суспензии, гели)	Ж/Ж (эмульсии, кремы)	Г/Ж (газовые эмульсии, пены, кипящая жидкость)
Газообразная	Т/Г (аэрозоли, пыль)	Ж/Г (туман, облака)	Г/Г (маловероятны)

Вследствие растворимости газов системы типа Г/Г практически не встречаются. В газовой среде, однако, возможны гетерогенные образования из-за флуктуации плотности. Каждая из рассматриваемых дисперсных систем имеет свое название (табл. 1.1). Систему Ж/Ж, например, называют эмульсией, а системы с газовой дисперсионной средой – аэрозолями.

Приведенная классификация является общей и характеризует возможные виды дисперсных систем. На ее основе можно представить характеристики некоторых практически важных дисперсных систем и областей их применения (табл. 1.2).

Т а б л и ц а 1.2

Характеристики практического использования дисперсных систем

Тип системы	Представители	Отрасли и сферы
Т/Ж	Естественные водоемы, краски, красители для ткани, гидрозоли металлов	Акватории Земли, лакокрасочная и текстильная промышленность, добыча золота
Ж/Ж	Нефть, молоко, майонез, краски, лаки, латекс, средства защиты растений	Нефтеперерабатывающая, пищевая, резиновая, лакокрасочная промышленность
Г/Ж	Пена для флотации, мыльная пена, игристые вина, газированная вода	Обогащение минералов, пищевая промышленность, применение моющих средств
Т/Г	Мука и сыпучие пищевые продукты; порошкообразные цемент, алебастр, бетон, пыль; дым в атмосфере	Текстильная, легкая, пищевая промышленность, сельское хозяйство, строительство, Земля и ее атмосфера
Ж/Г	Туман, бытовые средства в аэрозольном состоянии	Автомобильная промышленность, атмосферные процессы

Сведения, приведенные в табл. 1.2, свидетельствуют о широком распространении дисперсных систем как в природе, так и в разнообразных сферах человеческой деятельности.

Классификация дисперсных систем по форме частиц

Для упрощения анализа процессов, происходящих в дисперсных системах, удобно все частицы принимать за сферические. Однако, за исключением жидких капель, которые чаще всего являются сферами или сфероидами, частицы дисперсной фазы могут иметь самую разную форму. Их можно разделить на три основных класса (рис. 1.1).

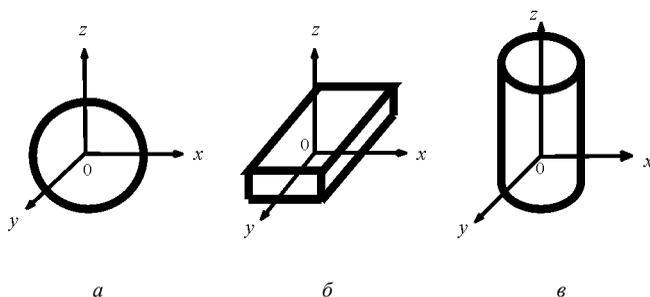


Рис. 1.1. Основные формы частиц:
а – изометрическая частица; б – пластинка; в – волокно

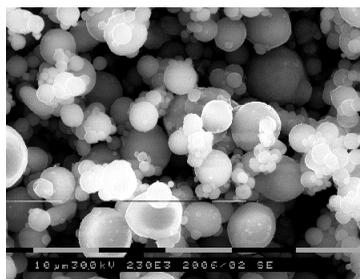
- Изометрические частицы, для которых в первом приближении все три размера по осям x , y , z совпадают. К этому классу относятся сферы, правильные многогранники или частицы, близкие к ним по форме. Большинство исследований поведения дисперсных сред посвящено изометрическим частицам (оптика аэрозолей, движение капель и пузырьков, испарение и горение частиц).

- Пластинки – частицы, имеющие два длинных размера и один короткий. К этому классу относятся лепестки, пленки, мембраны, чешуйки, диски.

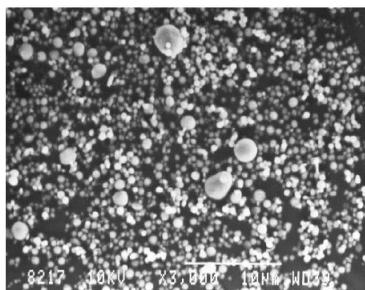
- Волокна – частицы, протяженные в одном направлении и имеющие сравнительно небольшие размеры в двух других. К их числу относятся призмы, иглы, нити или минеральные волокна, например асбест. Выяснение опасности для здоровья при вдыхании асбестовой пыли побудило к изучению поведения волокон в воздухе. Однако сведений о волокнах как об аэродисперсных системах получено очень мало по сравнению с данными об изометрических частицах.

Форма частиц зависит от способа их получения и природы материала. Частицы, образующиеся при конденсации молекул пара, имеют обычно сферическую форму, особенно если конденсация проходит через стадию образования жидкости. Частицы, образующиеся при измельчении больших образцов, редко бывают сферическими. Исключение – дробление жидких капель под воздействием потока воздуха.

На рис. 1.2 приведены микрофотографии порошков алюминия, полученных разными способами. Порошок алюминия марки АСД-4 (рис. 1.2, а) получен методом плазменной конденсации и имеет среднемассовый диаметр частиц $D_{43} = 7,34$ мкм. Порошок ALEX (рис. 1.2, б) получен методом электрического взрыва проволочек и имеет величину $D_{43} = 0,18$ мкм. Этот порошок относится к классу высокодисперсных. Как видно из приведенных фотографий форма частиц сферическая.



а



б

Рис. 1.2. Микрофотографии порошков алюминия [16]:
а – порошок АСД-4; б – порошок ALEX

Приведем некоторые геометрические характеристики изометрических частиц разной формы (табл. 1.3). В таблице обозначены: D – диаметр сферы; a – длина ребра правильного многогранника.

Таблица 1.3

Геометрические характеристики частиц разной формы

Форма частицы	Сфера	Куб	Тетраэдр	Октаэдр
Площадь поверхности	πD^2	$6 a^2$	$1,73 a^2$	$3,46 a^2$
Объем	$\pi D^3 / 6$	a^3	$0,12 a^3$	$0,47 a^3$

Классификация частиц по размерам

Поскольку аэрозольные частицы, как правило, очень мелкие по сравнению с привычными предметами, для их описания используются специальные единицы измерения – микрометры, нанометры и ангстремы. Приведем соотношения этих единиц измерений:

$$1 \overset{\circ}{\text{A}} = 0,1 \text{ нм} = 10^{-4} \text{ мкм} = 10^{-8} \text{ см} = 10^{-10} \text{ м};$$

$$1 \text{ нм} = 10 \overset{\circ}{\text{A}} = 10^{-3} \text{ мкм} = 10^{-7} \text{ см} = 10^{-9} \text{ м};$$

$$1 \text{ мкм} = 10^4 \overset{\circ}{\text{A}} = 10^3 \text{ нм} = 10^{-4} \text{ см} = 10^{-6} \text{ м}.$$

При практических расчетах необходимо использовать одну и ту же систему единиц, т.е. все размеры, входящие в расчетные формулы, должны быть выражены одной и той же единицей: в метрах, микронах, ангстремах и т.д.

Размеры частиц, представляющих интерес для науки об аэрозолях, лежат в интервале, охватывающем четыре порядка величин от 10^{-2} до 10^2 мкм. Нижняя граница лежит в области перехода от размера молекулы к макроскопической частице. Частицы крупнее 100 мкм не способны длительное время оставаться взвешенными в воздухе. С течением времени они осаждаются на поверхность расположенных ниже предметов или уносятся ветром. Частицы диаметром более $5 \div 10$ мкм обычно задерживаются в верхних дыхательных путях, а диаметром менее 5 мкм – могут проникать в альвеолярное пространство легких. Таким образом, величину $5 \div 10$ мкм часто принимают как верхний предел размеров аэрозолей, представляющих интерес для медицины.

Линейные размеры ряда физических величин, которые оказывают существенное влияние на свойства частиц, лежат в интервале $0,01 \div 100$ мкм. Например, средняя длина свободного пробега молекул воздуха составляет 0,07 мкм. При этом газовая система, в которой взвешены частицы, может приобретать различные новые свойства в зависимости от размера частиц. Длина волны видимого света лежит в диапазоне $0,4 \div 0,7$ мкм. Частицы, размер которых меньше длины волны излучения, рассеивают свет существенно иначе, чем более крупные частицы. Таким образом, размер частиц – наиболее важный параметр при изучении и анализе поведения аэрозолей. Классификация дисперсных систем по этому признаку приведена в табл. 1.4.

Т а б л и ц а 1.4

Классификация дисперсных систем в зависимости от размера частиц дисперсной фазы

Тип системы	D , мкм
Высокодисперсные системы	0,001÷0,1
Среднедисперсные системы	0,1÷10
Грубодисперсные системы	Более 10

Типичные размеры частиц некоторых аэрозольных систем приведены в табл. 1.5.

Т а б л и ц а 1.5

Типичные размеры частиц

Тип аэрозоля	D , мкм
Табачный дым	0,1÷1,0
Туман серной кислоты	0,3÷0,5
Топочный дым	0,1÷10
Растворимый кофе, сажа, сахарная пудра	0,1÷10
Слоистые облака	1÷10
Факел распыла аэрозольного баллончика	1÷100
Атмосферный туман	2÷50
Тальк	10÷50
Дождевые облака	10÷100
Цветочная пыльца	15÷20
Крупа, дождевые капли	Более 50÷100

Структура частиц дисперсной фазы

Частицы дисперсной среды могут существовать сами по себе и объединяться в цепочки, которые называют агломератами. Агломераты обычно образуются из электрически заряженных мелких частиц, которые находятся в плотных дымах. Дисперсные системы могут состоять из полых капелек, заполненных газом, или полых частиц, содержащих вещество-наполнитель (летучая зола, частицы оксида алюминия в продуктах сгорания твердых ракетных топлив, например). Таким образом, плотность частицы может значительно отличаться от плотности исходного материала за счет наличия в ней полостей.

Дисперсные системы делятся на монодисперсные, которые состоят из частиц одного и того же размера, и полидисперсные – состоящие из частиц разных размеров. Монодисперсные системы на практике встречаются очень редко. Дисперсные системы бывают гомогенные и гетерогенные. Гомогенная система состоит из химически одинаковых частиц.

В неомогенной (гетерогенной) системе частицы имеют различные химические составы.

Концентрация частиц дисперсной фазы

Концентрация дисперсных частиц также является одной из важнейших характеристик, от которой зависит поведение дисперсной системы в различных физико-химических процессах. Различают счетную C_n , объемную C_V и массовую C_m концентрацию частиц:

C_n – количество частиц в единице объема двухфазной среды;

C_m – суммарная масса частиц в единице объема двухфазной среды;

C_V – суммарный объем частиц в единице объема двухфазной среды.

Дисперсные системы делятся на высококонцентрированные и разреженные в зависимости от объемной концентрации частиц:

$$C_V = \frac{\sum V_p}{V},$$

где $\sum V_p$ – суммарный объем частиц в аэрозольной системе; V – объем аэрозольной системы.

При $C_V > 0,02$ система называется высококонцентрированной, при $C_V < 0,02$ – разреженной [1].

Кроме того, для характеристики содержания частиц в дисперсной системе используется массовая (или весовая) доля частиц в двухфазной среде:

$$z = \frac{C_m}{C_m + \rho},$$

где ρ – плотность несущей среды (газ или жидкость).

В табл. 1.6 приведены соотношения между счетной C_n , массовой C_m и объемной C_V концентрациями частиц ($m_p = V_p \rho_p$ – масса частицы; ρ_p – плотность материала частицы).

Соотношения между C_n , C_m , C_V можно распространить и на полидисперсные системы, состоящие из частиц разных размеров (табл. 1.7). Для таких систем дисперсный состав характеризуется дифференциальной функцией счетного распределения частиц по размерам $f(D)$.

Таблица 1.6

Соотношения между концентрациями для моодисперсных сред

	C_n	C_m	C_V
C_n	C_n	$C_m \cdot \frac{1}{m_p} = C_m \cdot \frac{6}{\pi D^3 \rho_p}$	$C_V \cdot \frac{6}{\pi D^3}$
C_m	$C_n \cdot \frac{\pi D^3}{6} \rho_p$	C_m	$C_V \cdot \rho_p$
C_V	$C_n \cdot \frac{\pi D^3}{6}$	$C_m \cdot \frac{1}{\rho_p}$	C_V

Таблица 1.7

Соотношения между концентрациями для полидисперсных сред

	C_n	C_m	C_V
C_n	C_n	$C_m \left[\frac{\pi \rho_p}{6} \int_0^{\infty} D^3 f(D) dD \right]^{-1}$	$C_V \left[\frac{\pi}{6} \int_0^{\infty} D^3 f(D) dD \right]^{-1}$
C_m	$C_n \cdot \frac{\pi \rho_p}{6} \int_0^{\infty} D^3 d(D) dD$	C_m	$C_V \cdot \rho_p$
C_V	$C_n \cdot \frac{\pi}{6} \int_0^{\infty} D^3 d(D) dD$	$C_m \cdot \frac{1}{\rho_p}$	C_V

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ

Многообразие встречающихся в природе и в технических устройствах дисперсных систем обладает рядом характеристик, к которым относятся химический и гранулометрический состав, смачивающие и оптические свойства и т.д. При изучении конкретных явлений и процессов важно знание определенных характеристик. Однако есть такие характеристики, которые являются общими для любых процессов в дисперсных системах. Основными характеристиками частиц дисперсной фазы являются размер, плотность, форма, структура, химический состав. Рассмотрим более подробно размеры частиц.

Монодисперсные системы, которые состоят из частиц одинакового размера, встречаются в природе очень редко, и когда они образуются, то существуют в течение короткого промежутка времени. Например, некоторые высоко расположенные облака состоят из монодисперсных капель.

Дисперсные системы, состоящие из частиц различных размеров, называются полидисперсными. Как правило, в природе и в технических устройствах встречаются только полидисперсные системы. Если рассмотреть через лупу или микроскоп опилки, песок или другие порошки, то можно обнаружить частицы разных размеров. При образовании дождевых капель в результате конденсации и коагуляции при столкновении друг с другом, а также при дроблении в воздушном потоке образуется полидисперсная система. Для описания размеров частиц в монодисперсной системе достаточно указать единственное число – размер отдельной частицы (например диаметр или радиус для сферических частиц). Для полидисперсных систем этого оказывается недостаточно. Рассмотрим основные способы описания полидисперсных систем.

2.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ

Распределение частиц по размерам может быть представлено в виде таблиц, линейных диаграмм, гистограмм, а также математических формул. Рассмотрим эти способы представления распределений на примере.

Табличное задание распределения

Пусть в результате каких-либо измерений (например при обработке микрофотографии образца пробы аэрозоля) получены данные по размерам частиц, например по их диаметрам D . Эти данные можно представить в табличном виде (табл. 2.1). При этом весь диапазон размеров частиц разбивается на k интервалов (в рассмотренном примере $k = 5$). Для каждого i -го интервала в таблицу заносятся следующие значения: левая и правая границы интервала D_{i1} , D_{i2} ; средняя точка интервала $D_i = 0,5 (D_{i1} + D_{i2})$; ширина интервала $\Delta D_i = D_{i2} - D_{i1}$ и количество частиц n_i в этом интервале.

Т а б л и ц а 2.1

Данные по размерам частиц

i	D_{i1} , мкм	D_{i2} , мкм	D_i , мкм	ΔD_i , мкм	n_i	$n_i/\Delta D_i$, мкм ⁻¹
1	1	2	1,5	1	30	30
2	2	3	2,5	1	90	90
3	3	5	4,0	2	50	25
4	5	10	7,5	5	20	4
5	10	20	15	10	10	1

В зависимости от количества интервалов k , на которое разбивается диапазон измеренных размеров частиц, можно получить более или менее подробные таблицы, которые полностью определяют распределение частиц по размерам в данной аэрозольной системе.

Линейная диаграмма

Табличное задание распределения частиц по размерам громоздко и обладает малой наглядностью, особенно при большом количестве интервалов k . Поэтому удобно использовать графический способ изображения распределения, например в виде линейной диаграммы. Линейная диаграмма представляет собой график, по оси абсцисс которого нанесены значения средних точек интервалов D_i , а по оси ординат – количество частиц n_i в каждом интервале. Линейная диаграмма для рассмотренного выше примера (табл. 2.1) приведена на рис. 2.1.

Линейная диаграмма дает представление о виде распределения, т.е. об относительном содержании частиц каждой фракции в аэрозольной системе, однако она не позволяет оценить количественные характеристики распределения. При увеличении числа разбиения k линейная диаграмма

будет представлять собой плавную кривую, качественно отражающую распределение частиц по размерам.

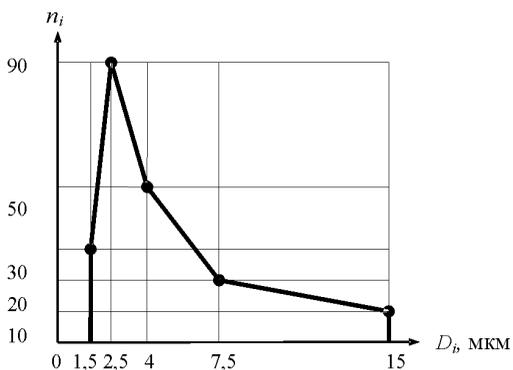


Рис. 2.1. Линейная диаграмма распределения

Гистограмма

Более точно распределение частиц по размерам можно представить в виде гистограммы – зависимости количества частиц n_i в i -м интервале, отнесенного к длине этого интервала ΔD_i , от размера частиц. На рис. 2.2 приведена гистограмма для приведенного выше распределения (табл. 2.1).

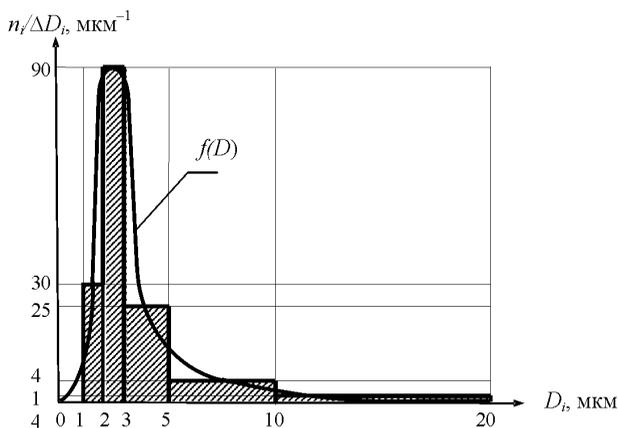


Рис. 2.2. Гистограмма распределения

Гистограмма представляет собой совокупность смежных прямоугольников. Площадь каждого прямоугольника равна числу частиц, размеры которых попадают в данный интервал. Общая площадь гистограммы равна общему числу частиц в измеренном образце аэрозоля.

Математическое представление распределений

Если интервалы размеров частиц ΔD_i становятся очень малыми, то гистограмма будет приближаться к плавной кривой, которая может быть аппроксимирована некоторой функциональной зависимостью. Содержание частиц различных размеров в полидисперсной системе полностью определяется заданием ее дифференциальной функции счетного $f(D)$ или массового $g(D)$ распределения [16]. Отметим, что вместо диаметра частиц D можно использовать любой параметр, характеризующий размер индивидуальной частицы (радиус, объем, масса, некоторый эквивалентный размер для несферической частицы и т.д.).

При этом

$$df(D) = f(D)dD$$

– доля количества частиц, диаметры которых лежат в диапазоне $(D, D + dD)$;

$$dg(D) = g(D)dD$$

– доля массы (или объема) частиц, диаметры которых лежат в диапазоне $(D, D + dD)$.

Дифференциальные функции распределения имеют смысл плотности распределения вероятности, т.е. нормированы на единицу:

$$\int_0^{\infty} f(D)dD = 1, \tag{2.1}$$

$$\int_0^{\infty} g(D)dD = 1.$$

Выражения (2.1) означают, что вероятность того, что диаметры или массы частиц лежат в диапазоне $(0, \infty)$, равна единице (или 100%).

Связь между счетной и массовой функциями распределения определяется исходя из смысла этих функций уравнениями

$$g(D) = a_1 D^3 f(D),$$

$$f(D) = a_2 D^{-3} g(D),$$

где коэффициенты a_1, a_2 определяются из условий нормировки (2.1):

$$a_1 = \left(\int_0^{\infty} D^3 f(D) dD \right)^{-1},$$

$$a_2 = \left(\int_0^{\infty} D^{-3} g(D) dD \right)^{-1}.$$

Если размерность диаметра частиц $[D] = \text{мкм}$, то размерность дифференциальных функций распределения $[f] = [g] = \text{мкм}^{-1}$.

Наряду с дифференциальными функциями распределения $f(D), g(D)$ для описания содержания частиц различных размеров в полидисперсной системе используются интегральные функции распределения $F(D), G(D)$. Счетная функция распределения $F(D)$ равна отношению количества частиц, размер которых меньше D , к общему количеству частиц. Массовая функция распределения $G(D)$ равна отношению массы всех частиц, размер которых меньше D , к общей массе дисперсного материала. Предполагается, что $F(D), G(D)$ являются непрерывными монотонными функциями, всюду дифференцируемыми и обладающими непрерывными производными.

Связь между дифференциальными и интегральными функциями распределения устанавливается следующими формулами:

$$F(D) = \int_0^D f(D) dD, \quad G(D) = \int_0^D g(D) dD.$$

Функции $F(D), G(D)$ безразмерны и при $D \rightarrow \infty$ стремятся к единице.

2.2. УНИМОДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Практически все природные и искусственно получаемые аэрозоли с унимодальной (одновершинной) функцией распределения могут быть

описаны с помощью двух аналитических зависимостей: обобщенного гамма-распределения (ОГР) и логарифмически нормального распределения (ЛНР) [17].

Обобщенное гамма-распределение определяется формулой

$$f(D) = aD^\alpha \exp(-bD^\beta), \quad (2.2)$$

где a – нормирующий множитель; b , α , β – параметры распределения ($a > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$).

При значении параметра $\beta = 1$ обобщенное гамма-распределение переходит в гамма-распределение (ГР), определяемое формулой

$$f(D) = aD^\alpha \exp(-bD). \quad (2.3)$$

Выражение для логарифмически нормального распределения (ЛНР) имеет вид:

$$f(D) = aD^{-1} \exp[-b \cdot \ln^2(\beta D)], \quad (2.4)$$

где $a > 0$ – нормирующий множитель; b , β – параметры распределения.

Нормирующие множители для этих распределений находятся из условия нормировки (2.1) путем интегрирования.

Для обобщенного гамма-распределения нормирующий множитель равен

$$a = \frac{\frac{\alpha+1}{\beta b} \frac{1}{\beta}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)}. \quad (2.5)$$

Для гамма-распределения

$$a = \frac{b^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (2.6)$$

Для логарифмически нормального распределения

$$a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}. \quad (2.7)$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция, которая при целых положительных значениях x равна

$$\Gamma(x) = (x-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x-1.$$

Значения гамма-функции для произвольных значений x приведены в приложении 1.

При практической работе, связанной с анализом дисперсных систем, удобно оценивать форму распределения с помощью геометрических характеристик функции плотности вероятности (рис. 2.3).

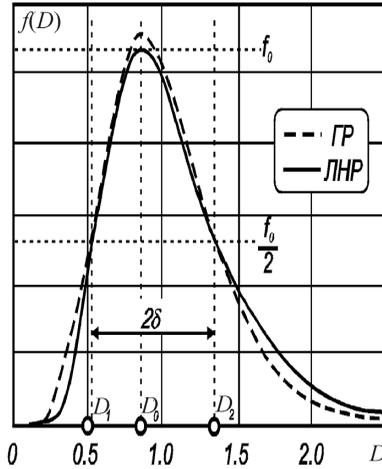


Рис. 2.3. Геометрические характеристики распределения

В качестве геометрических характеристик дифференциальной функции счетного распределения частиц по размерам $f(D)$ используются следующие параметры.

Модальный размер или мода распределения D_0 – диаметр частиц, соответствующий максимуму плотности распределения вероятности:

$$f_0 = f(D_0) = f_{\max}(D).$$

Полуширина распределения δ :

$$\delta = \frac{D_2 - D_1}{2}.$$

Асимметрия распределения ε :

$$\varepsilon = \frac{D_0 - D_1}{D_2 - D_1} = \frac{D_0 - D_1}{2\delta}.$$

Здесь D_1 и D_2 – значения диаметров частиц, соответствующих половине максимального значения функции распределения:

$$f(D_1) = f(D_2) = 0,5 f_0.$$

Выражение геометрических характеристик плотности вероятности через параметры гамма-распределения и логарифмически нормального распределения приведены в табл. 2.2.

Т а б л и ц а 2.2

**Выражение геометрических характеристик плотности вероятности
через параметры распределений**

Параметр	ГР	ЛНР
D_0	$\frac{\alpha}{b}$	$\left(\frac{1}{\beta}\right) \exp\left[-\frac{1}{2b}\right]$
f_0	$a\left(\frac{\alpha}{b}\right)^\alpha \exp(-\alpha)$	$a\beta \exp\left(\frac{1}{4b}\right)$
2δ	$\frac{2,34}{\sqrt{\alpha}D_0}$	$2D_0 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{0,693}{b}}\right)$
ε	$0,304\alpha^{0,125}$	$\left(1 + \exp\left(\sqrt{\frac{0,693}{b}}\right)\right)^{-1}$

В качестве примера рассмотрим дифференциальные функции счетного и массового распределений (рис. 2.4) и интегральную функцию массового распределения частиц по размерам (рис. 2.5), полученные экспериментально при распыливании жидкости двумя эжекционными форсунками (1, 2) разных конструкций. При аппроксимации гамма-распределением дифференциальные функции счетного распределения капель по размерам для этих форсунок имеют вид:

– для первой форсунки

$$f_1(D) = 0,27D^{5,1} \exp(-1,82D),$$

– для второй форсунки

$$f_2(D) = 0,28D^{0,9} \exp(-0,53D),$$

где $[D] = \text{мкм}$, $[f(D)] = \text{мкм}^{-1}$.

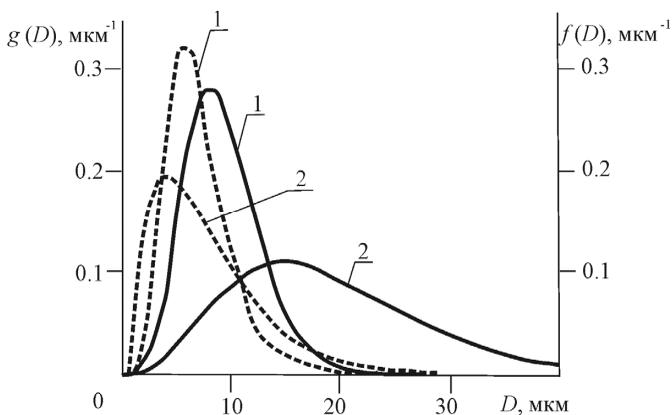


Рис. 2.4. Дифференциальные функции счетного (пунктирная линия) и массового (сплошная линия) распределения капель по размерам для форсунок 1 и 2

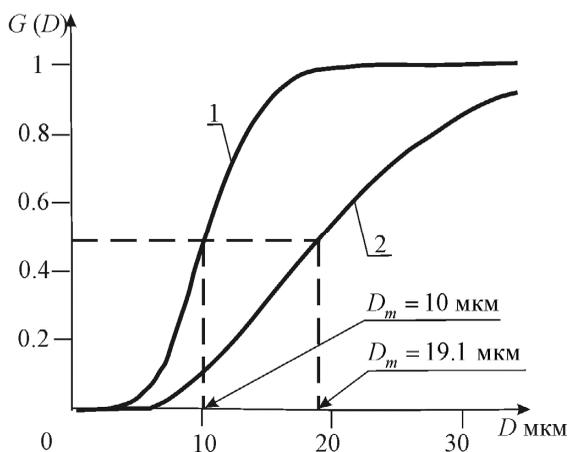


Рис. 2.5. Интегральные функции массового распределения

В порошковой металлургии для оценки дисперсности частиц обычно используется медианный диаметр D_m . Медианный диаметр соответствует суммарной доле 50% массы частиц, диаметры которых равны или меньше D_m , от общей массы частиц в порошке.

Для полимодальных распределений дифференциальных функций распределения представляют собой сумму унимодальных распределений с соответствующими модальными диаметрами $D_{01}, D_{02}, \dots, D_{0n}$ [17].

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Геометрические характеристики функции распределения $f(D)$ или $g(D)$ могут быть использованы для нахождения параметров распределений. Рассмотрим алгоритм нахождения этих параметров.

- По результатам измерений строится таблица значений ΔD_i , $n_i/\Delta D_i$ (см. табл. 2.1).
- Строится гистограмма распределения (см. рис. 2.2).
- Через середины столбцов гистограммы проводится плавная кривая $f(D)$, исходящая от нуля и плавно уходящая в нуль при увеличении D (см. рис. 2.2).
- С помощью этой кривой находят значения D_0 , δ , ε в соответствии с рис. 2.3.
- Для найденных значений D_0 , δ , ε рассчитываются параметры распределения по формулам, приведенным в табл. 2.3.
- Рассчитывается нормирующий множитель по формулам (2.5)–(2.7) и получается искомая зависимость.

Т а б л и ц а 2.3

Выражение параметров распределений через геометрические характеристики функции плотности вероятности

Параметр	ГР	ЛНР
α	$\left(\frac{1,17}{\delta} D_0\right)^2$	—
b	$D_0 \left(\frac{1,17}{\delta}\right)^2$	$0,693 \left(\operatorname{Arsh}\left(\frac{\delta}{D_0}\right)\right)^{-2}$
β	—	$\frac{1}{D_0} \exp\left(-0,721 \left(\operatorname{Arsh}\left(\frac{\delta}{D_0}\right)\right)^2\right)$

Пример. Дана гистограмма распределения частиц порошка алюминия марки ALEX (рис. 2.6). Определить дифференциальную функцию счетного распределения при ее аппроксимации гамма-распределением.

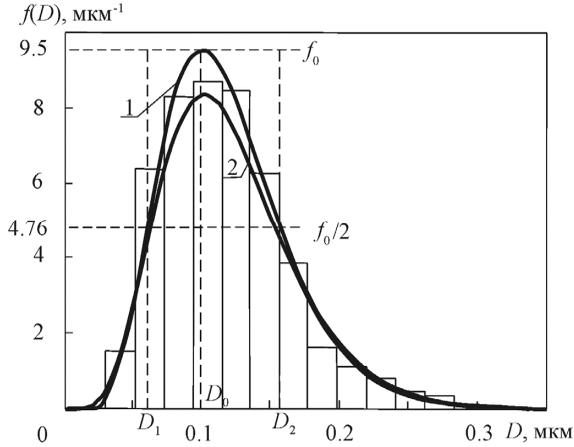


Рис. 2.6. Гистограмма и функция распределения

1. Проводим плавную кривую через середины столбцов гистограммы (кривая 1 на рис. 2.6), по которой определяем значения геометрических характеристик: $D_0 = 0,1$ мкм, $D_1 = 0,06$ мкм; $D_2 = 0,16$ мкм; $f_0 = 9,5$ мкм⁻¹.

2. Находим значения δ , ε :

$$\delta = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{0,16 - 0,06}{2} = 0,05 \text{ мкм},$$

$$\varepsilon = \frac{D_0 - D_1}{2\delta} = \frac{0,1 - 0,06}{2 \cdot 0,05} = 0,4.$$

3. Рассчитываем параметры распределения α , b :

$$\alpha = \left(\frac{1,17}{\delta} D_0 \right)^2 = \left(\frac{1,17 \cdot 0,1}{0,05} \right)^2 = 5,5;$$

$$b = D_0 \left(\frac{1,17}{\delta} \right)^2 = 0,1 \left(\frac{1,17}{0,05} \right)^2 = 54,7.$$

4. Определяем нормирующий множитель a :

$$a = \frac{b^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cong \frac{54,7^{5,5+1}}{\Gamma(5,5+1)} \approx 6,3 \cdot 10^8.$$

Зависимость для гамма-распределения записывается в виде

$$f(D) \cong 6,3 \cdot 10^8 D^{5,5} \exp(-54,7D).$$

График полученной функции (кривая 2 на рис. 2.6) достаточно хорошо согласуется с экспериментальной гистограммой распределения для данного порошка.

2.4. СРЕДНИЕ РАЗМЕРЫ И УДЕЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЧАСТИЦ

Наряду с функцией распределения для описания дисперсных сред широко используются осредненные характеристики, большинство из которых определяется следующим выражением [16, 17]:

$$D_{mn} = \left(\frac{\int_0^{\infty} D^m f(D) dD}{\int_0^{\infty} D^n f(D) dD} \right)^{\frac{1}{m-n}}, \quad (2.8)$$

где m, n – целые числа, означающие порядок момента функции распределения.

Наиболее распространенными из них являются следующие средние диаметры:

D_{10} – среднеарифметический;

D_{20} – среднеквадратический;

D_{30} – среднекубический (среднеобъемный);

D_{32} – средний объемно-поверхностный;

D_{43} – среднемассовый.

Подставляя в (2.8) выражения для гамма-распределения (2.3) и логарифмически нормального распределения (2.4), получим формулы для нахождения средних размеров частиц (табл. 2.4).

Одной из характеристик дисперсности порошка является его удельная поверхность $S_{уд}$, определяемая как отношение суммарной поверхности частиц к их массе [16]. Для частиц сферической формы диаметром D величина $S_{уд}$ рассчитывается по формуле:

$$S_{уд} = \frac{\int_0^{\infty} \pi D^2 f(D) dD}{\int_0^{\infty} \rho_p \frac{\pi D^3}{6} f(D) dD} = \frac{6}{\rho_p} \frac{\int_0^{\infty} D^2 f(D) dD}{\int_0^{\infty} D^3 f(D) dD}.$$

Выражение средних размеров частиц через параметры распределения

Параметр	ГР	ЛНР
D_{10}	$\frac{1 + \alpha}{b}$	$\frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{1}{4b}\right)$
D_{32}	$\frac{3 + \alpha}{b}$	$\frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{5}{4b}\right)$
D_{43}	$\frac{4 + \alpha}{b}$	$\frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{7}{4b}\right)$

В соответствии с выражением для средних размеров (2.8) получим

$$S_{уд} = \frac{6}{\rho_p D_{32}}.$$

Для монодисперсных систем с частицами диаметром D

$$S_{уд} = \frac{6}{\rho_p D}.$$

Ниже приведены значения $S_{уд}$ для некоторых широко используемых в составе высокоэнергетических материалов марок порошков алюминия (плотность алюминия $\rho_p = 2700 \text{ кг/м}^3$). Микрофотографии порошков АСД-4 и ALEX приведены на рис. 1.2.

Марка порошка	АСД-1	АСД-4	АСД-6	АСД-8	ALEX
D_{32} , мкм	17,4	4,34	3,01	1,60	0,16
$S_{уд}$, м ² /г	0,13	0,51	0,74	1,39	13,9

3. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ПРИ ОПИСАНИИ ДИНАМИКИ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

В основу моделирования процессов движения частиц дисперсной фазы положены метод анализа размерностей и теория подобия. Поэтому прежде чем перейти к рассмотрению вопросов, непосредственно связанных с моделированием конкретных процессов, приведем основные положения анализа размерностей и подобия [18, 19].

Если изучение того или иного сложного физического процесса связано с большими трудностями, часто имеет смысл провести эксперимент в увеличенном или уменьшенном масштабе на модельной системе, свойства и размеры которой можно легко изменять. Замена реальной физической системы моделью основана на так называемых законах подобия, которые позволяют перенести данные, полученные на модели, на исходную физическую систему.

Было бы большой ошибкой думать, что на модели видно то же самое, что и с вертолета, находящегося на большой высоте над изучаемым крупным объектом, или в микроскоп – при наблюдении мелкого объекта. Модельный объект существенно отличается от реального. Например, через модель участка реки вода протекает значительно быстрее, чем через соответствующий участок реальной реки. Для корректного переноса результатов модельных опытов на процессы в реальных системах необходимо посредством выполнения определенных правил моделирования добиться, чтобы параметры модельного процесса находились в определенных масштабных соотношениях, определяемых из теории подобия.

3.1. ОСНОВНОЕ ПРАВИЛО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании физических процессов одноименные характеристики реального объекта и модели должны отличаться друг от друга постоянным множителем – быть подобными. Простейшим аналогом такого условия является геометрическое подобие, например подобие треугольников, при котором стороны треугольников отличаются одна от другой по длине соответственно в n раз (рис. 3.1):

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = n.$$

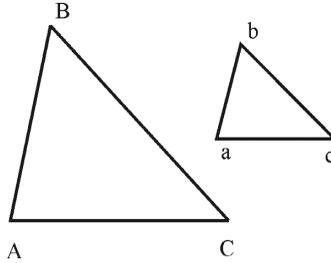


Рис. 3.1. Подобие треугольников

Основное правило моделирования сформулировано впервые М.В. Кирпичевым и А.А. Гухманом в виде теоремы (ее называют третьей теоремой подобия или теоремой Кирпичева – Гухмана).

Теорема

Подобны те явления, процессы или системы, которые описываются одинаковыми уравнениями связи и условия однозначности которых подобны.

Подобие условий однозначности (начальные и граничные условия) обеспечивается равенством определяющих критериев подобия в случае, если явления или процессы качественно одинаковы (аналогичны). Качественно одинаковыми будут процессы, математическое описание которых одинаково. Эта теорема формулирует необходимые и достаточные условия для подобия явлений, процессов или систем.

Исходя из этой теоремы, полное подобие модели реальному объекту определяется выполнением пяти условий:

1. Процессы в модели и образце относятся к одному классу явлений.
2. Эти процессы описываются одними и теми же уравнениями.
3. Соблюдается геометрическое подобие.
4. Безразмерные краевые условия численно равны.
5. Определяющие критерии подобия численно равны.

Точное воспроизведение в модели численных значений всех определяющих критериев при большом их числе и при условии геометрического подобия практически невозможно.

На практике, как правило, условия полного подобия не выполняются, что вынуждает переходить на приближенное моделирование, при котором в модели воспроизводится тот же физический процесс, что и в реальном объекте, при частичном нарушении некоторых из пяти условий полного моделирования.

Как правило, прямое моделирование гидродинамических процессов, например, можно проводить с учетом одного определяющего критерия.

Так, например, для задачи определения коэффициента гидравлического сопротивления пучка труб в воздушном потоке таким критерием является число Рейнольдса. В этом случае моделирование можно проводить как на воздухе, так и на жидкости. Если же необходимо определить и теплообменные характеристики данной системы, то вторым определяющим критерием будет число Прандтля, значения которого для воздуха и жидкости сильно различаются, и применение жидкости в качестве моделирующей среды для данной задачи неприемлемо. Так обстоит дело в случае двух определяющих критериев. При увеличении их числа задача еще больше усложняется.

Возможна также ситуация, когда воспроизводится только часть физического процесса (локальное тепловое или локальное аэродинамическое моделирование). Применяют также моделирование по аналогии, когда в модели воспроизводится процесс другой физической природы, чем в образце, но описываемый одинаковыми безразмерными уравнениями (например моделирование процесса теплопроводности и потенциального обтекания идеальной жидкостью процессом электропроводности).

Дадим некоторые определения, которые используются в теории подобия.

Симплекс (simplex) – это отношение одноименных (однородных) величин, которые могут быть геометрическими, физическими и др. Очевидно, симплекс является безразмерной величиной, т.е. отвлеченным числом. Например, отношение длины L к диаметру D реактора:

$$\frac{L}{D} = K .$$

Комплекс (complex) – это безразмерная величина, составленная из разнородных величин с разной размерностью, описывающих процесс или систему.

Например, число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu} ,$$

где ρ (кг/м^3), μ ($\text{Па}\cdot\text{с}$) – плотность и коэффициент динамической вязкости обтекающего потока; u (м/с) – характерная скорость; D (м) – характерный размер обтекаемого тела.

Для внутренних течений в качестве D обычно выбирается диаметр канала, для задач внешнего обтекания характерным размером является диаметр миделева сечения (для сферических тел – их диаметр).

Критерий подобия (similarity criterion) – это симплекс или безразмерный комплекс (иногда его называют «инвариант подобия»), численное значение которого одинаково для модели и натурального объекта.

Например, для модельного и натурального реакторов отношения их длины к диаметру должны быть одинаковыми:

$$\frac{L}{D} = \frac{l}{d} = K = \text{idem},$$

где L, l – длина натурального и модельного реакторов соответственно; D, d – диаметр натурального и модельного реакторов соответственно.

Критерии подобия на практике определяются или в результате анализа размерностей параметров, или в результате анализа дифференциальных уравнений, описывающих процесс.

3.2. ПОДОБИЕ ЯВЛЕНИЙ

В большинстве случаев перед изготовлением дорогостоящего крупного объекта (самолет, корабль, ракетный двигатель, химический или атомный реактор, плотина и т.д.) для получения наилучших его характеристик проводятся испытания на моделях – физическое моделирование. При этом надо знать, как пересчитать результаты моделирования на натурное изделие. Если этого не знать – моделирование бесполезно. Для целей рационального моделирования основным является понятие подобных явлений.

Определение

Явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями определяющих размерных параметров, и притом так, что для них соответствующие безразмерные критерии подобия $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ совпадают.

Рассмотрим два подобных явления – натурное и модельное. Пусть для этих явлений имеется некоторая зависимость определяемой a и n определяющих a_1, a_2, \dots, a_n размерных величин:

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (3.1)$$

Зависимость (3.1) выполняется как для натурального, так и для модельного явлений, но численные значения определяющих параметров a_1, a_2, \dots, a_n у них разные.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} a^{(H)} &= f(a_1^{(H)}, \dots, a_n^{(H)}) \\ a^{(M)} &= f(a_1^{(M)}, \dots, a_n^{(M)}) \end{aligned} \right\},$$

где индексы (H) относятся к натурному явлению, а индексы (M) – к модельному.

Поскольку зависимость (3.1) выражает определенную физическую закономерность, то функция f не должна зависеть от произвола выбора единиц измерения. Разобьем параметры a_1, a_2, \dots, a_n на две группы. В первую группу a_1, a_2, \dots, a_k ($k \leq n$) включаются величины с независимыми размерностями. Во вторую группу $a, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ входят остальные величины с размерностями, выражаемыми через размерности величин первой группы. При этом зависимость (3.1) можно представить в виде

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

В соответствии со сформулированной ниже П-теоремой количество безразмерных критериев подобия равно

$$m = n - k,$$

т.е. меньше числа размерных определяющих параметров на число параметров с независимой размерностью.

Используя П-теорему, находим для обоих явлений

$$\left. \begin{aligned} \Pi^{(H)} &= \Phi(\Pi_1^{(H)}, \dots, \Pi_m^{(H)}) \\ \Pi^{(M)} &= \Phi(\Pi_1^{(M)}, \dots, \Pi_m^{(M)}) \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

где безразмерная функция Φ для модельного и натурального явлений должна быть одна и та же. Поскольку по определению подобных явлений

$$\Pi_1^{(M)} = \Pi_1^{(H)}, \Pi_2^{(M)} = \Pi_2^{(H)}, \dots, \Pi_m^{(M)} = \Pi_m^{(H)},$$

то из (3.2) следует:

$$\Pi^{(M)} = \Pi^{(H)}. \quad (3.3)$$

Соответствующая физической закономерности (3.1) зависимость между безразмерными параметрами может быть представлена в виде:

Вид такой зависимости можно найти на основе анализа размерностей физических величин, входящих в уравнения. Этот метод основан на том факте, что решение физических задач не должно зависеть от выбора системы единиц, которая отражается только на численных значениях коэффициентов уравнений (но не на их структуре) [18, 19].

Единицы измерений

Физические величины всегда выражаются некоторыми числами, которые получаются путем измерения – прямого или косвенного. Измерение – это сравнение физической величины с соответствующей единицей измерения. Единицы измерения разделяют на основные и производные. Основные единицы измерения задаются произвольно в виде тех или иных эталонов (искусственных или природных). Производные единицы измерения получаются из основных в соответствии с определением физической величины, которое всегда является указанием способа (алгоритма) ее измерения.

Например, скорость u , по определению, есть отношение расстояния L , пройденного за определенный промежуток времени t , к величине этого промежутка: $u = L / t$. Поэтому за единицу скорости можно выбрать отношение единицы длины к единице времени в данной системе.

Плотность, по определению, есть отношение массы m к заключающему ее объему $V \sim L^3$. Поэтому за единицу плотности можно выбрать отношение единицы массы к единице объема $\rho = m / L^3$.

Совокупность основных единиц измерения, достаточных для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений, называется системой единиц измерений. Например, в механике применяется система единиц измерения СГС, в которой за единицу массы принят 1 г (1/1000 массы тщательно сохраняемого эталона из специального сплава), за единицу длины принят 1 см (1/100 длины другого эталона), за единицу времени принята 1 с (1/86400 длительности средних солнечных суток). Единицей скорости в этой системе является (см/с), единицей ускорения – (см/с²), единицей силы – (г·см/с²), или дина, и т.д.

Отметим, что в определении системы единиц измерения не содержится требования ее минимальности (т.е. минимальной совокупности основных единиц измерения) – требуется только достаточность. Поэтому можно рассматривать экзотические системы, например, систему единиц измерения, в которой основные единицы:

$$[m] = \text{г}, \quad [L] = \text{дм}, \quad [t] = \text{мин}, \quad [u] = \text{км/ч}.$$

В принципе допускается для всех возможных величин (энергия, сила, давление, импульс и т.д.) ввести свои основные единицы измерений. Определим понятие: класс систем единиц измерения как совокупность систем единиц измерения, различающихся между собой только величиной основных единиц измерения (но не их набором).

Система СГС, например, входит в класс систем единиц измерения, в котором основными единицами измерения являются

$$\frac{\text{г}}{M}, \frac{\text{см}}{L}, \frac{\text{с}}{T},$$

где M, L, T – отвлеченные числа, показывающие, во сколько раз уменьшаются основные единицы массы, длины, времени при переходе от исходной системе СГС к другой системе данного класса.

Этот класс систем единиц измерения обозначается MLT . Обозначение класса систем единиц измерения получается последовательной записью символов величин, единицы измерения которых приняты за основные. Одновременно эти символы обозначают кратность – во сколько раз уменьшается соответствующая единица измерения при переходе от исходной системы к другой системе данного класса.

С 1960 г. введена Международная система единиц СИ (SI) – System International d'Unites, – в которой основными единицами измерения являются 1 кг = 1 000 г (полная масса эталона); единицей длины – 1 м = 100 см (полная длина эталона), единицей времени – 1 с.

Таким образом, при переходе от системы СИ к системе СГС:

$$M = 1\,000; L = 100; T = 1.$$

Ввиду широкого распространения системы СИ рекомендуется при проведении измерений и расчетов использовать ее для записи всех размерных физических величин.

В технике также используется система FLT , в которой основные единицы измерения имеют вид:

$$\frac{\text{кгс}}{F}, \frac{\text{м}}{L}, \frac{\text{с}}{T},$$

где кгс или кГ – килограмм-сила (единица силы или веса).

Размерность физической величины

Различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями, которые следуют из определения соответствующей физической величины. Например:

$$\text{плотность} = \frac{\text{масса}}{\text{объем}},$$

$$\text{скорость} = \frac{\text{расстояние}}{\text{время}},$$

$$\text{сила} = \text{масса} \cdot \text{ускорение}.$$

Если некоторые из этих величин принять за основные и установить для них какие-то единицы измерения (эталоны), то единицы измерения остальных величин будут определенным образом выражаться через единицы измерения основных величин. Таким образом, все единицы измерения делятся на основные (эталоны) и производные.

На практике достаточно установить единицы измерения для трех величин. В механике удобно взять единицы длины, времени и массы. При этом единицы измерения других механических величин (сила, энергия, ускорение, скорость и т.д.) получаются автоматически из их определения.

Размерностью единицы измерения называется выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения. Размерность записывается символически в виде формулы, в которой символ единицы длины обозначается буквой L , символ единицы массы – буквой M , символ единицы времени – буквой T .

О размерности можно говорить только применительно к определенной системе единиц.

Для определения размерности физической величины a используют символ $[a]$, введенный Максвеллом. Например, для размерности силы F будем писать

$$[F] = \frac{ML}{T^2}.$$

В системе СИ

$$[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Размерная физическая величина (dimensional physical quantity) – это физическая величина, числовое значение которой зависит от выбора системы единиц, т.е. от выбора эталонов.

Размерная физическая величина выражается произведением числового значения на единицу измерения.

Безразмерная физическая величина (dimensionless physical quantity) – это физическая величина, числовое значение которой не зависит от выбора системы единиц, т.е. от выбора эталонов.

Безразмерная физическая величина выражается только числом.

Отметим, что во всех приведенных примерах размерность физической величины представляется степенным одночленом. И это не случайно. Размерность любой физической величины a всегда представляет степенной одночлен (формула Фурье)

$$[a] = P^\alpha Q^\beta R^\gamma S^\delta \dots, \quad (3.7)$$

где $PQRS\dots$ – система единиц измерения, α, β, γ – безразмерные величины.

Соотношение (3.7) строго доказывается в теории размерностей. Оно следует из естественно формулируемого утверждения: внутри данного класса все системы равноправны, т.е. среди них нет избранных, чем-то выбранных систем. Таким образом, выбор исходной системы для характеристики данного класса не имеет значения.

Это утверждение глубоко и по сути является следствием фундаментального общезначимого принципа ковариантности. Естественно возникает вопрос: имеются ли физические величины, для которых размерность не удовлетворяет формуле (3.7), т.е. размерность которых, например, в классе MLT выражается в виде $L \sin M$, $M \ln T$, $\exp(L/M)$ и т.д. В действительности таких величин нет, и размерность любой физической величины всегда представляет собой степенной одночлен.

Размерности наиболее часто используемых физических величин при моделировании гидродинамических, а также тепломассообменных процессов (в системе СИ) приведены в *приложении 2*.

3.4. II-ТЕОРЕМА

Говорят, что величины a_1, a_2, \dots, a_k имеют независимую размерность, если размерность ни одной из этих величин нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин (3.7).

Закономерности, определяемые в физической теории или в эксперименте, всегда можно представить в виде

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (3.8)$$

где a – определяемый параметр; a_1, \dots, a_n – определяющие параметры.

Любые исследования в конце концов сводятся к нахождению одной или нескольких зависимостей вида (3.8).

Практическое применение теории подобия и анализа размерностей к экспериментальному и теоретическому исследованию физических процессов основано на сформулированной выше теореме Кирпичева – Гухмана, теореме Бэкингема – Федермана (вторая теорема подобия) и теореме Бэкингема (П-теорема).

Теорема Бэкингема – Федермана формулируется следующим образом.

Теорема

Любая зависимость между физическими величинами, характеризующими процесс, может быть представлена в виде взаимной зависимости между критериями подобия, т.е. в виде обобщенного критериального уравнения типа

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n) = 0. \quad (3.9)$$

Эта теорема показывает, как обрабатывать полученные экспериментальные данные, или в какой форме можно получить решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс, с помощью методов теории подобия.

Следует отметить, что критерии подобия, входящие в (3.9), неравноценны. Критерии подобия, составленные из физических величин, входящих в краевые условия (в условия однозначности) – называются определяющими. Критерии, составленные из физических величин, не являющихся необходимыми для однозначной характеристики данного процесса и, в свою очередь, зависящие от этих условий, называются определяемыми.

Функциональную зависимость (3.9) удобнее представить в таком виде, чтобы после нахождения значений определяющих критериев можно было бы найти значение определяемого критерия и затем из него – значение искомой физической величины. Таким образом, если определяемый критерий обозначим через Π_1 , то

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n), \quad (3.10)$$

где $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n$ – определяющие критерии подобия.

Частным случаем второй теоремы подобия является П-теорема – центральное (и, по существу, единственное содержательное) утверждение анализа размерностей.

Теорема

Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой размерной, вообще говоря, величины от размерных же определяющих параметров. Эта зависимость может быть представлена в виде зависимости безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа размерных определяющих параметров на количество определяющих параметров с независимой размерностью.

Таким образом, зависимость (3.8) можно представить в виде уравнений (3.9) или (3.10), которые можно привести к виду:

$$\Pi = \Phi(\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n), \quad (3.11)$$

где Π – определяемый критерий подобия; $\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n$ – определяющие критерий подобия.

Замена параметров с зависимыми размерностями a, a_{k+1}, \dots, a_n в уравнении (3.8) на безразмерные критерии $\Pi, \Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n$ производится в соответствии с формулой размерности (3.7), которая для физической закономерности (3.8) имеет вид

$$[a] = [a_1]^\alpha \cdot [a_2]^\beta \cdot \dots \cdot [a_k]^\gamma.$$

При этом критерии подобия рассматриваемого процесса определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{a}{a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \cdot \dots \cdot a_k^\gamma}, \\ \Pi_{k+1} &= \frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_{k+1}} \cdot a_2^{\beta_{k+1}} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_{k+1}}}, \\ \Pi_{k+i} &= \frac{a_{k+i}}{a_1^{\alpha_{k+i}} \cdot a_2^{\beta_{k+i}} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_{k+i}}}, \dots, \\ \Pi_n &= \frac{a_n}{a_1^{\alpha_n} \cdot a_2^{\beta_n} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_n}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с П-теоремой число аргументов в искомой зависимости (3.8), записанной в безразмерном виде (3.11), сокра-

чается на число, равное числу определяющих размерных параметров с независимой размерностью.

На практике число параметров с независимой размерностью обычно совпадает с числом основных единиц используемой системы. Для систем класса *MLT* это число равно трем. Для тепловых задач добавляется еще один параметр – градус Кельвина (К).

П-теорема имеет большое значение при проведении экспериментальных исследований. При этом число переменных уменьшается на число использованных единиц измерения (1, 2, 3, 4 и более), что существенно упрощает условия проведения эксперимента.

Например, для нахождения зависимости некоторой величины a от одного определяющего параметра $f(a_i)$ необходимо провести измерения функции $f(a_i)$ для нескольких значений аргумента в заданном диапазоне его изменения (рис. 3.2). Если количество необходимых значений a_i равно 10, то необходимо провести 10 измерений. Если величина a зависит от n параметров, то для полного исследования функции $a = f(a_1, \dots, a_n)$ необходимо провести 10^n измерений. Согласно П-теореме решение задачи сводится к нахождению функции $m = n - k$ безразмерных аргументов, для решения которой достаточно провести 10^{n-k} измерений (в 10^k раз меньше).

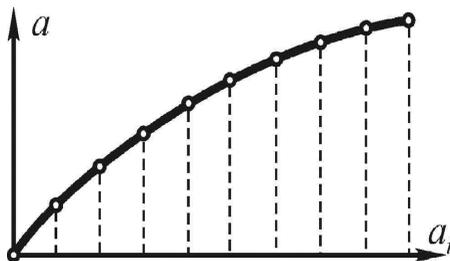


Рис. 3.2. Экспериментальное определение зависимости $a = f(a_i)$

Трудоемкость определения искомой функции сокращается на столько порядков, сколько среди определяющих параметров имеется величин с независимыми размерностями.

3.5. ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ В ДИНАМИКЕ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Систему критериев подобия, описывающих исследуемый процесс, можно получить двумя способами – анализом дифференциальных уравнений процесса или методом анализа размерностей [18, 19].

Метод анализа дифференциальных уравнений

Использование метода анализа дифференциальных уравнений для получения критериев подобия возможно, если известен рассматриваемый физический процесс (который, собственно, и описывается соответствующими условиями).

Выведем критерий механического подобия методом анализа дифференциальных уравнений. Рассмотрим две подобные механические системы – движущиеся тела. Их движение подчиняется второму закону Ньютона, выраженному в форме дифференциального уравнения

$$F = m \frac{du}{dt}, \quad (3.12)$$

где m – масса тела; F – движущая сила; u – скорость тела.

Запишем это уравнение для двух подобных систем:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 \frac{du_1}{dt_1}, \\ F_2 &= m_2 \frac{du_2}{dt_2}. \end{aligned} \right\}$$

По условию подобия физические величины одной системы можно выразить через величины другой (для соответствующих точек) с помощью констант подобия:

$$C_F = \frac{F_2}{F_1}, \quad C_m = \frac{m_2}{m_1}, \quad C_u = \frac{u_2}{u_1}, \quad C_t = \frac{t_2}{t_1}. \quad (3.13)$$

Выражая переменные второй системы через соответствующие переменные первой системы, и подставляя в исходное уравнение, получим

$$C_F F_1 = C_m \frac{C_u}{C_t} m_1 \frac{du_1}{dt_1}.$$

Уравнение будет тождественно исходному только при условии равенства коэффициентов:

$$C_F = C_m \frac{C_u}{C_t} \quad \text{или} \quad \frac{C_F C_t}{C_m C_u} = 1.$$

Заменяя константы подобия соотношениями (3.13), получим

$$\frac{F_1 t_1}{m_1 u_1} = \frac{F_2 t_2}{m_2 u_2} = \frac{F t}{m u} = \text{idem} = \text{Ne} ,$$

где Ne – критерий механического подобия (критерий Ньютона).

Формально метод анализа дифференциальных уравнений сводится к обезразмериванию системы уравнений. Приведем уравнение движения (3.12) к безразмерному виду. Для этого введем масштабы силы F_* , массы m_* , скорости u_* и времени t_* . Уравнение (3.12) в безразмерных переменных $\bar{F} = F / F_*$, $\bar{m} = m / m_*$, $\bar{u} = u / u_*$, $\bar{t} = t / t_*$ имеет вид:

$$F_* \bar{F} = m_* \bar{m} \frac{u_*}{t_*} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} \quad \text{или} \quad \bar{F} = A \bar{m} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} .$$

Безразмерный коэффициент при производной

$$A = \frac{m_* u_*}{t_* F_*}$$

является искомым критерием подобия (критерием Ньютона):

$$\text{Ne} = A^{-1} = \frac{F t}{m u} .$$

Критерий Ньютона можно представить в другой форме при замене времени t отношением характерного размера D к скорости u :

$$\text{Ne} = \frac{F D}{m u^2} .$$

Этот критерий является основным критерием механического подобия, который применим и для оценки критериев подобия гидромеханических процессов. При этом в качестве общей силы F , действующей на систему, необходимо подставить выражение для силы тяжести, трения, давления, сопротивления среды и т.д.

Частные выражения, соответствующие различным критериям гидромеханического подобия, можно получить следующим образом.

- Для процессов, идущих при действии силы тяжести, в критерий Ньютона подставляем вместо F выражение для силы тяжести $F = mg$:

$$\Pi_1 = \frac{mgD}{mu^2} = \frac{gD}{u^2}.$$

Таким образом, получили критерий Фруда

$$Fr = \frac{1}{\Pi_1} = \frac{u^2}{gD},$$

который характеризует соотношение сил инерции и тяжести.

• В случае движения вязкой жидкости в потоке возникает сила трения, которая по закону Ньютона равна:

$$F = \mu D^2 \frac{du}{dD},$$

где μ – коэффициент динамической вязкости; D^2 – площадь трения; du/dD – градиент скорости.

Подставим выражение для силы трения в критерий Ne, а также выразим массу m через объем D^3 и плотность ρ среды ($m = \rho D^3$):

$$\Pi_2 = \frac{\mu D^2 (du/dD) D}{\rho D^3 u^2} = \frac{\mu}{\rho u^2} \cdot \frac{du}{dD}.$$

В результате интегрирования уравнения

$$\Pi_2 \int_0^D dD = \frac{\mu}{\rho} \int_0^u \frac{du}{u^2}$$

получим

$$\Pi_2 D = \frac{\mu}{\rho u} \quad \text{или} \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho u D} = Re^{-1},$$

где Re – число Рейнольдса, которое определяет соотношение между силами инерции и трения в движущейся жидкости (или газе).

• При движении потока под действием разности давления между двумя некоторыми точками силу F в критерии Ньютона можно заменить силой гидростатического давления Δp , действующего на площадку D^2 , а массу – соотношением $m = D^3 \rho$:

$$\Pi_3 = \frac{\Delta p \cdot D^2 \cdot D}{\rho D^3 u^2} = \frac{\Delta p}{\rho u^2} = Eu ,$$

где Eu – число Эйлера, которое характеризует соотношение сил давления и сил инерции в подобных потоках.

Алгебраический метод Рэлея (метод анализа размерностей)

При исследовании сложных или новых процессов и явлений, для которых полную систему дифференциальных уравнений получить не всегда представляется возможным, используют метод анализа размерностей. Данный метод позволяет выразить общую функциональную зависимость для любого исследуемого процесса в виде уравнения связи между строго определенным числом безразмерных комплексов (критериев подобия), состоящих из физических величин с определенными размерностями. Метод анализа размерностей является универсальным и может быть применим также и к задачам, для которых система дифференциальных уравнений известна.

При использовании метода анализа размерностей основным и первоначальным этапом в постановке задачи является выбор модели и схематизация свойств искомого решения. Опыт показывает, что постановка задачи и выбор существенных определяющих размерных параметров представляют собой наибольшую трудность.

Успешное решение задачи зависит от правильного выбора физических величин, влияющих на процесс, что полностью определяется физической интуицией и опытом инженера-исследователя. Не пропустить важные определяющие параметры и не включить в их число малосущественные параметры – вот главная цель анализа задачи.

Неучет какой-либо существенной величины (ориентация трубы при течении тяжелой жидкости, например) может привести к неверным критериальным уравнениям. То же самое будет и при выборе несущественных величин (учет силы тяжести при течении легкого газа в трубе, например). Отметим, что при большом числе размерных параметров задачи трудно выбрать безразмерные комплексы, имеющие ясный физический смысл.

Для оценки значимости некоторой размерной величины при описании конкретного физического процесса можно рекомендовать следующий прием. Как правило, удачно составленные критерии подобия представляют собой отношения конкурирующих сил. Если величина критерия

подобия стремится к нулю (или к бесконечности), то соответствующими силами можно пренебречь.

Например, число Рейнольдса определяет соотношение между силами инерции и силами трения в движущейся жидкости. При $Re \rightarrow 0$ силами инерции можно пренебречь (ползущее течение), а при $Re \rightarrow \infty$ можно не учитывать силы трения, т.е. коэффициент динамической вязкости (течение идеальной жидкости).

Рассмотрим алгоритм получения системы критериев подобия методом Рэлея на примере гравитационного осаждения деформируемой частицы (капли или пузырька) в вязкой среде. Эта задача формулируется как определение скорости движения частицы u_p в зависимости от характеристик частицы и среды.

Физический анализ рассматриваемой задачи показывает, что на скорость осаждения u_p частицы влияют следующие размерные параметры:

- ускорение свободного падения g ;
- размер частицы D , плотность ρ_p , коэффициент динамической вязкости μ_p и коэффициент поверхностного натяжения σ вещества частицы;
- плотность ρ , коэффициент динамической вязкости μ и скорость u несущей среды.

Размерности этих величин в системе СИ следующие:

$$[D] = \text{м}; [\rho_p] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; [\mu_p] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}; [\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}; [u_p] = \text{м/с};$$
$$[u] = \text{м/с}; [g] = \text{м/с}^2; [\sigma] = \text{кг/с}^2.$$

Поскольку взаимодействие частицы с несущей средой определяется относительной скоростью движения частицы, а не значениями скоростей u и u_p по отдельности, то заменим скорости частицы u_p и среды u на величину $\Delta u = u - u_p$, $[\Delta u] = \text{м/с}$.

Таким образом, имеем восемь размерных параметров, описывающих процесс. Число первичных размерностей равно трем (кг, м, с). Согласно П-теореме, число безразмерных комплексов, характеризующих процесс, равно пяти:

$$k = m - n = 8 - 3 = 5.$$

Искомую величину скорости осаждения частицы можно представить в виде степенного одночлена:

$$\Delta u = C \cdot D^{x_1} \rho^{x_2} \rho_p^{x_3} \mu^{x_4} \mu_p^{x_5} g^{x_6} \sigma^{x_7}, \quad (3.14)$$

где C – безразмерная константа.

Подставим размерности соответствующих величин в (3.14):

$$\left[\frac{\text{М}}{\text{с}} \right] = [\text{М}]^{x_1} \cdot \left[\frac{\text{КГ}}{\text{М}^3} \right]^{x_2} \cdot \left[\frac{\text{КГ}}{\text{М}^3} \right]^{x_3} \cdot \left[\frac{\text{КГ}}{\text{М} \cdot \text{с}} \right]^{x_4} \cdot \left[\frac{\text{КГ}}{\text{М} \cdot \text{с}} \right]^{x_5} \cdot \left[\frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right]^{x_6} \cdot \left[\frac{\text{КГ}}{\text{с}^2} \right]^{x_7}.$$

Поскольку размерности левой и правой частей уравнения (3.14) должны быть одинаковы, суммы степеней основных единиц в левой и правой частях должны быть одинаковы. При этом получается система алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [\text{М}] : 1 &= x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + x_6, \\ [\text{с}] : -1 &= x_4 - x_5 - 2x_6 - 2x_7, \\ [\text{КГ}] : 0 &= x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7. \end{aligned} \right\}$$

Совместное решение этой системы дает следующие соотношения между показателями степеней:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + x_7 + 3x_6, \\ x_2 &= -1 - x_3 + x_7 + 2x_6, \\ x_4 &= 1 - x_5 - 2x_6 - 2x_7. \end{aligned} \quad (3.15)$$

После подстановки связей (3.15) в уравнение (3.14) получим:

$$\frac{\rho(\Delta u)D}{\mu} = C \cdot \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)^{x_3} \cdot \left(\frac{\mu_p}{\mu} \right)^{x_5} \cdot \left(\frac{D^3 \rho^2 g}{\mu^2} \right)^{x_6} \cdot \left(\frac{D \rho \sigma}{\mu^2} \right)^{x_7}. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) можно представить в следующем виде, переобозначив показатели степеней:

$$P_0 = C \cdot P_1^{y_1} P_2^{y_2} P_3^{y_3} P_4^{y_4}.$$

В уравнение (3.16) входят следующие безразмерные комплексы и симплексы.

- Число Рейнольдса относительного движения частицы и несущей среды

$$\Pi_0 = \frac{\rho|\Delta u|D}{\mu} = \text{Re} ,$$

характеризующее отношение сил инерции и сил трения в движущейся среде.

- Отношение плотностей

$$\Pi_1 = \frac{\rho_p}{\rho} = \bar{\rho} .$$

- Отношение коэффициентов динамической вязкости

$$\Pi_2 = \frac{\mu_p}{\mu} = \bar{\mu} .$$

Безразмерные комплексы Π_3 , Π_4 представляют собой комбинации известных критериев подобия:

$$\Pi_3 = \frac{D^3 \rho^2 g}{\mu^2} = \frac{D^3 \rho^2 g}{\mu^2} \cdot \frac{(\Delta u)^2}{(\Delta u)^2} = \left(\frac{\rho(\Delta u)D}{\mu} \right)^2 \left(\frac{gD}{(\Delta u)^2} \right) = \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} ,$$

$$\Pi_4 = \frac{D\rho\sigma}{\mu^2} = \frac{D\rho\sigma}{\mu^2} \cdot \frac{(\Delta u)^2 \rho D}{(\Delta u)^2 \rho D} = \left(\frac{\rho(\Delta u)D}{\mu} \right)^2 \left(\frac{\sigma}{\rho(\Delta u)^2 D} \right) = \frac{\text{Re}^2}{\text{We}} .$$

Таким образом, комплексы Π_3 , Π_4 наряду с Re содержат еще два критерия подобия – число Фруда и число Вебера.

- Число Фруда

$$\text{Fr} = \frac{(\Delta u)^2}{gD} ,$$

характеризующее отношение сил инерции и сил тяжести.

- Число Вебера

$$\text{We} = \frac{\rho(\Delta u)^2 D}{\sigma} ,$$

характеризующее отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения.

Число Вебера играет важнейшую роль при анализе деформации и дробления капель и пузырьков в двухфазных потоках. При движении капель жидкости в потоке газа в качестве характерной плотности при записи числа Вебера используется плотность газовой фазы.

При движении пузырьков газа в жидкости формально в критерий Вебера должна входить плотность несущей среды, т.е. плотность жидкости. Однако в ряде работ при записи числа Вебера также используется плотность газовой фазы. Как отмечает Р.И. Нигматулин, для случая капель это вполне понятно, но для случая пузырьков кажется на первый взгляд парадоксальным [8]. Тем не менее данный факт подтверждается экспериментально большей устойчивостью в ударных волнах водородных и гелиевых пузырьков по сравнению с пузырьками азота и воздуха.

Таким образом, уравнение (3.16) представляет собой критериальное уравнение вида:

$$\text{Re} = C \cdot (\bar{\rho})^{z_1} (\bar{\mu})^{z_2} (\text{Fr})^{z_3} (\text{We})^{z_4},$$

где C , z_1 , z_2 , z_3 , z_4 – константы, которые определяются при проведении соответствующих экспериментов.

Полученная система, включающая пять критериев подобия, является необходимой и достаточной для анализа движения деформируемых частиц дисперсной фазы в поле массовых сил.

В литературе используют и другие критерии подобия рассматриваемого процесса, которые получаются путем комбинирования рассмотренных выше критериев подобия.

- Число Бонда

$$\text{Bo} = \frac{gD^2 |\rho_p - \rho|}{\sigma} = \frac{\text{We}}{\text{Fr}} |\bar{\rho} - 1|,$$

где g – ускорение частицы, в частности, ускорение свободного падения.

Число Бонда определяет соотношение между силами инерции и силами поверхностного натяжения.

- Число Архимеда

$$\text{Ar} = \frac{gD^3 \rho(\rho - \rho_p)}{\mu^2} = \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} (\bar{\rho} - 1),$$

используемое в задачах движения частиц жидкости и газа в неоднородной среде.

- Число Лапласа

$$\text{La} = \frac{\sigma \rho D}{\mu^2} = \frac{\text{Re}^2}{\text{We}},$$

характеризующее отношение сил поверхностного натяжения и диссипативных сил (сил трения).

- Число Онезорге

$$\text{Oh} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma \rho D}} = \frac{1}{\sqrt{\text{La}}},$$

характеризующее отношение сил поверхностного натяжения и диссипативных сил (сил трения).

- Число Мортон

$$\text{Mo} = \frac{g \mu^4 (\rho - \rho_p)}{\rho^2 \sigma^3} = \frac{\text{We}^3}{\text{Fr}^2 \cdot \text{Re}^4},$$

характеризующее форму пузырьков и капель, движущихся внутри жидкости.

3.6. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

С использованием рассмотренных выше методов можно получить критерии подобия для более сложных задач динамики аэрозольных систем.

Растекание капли по поверхности

После помещения капли жидкости на горизонтальную поверхность происходит ее растекание, сопровождающееся динамическими процессами, в ходе которых меняется скорость движения линии трехфазного контакта (газ – жидкость – твердое тело), форма капли и краевой угол смачивания θ (рис. 3.3).



Рис. 3.3. Растекание капли по твердой поверхности

В зависимости от скорости столкновения капли с поверхностью, в общем случае, возможны два сценария развития процесса – растекание капли по твердой поверхности с образованием тонкой пленки жидкости (при малых скоростях столкновения) или разрушение капли с образованием и выбросом вторичных более мелких капель (при больших скоростях столкновения).

Процесс динамического взаимодействия капли с твердой поверхностью определяют следующие критерии подобия.

- Число Рейнольдса, включающее скорость движения линии трехфазного контакта u_l :

$$Re = \frac{\rho u_l D}{\mu},$$

где μ , ρ – коэффициент динамической вязкости и плотность жидкости; D – диаметр эквивалентной сферической капли.

- Число капиллярности

$$Ca = \frac{\mu u_l}{\sigma},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость – газ.

- Число Вебера, включающее скорость столкновения капли с твердой поверхностью u :

$$We = \frac{\rho u^2 D}{\sigma}.$$

- Число Фруда

$$Fr = \frac{u_l^2}{gD},$$

где g – ускорение свободного падения.

Столкновение частицы с преградой

В гидродинамике газозвесей для определения коэффициента захвата при обтекании преграды дисперсным потоком вводится следующий критерий подобия – число Стокса, которое является соотношением между кинетической энергией взвешенных частиц (диаметром D , плотностью

ρ_p и скоростью u) и энергией их взаимодействия с дисперсионной средой:

$$\text{Stk} = \frac{\rho_p D^2 u}{18 \mu d}, \quad (3.17)$$

где d – диаметр сферической преграды; μ – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды.

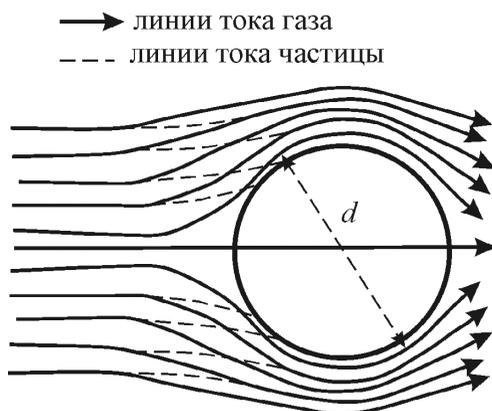


Рис. 3.4. Обтекание сферической преграды потоком газозвеси

Выражение (3.17) применимо для совокупности монодисперсных частиц. Для полидисперсных частиц используется среднее число Стокса:

$$\bar{\text{Stk}} = \frac{\rho_p u}{18 \mu d} \int_0^{\infty} D^2 f(D) dD = \frac{\rho_p u}{18 \mu d} D_{20}^2,$$

где $f(D)$ – дифференциальная функция счетного распределения частиц по размерам; D_{20} – среднеквадратичный диаметр частиц, определяемый уравнением:

$$D_{20} = \left(\int_0^{\infty} D^2 f(D) dD \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Число Стокса позволяет предсказать поведение частиц взвеси, когда дисперсионная среда будет огибать преграду (см. рис. 3.4). Если $Stk \gg 1$, то частицы взвеси будут двигаться прямолинейно, сталкиваясь с преградой, а при $Stk \ll 1$ частицы будут огибать преграду вместе с потоком дисперсионной среды.

Взаимодействие капель при взаимных столкновениях

При движении полидисперсных капель в двухфазном потоке происходят их взаимные столкновения, поскольку частицы разных размеров движутся с разными скоростями. Схема столкновения двух капель приведена на рис. 3.5. Назовем крупную каплю диаметром D_2 «мишенью», а мелкую каплю диаметром D_1 – «снарядом».

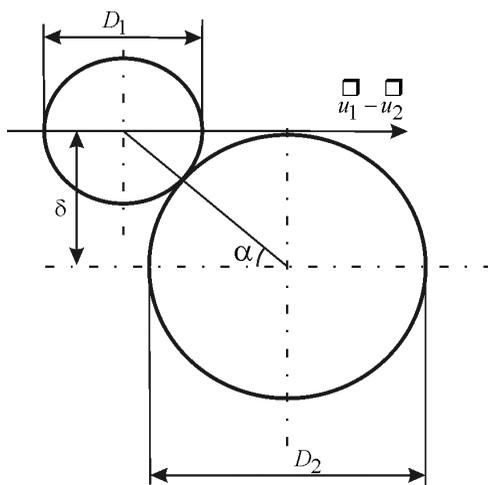


Рис. 3.5. Схема столкновения капель

При столкновениях капли могут сливаться с образованием общей крупной капли, дробиться на более мелкие фрагменты, а также приобретать вращательное движение.

Процесс взаимодействия определяется следующими размерными параметрами:

- диаметры капель D_1 , D_2 (предположим, что $D_1 < D_2$);
- скорости капель \vec{u}_1 , \vec{u}_2 ;

– прицельное расстояние (эксцентриситет столкновения)
 $\delta = 0,5(D_1 + D_2) \sin \alpha$ (см. рис. 3.5);

– коэффициент динамической вязкости жидкости μ (предположим, что капли состоят из одной и той же жидкости);

– коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ .

При нецентральных столкновениях система двух взаимодействующих капель обладает моментом импульса:

$$|\vec{M}| = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| \delta,$$

где m_1, m_2 – массы капель.

Для данного процесса можно получить два критериальных уравнения:

$$\varphi = C_1 \cdot (\gamma)^{x_1} (\text{Re})^{x_2} (\text{We})^{x_3},$$

$$\Omega = C_2 \cdot (\gamma)^{y_1} (\text{Re})^{y_2} (\text{We})^{y_3},$$

в которых константы C_1, C_2 и показатели степеней определяются в результате экспериментов.

В этих уравнениях определяемыми критериями подобия являются параметр коагуляции и дробления φ и нормализованный момент импульса Ω .

Параметр коагуляции и дробления представляет собой математическое ожидание отношения изменения массы капли – «мишени», вызванного взаимодействием капель диаметрами D_1 и D_2 , к общей массе столкнувшихся с ней капель – «снарядов».

Нормализованный момент импульса определяет условия дробления за счет центробежных сил вращающейся системы капель, образовавшейся при столкновении. Нормализованный момент импульса Ω определяется уравнением

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{(D_e / 2)^{3,5} \sqrt{\rho \sigma}},$$

где $D_e = \sqrt[3]{D_1^3 + D_2^3}$ – диаметр эквивалентной сферической капли, объем которой равен сумме объемов взаимодействующих капель.

Определяющими процесс взаимодействия капель при столкновении являются следующие критерии подобия.

- Отношение диаметров капель

$$\gamma = \frac{D_2}{D_1}.$$

- Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho_p |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| D_1}{\mu}.$$

- Число Вебера

$$\text{We} = \frac{\rho_p |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| D_1}{\sigma}.$$

Число Рейнольдса и число Вебера для данной задачи определены для процесса движения капли-«мишени» в объеме капли-«снаряда».

Основные критерии подобия, используемые в задачах гидромеханики многофазных потоков, приведены в *приложении 3*.

4. ДВИЖЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ЧАСТИЦЫ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Частицы дисперсной фазы всегда находятся в некоторой несущей среде. В частности, аэрозоль – это взвесь твердых или жидких частиц в газообразной среде, гидрозоль – это взвесь твердых частиц в жидкости. Если несущая среда движется, то частицы аэрозоля или гидрозоля также будут двигаться, увлекаясь этой средой. В качестве примеров можно привести движение частиц пыли в организме человека (нос, носоглотка, легкие), распространение автомобильных выхлопных газов, содержащих аэрозоли, под действием ветровой нагрузки, осаждение облака капель при авиационном тушении пожаров, движение капель из аэрозольного баллончика и т.д. Однако частицы дисперсной фазы могут двигаться и в неподвижной среде под действием силы тяжести, силы Архимеда, электрических и магнитных сил.

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

В практических задачах рассматриваются, как правило, не отдельные частицы, а облако частиц дисперсной фазы, включающее сотни и миллионы отдельных частиц. Однако в случае их малой концентрации движение каждой частицы не зависит от соседних частиц. И тогда, зная траекторию и скорости отдельных частиц, можно рассчитать поведение всей дисперсной системы. Условием применимости данного подхода является низкое значение объемной концентрации частиц ($C_V < 0,02$) [1].

При движении высококонцентрированных дисперсных систем частицы взаимодействуют друг с другом, и их суммарное движение будет отличаться от движения индивидуальной частицы. В качестве примера можно привести резкое ускорение гравитационного осаждения облака частиц при их сгущении. Этот эффект используется, в частности, при очистке воды от угольной взвеси на открытых разрезах.

Гидрогазодинамика гетерогенных сред отличается от классической механики «чистого» газа наличием в газовом потоке жидких или твердых (конденсированных) частиц различных размеров, которые могут обмениваться с газом кинетической и тепловой энергией. Массовый расход кон-

денсированных частиц может в несколько раз превосходить расход газа и существенно меняться по тракту течения за счет перехода их из одного агрегатного состояния в другое (испарение, конденсация, горение частиц). Поскольку механизм движения многофазных сред заключается в увлечении вязкими силами газа инертных частиц и сопровождается теплообменом между газом и частицами, образованием новых частиц, их ростом, коагуляцией, дроблением, то решение задачи о движении двухфазных течений является весьма сложной проблемой.

При теоретическом исследовании двухфазных потоков в зависимости от концентрации и дисперсности частиц конденсированной фазы используются в основном два подхода.

– Первый (упрощенный) подход состоит в том, что не учитывается влияние динамического и теплового запаздывания частиц на параметры несущего потока. При этом по заранее рассчитанным параметрам потока в исследуемом поле течения рассчитываются траектории частиц с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений движения последних (*траекторный подход*). Данный подход применим для невысоких значений объемной концентрации частиц в потоке $C_V < 0,02 \div 0,05$.

– Второй подход основан на введении понятия многоскоростной многотемпературной взаимопроникающей среды, т.е. среды, в каждой точке которой имеется столько скоростей и температур, из какого количества фаз состоит среда [7]. Двухфазная среда при этом рассматривается как совокупность двух взаимопроникающих континуумов – «чистого» газа и «газа» частиц, имеющего собственные значения скорости, температуры, «плотности» (концентрации частиц), но не имеющего давления. Такая схематизация в настоящее время является основой большинства современных моделей расчета многофазных потоков [6–10].

4.2. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

При движении тела в жидкости или газе оно всегда испытывает сопротивление со стороны среды, т.е. ускоряется или замедляется под действием относительного движения тела и среды. Сила сопротивления зависит как от свойств среды (плотности, вязкости), так и от скорости и формы тела.

Впервые закон сопротивления для движущихся тел был получен Ньютоном в виде

$$\vec{F}_s = -C_D S_m \frac{\rho |U| \vec{U}}{2}, \quad (4.1)$$

где \vec{F}_s – сила сопротивления; ρ – плотность потока; S_m – площадь миделева сечения тела (максимальная площадь сечения тела в плоскости, перпендикулярной направлению его движения); $\vec{U} = \vec{u}_p - \vec{u}$ – вектор скорости относительного движения тела и среды; \vec{u}_p , \vec{u} – векторы скорости тела и несущей среды; C_D – безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела и режима движения.

Ньютон предположил, что лобовая часть движущегося тела испытывает множество ударов со стороны жидкости или газа, непрерывно тормозящих его движение. Отсюда ясно, что сопротивление пропорционально числу и массе частиц, набегающих на тело, т.е. пропорционально плотности среды и поперечному размеру тела. Скорость же отражает как число ударов о тело, так и силу каждого удара, т.е. сопротивление должно быть пропорциональным квадрату скорости.

Многочисленные исследования закона сопротивления проводились в течение ряда лет в разных странах ввиду важности этого закона (в частности для баллистики и механики). Оказалось, что универсальную константу C_D получить не удастся, так как она должна зависеть от скорости движения и вязкости несущей среды. Впервые эту проблему разрешил английский ученый Рейнольдс (1883 г.), введя в практику критерий – число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho |U| D}{\mu}, \quad (4.2)$$

где D – характерный размер тела; μ – коэффициент динамической вязкости несущей среды.

Число Рейнольдса – это основной безразмерный критерий подобия в гидромеханике, оно представляет собой отношение инерционных сил, связанных с ускорением или замедлением текущей среды вблизи тела, к силам трения, возникающим за счет вязкости среды. Число Рейнольдса полностью определяет характер течения вокруг тела и, следовательно, закон сопротивления. В зависимости от величины Re можно выделить три режима течения – ламинарный ($Re = 0 \div 1$), переходный ($Re = 1 \div 700$) и турбулентный ($Re > 700$). Для шарообразной частицы картины обтекания при этих режимах приведены на рис. 4.1.

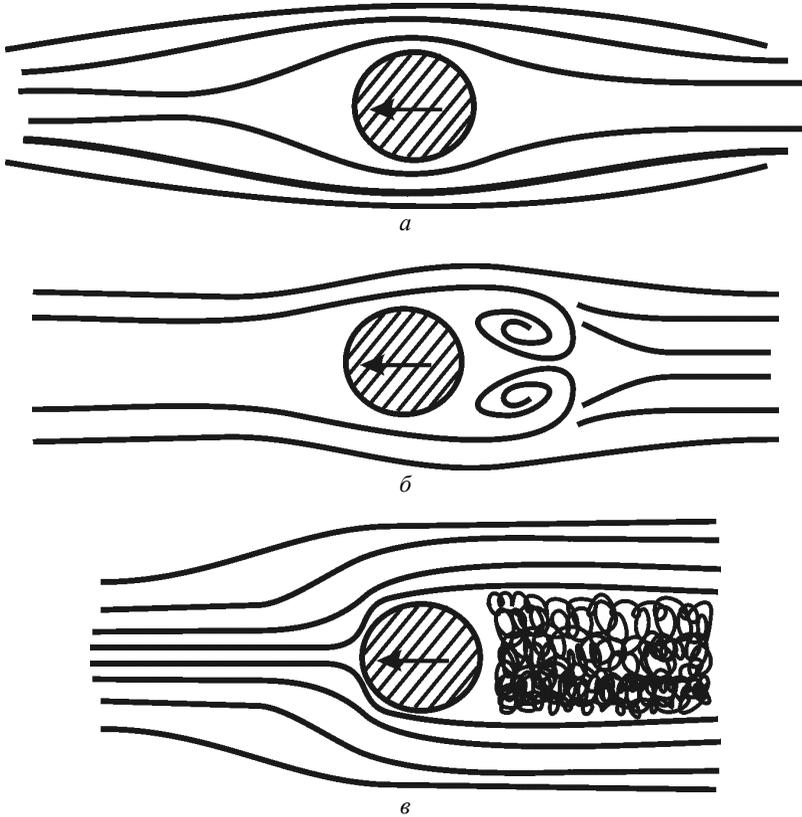


Рис. 4.1. Режимы обтекания сферической частицы:
 $a - Re < 1$; $б - Re = 1 \div 700$; $в - Re > 700$

Если выразить коэффициент динамической вязкости μ через коэффициент кинематической вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

то число Рейнольдса примет вид

$$Re = \frac{|U|D}{\nu}.$$

Приведем значения ρ , μ , ν для воды и воздуха при температуре $+20^\circ\text{C}$.

Физические свойства воды и воздуха

Параметр	Вода	Воздух
ρ , кг·м ⁻³	10 ³	1,205
μ , Па·с	10 ⁻³	1,81·10 ⁻⁵
ν , м ² ·с ⁻¹	10 ⁻⁶	1,5·10 ⁻⁵

4.3. КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Уравнение, описывающее сопротивление среды движению частиц, зависит от типа потока и, следовательно, от числа Рейнольдса. Обработка многочисленных опытных данных по коэффициенту сопротивления твердой сферы C_D в уравнении Ньютона (4.1) была проведена Рэлеем и представлена в виде так называемой стандартной кривой сопротивления (рис. 4.2). В некотором диапазоне Re зависимость $C_D(Re)$ можно определить аналитически ($Re < 1$), в других случаях C_D рассчитывается по эмпирическим формулам, полученным аппроксимацией опытных данных.

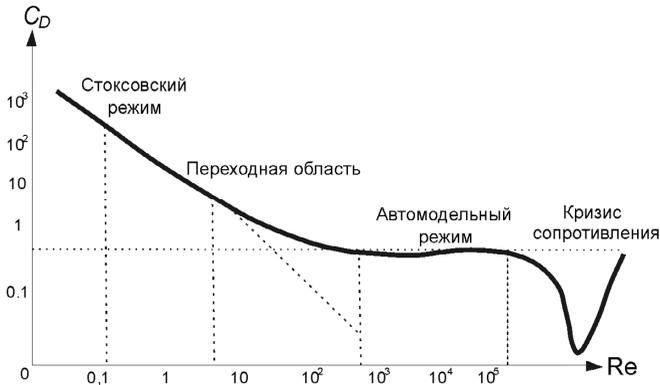


Рис. 4.2. Стандартная кривая для коэффициента сопротивления твердой сферы

При числах Рейнольдса $Re < 1$ (ламинарный режим течения) коэффициент сопротивления твердой сферической частицы определяется формулой

$$C_D = \frac{24}{Re} . \quad (4.3)$$

Эта формула носит название стоксовской зависимости для коэффициента сопротивления. Формула Стокса получена аналитически; частицы, подчиняющиеся ей, называются стоксовскими (малые частицы, которые движутся с малой скоростью в сильновязкой среде). Сила сопротивления для таких частиц получается подстановкой (4.3) в (4.1):

$$F_s = 3\pi\mu UD. \quad (4.4)$$

В диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 1 \div 700$ реализуется режим, который называется переходным. Для описания зависимости $C_D(Re)$ в этом режиме используется целый ряд эмпирических зависимостей (аппроксимаций кривой Рэлея):

– формула Аллена:

$$C_D = \frac{13}{\sqrt{Re}};$$

– формула Клячко:

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}};$$

– формула Аэрова – Годеса:

$$C_D = (0.325 + \sqrt{0.124 + \frac{24}{Re}})^2.$$

Известно множество других выражений для коэффициента сопротивления C_D [10] в переходном режиме, которые практически дают одинаковые результаты.

При $Re = 700 \div 3 \cdot 10^5$ (турбулентный режим течения) коэффициент сопротивления $C_D = \text{const}$. В частности, для твердой сферы $C_D = 0,44$. Этот режим обтекания называют также автомодельным.

При $Re > 3 \cdot 10^5$ коэффициент сопротивления резко уменьшается почти в пять раз (эффект Эйфеля), что связано с турбулизацией пограничного слоя на поверхности тела. Это явление падения коэффициента сопротивления называется кризисом сопротивления.

4.4. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЧАСТИЦ НА ИХ ДВИЖЕНИЕ

Форма частиц дисперсной фазы может отличаться от сферической (снежинки, многогранники, эллипсоиды, пластины, волокна и т.д.). Для

расчета движения таких частиц вводится эквивалентный диаметр, который равен диаметру сферы с объемом V_p , равным объему данной частицы:

$$D_e = \sqrt[3]{\frac{6V_p}{\pi}}.$$

В частности, для частицы в форме куба со стороной a :

$$D_e = \sqrt[3]{\frac{6a^3}{\pi}} = 1,24a.$$

Для стержня диаметром d и длиной l :

$$D_e = \sqrt[3]{\frac{6\pi d^2 l}{4\pi}} = 1,145\sqrt[3]{d^2 l}.$$

При расчете движения несферических частиц в соответствующие уравнения вместо D подставляется D_e . Следует отметить, что при обтекании частиц, форма которых отличается от сферической, данный подход дает только оценочный результат. Для уточнения необходимо проводить эксперименты со сферической и заданной частицей (например по гравитационному осаждению в вязкой жидкости) и вводить поправочный множитель (коэффициент геометрической формы).

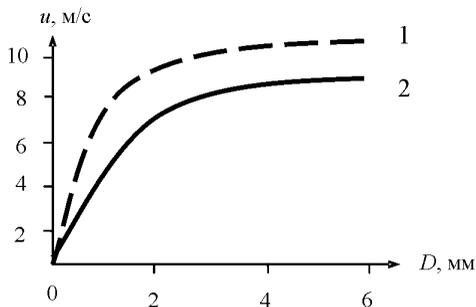


Рис. 4.3. Зависимость скорости осаждения каплей от их размера:
1 – твердая сфера;
2 – капля

При движении каплей (или пузырьков), особенно крупных, возможна их деформация за счет ускорения и взаимодействия с набегающим потоком. В результате они теряют сферическую форму (сплющиваются) и при определенных условиях дробятся на более мелкие фрагменты. В результате сплющивания частиц возрастает сопротивление среды, и капли име-

ют более низкую скорость, чем сферические частицы. Этим эффектом можно пренебречь для свободно падающих капель диаметром менее 100 мкм. На рис. 4.3 приведены опытные данные по стационарной скорости гравитационного осаждения дождевых капель разных размеров и расчетные данные для твердых сфер той же плотности.

Капли воды диаметром свыше 6 мм во время падения дробятся на более мелкие. Критерием степени деформации и дробления капель в потоке является безразмерное число Вебера:

$$We = \frac{\rho U^2 D}{\sigma},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Для воды при температуре +20°C величина $\sigma = 72,53 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Физический смысл числа Вебера – отношение сил динамического напора к силам поверхностного натяжения.

Зависимость степени деформации капли от We имеет вид [6]

$$\frac{D_m}{D_0} = 1 + 0,03We,$$

где D_m – диаметр миделева сечения деформированной капли, D_0 – диаметр исходной капли (рис. 4.4).

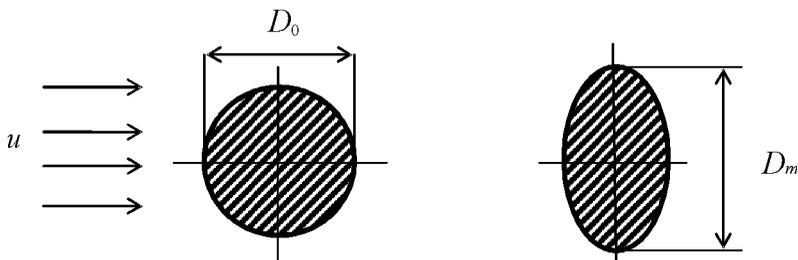


Рис. 4.4. Схема деформации капли в потоке

При числах Вебера, превышающих некоторое критическое значение $We \geq We_{кр}$, капли дробятся. Значения $We_{кр}$ варьируются в широком диапазоне: $We_{кр} = (2 \div 60)$ [9, 10].

Для капель жидкости существенное значение может иметь циркуляция жидкости при движении их в среде (рис. 4.5). Эта циркуляция снижает

ет трение на поверхности капли, в результате чего уменьшается сопротивление, оказываемое средой движению частицы.

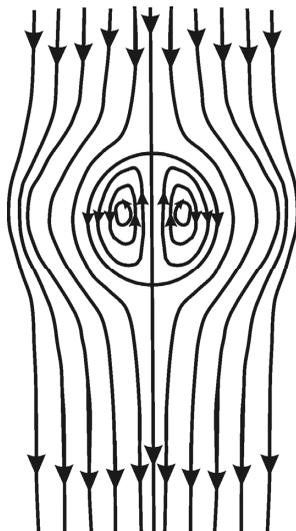


Рис. 4.5. Картина линий тока при $Re < 1$

Коэффициент сопротивления для капли при $Re < 1$ определяется формулой Адамара – Рыбчинского [20]

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(\frac{3\mu_* + 2}{3 + 3\mu_*} \right), \quad (4.5)$$

где $\mu_* = \mu_p / \mu$ – отношение коэффициентов динамической вязкости дисперсной μ_p и дисперсионной μ фаз.

Рассмотрим предельные случаи для коэффициента сопротивления C_D .

- Для случая движения твердых сфер или капель жидкости в воздухе $\mu_* \rightarrow \infty$ ($\mu_p \gg \mu$). При этом коэффициент сопротивления и сила сопротивления соответствуют закону Стокса (4.4), (4.5).

- Для случая движения пузырьков в жидкости $\mu_* \rightarrow 0$ ($\mu_p \ll \mu$). При этом коэффициент сопротивления и сила сопротивления определяются формулами

$$C_D = \frac{16}{\text{Re}}, \quad \vec{F}_S = -2\pi\mu\vec{U}D. \quad (4.6)$$

• Для случая движения разреженной совокупности частиц дисперсной фазы («продуваемое облако») $\mu_* \rightarrow 1$ ($\mu_p \approx \mu$). При этом коэффициент сопротивления и сила сопротивления определяются формулами

$$C_D = \frac{20}{\text{Re}}, \quad \vec{F}_S = -\frac{5}{2}\pi\mu\vec{U}D. \quad (4.7)$$

4.5. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Общее векторное уравнение движения частицы дисперсной фазы (твердой частицы, капли или пузырька) имеет вид второго закона Ньютона

$$m \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (4.8)$$

где m – масса частицы; \vec{u}_p – вектор скорости частицы; \vec{F}_i – векторы сил, действующих на частицу.

Для частицы сферической формы диаметром D

$$m = \frac{\pi D^3}{6} \rho_p,$$

где ρ_p – плотность материала частицы.

Рассмотрим основные силы, действующие на частицу дисперсной фазы.

• В гравитационном поле на частицу (как покоящуюся, так и движущуюся) действует сила тяжести

$$\vec{F}_g = \rho_p V_p \vec{g} \quad (4.9)$$

и сила Архимеда

$$\vec{F}_A = -\rho V_p \vec{g}, \quad (4.10)$$

где V_p – объем частицы; \vec{g} – вектор ускорения свободного падения; ρ – плотность дисперсионной среды.

Иногда под силой Архимеда понимают сумму сил (4.9) и (4.10)

$$\vec{F}_A = (\rho_p - \rho) V_p \vec{g}. \quad (4.11)$$

- Сила вязкого сопротивления в прямолинейном однородном потоке (как стационарном, так и нестационарном) определяется формулой (4.1), которая для сферической частицы принимает вид

$$\vec{F}_S = -C_D \frac{\pi D^2}{8} \rho |\vec{U}| \vec{U}. \quad (4.12)$$

Конкретный вид выражения для \vec{F}_S определяется режимом движения, от которого зависит коэффициент сопротивления C_D .

- При нестационарном движении частицы ($d\vec{u}_p/dt \neq 0$) на нее действует дополнительная сила сопротивления, связанная с необходимостью сообщить ускорение движению вытесненной частицей массы несущей среды:

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{2} \rho V_p \frac{d\vec{u}_p}{dt}. \quad (4.13)$$

Эта сила, называемая силой присоединенных масс [7], направлена противоположно вектору ускорения частицы и действует на частицу, как в вязкой, так и в идеальной жидкости.

Коэффициент при $d\vec{u}_p/dt$ в уравнении движения (4.8) можно рассматривать как некоторую эффективную массу m_e , равную сумме массы частицы $m = \rho_p V_p$ и присоединенной массы, которая равна половине массы дисперсионной среды, вытесненной частицей:

$$m_e = \rho_p V_p + \frac{1}{2} \rho V_p.$$

- При нестационарном движении частицы ($d\vec{u}_p/dt \neq 0$) на нее действует еще одна дополнительная сила сопротивления, связанная с предысторией движения – «наследственная» сила Бассе [7].

Для стоксовского режима течения при $Re < 1$ сила Бассе определяется уравнением

$$\vec{F}_B = -\frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi \mu \rho} \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{U}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (4.14)$$

где t – время движения частицы.

Сила Бассе возникает за счет нестационарного процесса формирования пограничного слоя вокруг частицы и действует только в вязкой несущей среде ($\mu \neq 0$).

• При движении частицы в сдвиговом потоке (с неравномерным профилем скорости несущей среды) на нее действует сила Саффмена (подъемная сила), направленная перпендикулярно вектору движения частицы [7]. При малых числах Рейнольдса и в отсутствие вращательного движения частицы сила Саффмена определяется уравнением

$$\vec{F}_S = C_S D^2 (\vec{u} - \vec{u}_p) \sqrt{\rho \mu \left| \frac{d\vec{u}}{dy} \right|} \operatorname{sgn} \left(\frac{d\vec{u}}{dy} \right), \quad (4.15)$$

где коэффициент $C_S = 1,615$, \vec{u} – скорость несущей среды в точке, соответствующей центру масс частицы; $d\vec{u}/dy = 0$ – поперечный градиент скорости.

Сила Саффмена действует только при движении частицы в вязкой жидкости ($\mu \neq 0$) несущего сдвигового потока и направлена в сторону увеличения скорости несущего потока (рис. 4.6).

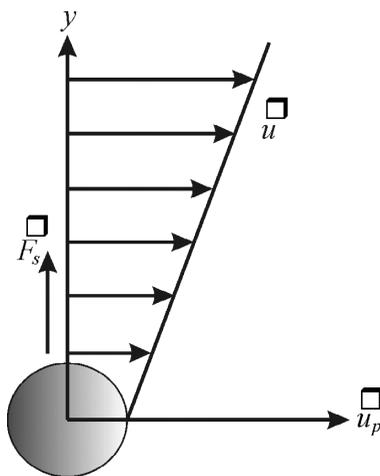


Рис. 4.6. Движение частицы в сдвиговом потоке

По оценкам А.А. Шрайбера [10], в дисперсном потоке при малых скоростях его движения для частиц диаметром менее 100 мкм сила Саффмена незначительна по сравнению с силой вязкого сопротивления.

• Частицы дисперсной фазы в двухфазном потоке могут приобретать вращательное движение за счет взаимных нецентральных столкновений [6] или при отскоке от стенок канала. На частицу, вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\omega}$, действует сила Магнуса [7], направленная перпендикулярно вектору скорости обтекающей частицу потока (рис. 4.7).

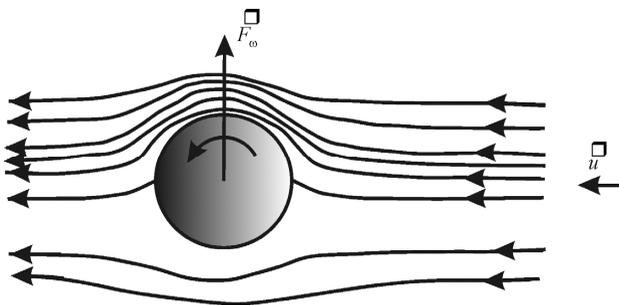


Рис. 4.7. Действие силы Магнуса на вращающуюся частицу

Вращение увеличивает скорость обтекания частицы сверху и уменьшает снизу. При этом в верхней окрестности частицы в соответствии с уравнением Бернулли давление будет меньше, чем в нижней. Перепад давлений вызывает подъемную силу Магнуса \vec{F}_ω , направленную вверх (рис. 4.7).

При стационарном обтекании сферы, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ поступательным (вдали) потоком со скоростью \vec{u} при малых числах Рейнольдса

$$Re_u = \frac{\rho D |\vec{u}|}{\mu} \ll 1, \quad Re_\omega = \frac{\rho |\vec{\omega}| D}{4\mu} \ll 1$$

сила Магнуса определяется формулой [7]

$$\vec{F}_\omega = \pi \frac{D^3}{8} \rho [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \quad (4.16)$$

В другом предельном случае, при больших числах Рейнольдса

$$Re_u = \frac{\rho D |\vec{u}|}{\mu} \gg 1, \quad Re_\omega = \frac{\rho |\vec{\omega}| D}{4\mu} \gg 1$$

сила Магнуса определяется формулой [7]

$$\vec{F}_\omega = \pi \frac{D^3}{3} \rho [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \quad (4.17)$$

Отметим, что в (4.16) и (4.17) не входит вязкость несущей среды. Роль вязкости сводится к тому, чтобы передать циркуляцию жидкости от вращающейся частицы, а возникающая при этом сила Магнуса не зависит от вязкости.

Формулы (4.16), (4.17) для поперечной силы Магнуса можно представить в виде

$$\vec{F}_\omega = C_\omega \rho V_p [\vec{u} \times \vec{\omega}],$$

где $C_\omega = C_\omega(\text{Re}_u, \text{Re}_\omega)$ – безразмерный коэффициент силы Магнуса, который определяется экспериментально. В предельных режимах он равен

$$\lim_{\substack{\text{Re}_u \rightarrow 0 \\ \text{Re}_\omega \rightarrow 0}} C_\omega(\text{Re}_u, \text{Re}_\omega) = \frac{3}{4}, \quad \lim_{\substack{\text{Re}_u \rightarrow 0 \\ \text{Re}_\omega \rightarrow 0}} C_\omega(\text{Re}_u, \text{Re}_\omega) = 2.$$

Кроме рассмотренных выше основных сил механического происхождения, на частицу дисперсной фазы в определенных условиях могут действовать и другие силы (силы турбофореза, термофореза, фотофореза, диффузиофореза, электрические силы и др. [12]).

Подставляя все значащие для рассматриваемой задачи силы в уравнение (4.8), можно получить дифференциальное уравнение движения частицы для каждой конкретной задачи.

5. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В НЕСУЩЕМ ПОТОКЕ

Рассмотрим одномерное стационарное движение несущей среды в направлении оси Ox , причем распределение скорости среды $u(x)$ задано (в простейшем случае $u(x) = \text{const.}$) В некотором сечении $x = 0$ в поток попадает сферическая частица диаметром D и плотностью ρ_p с начальной скоростью u_{p0} .

Требуется найти зависимость скорости частицы от расстояния $u_p(x)$ и от времени $u_p(t)$. В данном случае на частицу действует только сила сопротивления (несущая сила), которая равна:

$$\vec{F}_s = C_D \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho |\bar{u} - \bar{u}_p|}{2} (\bar{u} - \bar{u}_p), \quad (5.1)$$

где C_D – коэффициент сопротивления; ρ – плотность несущей среды. Тогда с учетом (5.1) уравнение движения частицы записывается в виде

$$\frac{\pi D^3}{6} \rho_p \frac{d\bar{u}_p}{dt} = C_D \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho |\bar{u} - \bar{u}_p|}{2} (\bar{u} - \bar{u}_p). \quad (5.2)$$

Решение уравнения (5.2) для произвольной зависимости $u(x)$ возможно только численными методами. Рассмотрим некоторые аналитические решения этого уравнения, которые можно получить при постоянном значении скорости несущего потока ($u = \text{const.}$).

5.1. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СТОКСОВСКОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим стоксовский режим течения ($Re < 1$), для которого число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho |\bar{u} - \bar{u}_p| D}{\mu} < 1.$$

Для данного режима коэффициент сопротивления равен

$$C_D = \frac{24}{Re} = \frac{24\mu}{\rho |\bar{u} - \bar{u}_p| D}, \quad (5.3)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды.

Подставляя (5.3) в уравнение движения (5.2), получим

$$\frac{\pi D^3}{6} \rho_p \frac{d\bar{u}_p}{dt} = \frac{24\mu}{\rho|\bar{u} - \bar{u}_p|D} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho|\bar{u} - \bar{u}_p|}{2} (\bar{u} - \bar{u}_p). \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) можно привести к виду

$$\frac{D^2 \rho_p}{18\mu} \cdot \frac{d\bar{u}_p}{dt} = (\bar{u} - \bar{u}_p). \quad (5.5)$$

Коэффициент перед производной $D^2 \rho_p / 18\mu$ в уравнении (5.5), имеющий размерность времени, обозначим через t_* :

$$t_* = \frac{D^2 \rho_p}{18\mu}. \quad (5.6)$$

Величина t_* называется временем динамической релаксации частицы, которое дает оценку времени разгона частицы до скорости несущей среды.

Вводя в качестве масштабов времени t_* из уравнения (5.6) и скорости $u_* = u$, уравнение (5.5) можно представить в безразмерном виде:

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 - y, \quad (5.7)$$

где $y = u_p / u_*$, $\tau = t / t_*$, $y_0 = u_{p0} / u_*$ (u_{p0} – начальная скорость частицы, вводимой в поток).

Решение уравнения (5.7) при начальном условии ($\tau = 0$: $y = y_0$) имеет вид:

$$y = 1 - (1 - y_0) \exp(-\tau). \quad (5.8)$$

На рис. 5.1 приведены графики зависимости $y(\tau)$ для разных значений y_0 . При $y_0 > 1$ – частица замедляется (начальная скорость частицы превышает скорость потока), при $y_0 < 1$ – частица ускоряется в потоке несущей среды. При $\tau \rightarrow \infty$ частица приобретает скорость несущей среды.

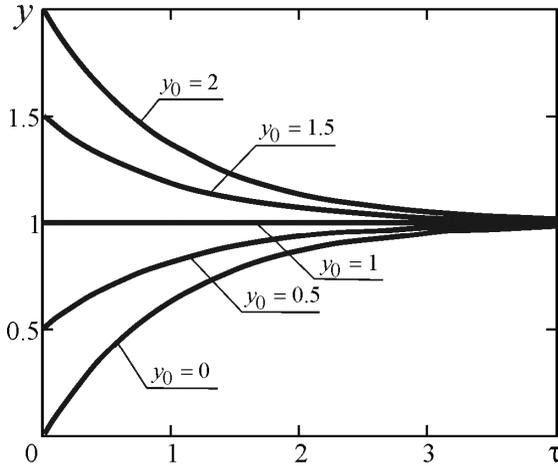


Рис. 5.1. Зависимость скорости частицы от времени (стоксовский режим)

Для нахождения зависимости скорости частицы от координаты преобразуем уравнение (5.4) с учетом того, что

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{du_p}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{du_p}{dx} \cdot u_p.$$

При этом из уравнения (5.5) получим

$$u_p \frac{D^2 \rho_p}{18\mu} \frac{du_p}{dx} = (u - u_p). \quad (5.9)$$

Вводя дополнительную безразмерную переменную $\xi = x/x^*$, где

$$x^* = u^* t^* = u \frac{\rho_p D^2}{18\mu}, \quad (5.10)$$

уравнение (5.9) можно представить в безразмерном виде:

$$y \frac{dy}{d\xi} = 1 - y. \quad (5.11)$$

При заданном граничном условии ($\xi = 0: y = y_0$) уравнение (5.11) имеет следующее решение:

$$\xi = (y_0 - y) + \ln \left| \frac{1 - y_0}{1 - y} \right|. \quad (5.12)$$

На рис. 5.2 приведены графики зависимости $y(\xi)$ для разных значений y_0 .

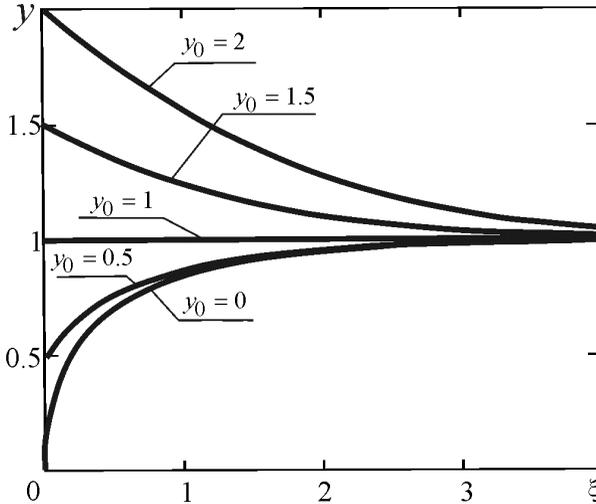


Рис. 5.2. Зависимость скорости частицы от расстояния (стоксовский режим)

Пример расчета

Определим значения времени и расстояния, при которых скорость вольфрамового шарика ($D = 4$ мм, $\rho_p = 19\,340$ кг/м³), введенного с нулевой скоростью в поток вязкой жидкости ($u = 0,5$ м/с, $\rho = 890$ кг/м³, $\mu = 2$ Па·с), достигнет 50% от скорости потока.

1. Проведем оценку режима течения. При $\tau \rightarrow \infty$, $u_p = u$, и значение числа Рейнольдса равно:

$$\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{890 \cdot 0,5 \cdot 0,004}{2} = 0,89 < 1.$$

При $\text{Re} < 1$ режим движения – стоксовский.

2. Находим из уравнений (5.8) и (5.12) значения τ и ξ , при которых $y = 0,5$ (для $y_0 = 0$):

$$\tau = \ln \left| \frac{1-y_0}{1-y} \right| = \ln \left(\frac{1}{0,5} \right) = 0,693;$$

$$\xi = (y_0 - y) + \ln \left| \frac{1-y_0}{1-y} \right| = -0,5 + \ln \left| \frac{1}{0,5} \right| = 0,193.$$

3. Находим значения масштабов из уравнений (5.6), (5.10):

$$t_* = \frac{D^2 \rho_p}{18\mu} = \frac{0,004^2 \cdot 19340}{18 \cdot 2} = 8,59 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$x_* = \frac{u \rho_p D^2}{18\mu} = \frac{0,5 \cdot 19340 \cdot 0,004^2}{18 \cdot 2} = 4,29 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

4. Переходим к размерным переменным

$$t = \tau \cdot t_* = 0,693 \cdot 8,59 \cdot 10^{-3} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 5,9 \text{ мс};$$

$$x = \xi \cdot x_* = 0,193 \cdot 4,29 \cdot 10^{-3} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,8 \text{ мм}.$$

5.2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПРОМЕЖУТОЧНОМ РЕЖИМЕ

Коэффициент сопротивления в промежуточном режиме обтекания задается формулой Клячко:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt[3]{\text{Re}}}. \quad (5.13)$$

Относительное отклонение коэффициента сопротивления, рассчитанного по формуле Клячко (5.13), от стоксовского (5.3) определяется соотношением

$$\delta = \frac{\left(\frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt[3]{\text{Re}}} \right) - \left(\frac{24}{\text{Re}} \right)}{\left(\frac{24}{\text{Re}} \right)} = \frac{4 \text{ Re}}{24 \sqrt[3]{\text{Re}}} = \frac{1}{6} \text{ Re}^{2/3}.$$

При относительном отклонении $\delta = 0,01$ (1%) граничное значение числа Рейнольдса составляет $Re = 0,015$. Поэтому можно считать, что промежуточный режим обтекания частицы дисперсной фазы реализуется в диапазоне чисел Рейнольдса:

$$Re = 0,015 \div 700.$$

Уравнение движения частицы (5.2) с учетом коэффициента сопротивления (5.13) имеет вид

$$\frac{\pi D^3}{6} \rho_p \frac{d\bar{u}_p}{dt} = \left(\frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}} \right) \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho |\bar{u} - \bar{u}_p|^2}{2}.$$

Вводя в качестве безразмерной переменной число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho |\bar{u} - \bar{u}_p| D}{\mu},$$

это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d Re}{dt} = -A Re^2 \left(\frac{6}{Re} + \frac{1}{\sqrt[3]{Re}} \right), \quad (5.14)$$

где $A = \frac{3\mu}{\rho_p D^2}$ – константа, $[A] = c^{-1}$.

Для интегрирования уравнения (5.14) введем новую безразмерную переменную:

$$z = \sqrt[3]{Re}. \quad (5.15)$$

С учетом (5.15) уравнение движение примет вид

$$\frac{dz}{dt} = -Cz(6 + z^2), \quad (5.16)$$

где $C = \frac{A}{3} = \frac{\mu}{\rho_p D^2}$ – константа, $[C] = c^{-1}$.

Вводя в качестве масштаба времени

$$t^* = \frac{1}{C} = \frac{\rho_p D^2}{\mu},$$

уравнение (5.16) представим в безразмерном виде

$$\frac{dz}{d\tau_1} = -z(6 + z^2),$$

где $\tau_1 = t/t_* = t \cdot C$.

Интеграл этого уравнения при начальном условии ($\tau = 0: z = z_0$) имеет вид

$$z = \left[\frac{6 \frac{z_0^2}{z_0^2 + 6} \exp(-12\tau_1)}{1 - \frac{z_0^2}{z_0^2 + 6} \exp(-12\tau_1)} \right]^{1/2}$$

или

$$z = \sqrt{6} \left[\left(1 + \frac{6}{z_0^2} \right) \exp(-12\tau_1) - 1 \right]^{-1/2}. \quad (5.17)$$

Переходя в (5.17) к новым безразмерным переменным

$$y = \frac{u_p}{u}, \quad \tau = 12\tau_1 = \frac{t}{(\rho_p D^2 / 12\mu)},$$

получим решение для зависимости безразмерной скорости частицы от безразмерного времени:

$$y = 1 - 6\sqrt{6} \frac{(1 - y_0)}{\text{Re}_0} \left[\left(1 + \frac{6}{\text{Re}_0^{2/3}} \right) \exp(\tau) - 1 \right]^{-3/2}, \quad (5.18)$$

$$\text{где } \text{Re}_0 = \frac{\rho u D}{\mu} (1 - y_0), \quad \tau = \frac{12\mu}{\rho_p D^2} t.$$

Вводя в качестве параметра задачи значение числа Рейнольдса для несущего потока

$$\text{Re}_e = \frac{\rho u D}{\mu},$$

зависимость (5.18) можно представить в виде

$$y = 1 \pm \frac{6\sqrt{6}}{\text{Re}_e} \left[\left(1 + \frac{6}{(\text{Re}_e |1 - y_0|)^{2/3}} \right) \exp(\tau) - 1 \right]^{-3/2}. \quad (5.19)$$

Анализ уравнения (5.19) показывает, что зависимость скорости частицы от времени определяется ее начальным значением y_0 , а также параметром задачи Re_e (числом Рейнольдса, рассчитанным для параметров несущей среды). В уравнении (5.19) знак «+» соответствует случаю $u_p > u$, а знак «-» случаю $u_p < u$. На рис. 5.3 приведены графики зависимости $y(\tau)$ для разных значений y_0 при $\text{Re}_e = 50$ и $\text{Re}_e = 500$.

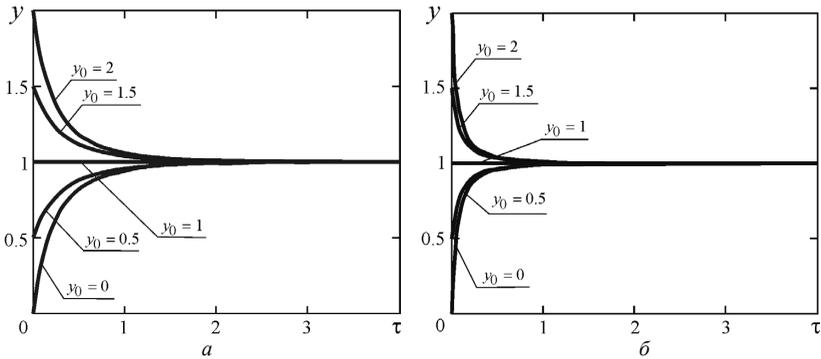


Рис. 5.3. Зависимость скорости частицы от времени (промежуточный режим):
 а - $\text{Re}_e = 50$; б - $\text{Re}_e = 500$

5.3. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим автомодельный режим движения частицы, который реализуется в диапазоне чисел Рейнольдса $\text{Re} = 600 \div 3 \cdot 10^5$. Коэффициент сопротивления в данном режиме равен $C_D = \text{const} = 0,44$.

Уравнение движения частицы (5.2) при $C_D = \text{const}$ можно представить в виде

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{\rho_p C_D} \cdot \frac{d\bar{u}_p}{dt} = |\bar{u} - \bar{u}_p|^2. \quad (5.20)$$

Коэффициент перед производной в уравнении (5.20), имеющий размерность расстояния, обозначим через x^* :

$$x^* = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{\rho_p C_D}. \quad (5.21)$$

Вводя в качестве масштабов расстояния x^* из уравнения (5.21), скорости $u^* = u$ и времени t^*

$$t^* = \frac{x^*}{u^*} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{u \rho_p C_D}, \quad (5.22)$$

уравнение (5.20) можно представить в безразмерном виде

$$\frac{dy}{d\tau} = (1 - y)^2, \quad (5.23)$$

где $y = u_p / u^*$, $\tau = t / t^*$.

Решение уравнения (5.23) с начальным условием ($\tau = 0: y = y_0$) имеет вид

$$y = \frac{y_0 + \tau|1 - y_0|}{1 + \tau|1 - y_0|}. \quad (5.24)$$

Графики зависимостей $y(\tau)$ для разных значений y_0 приведены на рис. 5.4.

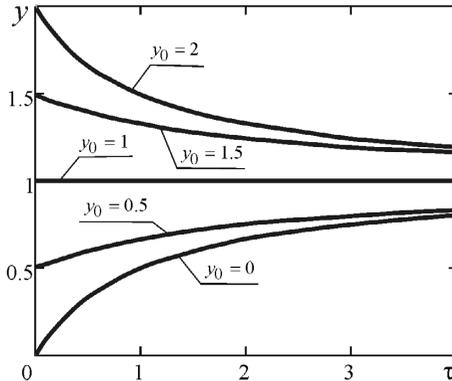


Рис. 5.4. Зависимость скорости частицы от времени (автомодельный режим)

Для нахождения зависимости скорости частицы от координаты, вводя дополнительную безразмерную переменную $\xi = x/x_*$, по аналогии с уравнением (5.11) получим следующее уравнение в безразмерных переменных:

$$y \frac{dy}{d\xi} = (1 - y)^2. \quad (5.25)$$

Решение этого уравнения с граничным условием ($\xi = 0: y = y_0$) имеет вид

$$\xi = \left(\frac{1}{1-y} \right) - \left(\frac{1}{1-y_0} \right) + \ln \left| \frac{1-y}{1-y_0} \right|. \quad (5.26)$$

Графики зависимостей $y(\xi)$ для разных значений y_0 приведены на рис. 5.5.

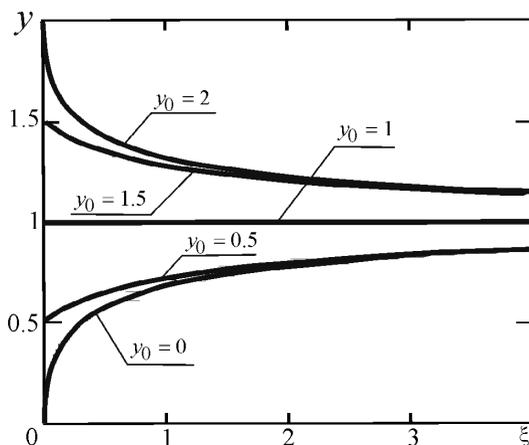


Рис 5.5. Зависимость скорости частицы от расстояния (автомодельный режим)

Пример расчета

Определим значения времени и расстояния, при которых скорость стеклянного шарика ($D = 7$ мм, $\rho_p = 2\,200$ кг/м³), введенного с нулевой скоростью в поток воды ($u = 1$ м/с, $\rho = 10^3$ кг/м³, $\mu = 10^{-3}$ Па·с), достигнет 50% от скорости потока.

1. Проведем оценку режима течения. При $\tau \rightarrow \infty$ $u_p = u$, и значение числа Рейнольдса равно:

$$\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 0,007}{0,001} = 7\,000.$$

Следовательно, частица движется в автомодельном режиме.

2. Находим из уравнений (5.24) и (5.26) значения τ и ξ , при которых $y = 0,5$ (для $y_0 = 0$):

$$\tau = \frac{y - y_0}{(1 - y_0)(1 - y)} = \frac{0,5}{1 - 0,5} = 1:$$

$$\xi = \frac{1}{1 - y} - \frac{1}{1 - y_0} + \ln \left| \frac{1 - y}{1 - y_0} \right| = \frac{1}{0,5} - 1 + \ln |0,5| = 0,3.$$

3. Находим значения масштабов из уравнений (5.21), (5.22):

$$t_* = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{u \rho_p C_D} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0,007}{3 \cdot 1 \cdot 2\,200 \cdot 0,44} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$x_* = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{\rho_p C_D} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0,007}{3 \cdot 2\,200 \cdot 0,44} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

4. Переходим к размерным переменным

$$t = \tau \cdot t_* = 1 \cdot 9,6 \cdot 10^{-3} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 9,6 \text{ мс};$$

$$x = \xi \cdot x_* = 0,3 \cdot 9,6 \cdot 10^{-3} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,9 \text{ мм}.$$

6. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Поведение дисперсных частиц (твердых частиц, капель, пузырьков) при их гравитационном осаждении (или всплытии) представляет интерес для решения различных практических задач. Процессы гравитационного осаждения важны для описания атмосферных осадков, поведения облаков, туманов, при расчете распространения капель техногенных аэрозолей и ряда других процессов. При этом надо учитывать параметры атмосферы в зависимости от высоты H над уровнем моря. Данные для стандартной атмосферы приведены в табл. 6.1.

Т а б л и ц а 6.1

Параметры стандартной атмосферы

H , м	T , К	p , Па	ρ , кг/м ³	$\mu \cdot 10^5$, Па·с
0	288,2	101 330	1,23	1,79
1 000	281,7	89 880	1,11	1,76
2 000	275,1	79 490	1,01	1,73
3 000	268,6	70 130	0,909	1,69
4 000	262,1	61 660	0,819	1,66
5 000	255,6	54 050	0,737	1,63
6 000	249,1	47 210	0,660	1,60
7 000	242,6	41 090	0,590	1,56
8 000	236,1	35 650	0,526	1,53
10 000	223,2	26 490	0,414	1,46
15 000	216,7	12 110	0,195	1,42
20 000	216,7	5 530	0,0889	1,42
25 000	216,7	2 530	0,0406	1,42
30 000	230,4	1 200	0,0179	1,49
40 000	257,7	296	0,00400	1,57
50 000	274,0	84,6	0,00108	1,72
60 000	253,4	44,1	0,000332	1,62
70 000	219,2	5,83	0,0000927	1,44

В табл. 6.2 приведены физические свойства воды (плотность ρ , коэффициент динамической вязкости μ , коэффициента поверхностного натяжения σ), как наиболее часто используемой жидкости в практических расчетах.

Т а б л и ц а 6.2

Физические свойства воды ($T = 20^\circ\text{C}$)

ρ , кг/м ³	μ , Па·с	σ , Н/м ²
1 000	0,001	$72,53 \cdot 10^{-3}$

6.1. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СТОКСОВСКОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим движение сферической частицы дисперсной фазы в поле силы тяжести \vec{g} . В проекции на ось Oz, направленную вертикально вниз, на частицу действуют следующие силы:

$$F_g = mg \text{ — сила тяжести;}$$

$$F_A = -\rho V_p g = -m \frac{\rho}{\rho_p} g \text{ — сила Архимеда;}$$

$$F_s = -C_D \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_p^2}{2} \text{ — сила сопротивления.}$$

Для стоксовского режима ($Re < 1$, $C_D = 24/Re$) уравнение гравитационного осаждения сферической частицы с учетом рассмотренных сил примет вид

$$\frac{du_p}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) - \frac{18\mu}{\rho_p D^2} u_p. \quad (6.1)$$

В стационарном режиме ($du_p/dt = 0$) скорость осаждения частицы определяется формулой

$$u_* = \frac{(\rho_p - \rho) D^2}{18\mu} g. \quad (6.2)$$

Обезразмерим уравнение (6.1), приняв за масштаб скорости величину u_* (6.2), а за масштаб времени величину t_* :

$$t_* = \frac{\rho_p D^2}{18\mu}. \quad (6.3)$$

Обозначив $y = u_p/u_*$, $\tau = t/t_*$, получим уравнение в безразмерном виде

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 - y. \quad (6.4)$$

Решение уравнения (6.4) при начальном условии ($\tau = 0: y = 0$) имеет вид

$$y = 1 - e^{-\tau}. \quad (6.5)$$

Зависимость скорости частицы от времени в безразмерном виде приведена на рис. 6.1.

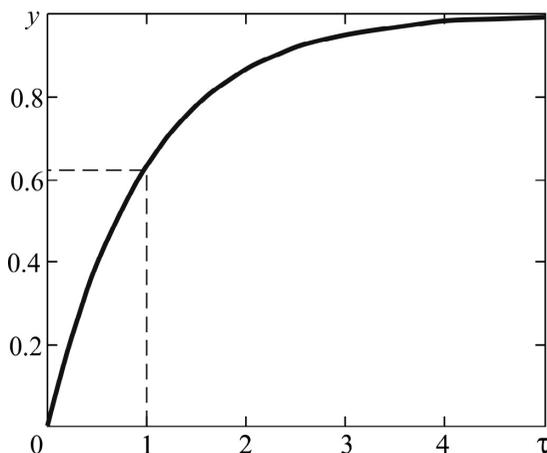


Рис. 6.1. Зависимость скорости гравитационного осаждения частицы от времени

В табл. 6.3 приведены значения скорости осаждения частицы для некоторых значений τ . За время, равное времени динамической релаксации частицы ($\tau = 1$), ее скорость достигает 63,2% от стационарного значения u^* . Из табл. 6.3 видно, что при $\tau = 4,6$ отклонение скорости осаждения от стационарной не превышает 1%.

Таблица 6.3

Зависимость скорости осаждения частицы от времени

τ	1	2	3	4	4,6	5
y	0,632	0,865	0,950	0,982	0,99	0,993

Найдем зависимость скорости частицы от пройденного ею расстояния (высоты падения). Вводя масштаб расстояния

$$x^* = u^* t^* = \rho_p (\rho_p - \rho) \left(\frac{D^2}{18\mu} \right)^2 g, \quad (6.6)$$

уравнение (6.1) можно представить в безразмерном виде

$$y \frac{dy}{d\xi} = 1 - y, \quad (6.7)$$

где $\xi = x/x^*$. Решение уравнения (6.7) с граничным условием ($\xi = 0 : y = 0$) имеет вид

$$\xi = -[y + \ln(1 - y)]. \quad (6.8)$$

График зависимости скорости осаждения частицы от расстояния в безразмерном виде приведен на рис. 6.2.

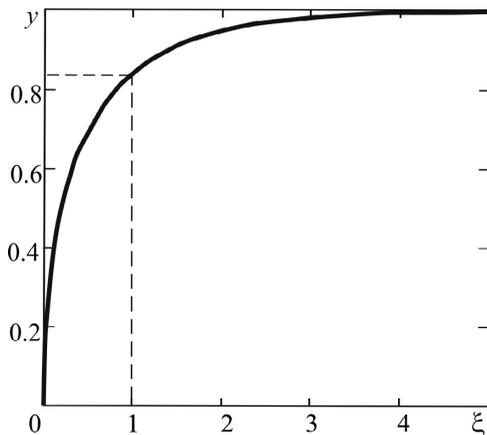


Рис. 6.2. Зависимость скорости гравитационного осаждения частицы от расстояния

В табл. 6.4 приведены значения скорости осаждения частицы для некоторых значений ξ . На расстоянии $\xi = 1$ скорость частицы достигнет 84% от стационарного значения u^* . Из табл. 6.4 видно, что при $\xi = 3,62$ отклонение скорости от стационарной не превышает 1%.

Таблица 6.4

Зависимость скорости осаждения частицы от расстояния

ξ	1	2	3	3,62	4	5
y	0,842	0,948	0,981	0,99	0,994	0,997

Расчетные формулы

При расчете осаждения частицы дисперсной фазы под действием силы тяжести ($\rho_p > \rho$) выделяют два режима.

1. Режим ускоренного движения, при котором скорость частицы плавно возрастает от нуля до некоторого постоянного значения u_* . Поскольку $u_p = u_*$ достигается при $\tau \rightarrow \infty$, примем за границы первого режима значения $\tau = 4,6$, $\xi = 3,62$ (отклонение скорости осаждения от стационарной не превышает 1%). При этом размерные значения этих границ определяются формулами

$$t_1 = 4,6t_* = 4,6 \frac{\rho_p D^2}{18\mu} = 4,6 \frac{\rho_p D^2}{18\mu},$$

$$x_1 = 3,62x_* = 3,62\rho_p (\rho_p - \rho) \left(\frac{D^2}{18\mu} \right)^2 g.$$

Скорость осаждения частицы в режиме ускоренного движения в размерном виде определяется формулой

$$u_p(t) = \frac{D^2 g (\rho_p - \rho)}{18\mu} \left[1 - \exp \left(- \frac{18\mu}{\rho_p D^2} t \right) \right]. \quad (6.9)$$

2. Режим движения с постоянной скоростью u_* .

Расчет скорости стационарного осаждения частицы проводится по соотношению (6.2).

Пример расчета

Определим значения времени t и расстояния x , на которых скорость гравитационного осаждения капли ртути ($D = 3$ мм, $\rho_p = 13\,550$ кг/м³) в глицерине ($\rho = 1\,270$ кг/м³, $\mu = 1,4$ Па·с) будет отклоняться от стационарного значения на 1% ($u_p = 0,99u_*$).

1. Определяем значение стационарной скорости осаждения капли по уравнению (6.2):

$$u_* = \frac{(\rho_p - \rho)D^2}{18\mu} g = \frac{(13550 - 1270) \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2}{18 \cdot 1,4} \cdot 9,80665 =$$

$$= 0,043 \text{ м/с.}$$

2. Проведем оценку режима течения. При $u_p = u_*$ значение числа Рейнольдса равно:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_* D}{\mu} = \frac{1270 \cdot 0,043 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1,4} = 0,117 < 1.$$

При $\text{Re} < 1$ режим движения – стоксовский.

3. Находим из уравнений (6.5) и (6.8) значения τ и ξ , при которых $y = 0,99$:

$$\tau = \ln\left(\frac{1}{1-y}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-0,99}\right) = 4,6;$$

$$\xi = -[y + \ln(1-y)] = -[0,99 + \ln(1-0,99)] = 3,62.$$

4. Находим значения масштабов из уравнений (6.3), (6.6):

$$t_* = \frac{\rho_p D^2}{18\mu} = \frac{13550 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2}{18 \cdot 1,4} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 4,8 \text{ мс};$$

$$x_* = \rho_p \Delta p \left(\frac{D^2}{18\mu}\right)^2 g = 13550 \cdot (13550 - 1270) \left(\frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{18 \cdot 1,4}\right)^2 9,80665 =$$

$$= 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,2 \text{ мм}.$$

5. Переходим к размерным переменным

$$t = \tau \cdot t_* = 4,6 \cdot 4,8 \cdot 10^{-3} = 22 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 22 \text{ мс};$$

$$x = \xi \cdot x_* = 3,62 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,7 \text{ мм}.$$

6.2. ВЛИЯНИЕ СИЛЫ, СВЯЗАННОЙ С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ

При нестационарном движении тела в жидкости с ненулевой плотностью на него действует сила реакции этой жидкости (сила присоединенной массы). В случае равномерного движения тела ($du_p/dt = 0$) эта сила пропадает (парадокс Даламбера). При ускоренном движении реакция жидкости тем больше, чем больше ускорение тела.

В случае сферического тела его движение можно рассматривать как происходящее в пустоте если только к массе тела присоединить дополнительную массу, равную половине массы жидкости в объеме тела.

Если масса вытесненной жидкости мала по сравнению с массой тела (движение капли в воздухе, например), то присоединенной массой можно пренебречь. В случае же движения твердого тела, и тем более пузырька, в водной среде роль присоединенной массы оказывается первостепенной.

При нестационарном движении частицы ($du_p / dt \neq 0$) на нее кроме рассмотренных выше сил действует сила, связанная с присоединенной массой [7]:

$$\bar{F}_m = -\frac{\rho V_p}{2} \cdot \frac{d\bar{u}_p}{dt}, \quad (6.10)$$

где V_p – объем частицы.

С учетом этой силы уравнение гравитационного осаждения частицы (6.1) примет вид

$$(\rho_p + \frac{\rho}{2})V_p \cdot \frac{du_p}{dt} = V_p g(\rho_p - \rho) - C_D \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_p^2}{2}. \quad (6.11)$$

Для случая осаждения твердых частиц или капель жидкости в газе ($\rho_p \gg \rho$) силой F_m можно пренебречь. В случае же всплытия пузырьков газа в жидкости ($\rho_p \ll \rho$) расчет динамики движения пузырька необходимо проводить с учетом F_m .

Рассмотрим процесс всплытия пузырька в жидкости для стоксовского режима ($Re < 1$, $C_D = 24 / Re$). Без учета силы, связанной с присоединенной массой, уравнение движения в проекции на ось, направленную вертикально вверх, следует из (6.1):

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{\rho}{\rho_p} g - \frac{18\mu}{\rho_p D^2} u_p. \quad (6.12)$$

Вводя масштабы скорости u^* и времени t^*

$$u^* = \frac{\rho D^2}{18\mu} g, \quad t^* = \frac{\rho_p D^2}{18\mu},$$

представим уравнение (6.12) в безразмерном виде

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 - y, \quad (6.13)$$

где $y = u_p / u_*$, $\tau = t / t_*$. Решение этого уравнения имеет вид

$$u_p(t) = u_* \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t_*}\right) \right]. \quad (6.14)$$

С учетом F_m уравнение движения пузырька можно представить в виде

$$\frac{du_p}{dt} = 2g - \frac{36\mu}{\rho D^2} u_p. \quad (6.15)$$

Вводя масштабы скорости u_* и времени t_*

$$u_* = \frac{\rho D^2}{18\mu} g, \quad t_* = \frac{\rho D^2}{36\mu},$$

уравнение (6.15) в безразмерном виде сводится к уравнению (6.13), а его решение к виду (6.14). Отличие этих уравнений заключается в разных масштабах времени.

Анализ полученных решений показывает, что скорость стационарного всплытия пузырька одинакова для уравнений (6.12) и (6.15) и определяется формулой

$$u_* = \frac{\rho D^2 g}{18\mu}.$$

Время динамической релаксации для уравнения (6.12) записывается в виде

$$t_* = \frac{\rho_p D^2}{18\mu},$$

а для уравнения (6.15) – в виде

$$t_* = \frac{\rho D^2}{36\mu}.$$

Поскольку $\rho_p \ll \rho$, то время динамической релаксации для процесса всплытия пузырька с учетом присоединенной массы намного превышает соответствующее значение, полученное без учета присоединенной массы.

Формула для определения пройденного пузырьком расстояния в соответствии с (5.12) имеет вид

$$x(t) = x_* \left[\ln \left| \frac{u_*}{u_* - u_p(t)} \right| - \frac{u_p(t)}{u_*} \right],$$

где $x_* = u_* t_*$ – характерное расстояние, пройденное пузырьком.

На рис. 6.3 приведены зависимости скорости всплытия пузырька воздуха ($D = 3,2$ мм, $\rho_p = 1,205$ кг/м³) в касторовом масле ($\rho = 935$ кг/м³, $\mu = 0,3$ Па·с) от времени и расстояния, рассчитанные с учетом и без учета силы, связанной с присоединенной массой.

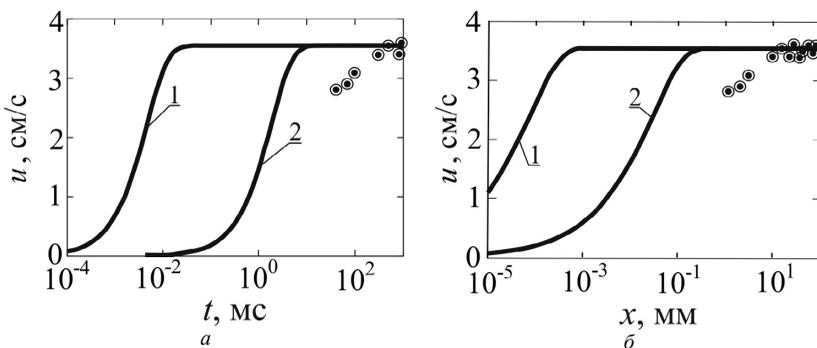


Рис. 6.3. Зависимость скорости всплытия пузырька от времени (а) и расстояния (б) без учета (1) и с учетом (2) силы, связанной с присоединенной массой

Точками на рис. 6.3 показаны экспериментальные значения скорости всплытия пузырька.

6.3. РАСЧЕТ СКОРОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ОСАЖДЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО КРИТЕРИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим гравитационное осаждение одиночной сферической частицы в стационарном режиме ($u_p = \text{const}$). При этом сила тяжести и сила Архимеда уравновешены силой сопротивления:

$$(\rho_p - \rho) \frac{\pi D^3}{6} g = C_D \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_*^2}{2}, \quad (6.16)$$

где u_* – скорость стационарного осаждения частицы.

Введем число Рейнольдса для скорости стационарного осаждения:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_* D}{\mu}. \quad (6.17)$$

Выражая из (6.17) скорость u_* и подставляя в (6.16), получим

$$\text{Re}^2 \cdot C_D = \frac{4}{3} \cdot \frac{g(\rho_p - \rho)\rho D^3}{\mu^2}. \quad (6.18)$$

Вводя число Архимеда

$$\text{Ar} = \frac{g(\rho_p - \rho)\rho D^3}{\mu^2}, \quad (6.19)$$

уравнение (6.18) можно представить в виде

$$\text{Re}^2 \cdot C_D = \frac{4}{3} \text{Ar}. \quad (6.20)$$

Из (6.20) следует, что для заданного режима движения частицы числа Рейнольдса и Архимеда связаны однозначной зависимостью или критериальным уравнением (6.20). Это уравнение удобно использовать для определения стационарной скорости частицы.

Рассчитав по заданным параметрам задачи (ρ , ρ_p , D , μ) число Архимеда (6.19), из критериального уравнения (6.20) можно определить число Рейнольдса и по уравнению (6.17) – скорость стационарного осаждения (всплытия) частицы:

$$u_* = \frac{\mu}{\rho D} \text{Re}.$$

Для экспрессной оценки скорости частицы можно использовать график зависимости

$$\text{Re} = f(\text{Ar}) = 2 \sqrt{\frac{\text{Ar}}{3C_D}}. \quad (6.21)$$

На рис. 6.4 приведен график зависимости $Re(Ar)$ для стоксовского режима ($C_D = 24/Re$). Максимальное значение числа Архимеда для данного режима, соответствующее $Re = 1$, равно $Ar = 18$.

На рис. 6.5 приведены графики зависимости $Re(Ar)$ для промежуточного ($C_D = 24/Re + (4/\sqrt[3]{Re})$) и автомодельного ($C_D = 0,44$) режимов. Граничное значение числа Архимеда, разделяющее эти режимы, равно $Ar = 270\,000$.

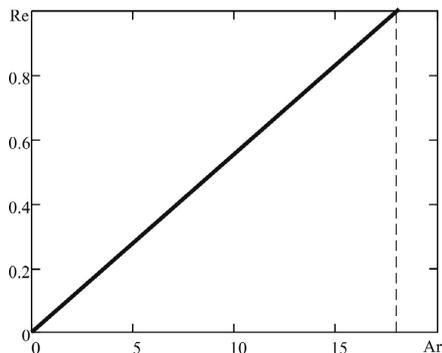


Рис. 6.4. Зависимость $Re(Ar)$ для стоксовского режима движения частицы

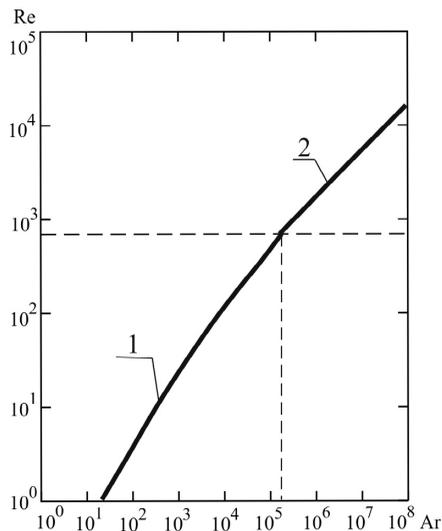


Рис. 6.5. Зависимость $Re(Ar)$ для промежуточного (1) и автомодельного (2) режимов движения частицы

Пример расчета 1

Определить скорость осаждения капли воды ($\rho_p = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $D = 3 \text{ мм}$) в воздухе ($\rho = 1,205 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 1,808 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$).

1. По заданным параметрам задачи рассчитываем число Архимеда:

$$\begin{aligned} \text{Ar} &= \frac{g(\rho_p - \rho)\rho D^3}{\mu^2} = \\ &= \frac{9,80665(1000 - 1,205) \cdot 1,205 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^3}{(1,808 \cdot 10^{-5})^2} = 974880. \end{aligned}$$

2. Определяем режим течения. Поскольку число Архимеда больше граничного значения $\text{Ar} > 270\,000$, то реализуется автомодельный режим течения.

3. Из (6.21) для найденного значения числа Архимеда находим значение числа Рейнольдса для $C_D = 0,44$:

$$\text{Re} = 2\sqrt{\frac{\text{Ar}}{3C_D}} = 2\sqrt{\frac{974880}{3 \cdot 0,44}} = 1718.$$

4. Из (6.17) определяем скорость движения капли

$$u_* = \frac{\mu \text{Re}}{\rho D} = \frac{1,808 \cdot 10^{-5} \cdot 1718}{1,205 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 8,6 \text{ м/с}.$$

Пример расчета 2

Определить скорость всплытия пузырька воздуха ($D = 3 \text{ мм}$, $\rho_p = 1,205 \text{ кг/м}^3$) в глицерине ($\rho = 1\,270 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1,4 \text{ Па}\cdot\text{с}$).

1. По заданным параметрам задачи рассчитываем число Архимеда:

$$\text{Ar} = \frac{g(\rho - \rho_p)\rho D^3}{\mu^2} = \frac{9,80665(1270 - 1,205) \cdot 1270 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^3}{(1,4)^2} = 0,2.$$

2. Определяем режим течения. Поскольку число Архимеда $\text{Ar} < 18$, то реализуется стоковский режим течения.

3. Из (6.21) для найденного значения числа Архимеда находим значение числа Рейнольдса для $C_D = 24 / \text{Re}$:

$$\text{Re} = 2 \sqrt{\frac{\text{Ar}}{3C_D}} = \frac{\text{Ar}}{18} = \frac{0,2}{18} = 0,011.$$

4. Из (6.17) определяем скорость движения капли

$$u_* = \frac{\mu \text{Re}}{\rho D} = \frac{1,4 \cdot 0,01}{1270 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}.$$

7. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ

Во многих технологических процессах и технических устройствах реализуются двухфазные закрученные течения, причем роль несущей фазы выполняют газ или жидкость, которые вовлекают в движение взвешенные в них твердые или жидкие частицы (газовые пузырьки в жидкости тоже могут рассматриваться как частицы). В качестве примеров можно привести движение капель топлива в вихревой камере сгорания, процессы фракционной классификации порошковых материалов в воздушно-центробежных классификаторах и сепараторах гидроциклонного типа и т.д.

Введение частиц в поток, естественно, влияет на характер движения несущей среды, особенно при высоких концентрациях частиц. Первым и весьма важным этапом в изучении двухфазных течений является анализ закономерностей движения одиночных частиц в известном поле скоростей несущей среды (траекторный подход). Результаты подобных исследований не только необходимы для построения более сложных моделей, но и представляют практический интерес, поскольку во многих случаях объемная концентрация частиц невелика и для описания закрученных потоков достаточно приближения одиночной частицы.

7.1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

Для данной задачи целесообразно применение метода Лагранжа при описании движения частиц, т.е. задача сводится к определению закона движения частицы в неподвижной (инерциальной) системе координат

$$\vec{r}_p = \vec{r}_p(r_0, \varphi_0, z_0, t), \quad (7.1)$$

где \vec{r}_p – радиус-вектор частицы (в данном случае в цилиндрической системе координат r, φ, z); r_0, φ_0, z_0 – переменные Лагранжа (координаты частицы в момент времени $t = t_0$).

Рассмотрим движение некоторой частицы А в потоке (газа или жидкости), который раскручивается против часовой стрелки до некоторого значения угловой скорости $\vec{\Omega}$ ($|\vec{\Omega}| = 2\pi n$; n – число оборотов в секунду).

При $|\vec{\Omega}| = const$ аксиальная и радиальная компоненты вектора скорости среды в неподвижной цилиндрической системе координат z, r, φ (рис. 7.1) равны нулю ($V_z = V_r = 0$), а радиальное распределение тангенциальной компоненты соответствует квазитвердому вращению:

$$V_\varphi(r) = |\vec{\Omega}|r = 2\pi nr. \quad (7.2)$$

При достижении некоторой постоянной угловой скорости вращения во вращающуюся среду в момент времени $t = t_0$ вводят частицу диаметром D на некотором расстоянии r_0 от оси вращения Oz . При этом начальные значения аксиальной и радиальной компонент вектора скорости частицы в неподвижной системе координат равны нулю ($u_{pz} = u_{pr} = 0$), а начальное значение тангенциальной компоненты $u_{p\varphi} = |\vec{\Omega}|r_0$.

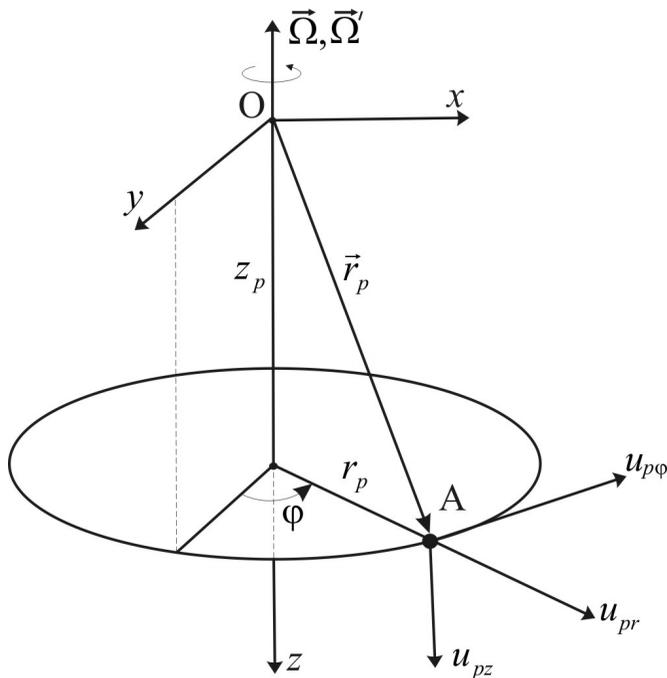


Рис. 7.1. Цилиндрическая (z, r, φ) и декартова (x, y, z) системы координат

Отметим, что, в отличие от угловой скорости среды $\vec{\Omega} = const$, величина угловой скорости вращения частицы $\vec{\Omega}'$ может изменяться по модулю за счет отставания частицы от вращающегося потока ($u_{p\varphi} \leq u_\varphi$):

$$|\vec{\Omega}'| = \left| \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right| = \frac{u_{p\varphi}}{r}. \quad (7.3)$$

В проекциях на оси координат закон движения частицы будет:

$$r = r(r_0, \varphi_0, z_0, t), \quad \varphi = \varphi(r_0, \varphi_0, z_0, t), \quad z = z(r_0, \varphi_0, z_0, t). \quad (7.4)$$

Зная закон движения (7.1) или (7.4), можно найти скорость \vec{u}_p и ускорение \vec{a}_p частицы в каждый момент времени [21]:

$$\vec{u}_p = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Ускорение частицы (материальной точки) в цилиндрической системе координат имеет вид [21]:

$$\vec{a}_p = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{e}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z. \quad (7.5)$$

С учетом (7.3) и (7.5) проекции вектора ускорения на орты \vec{e}_z , \vec{e}_r , \vec{e}_φ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_z &= \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{du_p^z}{dt}, \\ a_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{du_p^r}{dt} - \frac{(u_p^\varphi)^2}{r}, \\ a_\varphi &= 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{du_p^\varphi}{dt} + \frac{u_p^r u_p^\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения частицы в закрученном потоке в неподвижной системе координат можно представить в виде

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (7.7)$$

где $m = \rho_p \frac{\pi D^3}{6}$ – масса частицы диаметром D ; ρ_p – плотность материала частицы; \vec{F}_i – внешние силы, действующие на частицу в потоке.

Уравнение (7.7) есть, по сути, дифференциальное уравнение движения частицы в векторном виде. Решая это уравнение, можно найти закон движения частицы (7.1), т.е. зависимость от времени ее радиус-вектора $\vec{r}(t)$, если известны m , \vec{F}_i и начальные условия (начальная скорость частицы \vec{u}_0 и ее положение \vec{r}_0 в момент времени $t = t_0$). Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения (7.7).

7.2. АНАЛИЗ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЧАСТИЦУ

Для закрученного двухфазного потока структура действующих на частицу сил гораздо сложнее, чем, например, в случае гравитационной седиментации или в квазиодномерном потоке. Проанализируем основные силы, действующие на частицу в закрученном потоке [22].

При отсутствии взаимодействия частиц между собой и со стенками канала основными силами, действующими на частицу, являются сила тяжести \vec{F}_g , подъемная сила (сила Архимеда) \vec{F}_A , сила, обусловленная радиальным градиентом давления несущей среды («центробежная сила Архимеда») $\vec{F}_{A\phi}$, сила аэродинамического сопротивления \vec{F}_s .

Сила тяжести, действующая в направлении вектора свободного падения \vec{g} :

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = \rho_p V_p \vec{g}, \quad (7.8)$$

где V_p – объем частицы.

Сила Архимеда действует в направлении, противоположном вектору \vec{g} , и выражается формулой

$$\vec{F}_A = -\rho V_p \vec{g} = -m \frac{\rho}{\rho_p} \vec{g}, \quad (7.9)$$

где ρ – плотность несущей среды.

Сила, обусловленная изменением давления несущей среды по поверхности частицы (радиальным градиентом $\partial p / \partial r$, так как в закрученном потоке преобладающим является изменение давления по радиусу):

$$\vec{F}_{A\phi} = \iint_S \vec{n} p dS = \iiint_V \text{grad } p dV,$$

где S – поверхность частицы; \vec{n} – нормаль к элементу поверхности dS .

Для частиц малых размеров изменением $\text{grad } p$ по объему частицы можно пренебречь и с учетом теоремы о среднем записать:

$$\vec{F}_{A\phi} = V_p \text{grad } p = V_p \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r, \quad (7.10)$$

где $\text{grad } p$ – градиент давления среды, взятый в точке, совпадающей с центром объема частицы.

Эта сила, направленная по радиусу в сторону оси вращения, по аналогии с подъемной силой может быть названа «центробежной силой Архимеда».

Из анализа уравнений закрученного потока можно показать, что при малых значениях радиальной скорости потока u_r

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho u_\phi^2}{r}. \quad (7.11)$$

Подставляя (7.11) в (7.10), получим выражение для центробежной силы Архимеда в виде

$$\vec{F}_{A\phi} = V_p \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r = -\rho V_p \frac{u_\phi^2(r)}{r} = -m \frac{\rho}{\rho_p} \frac{u_\phi^2(r)}{r}. \quad (7.12)$$

Сила сопротивления, обусловленная относительным движением частиц и несущей среды, зависит от относительной скорости движения частицы \vec{u}_p и несущей среды \vec{u} и определяется формулой

$$\vec{F}_s = C_D S_p \frac{\rho}{2} (\vec{u} - \vec{u}_p) \sqrt{(u_z - u_{pz})^2 + (u_r - u_{pr})^2 + (u_\phi - u_{p\phi})^2}, \quad (7.13)$$

где $S_p = \pi D^2 / 4$ – площадь миделева сечения частицы; C_D – безразмерный коэффициент сопротивления.

Уравнение движения частицы с учетом рассмотренных сил \vec{F}_i и соотношений (7.6) в проекциях на оси цилиндрической системы координат r, φ, z с направленной вниз осью z сводятся к следующей системе (7.14):

$$\begin{cases} \frac{du_{pz}}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_p} \right) - C_D \frac{3}{4} \frac{\rho u_{pz}}{\rho_p D} \sqrt{(u_{pz})^2 + (u_{pr})^2 + (u_\varphi - u_{p\varphi})^2}, \\ \frac{du_{pr}}{dt} = \frac{1}{r} \left((u_{p\varphi})^2 - \frac{\rho}{\rho_p} u_\varphi^2 \right) - C_D \frac{3}{4} \frac{\rho u_{pr}}{\rho_p D} \sqrt{(u_{pz})^2 + (u_{pr})^2 + (u_\varphi - u_{p\varphi})^2}, \\ \frac{du_{p\varphi}}{dt} = -\frac{u_{p\varphi} u_{pr}}{r} + C_D \frac{3}{4} \frac{\rho (u_\varphi - u_{p\varphi})}{\rho_p D} \sqrt{(u_{pz})^2 + (u_{pr})^2 + (u_\varphi - u_{p\varphi})^2}. \end{cases}$$

Последние слагаемые в правых частях уравнений (7.14) обусловлены силой сопротивления. Первое слагаемое в первом уравнении системы (7.14) обусловлено силой Архимеда и силой тяжести. Первое слагаемое во втором уравнении системы (7.14) обусловлено центробежным ускорением и центробежной силой Архимеда, а в третьем уравнении системы (7.14) – ускорением Кориолиса.

При $\rho = \rho_p$ все силы, действующие на частицу, обусловлены отличием ее скорости от скорости среды и направлены в сторону сближения скоростей потока и частиц. При достижении равенства $\vec{u} = \vec{u}_p$ все приложенные к частице силы будут равны нулю и частица будет двигаться вместе с потоком.

Отметим, что закон Ньютона справедлив только в инерциальной системе координат, движение частицы в которой обусловлено только силами взаимодействия частицы с несущим потоком. При использовании неинерциальной системы (например, связанной с вращающейся вокруг оси z частицей) для выполнения закона Ньютона вводятся силы инерции (центробежная сила инерции и сила Кориолиса). Математическая запись уравнений движения (7.14) при этом сохраняется (меняется только физический смысл входящих в них членов).

Для расчета траекторий частиц к уравнениям движения (7.14) необходимо присоединить кинематические соотношения:

$$u_p^z = \frac{dz_p}{dt}, \quad u_p^r = \frac{dr_p}{dt}, \quad u_p^\varphi = \frac{1}{r_p} \frac{d\varphi_p}{dt}, \quad (7.15)$$

где $\vec{r}_p(z_p, r_p, \varphi_p)$ – радиус-вектор частицы.

Полученная система уравнений (7.14) после подстановки в нее заданных компонент вектора скорости несущего потока (u_z, u_r, u_φ) интегрируется численно (например методом Рунге – Кутты) с учетом соответствующих начальных условий ввода частиц в поток. В частности, для рассматриваемой задачи начальными условиями являются:

$$t = t_0 : \begin{cases} z_p = 0, r_p = r_0, \varphi_p = 0, \\ u_{pz} = 0, u_{pr} = 0, u_{p\varphi} = 2\pi nr_0. \end{cases}$$

Для стоксовского режима ($Re < 1$) сила сопротивления задается законом

$$\vec{F}_s = 3\pi\mu D(\vec{u} - \vec{u}_p). \quad (7.16)$$

С учетом (7.16) система уравнений (7.14) сводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{du_{pz}}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) - \frac{18\mu}{\rho_p D^2} u_{pz}, \\ \frac{du_{pr}}{dt} = \frac{1}{r} \left((u_{p\varphi})^2 - \frac{\rho}{\rho_p} u_\varphi^2 \right) - \frac{18\mu}{\rho_p D^2} u_{pr}, \\ \frac{du_{p\varphi}}{dt} = -\frac{u_{p\varphi} u_{pr}}{r} + \frac{18\mu}{\rho_p D^2} (u_\varphi - u_{p\varphi}), \end{cases} \quad (7.17)$$

где $u_\varphi = 2\pi nr$.

Первое уравнение в системе (7.17) имеет аналитическое решение, полученное в разделе 6.1. Это решение в размерном виде сводится к следующей зависимости:

$$u_{pz} = \frac{D^2 g (\rho_p - \rho)}{18\mu} \left[1 - \exp \left(-\frac{18\mu}{(\rho_p - \rho) D^2} t \right) \right]. \quad (7.18)$$

Для автомодельной области ($Re = 10^3 \div 3 \cdot 10^5$, $C_D = 0,44$) с учетом (7.13) сила сопротивления определяется квадратичным законом

$$\vec{F}_s = 0,05\pi r D^2 |\vec{u} - \vec{u}_p| (\vec{u} - \vec{u}_p).$$

7.3. ТРАЕКТОРИЯ И СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

Траектория движения частицы в закрученном потоке (рис. 7.2) представляет собой спираль, расширяющуюся в направлении оси Oz. Вид спирали зависит от свойств несущей среды и частицы, в частности от диаметра частицы.

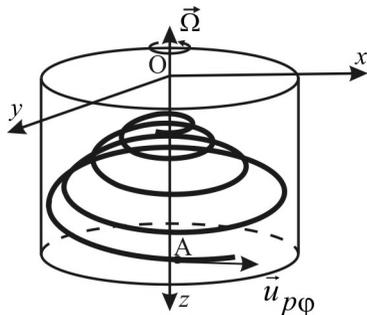


Рис. 7.2. Траектория движения частицы

После введения частицы во вращающийся поток она движется в радиальном направлении с радиальной скоростью u_{pr} , вниз с аксиальной скоростью u_{pz} и по окружности с тангенциальной скоростью $u_{pφ}$.

В квазистационарном режиме движения (когда $\frac{du_{pz}}{dt} = \frac{du_{pr}}{dt} = \frac{du_{pφ}}{dt} = 0$) составляющие скорости частицы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u_{pz} &= \frac{gD^2(\rho_p - \rho)}{18\mu}, \\
 u_{pr}(r) &= \frac{\left[(u_{pφ}(r))^2 - \frac{\rho}{\rho_p} u_{φ}^2(r) \right] \rho_p D^2}{18\mu r}, \\
 u_{pφ}(r) &= \frac{u_{φ}}{\left(\frac{u_{pr}(r) \rho_p D^2}{18r\mu} + 1 \right)}.
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Аксиальная компонента скорости не зависит от радиальной координаты r . Радиальная и тангенциальная компоненты скорости движения частицы являются функциями координаты r .

Рассмотрим случай, когда тангенциальная компонента скорости движения частицы равна скорости движения несущей среды ($u_{p\varphi} = u_{\varphi} = 2\pi nr$). Тогда выражение (7.19) примет вид

$$u_{pr}(r) = \frac{(\rho_p - \rho)D^2 u_{\varphi}^2(r)}{18\mu r}. \quad (7.20)$$

График зависимости (7.20) приведен на рис. 7.3. Из рис. 7.3. видно, что радиальная компонента вектора скорости частицы линейно зависит от радиальной координаты – возрастает с увеличением ее диаметра и с уменьшением вязкости несущей дисперсионной среды.

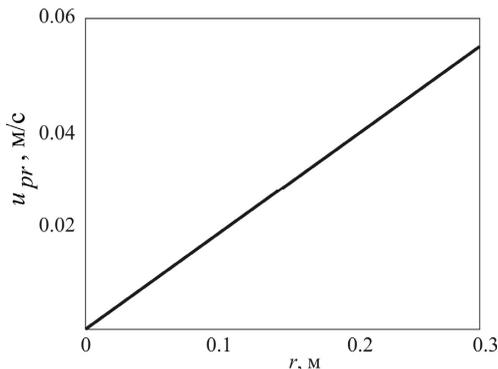


Рис. 7.3. Зависимость радиальной компоненты скорости движения частицы от времени ($D = 2$ мм, $\rho = 1\,270$ кг/м³, $\rho_p = 7\,750$ кг/м³, $\mu = 5$ Па·с, $n = 4$)

Однако случай, когда $u_{p\varphi} = u_{\varphi}$, встречается достаточно редко. При движении частицы в закрученном потоке в начальный момент времени частица движется равномерно с жидкостью в окружном направлении, а по мере увеличения радиальной координаты частицы значение тангенциальной компоненты вектора скорости частицы возрастает, и для частиц больших размеров происходит их отставание от несущего потока ($u_{p\varphi} < u_{\varphi}$). При этом отставание частицы от несущего потока уменьшается с увеличением вязкости дисперсионной среды с уменьшением диаметра частицы.

На рис. 7.4 и 7.5 приведены результаты численного интегрирования системы (7.17). Для вязких сред время выхода компоненты скорости u_{pr} на квазистационарный режим мало, поэтому практически сразу же от места ввода частицы во вращающийся поток зависимость радиальной компоненты вектора скорости частицы от радиальной координаты становится линейной.

Тангенциальная компонента вектора скорости частицы и среды и, следовательно, их разность линейно зависят от радиальной координаты.

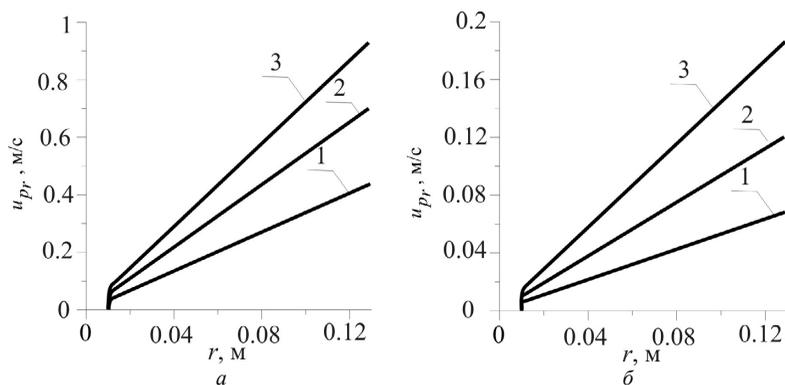


Рис. 7.4. Скорость частицы по оси Or в зависимости от радиальной координаты ($a - \mu = 2,2$ Па·с; $b - \mu = 15$ Па·с) при $n = 5,7$ об/с: 1 – $D = 3$ мм; 2 – $D = 4$ мм; 3 – $D = 5$ мм

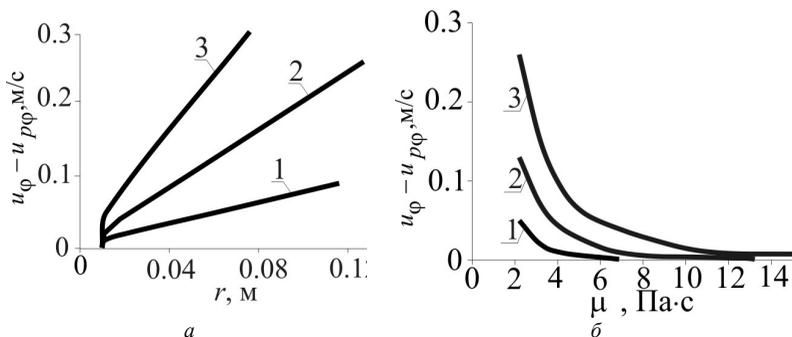


Рис. 7.5. Отставание частицы от несущего потока в зависимости от радиальной координаты для $\mu = 2,2$ Па·с (a) и от вязкости среды (b) при $n = 5,7$ об/с: 1 – $D = 3$ мм; 2 – $D = 4$ мм; 3 – $D = 5$ мм

7.4. УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦЫ

В отличие от гравитационного осаждения частицы, где ускорение массовых сил ω определяется ускорением свободного падения

$$\omega = g, \quad (7.21)$$

при движении частицы в закрученном потоке ускорение массовых сил увеличивается за счет добавления центробежного ускорения $\omega_{цб} = (2\pi n)^2 r$ и определяется выражением

$$\omega = \sqrt{g^2 + \omega_{цб}^2}. \quad (7.22)$$

Отметим, что формула (7.22) для расчета ω в поле центробежных массовых сил не учитывает ускорения частицы в потоке.

Рассмотрим сначала простейший случай – гравитационное осаждение частицы. При решении задачи о движении частицы в поле массовых сил обычно учитывают только три внешние силы: это сила тяжести, сила сопротивления и сила Архимеда. Однако наряду с перечисленными силами на частицу действует так называемая сила инерции $F = m du_z / dt$, которая направлена противоположно движению частицы с ускорением g (рис. 7.6, а). Следовательно, ускорение массовых сил (7.22) равно

$$\omega = g - \frac{du_{pz}}{dt}.$$

Стоит отметить, что слагаемое du_{pz} / dt учитывается только на участке установления квазистационарной скорости – участок I (рис. 7.6, б). Но поскольку в большинстве случаев время установления t_* квазистационарного участка падения (участок II) очень мало, то слагаемое du_{pz} / dt , как правило, не учитывают.

Проводя аналогичные рассуждения для случая движения частицы в поле центробежных сил, получим выражение для ускорения массовых сил инерции в следующем виде

$$\omega = \omega_{цб} - \frac{du_{pr}}{dt}. \quad (7.23)$$

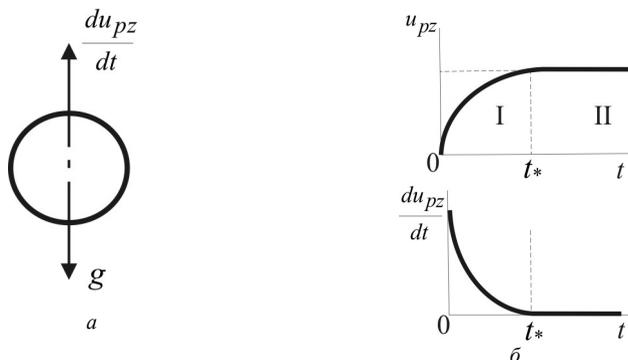


Рис. 7.6. Гравитационное осаждение частицы в поле массовых сил

В отличие от предыдущего случая, радиальная компонента скорости частицы возрастает в течение времени движения (рис. 7.7). Поэтому при расчете ускорения массовых сил ω необходимо учитывать поправку du_{pr} / dt .

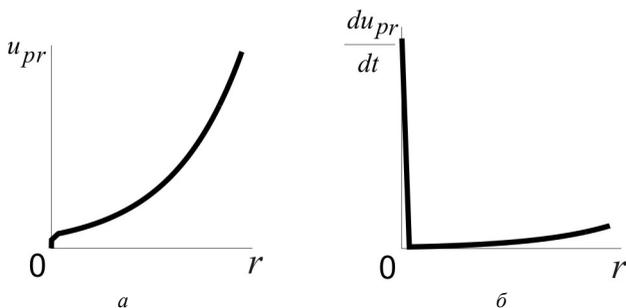


Рис. 7.7. Зависимость радиальной компоненты скорости (а) и ускорения (б) частицы от времени

Таким образом, согласно (7.23), суммарное ускорение частицы при движении в поле центробежных массовых сил равно:

$$\omega = \sqrt{g^2 + \left(\omega_{цб} - \frac{du_p^r}{dt} \right)^2}.$$

7.5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КАПЛИ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим результаты экспериментального исследования движения капли в закрученном потоке [23]. Исследование проводилось на примере движения капли ртути во вращающемся вязком растворе глицерин – хлористый цинк. Результаты экспериментального исследования получены для следующего диапазона значений определяющих параметров: $D = 4 \div 6$ мм, $n = 4 \div 9$ об/с, $Re = 0,01 \div 4$, $Bo = 6,4 \div 456$, $We = 0,01 \div 20$. Критерии подобия вычислялись для условий конкретных экспериментов по следующим формулам:

$$Re = \frac{\rho \sqrt{u_{pz}^2 + u_{pr}^2 + (u_\varphi - u_{p\varphi})^2} D}{\mu},$$

$$We = \frac{\rho [u_{pz}^2 + u_{pr}^2 + (u_\varphi - u_{p\varphi})^2] D}{\sigma},$$

$$Bo = \frac{\rho_p D^2}{\sigma} |\vec{\omega}|,$$

где $\vec{\omega}$ – вектор суммарного ускорения массовых сил, который складывается из трех компонент:

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{|\vec{\omega}_z|^2 + |\vec{\omega}_r|^2 + |\vec{\omega}_\varphi|^2},$$

где

$$|\vec{\omega}_z| = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right), \quad |\vec{\omega}_r| = \frac{1}{r} \left(u_{p\varphi}^2 - \frac{\rho}{\rho_p} u_\varphi^2 \right), \quad |\vec{\omega}_\varphi| = \frac{u_{pr} u_{p\varphi}}{r}.$$

Результаты видеосъемки показали, что после введения капли ртути в резервуар с вязким раствором она движется по спиралевидной траектории (рис. 7.8). На рис. 7.8 проведено сравнение положения капли в разные моменты времени с результатами численного расчета траектории движения капли (штрихпунктирная линия) для заданных начальных параметров.

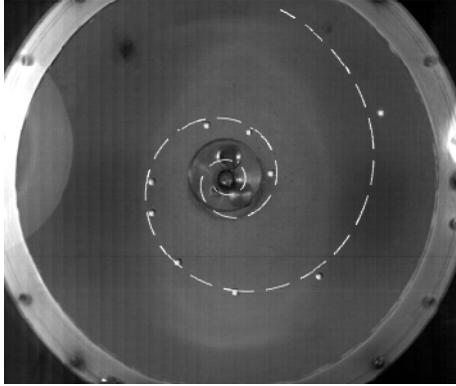


Рис. 7.8. Траектория капли, движущейся в закрученном потоке жидкости (вид сверху): $D = 4$ мм; $n = 4,2$ об/с; $\mu = 2,2$ Па·с

После введения капли ртути в резервуар с вязким раствором она движется в радиальном направлении к периферии резервуара с радиальной скоростью u_{pr} , вниз с аксиальной скоростью u_{pz} и по окружности с тангенциальной скоростью $u_{p\phi}$.

Результаты измерения радиальной компоненты вектора скорости капли в зависимости от ее размера показали, что с увеличением диаметра капли скорость ее движения по оси r возрастает (рис. 7.9). На рис. 7.9 сплошные линии – аппроксимационные кривые, построенные с использованием метода наименьших квадратов. Для приведенных на рис. 7.9 экспериментальных данных критерии подобия, рассчитанные с использованием измеренных значений компонент скорости, варьировались в следующих диапазонах: $Re = 0,01 \div 0,15$, $Bo = 20 \div 204$, $We = 0,01 \div 2,1$.

Результаты экспериментов показали, что отставание капли от вращающейся жидкости при тангенциальном движении зависит от параметров эксперимента. На рис. 7.10 приведены осредненные по трем опытам зависимости тангенциальной компоненты вектора скорости капли $u_{p\phi}(r)$ и рассчитанные зависимости тангенциальной компоненты вектора скорости жидкости $u_{\phi}(r) = 2\pi nr$ для заданных значений начальных параметров. Из рис. 7.10 видно, что при увеличении вязкости среды ($\mu = 15$ Па·с) капля движется в закрученном потоке вязкой жидкости без отставания.

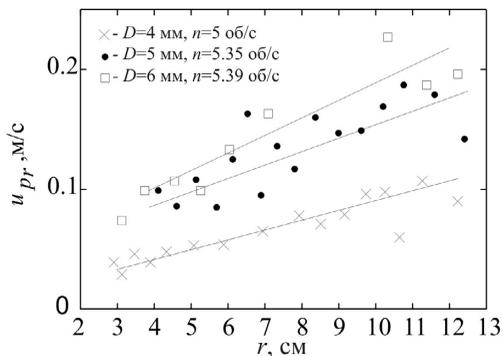


Рис. 7.9. Распределения $u_{pr}(r)$ для капли разных диаметров ($\mu = 15$ Па·с)

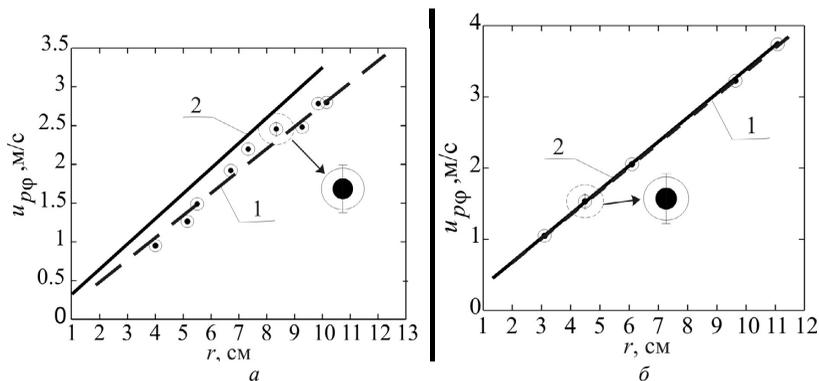


Рис. 7.10. Распределения $u_{pφ}(r)$ для капли диаметром $D = 6$ мм:

$a - n = 15$ об/с, $\mu = 2,2$ Па·с; $b - n = 5,39$ об/с, $\mu = 15$ Па·с

(1 – аппроксимация экспериментальных данных;

2 – тангенциальная компонента скорости жидкости)

На рис. 7.11 приведены результаты сравнения рассчитанных и экспериментальных зависимостей для радиальной $u_{pr}(r)$ и тангенциальной $u_{pφ}(r)$ компонент вектора скорости капли при разных значениях параметров эксперимента. Сравнение экспериментальных и расчетных значений компонент вектора скорости движения капли в закрученном потоке показало, что данные хорошо согласуются между собой (расхождение

результатов для радиальной компоненты не превышает 10%, а для тангенциальной – 3%). Отклонение теоретических данных от экспериментальных связано, по-видимому, со сложностью выбора адекватной зависимости для коэффициента сопротивления C_D , соответствующей реальным условиям экспериментов.

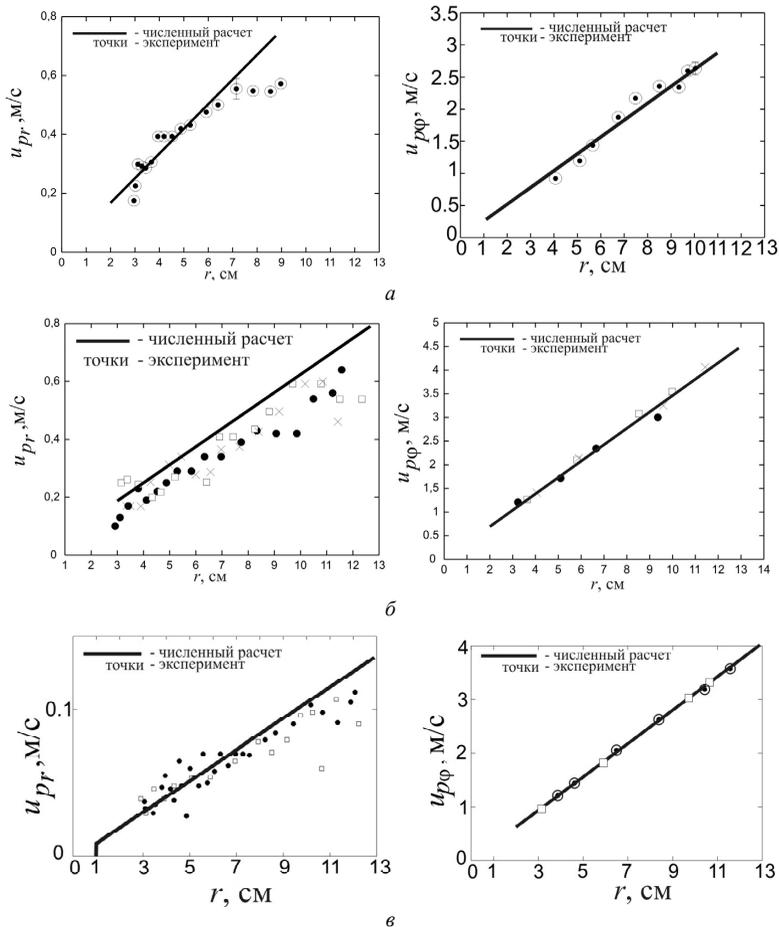


Рис. 7. 11. Сравнение экспериментальных и расчетных данных по компонентам вектора скорости капли: а – $D = 6$ мм, $n = 5,17$ об/с, $\mu = 2,2$ Па·с; б – $D = 6$ мм, $n = 5,94$ об/с, $\mu = 6,63$ Па·с; в – $D = 4$ мм, $n = 4,99$ об/с, $\mu = 15$ Па·с

8. ТЕОРИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКИ

Одной из важнейших областей применения теории двухфазных течений является технология распыливания жидкостей. В настоящее время используется целый ряд форсунок с различными принципами распыливания. Наибольшее практическое применение нашли центробежные форсунки (ЦБФ).

Форсункой называется устройство для распыливания жидкости, широко используемое в различных отраслях техники. Приведем основные области применения форсунок.

- Подготовка горючей смеси в жидкостных ракетных двигателях, двигателях внутреннего сгорания, горелках, топках, котельных установках и т.п.
- Системы охлаждения горячих газов в аппаратах химической технологии.
- Устройства для диспергирования жидкостей.
- Получение тонкодисперсных порошков из расплавов металлов.

8.1. УСТРОЙСТВО И ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ

Центробежная форсунка (рис. 8.1) состоит из камеры закручивания, входных тангенциальных каналов и выходного сопла.

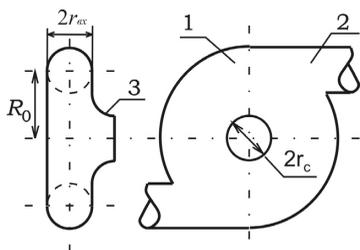


Рис. 8.1. Схема центробежной форсунки:

- 1 – камера закручивания;
- 2 – входные каналы;
- 3 – сопло

Характеристики ЦБФ определяются следующими геометрическими параметрами:

R_0 – плечо закручивания (расстояние от оси симметрии ЦБФ до оси входного канала);

r_c – радиус сопла;

$r_{\text{вх}}$ – радиус входного канала;

n – количество входных каналов;

$S_{\text{вх}} = n\pi r_{\text{вх}}^2$ – суммарная площадь входных каналов.

Жидкость вводится в ЦБФ тангенциально, вследствие чего поток закручивается. При выходе жидкости из сопла действие центробежных сил от твердых стенок прекращается, и истекающая струя в результате нестационарных колебаний распадается на капли. При этом капли разлетаются по прямолинейным лучам, составляющим угол α с осью ЦБФ (рис. 8.2).

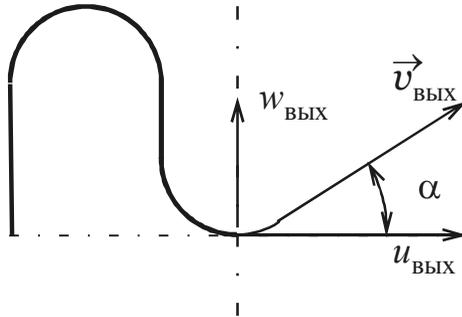


Рис. 8.2. Движение жидкости в ЦБФ

Угол распыла 2α является важнейшей характеристикой ЦБФ, его величина определяется значениями аксиальной $u_{\text{ВЫХ}}$ и тангенциальной $w_{\text{ВЫХ}}$ компонент вектора скорости $\vec{v}_{\text{ВЫХ}}$ в выходном сечении сопла:

$$\alpha = \arctg \left(\frac{w_{\text{ВЫХ}}}{u_{\text{ВЫХ}}} \right).$$

Кроме геометрических параметров на характеристики ЦБФ влияют перепад давления (разность между давлением на входе и выходе форсунки) $\Delta p = p_{\text{вх}} - p_{\text{вых}}$ и физические свойства распыливаемой жидкости (плотность ρ , коэффициент динамической вязкости μ , коэффициент поверхностного натяжения σ).

8.2. ТЕОРИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Теория ЦБФ для идеальной (невязкой) жидкости разработана Г.Н. Абрамовичем более 50 лет назад и до настоящего времени широко используется при расчете форсунок [24].

В соответствии с законом сохранения момента импульса для идеальной жидкости момент импульса любой жидкой частицы относительно оси ЦБФ постоянен:

$$w_{\text{вх}} \cdot R_0 = w \cdot r = \text{const} , \quad (8.1)$$

где $w_{\text{вх}}$ – скорость жидкости во входном канале; w – значение тангенциальной скорости на радиусе r .

Для идеальной жидкости запас энергии в потоке не изменяется и определяется уравнением Бернулли:

$$p_{\text{вх}} + \frac{\rho w_{\text{вх}}^2}{2} = p + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho w^2}{2} = \text{const} . \quad (8.2)$$

где u – аксиальная компонента скорости.

Из (8.2) с учетом (8.1) можно получить выражение

$$\frac{p}{\rho} = H - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} \right) , \quad (8.3)$$

где $H = \frac{p_{\text{вх}}}{\rho} + \frac{w_{\text{вх}}^2}{2} = \text{const}$ – полный напор.

Из (8.1) следует, что на оси ЦБФ ($r \rightarrow 0$) скорость потока стремится к бесконечности:

$$w = \frac{w_{\text{вх}} \cdot R_0}{r} \rightarrow \infty .$$

Из (8.3) следует, что давление на оси форсунки $p \rightarrow -\infty$, что физически невозможно.

Следовательно, должен существовать механизм, поддерживающий некоторую конечную величину давления на оси ЦБФ. Форсунка распыливает жидкость в среду с давлением p_a при истечении в атмосферу. При распыливании жидкости в камеру сгорания ЖРД внешнее давление

равно давлению в камере сгорания двигателя p_k . Внутренняя полость форсунки сообщается с атмосферой, и давление закрученного потока жидкости не может быть ниже p_a . Поэтому величина w возрастает по мере приближения к оси ($r \rightarrow 0$) до тех пор, пока давление в закрученном потоке жидкости не достигнет p_a . Дальнейшее уменьшение давления (и, следовательно, возрастание скорости w) физически невозможно.

Из этого следует важный вывод: центральная часть ЦБФ, где $p = p_a$, не заполнена жидкостью. В ней образуется газовый вихрь радиусом $r_г$, избыточное давление в котором равно нулю, т.е. $p_г = p_a$. Таким образом, истечение жидкости происходит через кольцевое сечение (живое сечение), ограниченное радиусами $r_г$ (радиус воздушного вихря) и r_c (радиус сопла). Площадь живого сечения равна

$$F_{жс} = \pi(r_c^2 - r_г^2) = \varphi_{жс} \pi r_c^2,$$

где коэффициент живого сечения ЦБФ $\varphi_{жс}$ определяется формулой

$$\varphi_{жс} = 1 - \left(\frac{r_г}{r_c} \right)^2.$$

Распределение аксиальной скорости в выходном сечении сопла

Рассмотрим элементарную кольцевую площадку в выходном сечении сопла ЦБФ площадью $dS = 2\pi r dr$ (рис. 8.3).

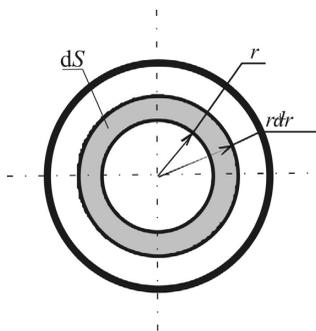


Рис. 8.3. Элементарная кольцевая площадка в выходном сечении сопла ЦБФ

Согласно принципу Даламбера, перепад давления на боковых поверхностях площадки уравнивается действием центробежной силы, приходящейся на единицу поверхности кольцевого элемента:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho w^2}{r}. \quad (8.4)$$

Из условия сохранения момента импульса (8.1) следует

$$r = \frac{w_\theta r_\theta}{w}, \quad (8.5)$$

где w_θ – тангенциальная скорость на границе вихря ($r = r_\theta$).

Продифференцировав (8.5), подставляем полученное значение dr в (8.4), и после интегрирования получим:

$$\frac{p}{r} = -\frac{w^2}{2} + C,$$

где C – константа интегрирования.

На границе газового вихря избыточное давление равно нулю, а $w = w_\theta$, следовательно $C = \frac{w_\theta^2}{2}$.

Отсюда:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{w_\theta^2 - w^2}{2}. \quad (8.6)$$

Из (8.3) и (8.6) получим:

$$\frac{u^2(r)}{2} = H - \frac{w_\theta^2}{2} = \text{const}.$$

Таким образом, аксиальная компонента вектора скорости в выходном сечении сопла постоянна и равна

$$u = \sqrt{2 \left(H - \frac{w_\theta^2}{2} \right)}.$$

Расчетные формулы для коэффициента расхода

Введем понятие эквивалентной скорости истечения – это фиктивная скорость, которая получилась бы, если бы расход жидкости осуществлялся не через живое сечение $F_{жс}$, а через всю площадь сечения сопла

$$F_c = \pi r_c^2 :$$

$$u_e = \frac{Q}{\pi r_c^2} ,$$

где Q – объемный расход жидкости:

$$Q = u F_{жс} = \varphi_{жс} u \pi r_c^2 = u_e \pi r_c^2 .$$

Значения u и u_e связаны соотношением

$$u_e = \varphi_{жс} u .$$

Из условия сохранения расхода на входе и выходе форсунки $Q_{вх} = Q_{вых}$ можно получить:

$$w_{вх} n r_{вх}^2 = u_e r_c^2 , \quad w_{вх} = \frac{u_e r_c^2}{n r_{вх}^2} .$$

Найдем распределение тангенциальной скорости $w(r)$ через u_e . Из закона сохранения момента импульса следует:

$$w(r) = u_e \frac{R_0}{n r} \left(\frac{r_c}{r_{вх}} \right)^2 .$$

На стенке ($r = r_c$):

$$w_{см} = \frac{u_e R_0 r_c}{n r_{вх}^2} .$$

На границе вихря ($r = r_{в}$):

$$w_{в} = u_e \frac{R_0}{n r_{в}} \left(\frac{r_c}{r_{вх}} \right)^2 = u_e \frac{R_0 r_c}{n r_{вх}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi_{жс}}} .$$

Таким образом, тангенциальная скорость распределена по закону квазипотенциального вращения.

Вводя коэффициент живого сечения $\varphi_{жс}$, можно получить выражение для эквивалентной скорости в виде

$$u_e = \sqrt{2H} \left(\frac{1}{\varphi_{жс}^2} + \frac{A^2}{1 - \varphi_{жс}} \right)^{-1/2} = \varphi \sqrt{2H} = \varphi \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}},$$

где φ – коэффициент расхода форсунки;

$$A = \frac{\pi R_0 r_c}{S_{вх}} = \frac{R_0 r_c}{\pi r_{вх}^2} - \text{геометрическая характеристика ЦБФ.}$$

Из (8.5) следует, что коэффициент расхода φ связан с величиной $\varphi_{жс}$:

$$\varphi = \left(\frac{1}{\varphi_{жс}^2} + \frac{A^2}{1 - \varphi_{жс}} \right)^{-1/2}. \quad (8.7)$$

Зависимость $\varphi(\varphi_{жс})$ неоднозначна. Для ее конкретизации используется принцип максимума расхода, который формулируется следующим образом: при заданном напоре H устойчивым будет такой вихрь, размер которого определяется величиной r_θ (или связанной с r_θ величиной $\varphi_{жс}$), который обеспечивает максимум расхода жидкости через ЦБФ.

Следовательно, в (8.7) выражение в скобках должно быть минимальным. Найдем экстремум, приравнявая к нулю производную:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_{жс}} \left(\frac{1}{\varphi_{жс}^2} + \frac{A^2}{1 - \varphi_{жс}} \right) = 0. \quad (8.8)$$

Из (8.8) следует:

$$A = \frac{1 - \varphi_{жс}}{\sqrt{\varphi_{жс}^3/2}}; \quad \varphi = \sqrt{\frac{\varphi_{жс}^3}{2 - \varphi_{жс}}}.$$

Таким образом, коэффициенты расхода φ и живого сечения $\varphi_{жс}$ полностью определяются геометрической характеристикой форсунки A и не

зависят от режима работы ЦБФ. Зависимость коэффициента живого сечения от геометрической характеристики форсунки приведена на рис. 8.4.

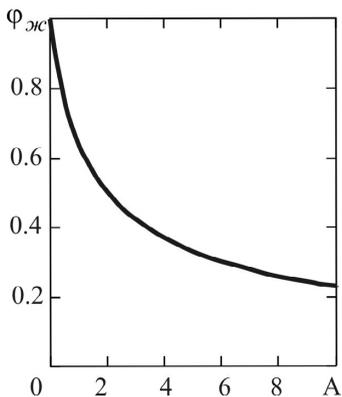


Рис. 8.4. Зависимость $\varphi_{жс}(A)$

Расчет угла распыла

Выше мы нашли распределения $u(r)$ и $w(r)$ в выходном сечении:

$$u_{вых} = \text{const}, \quad w_{вых} = \frac{\text{const}}{r},$$

т.е. угол распыла неодинаков. Частицы, находящиеся ближе к оси ЦБФ, имеют больший угол распыла. При расчетах принимают среднее значение α , соответствующее среднему значению тангенциальной скорости:

$$\text{tg } \alpha_{ср} = \frac{w_{ср}}{u_{вых}},$$

где $w_{ср} = \frac{w_c r_c}{r_{ср}}$, $r_{ср} = \frac{r_c + r_{\theta}}{2}$.

Подставляя эти значения в формулу для угла распыла, получим после некоторых преобразований:

$$\text{tg } \alpha_{ср} = 2\varphi A \left[\left(1 + \sqrt{1 - \varphi_{жс}} \right)^2 - 4\varphi^2 A^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.9)$$

Из (8.9) следует, что угол распыла $2\alpha_{cp}$ однозначно определяется величиной коэффициента живого сечения $\varphi_{жс}$ (или связанной с ней величиной A) и не зависит от режима работы форсунки, которая определяется величиной перепада давления Δp .

Таким образом, геометрическая характеристика A полностью определяет параметры распыливания и является важнейшим критерием подобия центробежной форсунки. Определив величину A по заданной геометрии форсунки (r_c, r_{ex}, R_0, n), можно рассчитать все параметры распыла ($u_{вых}, w_{вых}, \alpha_{cp}, \varphi_{жс}, \varphi$). Массовый секундный расход жидкости через форсунку рассчитывается по формуле

$$G = \rho Q = \varphi \pi r_c^2 \rho \sqrt{2H} = \varphi \pi r_c^2 \sqrt{2\rho \Delta p}.$$

8.3. ТЕОРИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКИ ДЛЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В теории Абрамовича полагалось, что вязкость жидкости $\mu = 0$ и момент количества движения M неизменен по всему тракту форсунки:

$$M = \rho w r = \text{const}.$$

Реальная жидкость всегда вязкая ($\mu \neq 0$), поэтому за счет внутреннего трения происходят потери момента импульса, т.е. всегда $M_{вых} < M_{ex}$. Чем больше потери, тем сильнее расчеты по теории Абрамовича отличаются от опытных данных (в реальном случае больше коэффициент расхода φ и меньше угол распыла $2\alpha_{cp}$). Уменьшение интенсивности закрутки на выходе ведет к уменьшению размера газового вихря r_g , увеличению коэффициента живого сечения $\varphi_{жс}$ и уменьшению тангенциальной скорости $w_{вых}$.

При анализе течения вязкой жидкости в ЦБФ Л.С. Клячко установил, что изменение момента количества движения жидкости по тракту форсунки описывается формулой

$$M = M_{ex} \left[1 + \frac{\xi}{2} \left(\frac{B^2}{n} - A \right) \right]^{-1}, \quad (8.10)$$

где $M_{\text{вх}} = \rho w_{\text{вх}} R_0$ – момент количества движения на входе ЦБФ;
 ξ – безразмерный коэффициент трения; $B = \frac{R_0}{nr_{\text{вх}}}$ – безразмерный ко-
 плекс.

Из (8.10) следует, что M уменьшается с ростом ξ и B . Аналогично теории Абрамовича можно получить выражение для коэффициента расхода:

$$\varphi = \left(\frac{A_e}{1 - \varphi_{\text{жс}}} + \frac{1}{\varphi_{\text{жс}}^2} \right)^{-1/2}, \quad (8.11)$$

где

$$A_e = A \left[1 + \frac{\xi}{2} \left(\frac{B^2}{n} - A \right) \right]^{-1}. \quad (8.12)$$

Здесь A_e – эквивалентная геометрическая характеристика форсунки.

Функциональная связь между A_e и $\varphi_{\text{жс}}$ определяется так же, как и для идеальной ЦБФ, из принципа максимума расхода:

$$A_e = \frac{1 - \varphi_{\text{жс}}}{\sqrt{\frac{3}{2} \varphi_{\text{жс}}^3}}.$$

Аналогично получаем выражение для среднего угла распыла жидкости:

$$\text{tg } \alpha_{cp} = 2\varphi A_e \left[\left(1 + \sqrt{1 - \varphi_{\text{жс}}} \right)^2 - 4\varphi^2 A_e^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.13)$$

Таким образом, формулы (8.11) и (8.13) для расчета коэффициента расхода и угла распыла полностью совпадают с формулами для идеальной жидкости, если A заменить на A_e .

Сравнивая уравнения (8.10) и (8.12), получим:

$$\frac{M}{M_{\text{вх}}} = \frac{A_e}{A}.$$

Таким образом, величина A_e учитывает уменьшение момента импульса в камере закручивания. Поскольку $A_e < A$, то для вязкой жидкости угол распыла $2\alpha_{cp}$ меньше, а коэффициент расхода φ больше, чем для идеальной жидкости.

Рассмотрим, как меняется A_e при изменении геометрии ЦБФ (при увеличении плеча закручивания R_0 и при уменьшении радиуса входных каналов r_{ex}). Из (8.12) следует:

$$A_e = R_0 r_c \left[n r_{ex}^2 + \frac{\xi R_0 (R_0 - r_c)}{2} \right]^{-1}.$$

Сравним поведение A_e и $A = \frac{R_0 r_c}{n r_{ex}^2}$.

1. Пусть $r_c = \text{const}$, $r_{ex} = \text{const}$, $n = \text{const}$, $\xi = \text{const}$, а R_0 неограниченно увеличивается.

2. Пусть r_{ex} неограниченно уменьшается при постоянстве остальных геометрических параметров.

При этом для идеальной жидкости

$$A \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0, 2\alpha_{cp} \rightarrow 2\pi.$$

В отличие от идеальной жидкости, величина A_e ограничена сверху (рис. 8.5), а ее максимальное значение зависит от способа регулирования (уменьшение r_{ex} или увеличение R_0). При $r_{ex} \rightarrow 0$ величина

$$A_{e, \max} = \frac{2r_c}{\xi(R_0 - r_c)}. \quad (8.14)$$

Следовательно, для реальной жидкости коэффициент расхода имеет некоторое минимальное значение (стремится не к нулю, а к φ_{min}).

Угол распыла для реальной жидкости также не может превышать некоторого максимального значения. Значения φ_{min} и $2\alpha_{max}$ определяются максимальным значением A_e . Увеличить угол распыла за счет уменьшения r_{ex} технологически сложно, кроме того, с уменьшением r_{ex} возникает опасность засорения входных каналов. Можно достичь увели-

чения 2α путем снижения ξ (повысить класс чистоты при изготовлении форсунки или подогреть жидкость).

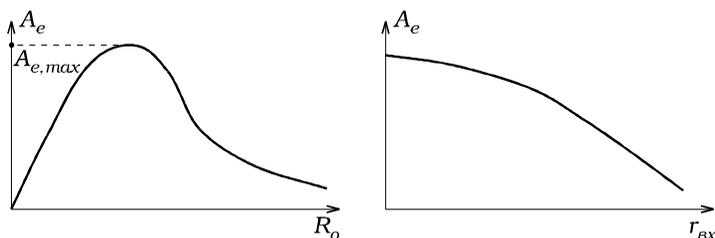


Рис. 8.5. Зависимости A_e для реальной жидкости от Re_0 и r_{ex}

Для практического использования полученных формул необходимо знать коэффициент трения ξ , который по рекомендации Л.С. Клячко можно взять в виде

$$\lg \xi = \frac{25,8}{(\lg Re_{ex})^{2,58}} - 2, \quad (8.15)$$

где число Re_{ex} определяется из условий на входе в ЦБФ:

$$Re_{ex} = \frac{2\rho w_{ex} r_e}{\mu}.$$

Здесь $r_e = r_{ex} \sqrt{n}$, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости.

8.4. ПРОЦЕСС РАСПЫЛИВАНИЯ

Распыливание – это процесс распада струи жидкости, истекающей из ЦБФ, на капли и дальнейшего их дробления на более мелкие. Распад струи происходит под действием внешних и внутренних сил. Внешние силы обусловлены аэродинамическим воздействием на поверхность струи. Величина этих сил зависит от относительной скорости движения жидкости, плотности окружающей среды, размера частиц жидкости и других факторов. К внутренним относятся инерционные и молекулярные силы, связанные с вязкостью и поверхностным натяжением жидкости.

Турбулизация струи приводит к появлению в ней периодических колебаний с возрастающей амплитудой. Под влиянием внутренних и внеш-

них сил возникают волны малой длины. Струя теряет устойчивость и распадается на капли с ростом амплитуды колебаний (рис. 8.6).

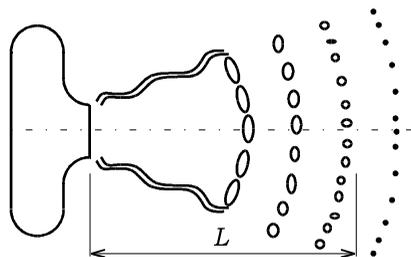


Рис. 8.6. Эволюция капель в факеле распыла

Качество распыливания определяется тонкостью и однородностью распыла, а также формой и дальностью факела. Тонкость распыла характеризуется диаметром капель D ; чем меньше D , тем тоньше распыл (выше дисперсность образующихся капель). Однородность распыла характеризуется диапазоном изменения диаметра капель. Глубина проникновения распыленной жидкости в газовую среду называется дальностью факела распыла.

Дисперсность капель в факеле распыла

Тонкость и однородность распыла характеризуются функцией распределения капель жидкости по размерам $f(D)$ или некоторым средним размерам капель D_{cp} . Для определения тонкости распыла используются эмпирические формулы, приведем одну из них [25]:

$$D_m = 2r_c \frac{47,8}{A^{0,6} \Pi^{0,1} Re^{0,7}}, \quad (8.16)$$

где D_m – средний медианный диаметр капель (средний диаметр, при котором относительная масса капель с размерами от нуля до D_m составляет половину массы всех капель);

$$Re = 2\rho u_e r_c / \mu, \quad \Pi = \mu^2 / (2\rho \sigma r_c),$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения распыливаемой жидкости.

Эта зависимость получена для следующих диапазонов изменения определяющих параметров:

$$\begin{aligned} A &= 1,72 \div 9,51; & \Delta p &= 0,1 \div 3,0 \text{ МПа}; \\ r_c &= 0,18 \div 0,79 \text{ мм}; & \sigma &= (2,97 \div 7,44) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1}; \\ \rho &= (1,0 \div 1,19) \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}; & \mu &= 10^{-4} \div 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}. \end{aligned}$$

Анализ формулы (8.16) показывает, что величина $D_m = 20 \div 150$ мкм.

Однородность распыла увеличивается с ростом Δp и давления окружающей среды. Увеличение μ и σ ведет к снижению тонкости распыла (росту D_m). Влияние A очень велико – с ростом A уменьшаются коэффициент живого сечения $\varphi_{жс}$ и толщина жидкостной пленки, что ведет к лучшему распыливанию. Тонкость распыла повышается также с ростом давления окружающей среды.

С точки зрения завершения процесса горения в малом объеме камеры сгорания увеличение дальности факела нежелательно. Управлять этим параметром можно путем варьирования величины A . Увеличение A ведет к росту угла распыла $2\alpha_{ср}$, тонкости распыла и, следовательно, к увеличению аэродинамического сопротивления факела и к снижению его дальности.

Плотность орошения

Плотность орошения является очень важной характеристикой ЦБФ. Это радиальное и осевое распределения относительного расхода капель, которые находятся, как правило, экспериментально:

$$\bar{G}(r, z) = G(r, z) / G_{\Sigma},$$

где G_{Σ} – суммарный расход капель.

Наличие газового вихря в ЦБФ и вращательное движение вытекающей струи приводит к тому, что струя приобретает форму полого тела вращения. В связи с этим для ЦБФ типично такое распределение $\bar{G}(r, z)$, при котором центральная часть факела заполнена небольшим количеством жидкости, а на некотором расстоянии от оси плотность орошения достигает максимума (рис. 8.7, а). Присутствие некоторого количества жидкости в центральной зоне объясняется выносом отдельных капель из

основной струи за счет турбулентных пульсаций. С ростом расстояния от среза сопла распределение $\bar{G}(r)$ сглаживается (рис. 8.7, в).

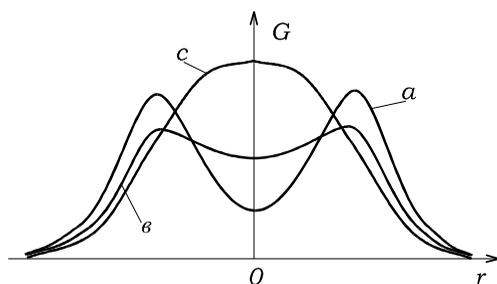


Рис. 8.7. Распределение относительного расхода капель

С увеличением вязкости распыливаемой жидкости распределение $\bar{G}(r)$ также сглаживается и даже может качественно измениться. С ростом влияния сил вязкого трения образуется максимум $\bar{G}(r)$ на оси ЦБФ (рис. 8.7, c).

9. ДВИЖЕНИЕ СОВОКУПНОСТИ ЧАСТИЦ

В подавляющем большинстве практических задач представляет интерес движение не отдельной частицы, а совокупности (облака) частиц. При этом закономерности движения облака частиц при определенных условиях могут существенно отличаться от движения индивидуальной частицы.

9.1. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

Рассмотрим гравитационное осаждение сферического облака равномерно перемешанных твердых сферических частиц диаметром D (диаметр облака $D_s \gg D$). При осаждении такого облака можно выделить три режима [26].

Первый режим (продуваемое облако)

Расстояние между частицами велико (гидродинамическим взаимодействием между частицами можно пренебречь), при этом центр масс облака частиц движется со скоростью одиночной частицы из этого облака. Такое облако частиц называется полностью продуваемым. Скорость стационарного осаждения данного облака частиц равна скорости осаждения одиночной частицы:

$$u_s^{\text{п}} = u_p = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{gD}{\rho \cdot C_D} (\rho_p - \rho)}, \quad (9.1)$$

где $u_s^{\text{п}}$, u_p – скорость осаждения продуваемого облака частиц и одиночной частицы, соответственно; ρ , ρ_p – плотность дисперсионной среды и материала частицы соответственно; C_D – коэффициент сопротивления; g – ускорение свободного падения. Для стоксовского режима ($Re = \rho u_p d / \mu < 1$) выражение (9.1) принимает вид

$$u_s^{\text{п}} = u_p = \frac{gD^2(\rho_p - \rho)}{18\mu}, \quad (9.2)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды.

Второй режим (непродуваемое облако)

В этом случае частицы располагаются достаточно близко относительно друг друга (толщина пограничного слоя дисперсионной среды превышает расстояние между частицами). При осаждении системы частиц увлекается вся среда внутри этой системы и группа частиц движется как единое целое. При этом закономерности движения облака частиц подобны движению равнообъемного шара или тела другой формы. Наряду с поступательным движением облака в нем возникает циркуляция, сохраняющая его форму и размер (рис. 9.1). Такое облако частиц называется непродуваемым, дисперсионная среда полностью обтекает его. Для непродуваемого облака скорость стационарного осаждения принимает вид

$$u_s^H = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{gD_s}{\rho \cdot C_D} \left(C_n \frac{\pi D^3}{6} \rho_p - \rho \right)} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{gD_s}{\rho \cdot C_D} (C_V \rho_p - \rho)}, \quad (9.3)$$

где C_n , C_V – счетная и объемная концентрации частиц в облаке соответственно.

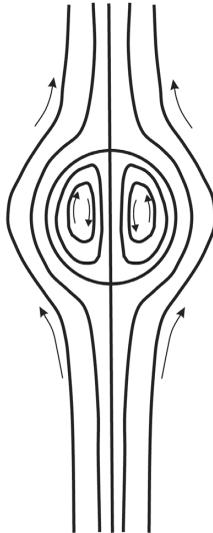


Рис. 9.1. Картина обтекания облака частиц

Для стоксовского режима ($Re = \rho u_s^H D_s / \mu < 1$) выражение (9.3) принимает вид

$$u_s^H = \frac{gD_s^2(C_n \frac{\pi D^3}{6} \rho_p - \rho)}{18\mu} = \frac{gD_s^2(C_V \rho_p - \rho)}{18\mu}. \quad (9.4)$$

Отметим, что коэффициенты сопротивления C_D , входящие в выражения (9.1) и (9.3), не идентичны, что впервые было отмечено в работе С. Соу [1]: «Если объемная концентрация твердых частиц C_V достаточно велика (толщина пограничного слоя среды превышает расстояние между частицами), то коэффициент сопротивления для одиночных частиц не применим для облака частиц». С. Соу был первым, кто заметил, что выражение для скорости осаждения группы частиц будет отличаться от скорости осаждения одиночной частицы значением коэффициента сопротивления C_D . При этом в каждом конкретном случае необходимо проводить оценку коэффициента сопротивления.

Третий режим (частично продуваемое облако)

Данный режим осаждения является наиболее сложным. Это промежуточный режим между первыми двумя. В этом случае поток дисперсионной среды частично обтекает систему частиц и частично проходит сквозь нее. Такое облако частиц называется частично продуваемым. При этом возмущения потока за счет взаимодействия с соседними частицами могут вызывать различные вихревые течения, которые будут ускорять или замедлять движение системы частиц. Данный режим аналитически описать сложно. Для его анализа необходимо проводить либо численное моделирование, либо экспериментальное исследование.

В отдельный вид движения группы частиц следует выделить так называемое стесненное движение частиц – движение системы частиц в ограниченном стенками пространстве. Например, движение в различных трубах, технических установках и др. Данный режим осаждения характеризуется тем, что скорость движения совокупности частиц меньше, чем скорость движения изолированной частицы того же размера. По-видимому, этот эффект объясняется влиянием стенок на скорость осаждения.

9.2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОБЪЕМНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ

Реализация рассмотренных выше режимов движения совокупности частиц зависит от величины объемной концентрации частиц в облаке. Проведем анализ предельных значений объемной концентрации частиц, разделяющих режимы движения облака.

Литературные данные

Проанализируем литературные данные по предельным значениям объемной концентрации частиц, при которых наблюдается переход от режима продуваемого облака к промежуточному режиму и, соответственно, от промежуточного режима к режиму плотно упакованного облака.

С. Соу в своей монографии [1] отмечает, что облако следует рассматривать как частично продуваемое при значении объемной концентрации $C_V^* \geq 0,02 \div 0,05$. В статье [27] на основе численных расчетов показано, что облако частиц осаждается с большей скоростью по сравнению с одиночной частицей при значении объемной концентрации частиц $C_V^* > 0,01$. Эксперименты В.Г. Хоргуани [28] показывают, что влияние частиц на дисперсионную среду ощутимо даже при межчастичном расстоянии в 15 диаметров частиц, что соответствует их объемной концентрации $C_V^* = 2,3 \cdot 10^{-4}$. В.Г. Хоргуани показал, что лишь при расстоянии между частицами более 30÷35 диаметров ($C_V^* \leq 2 \cdot 10^{-5}$) не наблюдается увеличения скорости движения облака частиц и центр облака движется со скоростью одиночной частицы.

В работе [28] экспериментально показано, что увеличение скорости осаждения системы частиц (появление промежуточного режима) происходит не только при значении межчастичного расстояния менее 30 диаметров, но при значении чисел Рейнольдса $Re < 10^{-2}$ (где $Re = \rho u_p D / \mu$ – число Рейнольдса одиночной частицы).

Отметим, что при низких значениях объемной концентрации частиц возникает проблема влияния стенок экспериментальной установки, что приводит к уменьшению скорости осаждения.

Литературные данные по предельному значению концентрации частиц в облаке, определяющему переход от первого режима к промежу-

точному, в зависимости от относительного расстояния L между частицами, выраженного в диаметрах частиц, приведены ниже.

C_V^*	L	Автор
$0,02 \div 0,05$	–	С. Соу [1]
$< 0,01$	–	К.Е. Елкин [27]
$2 \cdot 10^{-3}$	$30 \div 35$	В.Г. Хоргуани [28]

Таким образом, известные литературные данные по граничным значениям объемной концентрации частиц существенно зависят от конкретных условий проведенных расчетов и экспериментов и не позволяют провести однозначную оценку величины C_V^* .

Аналитическая оценка силы сопротивления

Для определения границы, разделяющей режимы движения облака частиц, определим действующую на облако силу сопротивления.

В случае малой концентрации частиц (продуваемое облако) на каждую частицу диаметром D действует сила сопротивления

$$F_S = C_D^{\text{II}} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_p^2}{2},$$

где C_D^{II} – коэффициент сопротивления отдельной частицы.

Для стоксовского режима ($\text{Re} = \rho u_p D / \mu < 1$)

$$C_D^{\text{II}} = \frac{24}{\text{Re}} = \frac{24\mu}{\rho u_p D}$$

и сила сопротивления равна

$$F_S = 3\pi\mu u_p D.$$

Количество частиц, содержащееся в облаке, определяется формулой

$$n = C_n V_S = C_n \frac{\pi D_s^3}{6}, \quad (9.5)$$

где V_S – объем облака.

С учетом соотношения

$$C_n = C_V \left(\frac{\pi D^3}{6} \right)^{-1}$$

из (9.5) следует:

$$n = C_V \left(\frac{D_s}{D} \right)^3.$$

На все частицы в продуваемом облаке действует суммарная сила сопротивления

$$F_s^{\Pi} = C_D^{\Pi} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_p^2}{2} n = C_D^{\Pi} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_p^2}{2} \cdot C_V \left(\frac{D_s}{D} \right)^3. \quad (9.6)$$

Для стоксовского режима из (9.6) следует

$$F_s^{\Pi} = 3\pi\mu_p D C_V \left(\frac{D_s}{D} \right)^3. \quad (9.7)$$

В случае большой концентрации частиц (непродуваемое облако) облако можно рассматривать как отдельную большую частицу диаметром D_s . При этом сила сопротивления равна

$$F_s^{\text{H}} = C_D^{\text{H}} \cdot \frac{\pi D_s^2}{4} \cdot \frac{\rho u_s^2}{2}. \quad (9.8)$$

Для стоксовского режима сила сопротивления равна

$$F_s^{\text{H}} = 3\pi\mu_s D_s. \quad (9.9)$$

Примем за граничное значение объемной концентрации частиц в облаке величину C_V^* , при которой сила сопротивления для продуваемого и непродуваемого облака одинакова ($F_s^{\Pi} = F_s^{\text{H}}$).

Тогда из (9.6) и (9.8) следует:

$$C_D^{\Pi} u_p^2 C_V \left(\frac{D_s}{D} \right) = C_D^{\text{H}} u_s^2. \quad (9.10)$$

Из (9.10) следует оценка границы режимов движения облака:

$$C_V^* = \frac{C_D^H}{C_D^H} \left(\frac{D}{D_s} \right) \left(\frac{u_s}{u_p} \right)^2. \quad (9.11)$$

При $C_V \leq C_V^*$ совокупность частиц движется в первом режиме (продуваемое облако), а при $C_V \gg C_V^*$ – во втором режиме (непродуваемое облако).

Для стоковского режима из (9.7) и (9.9) можно получить аналогичную оценку:

$$C_V^* = \left(\frac{D}{D_s} \right)^2 \left(\frac{u_s}{u_p} \right). \quad (9.12)$$

Отметим, что граничное значение C_V^* (9.12) получено для случая, когда как отдельная частица, так и облако частиц движутся в стоковском режиме ($Re < 1$).

Аналитическая оценка скорости осаждения облака частиц

Оценку граничного значения концентрации частиц в облаке можно провести по скорости его гравитационного осаждения. Примем за граничное значение объемной концентрации частиц в облаке величину C_V^* , при которой скорость осаждения для продуваемого и непродуваемого облака одинакова ($u_s^H = u_s^H$).

Из уравнений (9.1) и (9.3) следует:

$$C_V^* = \frac{\rho}{\rho_p} + \frac{C_D^H}{C_D^H} \left(\frac{D}{D_s} \right) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right). \quad (9.13)$$

Для стоковского режима из (9.13) следует:

$$C_V^* = \frac{\rho}{\rho_p} + \left(\frac{D}{D_s} \right)^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right). \quad (9.14)$$

Проведем расчет скорости гравитационного осаждения сферического облака частиц постоянного объема и расширяющегося облака частиц в зависимости от их объемной концентрации. В качестве частиц рассмотрим стальные шарики ($D = 0,5$ мм, $\rho_p = 7\,500$ кг/м³), в качестве дисперсионной среды – раствор хлористого цинка в глицерине ($\rho = 1\,270$ кг/м³, $\mu = 4$ Па·с).

• Облако постоянного объема

Рассмотрим гравитационное осаждение в стоксовском режиме ($Re < 1$) облака постоянного объема диаметром $D_s = 1,75$ см при варьировании объемной концентрации частиц. В качестве максимальной концентрации частиц примем значение

$$C_V^{\max} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0,7405,$$

соответствующее «плотной упаковке» (максимальное значение концентрации, которое можно достичь без деформации частиц).

В качестве минимального значения концентрации частиц примем C_V^{\min} , определяемое формулой (9.14):

$$C_V^{\min} = 0,17.$$

График зависимости $u_s^H(C_V)$, рассчитанный по уравнению (9.4) для указанных выше параметров облака, приведен на рис. 9.2.

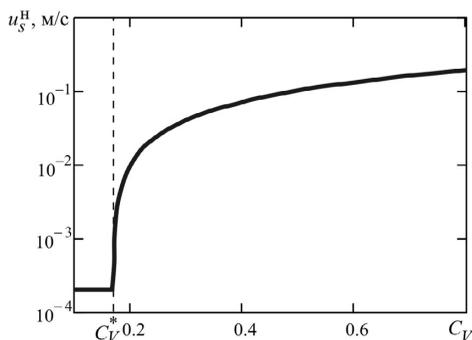


Рис. 9.2. Зависимость скорости осаждения облака постоянного диаметра от объемной концентрации частиц

Из графика следует, что при $C_V \leq 0,17$ скорость гравитационного осаждения облака частиц соответствует скорости осаждения отдельной частицы, рассчитанной по уравнению (9.2): $u_s = 2,1 \cdot 10^{-4}$ м/с. При увеличении C_V от C_V^{\min} до C_V^{\max} скорость осаждения возрастает до $u_s = 0,179$ м/с. Значение числа Рейнольдса при этом возрастает от $Re = 0,3 \cdot 10^{-4}$ (одиночная частица) до $Re = 0,99$ (облако частиц с максимальной концентрацией). Условие движения частиц в стоксовском режиме ($Re < 1$) выполняется как для отдельной частицы, так и для облака частиц.

- Расширяющееся облако

Рассмотрим гравитационное осаждение в стоксовском режиме сферического облака частиц с начальным диаметром $D_s^{нач} = 1,75$ см и начальной концентрацией частиц $C_V^{нач} = C_V^{\max} = 0,7405$. Параметры частиц и дисперсионной среды идентичны приведенному выше примеру.

Предположим, что концентрация частиц в облаке монотонно уменьшается от C_V^{\max} до $C_V^{\min} = 0,17$ за счет его расширения. При этом количество частиц в облаке остается постоянным:

$$n = C_V \frac{\pi D_s^3}{6} = C_V^{нач} \frac{\pi (D_s^{нач})^3}{6} = \text{const} . \quad (9.15)$$

Из (9.15) следует формула для расчета диаметра облака по текущему значению концентрации частиц:

$$D_s = D_s^{нач} \sqrt[3]{\frac{C_V^{нач}}{C_V}} . \quad (9.16)$$

Подставляя (9.16) в (9.4), получим уравнение для расчета скорости гравитационного осаждения расширяющегося облака частиц:

$$u_s^H = \frac{g(D_s^{нач})^2 (C_V \rho_p - \rho)}{18\mu} \left(\frac{C_V^{нач}}{C_V} \right)^{\frac{2}{3}} . \quad (9.17)$$

График зависимости $u_s^H(C_V)$, рассчитанной по уравнению (9.17) для указанных выше параметров, приведен на рис. 9.3.

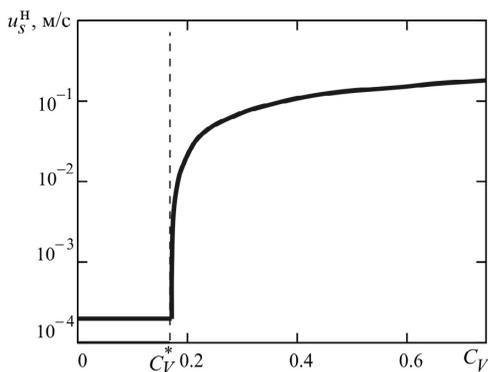


Рис. 9.3. Зависимость скорости осаждения расширяющегося облака от объемной концентрации частиц

Из рис. 9.3. следует, что значение C_V^* , а также минимальной и максимальной скорости осаждения идентичны случаю осаждения облака постоянного диаметра.

9.3. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЧАСТИЧНО ПРОДУВАЕМОМ ОБЛАКЕ

При осаждении высококонцентрированной системы частиц в виде компактного непродуваемого облака, окруженного чисто дисперсионной средой (второй режим), скорость его движения может намного превышать скорость движения отдельной частицы за счет инерционных эффектов.

Рассмотрим движение системы равномерно перемешанных частиц, заполняющих все поперечное сечение канала (суспензия или частично продуваемое облако). В данном случае скорость движения частиц также зависит не только от их размера, формы и свойств дисперсионной среды, но и от объемной концентрации частиц. Эта зависимость обусловлена гидродинамическим взаимодействием между частицами.

При этом вязкость суспензии, содержащей дисперсные частицы, превышает вязкость дисперсионной среды вследствие появления срезываю-

щих напряжений при движении частиц [20]. В этом случае говорят об эффективной вязкости среды μ . Повышение коэффициента динамической вязкости среды приводит к тому, что скорость движения каждой частицы, входящей в частично продуваемое облако («пробной» частицы), равная скорости движения всего облака частиц, как правило, меньше скорости изолированной одиночной частицы.

Строгое описание закономерностей стесненного движения частиц в вязком потоке не представляется возможным. Многочисленные работы в этой области, обзор которых приведен в монографиях [1, 20], основаны на полумпирических методах и упрощенных математических моделях, использующих результаты обтекания одиночной частицы в стоксовском режиме.

Эффективная вязкость суспензий

При малых значениях объемной концентрации частиц ($C_V \ll 1$) эффективное значение коэффициента динамической вязкости потока, содержащего твердые сферические частицы, определяется формулой Эйнштейна:

$$\mu_e = \mu \left(1 + \frac{5}{2} C_V \right), \quad (9.18)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды. Аналогичная зависимость для потока, содержащего капли и пузырьки, получена Тейлором:

$$\mu_e = \mu \left(1 + \frac{5}{2} C_V \left(\frac{\mu_1 + \frac{2}{3} \mu}{\mu_1 + \mu} \right) \right), \quad (9.19)$$

где μ_1 – коэффициент динамической вязкости дисперсной фазы (капли или пузырька).

В ряде работ были получены в рамках приближенных моделей достаточно громоздкие формулы для расчета эффективной вязкости суспензий при высоких значениях концентрации частиц (вплоть до $C_V \leq 0,67$).

На основе сравнительного анализа этих формул [20] предложены аппроксимационные зависимости для эффективной вязкости среды, содержащей твердые сферы

$$\mu_e = \mu \cdot \exp\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{C_V}{1 - C_V}\right) \quad (9.20)$$

и для дисперсного потока капель и пузырьков

$$\mu_e = \mu'_e \cdot \frac{2\mu'_e + 3\mu_1}{3\mu'_e + 3\mu_1}, \quad (9.21)$$

где

$$\mu'_e = \mu \cdot \exp\left[\left(\frac{5\mu_1 + 2\mu}{3\mu_1 + 3\mu}\right) \frac{C_V}{1 - C_V}\right].$$

Коэффициент сопротивления для стесненного потока

Для описания движения суспензий вводится обобщенное число Рейнольдса [20]

$$\text{Re}_e = \frac{\rho u_e D}{\mu_e}, \quad (9.22)$$

где u_e – скорость движения частиц в частично продуваемом облаке, а эффективная вязкость среды μ_e определяется формулами (9.20) или (9.21).

Зависимость (9.22) получена в предположении, что увеличение числа Рейнольдса слабо влияет на эффективную вязкость среды по сравнению с объемной концентрацией частиц дисперсной фазы.

Эффективное число Рейнольдса можно представить в виде

$$\text{Re}_e = \frac{\rho u_e D}{\mu_e} = \frac{\rho u D}{\mu} \cdot \frac{\mu u_e}{\mu_e u} = \text{Re} \cdot \frac{\mu}{\mu_e} \frac{u_e}{u}, \quad (9.23)$$

где Re – число Рейнольдса для изолированных частиц.

Скорость движения «пробной» частицы можно определить из (9.22):

$$u_e = \frac{\text{Re}_e \mu_e}{\rho D}. \quad (9.24)$$

В [20] показано, что сила сопротивления, действующая на «пробную» частицу, равна

$$F_s = C_{De} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho u_e^2}{2} (1 + \sqrt[3]{\varepsilon}). \quad (9.25)$$

В случае стационарного гравитационного осаждения сила сопротивления равна силе тяжести

$$F_g = \frac{\pi d D^3}{3} (\rho_p - \rho)(1 - C_V). \quad (9.26)$$

Приравнявая (9.25) и (9.26), получим выражение для коэффициента сопротивления частично продуваемого облака частиц

$$C_{De} = \frac{4}{3} D \frac{(\rho_p - \rho)g(1 - C_V)}{\rho u_e^2 (1 + \sqrt[3]{C_V})}. \quad (9.27)$$

Умножим обе части уравнения (9.27) на Re_e^2

$$C_{De} \text{Re}_e^2 = \frac{4}{3} \frac{(1 - C_V)}{(1 + \sqrt[3]{C_V})} \frac{\rho d D^3 (\rho_p - \rho)}{\mu_e^2}. \quad (9.28)$$

Зависимость (9.28) можно представить в виде

$$C_{De} \text{Re}_e^2 = \frac{4}{3} \frac{(1 - C_V)}{(1 + \sqrt[3]{C_V})} \left(\frac{\mu}{\mu_e} \right)^2 \text{Ar}_0, \quad (9.29)$$

где $\text{Ar}_0 = \frac{g D^3 \rho (\rho_p - \rho)}{\mu^2}$ – число Архимеда для изолированной частицы.

Вводя эффективное число Архимеда

$$\text{Ar}_e = \text{Ar}_0 \frac{(1 - C_V)}{(1 + \sqrt[3]{C_V})} \left(\frac{\mu}{\mu_e} \right)^2,$$

зависимость (9.29) можно представить в виде

$$C_{De} \text{Re}_e^2 = \frac{4}{3} \text{Ar}_e. \quad (9.30)$$

Эта зависимость аналогична формуле (6.25) для одиночной частицы.

В [20] показано, что при разных значениях C_V , в том числе и при $C_V = 0$ (изолированная частица), экспериментальные данные укладываются на одну кривую (рис. 6.5). Таким образом, возможно обобщение результатов гравитационного осаждения для изолированной частицы на «пробные» частицы в частично продуваемом облаке, заменяя число Рейнольдса Re и число Архимеда Ar на их эффективные значения Re_e , Ar_e .

Пример расчета

Определить скорость гравитационного осаждения облака стеклянных сферических шариков ($D = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $\rho_p = 2\,200$ кг/м³; $C_V = 0,4$) в воде ($\rho = 10^3$ кг/м³; $\mu = 10^{-3}$ Па·с).

1. По заданным параметрам задачи рассчитываем число Архимеда для одиночной частицы:

$$Ar_0 = \frac{gD^3(\rho_p - \rho)\rho}{\mu^2} = \frac{9,80665 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (2200 - 1000) \cdot 1000}{10^{-6}} = 317\,735.$$

2. Определяем режим течения. Поскольку число Архимеда больше граничного значения $Ar > 270\,000$, то реализуется автомодельный режим течения.

3. Из (6.21) для найденного значения числа Архимеда определим значение числа Рейнольдса для одиночной частицы при $C_D = 0,44$:

$$Re_0 = 2\sqrt{\frac{Ar_0}{3C_D}} = 2\sqrt{\frac{317\,735}{3 \cdot 0,44}} = 1\,202.$$

4. Из (6.17) определим скорость движения одиночной частицы:

$$u_0 = \frac{Re_0 \mu}{\rho D} = \frac{1202 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 0,4 \text{ м/с.}$$

5. Находим значение эффективной вязкости:

$$\mu_e = \mu \exp[1,67 / (1 - C_V)] = 10^{-3} \cdot \exp[1,67 / 0,6] = 0,016 \text{ Па·с.}$$

6. Находим эффективное значение числа Архимеда:

$$\begin{aligned} \text{Ar}_e &= \text{Ar}_0 \frac{(1-C_V)}{(1+\sqrt[3]{C_V})} \left(\frac{\mu}{\mu_e} \right)^2 = \\ &= 317\,735 \frac{0,6}{1+\sqrt[3]{0,4}} \left[\frac{1}{\exp\left(\frac{1,67 \cdot 0,4}{0,6}\right)} \right]^2 = 420. \end{aligned}$$

7. Для найденного эффективного значения числа Архимеда определим эффективное значение числа Рейнольдса для $C_D = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt[3]{\text{Re}}}$:

$$\text{Re}_e = 2 \sqrt{\frac{\text{Ar}_e}{3C_D}} = 12,2.$$

8. Из (9.23) находим скорость осаждения облака частиц:

$$u_e = u_0 \frac{\text{Re}_e \mu_e}{\text{Re}_0 \mu} = 0,4 \cdot \frac{12,2}{1\,202} \cdot \exp(2,78) = 0,07 \text{ м/с.}$$

9.4. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАХВАТА

При движении полидисперсной системы частиц, размеры которых существенно различаются, скорости мелких и крупных частиц в двухфазном потоке различны. Так, например, при гравитационном осаждении системы частиц скорость осаждения пропорциональна квадрату их диаметра, вследствие чего более крупные частицы движутся быстрее мелких. При движении системы частиц в несущем потоке дисперсионной среды мелкие частицы движутся быстрее крупных за счет разного скоростного запаздывания.

Вследствие разностей скорости частиц в двухфазных потоках с полидисперсными частицами происходят взаимные столкновения частиц разных размеров. Этот эффект играет важную роль в целом ряде технических устройств с двухфазным рабочим телом. В качестве примеров можно привести процессы коагуляции и дробления капель в факеле распыла форсунок и капель оксида алюминия в сопловых блоках твердотопливных ракетных двигателей, процессы осаждения частиц пыли на каплях в

инерционных пылеуловителях (скрубберах), процессы нанесения функциональных покрытий на конструкционные материалы высокоскоростным потоком гетерогенной плазмы и т.д.

При изучении взаимодействия мелкодисперсных частиц с крупной частицей (или преградой) необходимо учитывать искривление линий тока дисперсионной среды и потока частиц. Движущиеся с большой скоростью частицы дисперсной фазы вследствие инерции не следуют вместе с потоком дисперсионной среды, а стремятся сохранить первоначальное направление движения (рис. 9.8).

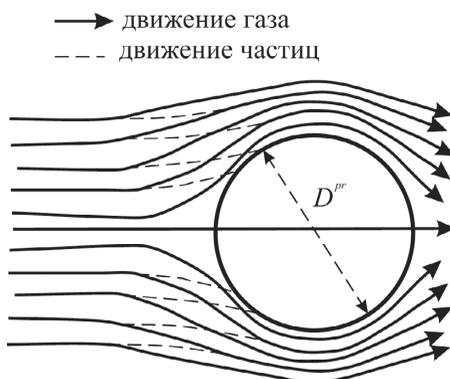


Рис. 9.8. Обтекание сферического препятствия диаметром D^{pr} совокупностью частиц

Таким образом, при анализе осаждения мелкодисперсных частиц на преграду необходимо учитывать искривление линий тока в двухфазном течении.

Для учета данного эффекта вводится коэффициент захвата η – отношение числа частиц, соударяющихся с препятствием, к числу частиц, которые соударились бы, если бы линии тока не отклонились препятствием.

В результате искривления линий тока не все частицы, расположенные в сечении $S = \pi(D^{pr})^2 / 4$ (миделевом сечении сферического препятствия), столкнутся с препятствием.

Для определения коэффициента захвата при обтекании преграды дисперсным потоком используют число Стокса, которое для монодисперсных частиц определяется формулой

$$\text{Stk} = \frac{\rho_p D^2 u}{18\mu D^{pr}},$$

а для полидисперсных частиц – формулой

$$\text{Stk} = \frac{\rho_p D_{20}^2 u}{18\mu D^{pr}}.$$

Здесь ρ_p , D – плотность и диаметр частиц дисперсной фазы; u – относительная скорость дисперсионной среды (вдали от препятствия); D^{pr} – диаметр сферического препятствия; D_{20} – среднеквадратичный диаметр частиц.

Число Стокса позволяет предсказать поведение частиц взвеси, когда дисперсионная среда будет огибать препятствие. Если $\text{Stk} \gg 1$, то частицы взвеси будут двигаться прямо, наталкиваясь на препятствие, а при $\text{Stk} \ll 1$ частицы будут огибать препятствие вместе с потоком дисперсионной среды.

Для зависимости коэффициента захвата от числа Стокса в литературе используется ряд расчетных формул. В частности, в случае потенциального обтекания сферического препятствия коэффициент захвата определяется эмпирически формулой Лэнгмюра – Блоджета

$$\eta = \left(\frac{\text{Stk}}{\text{Stk} + 0,125} \right)^2.$$

10. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

В большинстве работ по механике двухфазных потоков движение частиц дисперсной фазы моделируется в квазистационарной постановке с учетом малости характерных времен динамической релаксации частиц. Однако при решении ряда задач необходимо учитывать влияние нестационарных и «наследственных» эффектов на динамику движения частицы. В качестве примеров можно привести взаимодействие частиц с мощным акустическим полем, торможение частиц при взаимодействии гетерогенной струи с преградой в процессах нанесения упрочняющих покрытий на конструкционные материалы, ускорение частиц в ударных волнах и т.д.

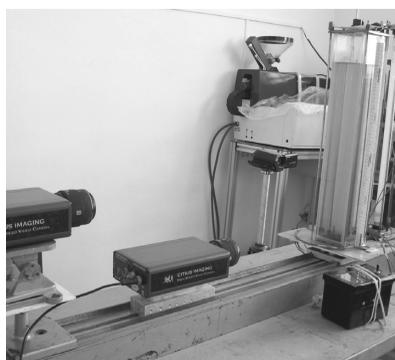
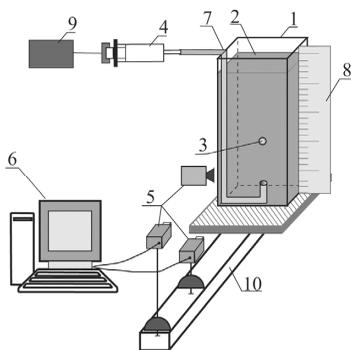
10.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО ДИНАМИКЕ ВСПЛЫТИЯ ПУЗЫРЬКА

Рассмотрены результаты экспериментального исследования нестационарных режимов всплытия одиночного пузырька воздуха в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса [29, 30]. Оценка влияния «наследственной» силы Бассе на динамику пузырька проведена путем сравнительного анализа экспериментальных результатов с теоретическими данными, полученными при решении полного уравнения движения пузырька с учетом всех действующих на него сил. При проведении экспериментов особое внимание уделялось обеспечению воспроизводимости результатов и тщательному анализу погрешностей определения измеряемых и расчетных параметров.

Экспериментальная установка

Исследование проводилось на установке, состоящей из вертикально установленной прозрачной кюветы с плоскопараллельными стенками, наполненной рабочей жидкостью, устройства для генерации пузырьков и системы визуализации процесса всплытия одиночного пузырька. Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 10.1. Кювета размером 150 × 150 × 600 мм (объемом 13,5 л) изготовлена из оптического стекла толщиной 5 мм. В кювету заливался раствор касторового масла в этиловом спирте в различных процентных соотношениях.

В большинстве работ, посвященных исследованию динамики движения частицы дисперсной фазы (капли, пузырька или твердой частицы), в качестве рабочей жидкости использовался водно-глицериновый раствор. Однако вязкость и плотность данного раствора в силу его гигроскопичности зависят от внешних условий (температуры и влажности воздуха) и изменяются на $5 \div 10\%$ при изменении температуры даже на 1°C . Для проведения прецизионных измерений необходимо использовать жидкость со стабильными характеристиками. Касторовое масло и его спиртовые растворы в диапазоне рабочих температур $17 \div 22^\circ\text{C}$ сохраняют значения ρ , μ практически постоянными.



а

б

Рис. 10.1. Схема (*а*) и фотография (*б*) экспериментальной установки:
 1 – кювета; 2 – рабочая жидкость; 3 – пузырек; 4 – генератор пузырьков;
 5 – видеокамеры; 6 – компьютер; 7 – трубка; 8 – масштабная линейка;
 9 – электродвигатель; 10 – оптическая скамья

Пузырьки воздуха получали с помощью механизма, позволяющего дозировать объем воздуха (и, следовательно, исходный диаметр пузырька), поступающего в кювету с жидкостью. Для получения пузырьков фиксированного объема использовался электродвигатель постоянного тока, который через червячную передачу, преобразующую вращательное движение в поступательное, приводил в движение поршень шприца. К выходному раструбу шприца крепилась полая алюминиевая трубка диаметром 3 мм, на конце которой монтировалась сменная инъекционная игла диаметром $0,6 \div 3,0$ мм, расположенная в нижней части кюветы. Отрыв пузырька от иглы происходил не за счет перепада давления (при воз-

действии потока воздуха), а «естественным» образом, когда равнодействующая всех сил превышала нуль. При этом образовывались сферические пузырьки одинакового диаметра с нулевой начальной скоростью (рис. 10.2).

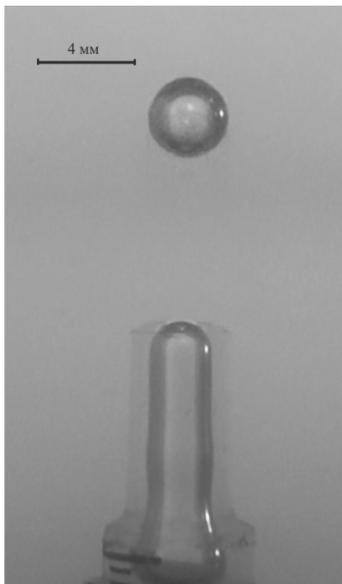


Рис. 10.2. Начальная стадия всплытия пузырька

Система визуализации включала источники света (две люминесцентные лампы мощностью 18 Вт), установленные на задней панели по всей высоте кюветы, цифровую видеокамеру «Panasonic HDC-SD60» и две высокоскоростные видеокамеры «Citius C100». Многокадровая видеосъемка исследуемого процесса позволила повысить точность и обеспечить контроль над изменением параметров всплытия пузырька на различных стадиях его движения. Первая камера использовалась для определения размера пузырька; поле съемки составляло 5×5 см с двукратным увеличением. Вторая камера фиксировала динамику пузырька на начальном нестационарном этапе движения, третья – на всей траектории движения пузырька. Видеосъемка проводилась с пространственным разрешением 1280×670 пикселей с темпом не менее 700 кадров в секунду и временем экспозиции $0,5 \div 2,0$ мс. Для контроля расстояния, пройденного пузырьком, использовалась масштабная линейка с ценой деления 1 мм, отградуированная с учетом оптического искажения стенками кюветы.

Измеряемые параметры

При проведении экспериментов делались тщательные измерения всех основных параметров – плотности и коэффициента динамической вязкости рабочей жидкости ρ , μ , диаметра пузырька D , пройденного им расстояния $h(t)$ и скорости всплытия $u(t)$. Физические свойства рабочей жидкости измерялись до и после проведения каждого эксперимента.

Плотность жидкости варьировалась в диапазоне $\rho = 935 \div 960$ кг/м³ и измерялась ареометром с относительной погрешностью $\delta\rho = 0,1\%$.

Коэффициент динамической вязкости жидкости варьировался в диапазоне $\mu = (0,2 \pm 1,1)$ Па·с и определялся по измеренной скорости стационарного осаждения u_p стального шарика диаметром $D_p = 2,005$ мм в Стоксовском режиме ($Re < 1$):

$$\mu_l = \frac{gD_p^2(\rho_p - \rho)}{18u_p}, \quad (10.1)$$

где ρ_p – плотность материала шарика.

Диаметр шарика измерялся микрометром с погрешностью ± 1 мкм (относительная погрешность $\delta\rho_p = 0,05\%$), плотность материала шарика определялась по формуле

$$\rho_p = \frac{6M_p}{100\pi D_p^3},$$

где M_p – масса 100 идентичных шариков, определяемая взвешиванием на аналитических весах с погрешностью $\pm 0,01$ г.

Измеренное значение плотности $\rho_p = 7\,711$ кг/м³ близко совпадает с табличным значением плотности стали ($\rho_p = 7\,750$ кг/м³). Скорость осаждения шарика варьировалась в диапазоне $13 \div 65$ см/с и определялась обработкой видеоряда процесса осаждения с относительной погрешностью $\delta u_p = 0,1\%$. Относительная погрешность определения μ рассчитывалась по стандартной формуле для погрешности косвенных измерений и не превышала $\delta\mu = 0,2\%$.

Для контроля корректности определения μ_l по формуле (10.1) оценивалась длина участка стабилизации (отклонение скорости шарика на 1% от стационарного значения) по формуле

$$h_* = 3,6g \left(\frac{(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} \right)^2.$$

Для всех проведенных экспериментов величина $h_* \leq 1,5$ мм, следовательно, стационарный режим устанавливается практически сразу же после помещения шарика в жидкость. С целью контроля режима осаждения стальной частицы рассчитывалось число Рейнольдса $Re_p = \rho u_p D_p / \mu$. Во всех экспериментах значение числа Рейнольдса не превышало $Re_p < 1$, что обеспечивало стоксовский режим.

Геометрические размеры пузырьков определялись с относительной погрешностью не более 3% (с учетом заданной разрешающей способности видеокамеры).

Погрешность определения скорости всплытия пузырька на стационарном участке, обусловленная разбросом результатов $3 \div 5$ дублирующих опытов, не превышала $\delta u = 0,1\%$ при значении доверительной вероятности $\alpha = 0,95$.

На нестационарном участке пройденное пузырьком расстояние и скорость определялись кадровой обработкой результатов скоростной видеосъемки. Скорость всплытия пузырька на некоторой высоте h_i (где i – номер кадра) вычислялась по формуле

$$u(h_i) = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{\Delta t_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где h_{i-1} , h_{i+1} – пройденное пузырьком расстояние на $i-1$ и $i+1$ кадрах соответственно; Δt_i – интервал времени между $i-1$ и $i+1$ кадрами; n – количество кадров. Расстояние h_i измерялось с использованием компьютерной программы CorelDRAW. Погрешность измерения h_i , связанная с искажением изображения и разрешающей способности видеокамеры, составляла $\pm 0,2$ мм. Погрешность измерения скорости всплытия пузырька на начальном (нестационарном) участке ($h \leq 5$ мм) не превышала $\delta u = 10\%$.

Коэффициент сопротивления в стационарном режиме

В общем уравнении движения пузырька входит закон сопротивления вязкого обтекания. При малых числах Рейнольдса ($Re < 1$) коэффициент сопротивления определяется по формуле Рыбчинского – Адамара

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(\frac{3\mu_* + 2}{3 + 3\mu_*} \right), \quad Re = \frac{\rho u D}{\mu}, \quad (10.2)$$

где $\mu_* = \mu_p / \mu$ – отношение коэффициентов динамической вязкости дисперсной μ_p и дисперсионной μ фаз.

Для уточнения коэффициента сопротивления в стационарном режиме ($du/dt = 0$) была проведена серия экспериментов, результаты которой приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Результаты экспериментов по стационарному всплытию пузырька

D , мм	ρ , кг/м ³	μ , Па·с	u_e , см/с	Re	$A = 16$	$A = 15,5$	C_D^e
3,7	960	1,13	0,88	0,028	571,4	553,6	624
3,6	960	0,92	1,2	0,045	355,5	344,4	326
3,9	960	0,92	1,4	0,057	280,7	271,9	260
4,1	960	0,92	1,5	0,064	250,0	242,2	238
4,4	960	0,92	1,75	0,08	200,0	193,7	188
5,5	960	1,13	1,96	0,091	175,8	170,3	187
4,8	960	0,92	2,0	0,1	160,0	155	157
4,9	960	0,92	2,09	0,106	150,9	146,2	146
5,5	960	0,92	2,55	0,146	109,6	106,2	110
3,2	935	0,23	3,6	0,47	34,0	32,9	28,9
3,4	935	0,23	4,0	0,56	28,6	27,7	27,7

В табл. 10.1 приведены условия проведения экспериментов, экспериментальные значения стационарной скорости всплытия пузырька u_e , числа Рейнольдса Re и коэффициента сопротивления C_D^e . При расчете числа Рейнольдса использовались экспериментальные данные. Величина экспериментального коэффициента сопротивления C_D^e определялась из уравнения движения пузырька в стационарном режиме (при $du/dt = 0$) по формуле

$$C_D^e = \frac{4}{3} g(\rho - \rho_b) \frac{D}{\rho u_e^2},$$

где ρ_b – плотность воздуха.

Относительная погрешность определения C_D^e рассчитывалась по формуле

$$\delta C_D^e = \sqrt{(\delta D)^2 + 4(\delta u_e)^2},$$

где $\delta D = 3\%$, $\delta u_e = 0,1\%$. При расчете δC_D^e не учитывались погрешности измерения плотности ρ_b и ρ в силу их малости. Для условий проведенных экспериментов погрешность экспериментального определения коэффициента сопротивления не превышала $\delta C_D^e \sim 3\%$.

В предельных случаях из (10.3) определяется коэффициент сопротивления в виде

$$C_D = \frac{A}{\text{Re}}, \quad (10.3)$$

где $A = 16$ для пузырька ($\mu_* \rightarrow 0$), $A = 24$ для твердой сферы ($\mu_* \rightarrow \infty$).

По аналогии с (10.3) зависимость $C_D^e(\text{Re})$ аппроксимировалась формулой

$$C_D = \frac{15,5}{\text{Re}}. \quad (10.4)$$

Значения коэффициентов сопротивления, рассчитанные по формуле (10.3) для $A = 16$ и $A = 15,5$, приведены в табл. 10.1. На рис. 10.3 приведены расчетные и экспериментальные значения коэффициента сопротивления в диапазоне чисел Рейнольдса $\text{Re} = 0,03 \div 0,55$. Наименьшее отклонение теоретического от экспериментального коэффициента сопротивления C_D^e наблюдается для зависимости (10.4), для которой среднеквадратичное отклонение составляет $\delta = 1,9\%$. Для зависимости Рыбчинского – Адамара ($A = 16$) отклонение $\delta = 2,2\%$. Зависимость для стоксовского коэффициента сопротивления ($A = 24$) дает результаты, существенно отличающиеся от экспериментальных данных (рис. 10.3).

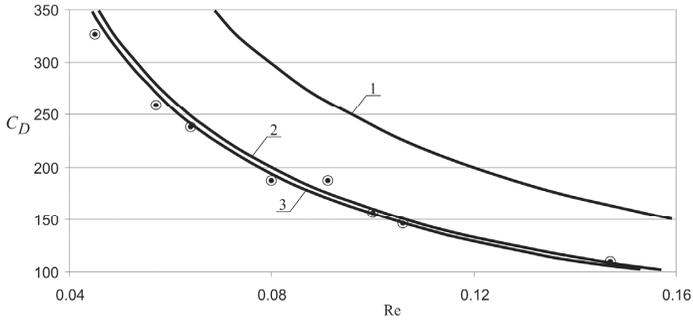


Рис. 10.3. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса: 1 – $A = 24$; 2 – $A = 16$; 3 – $A = 15.5$; точки – экспериментальные значения C_D^e

Скорость всплытия пузырька в нестационарном режиме

Исследование динамики всплытия пузырьков проводилось при варьировании параметров в диапазонах: $D = 3,2 \div 5,5$ мм, $\mu = 0,23 \div 1,13$ Па·с, $\rho = 935 \div 960$ кг/м³, $Re = 0,03 \div 0,56$. Для условий проведенных экспериментов величина времени установления стационарного участка всплытия пузырька составляла $t^* = 0,07 \div 0,2$ с, а расстояние установления – $h^* = 1,5 \div 4,0$ мм. Типичные зависимости скорости всплытия пузырька от времени и пройденного расстояния приведены на рис. 10.4 для одной из серий экспериментов ($D = 3,4$ мм, $\mu = 0,23$ Па·с, $\rho = 935$ кг/м³).

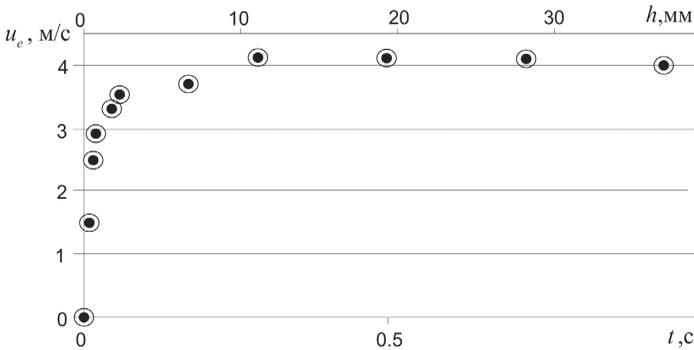


Рис. 10.4. Экспериментальные данные по скорости всплытия пузырька

Отметим, что при покадровой обработке видеоряда на стационарном участке движения пузырька наблюдался колебательный характер изменения скорости всплытия, что, по-видимому, связано с погрешностью измерения малых значений h_i .

10.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Постановка задачи

На пузырек воздуха диаметром D , всплывающий в покоящейся жидкости с плотностью ρ , действуют со стороны жидкости сила Архимеда F_A и сила F_m , связанная с присоединенной массой:

$$F_A = \frac{\pi D^3}{6} \rho g, F_m = -\frac{\pi D^3}{12} \rho \frac{du}{dt}, \quad (10.5)$$

где g – ускорение свободного падения; u – скорость пузырька, ось координат направлена вертикально вверх.

В вязкой жидкости на пузырек дополнительно действуют сила вязкого трения F_s и «наследственная» сила Бассе F_B , связанная с нестационарностью вязкого пограничного слоя вокруг пузырька:

$$F_s = -C \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho u^2}{2}, F_B = -\frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi \mu \rho} \int_{-\infty}^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (10.6)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; C – безразмерный коэффициент сопротивления.

С учетом рассмотренных сил уравнение всплытия пузырька можно представить в виде

$$\frac{du}{dt} = 2g - \frac{24\mu}{\rho D^2} u - \frac{18}{D} \sqrt{\frac{\mu}{\pi \rho}} \int_{-\infty}^t \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (10.7)$$

Необходимо отметить, что входящая в уравнение (10.7) сила Бассе существенно зависит от динамики движения пузырька (от производной du/dt). В работах Л.Д. Ландау получены аналитические формулы зави-

симости силы Бассе от времени для сферической частицы, мгновенно приведенной в равномерное движение со скоростью u_0 , и для частицы, начинающей в момент $t = 0$ равноускоренно двигаться по закону $u(t) = at$:

$$F_B = 1,5u_0D^2\sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{t}}, \quad (10.8)$$

$$F_B = 3aD^2\sqrt{\pi\mu\rho t}. \quad (10.9)$$

Формулы (10.8), (10.9) можно использовать при оценке вклада силы Бассе в суммарную силу сопротивления только для априорно заданного закона движения частицы. В частности, эти формулы показывают, что при мгновенном приведении частицы в равномерное движение сила Бассе убывает по закону $u(t) \sim (1/\sqrt{t})$, а при равноускоренном движении – возрастает по закону $u(t) \sim \sqrt{t}$.

Влияние силы Бассе на динамику всплытия пузырька

Предварительная оценка влияния силы Бассе на динамику всплытия пузырька проведена на модельном примере его равноускоренного движения (рис. 10.5).

Силу Бассе для данного режима можно рассчитать по аналитической формуле Л.Д. Ландау (10.9). Расчеты действующих на пузырек сил проведены для следующих условий эксперимента: $D = 3,2$ мм, $\rho = 935$ кг/м³, $\mu = 0,23$ Па·с, $Re = 0,47$. Для указанных условий экспериментальные значения времени установления стационарного режима и скорости стационарного всплытия составляют $t_* = 0,15$ с, $u_0 = 3,6$ см/с. При этом ускорение пузырька $a = du/dt = u_0/t_* = 0,24$ м/с². Графики зависимости сил, действующих на пузырек, от времени приведены на рис. 10.6. Действующие на пузырек силы рассчитывались по формулам:

$$F_A = \frac{\pi D^3}{6}\rho g, \quad F_m = \frac{\pi}{12}\rho D^3 a, \quad F_s = -C_D \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho(at)^2}{2},$$

$$F_B = 3aD^2\sqrt{\pi\mu\rho t}, \quad F_\Sigma = F_B + F_s + F_m,$$

где $C_D = 15,5/Re$, $a = 0,24$ м/с², F_Σ – суммарная сила сопротивления.

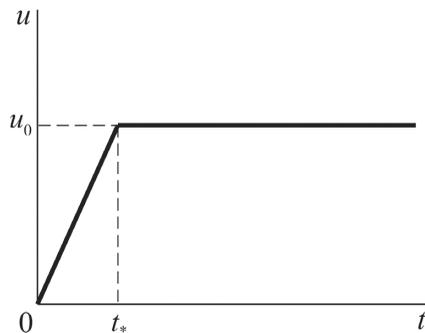


Рис. 10.5. Модель равноускоренного движения частицы

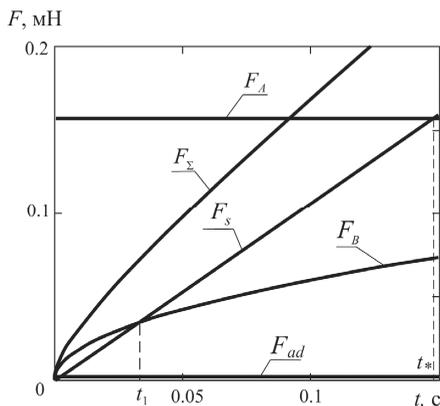


Рис. 10.6. Оценочные значения сил, действующих на пузырек при равноускоренном движении

Анализ приведенных на рис. 10.7 зависимостей показывает, что основной вклад в силу сопротивления вносят сила вязкого сопротивления F_s и сила Бассе F_B . Сила, связанная с присоединенной массой, постоянна на всем нестационарном участке и составляет $F_m = 1,9 \cdot 10^{-3}$ мН. Для рассмотренной модели на начальном участке траектории пузырька при $0 < t < t_1$ сила вязкого сопротивления и сила Бассе отличаются незначительно ($F_B \approx F_s$) и при $t = t_1 = 0,032$ с эти силы равны $F_B = F_s = 3,4 \cdot 10^{-2}$ мН. Для условий проведенных экспериментов момент времени t_1 составляет

$t_1 \sim 0,2t_*$ (20% от времени установления стационарного режима всплытия).

При $t_1 < t < t_*$ сила вязкого сопротивления $F_S \sim t$, а сила Бассе $F_B \cong \sqrt{t}$, на этом участке траектории действует соотношение $F_B < F_S$ и когда устанавливается стационарный режим ($t = t_* = 0,15$ с), то эти силы составляют соответственно $F_B = 7,4 \cdot 10^{-2}$ мН и $F_S = 0,16$ мН. При $t = t_*$ соотношение этих сил составляет $F_B / F_S = 0,46$.

На рис. 10.7 приведена зависимость скорости всплытия пузырька от времени, полученная из решения полного уравнения движения (10.5) с учетом всех действующих сил (кривая 1). Для решения интегро-дифференциального уравнения (10.5) применялся операционный метод, с помощью которого получены аналитические уравнения для ускорения и скорости всплытия пузырька в зависимости от времени. Расчеты проведены для указанных выше параметров экспериментов. Для константы в силе вязкого сопротивления принято экспериментальное значение $A = 15,5$. Здесь же приведена зависимость $u(t)$, рассчитанная по уравнению (6.15), в котором учтена сила, связанная присоединенной массой, но не учтена сила Бассе (кривая 2). Точками на рис. 10.7 обозначены экспериментальные значения скорости всплытия пузырька.

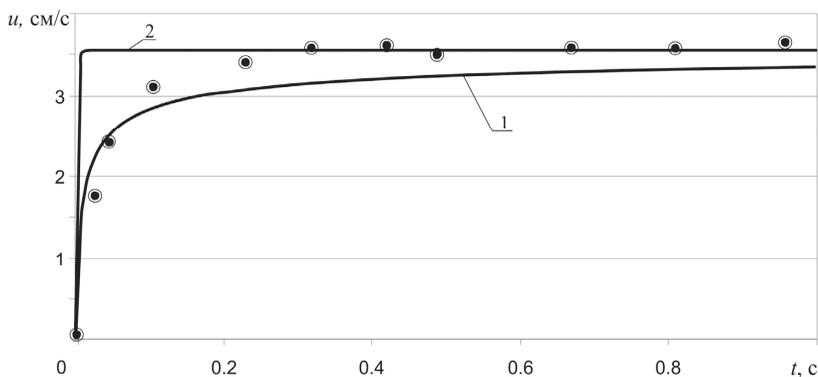


Рис. 10.7. Зависимость скорости всплытия пузырька от времени с учетом (1) и без учета (2) силы Бассе

Анализ приведенных на рис. 10.7 данных показывает, что зависимость $u(t)$, полученная расчетом без учета силы Бассе (кривая 2), не отражает

реальную динамику всплытия пузырька на нестационарном участке его траектории, однако адекватно описывает стационарный режим.

Зависимость $u(t)$, рассчитанная с учетом силы Бассе, удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными на начальном участке траектории (расхождение не превышает 5%). При этом расчетные зависимости $u(t)$ характеризуются медленным выходом на стационарный режим; расхождение расчетных и экспериментальных данных по скорости пузырька для $t > t^* = 0,15$ с составляет не более 9%. Отметим, что аналогичный «затянутый» выход скорости частиц на стационарный режим получен в теоретических работах по нестационарному движению дисперсной частицы. Расхождение расчетных и экспериментальных данных по динамике всплытия пузырька связано, по-видимому, с неточностью соблюдения условия $u = 0$ при $t = 0$ в экспериментах.

11. ДЕФОРМАЦИЯ КАПЕЛЬ И ПУЗЫРЬКОВ

В отличие от твердых частиц движение деформируемых частиц дисперсной фазы (капель и пузырьков) характеризуется дополнительными эффектами, связанными с деформацией, коагуляцией и дроблением частиц при взаимных столкновениях. Известны два механизма потери устойчивости формы капель и пузырьков, приводящие к дроблению частицы: механизм Рэлея – Тейлора и механизм Кельвина – Гельмгольца.

11.1. МЕХАНИЗМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ ЧАСТИЦЫ

Механизм потери устойчивости Кельвина – Гельмгольца

Процесс деформации и разрушения капель и пузырьков – чрезвычайно сложный и характеризуется взаимодействием сил поверхностного натяжения, вязкости и сил инерции. Условия для начала дробления можно получить, анализируя устойчивость жидкой сферы в потоке другой жидкости. Решение этой задачи даже в рамках малых возмущений очень сложно.

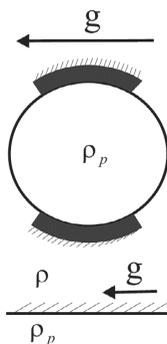


Рис. 11.1. Плоская схематизация для качественного анализа устойчивости сферической поверхности обтекаемой частицы по механизму Кельвина – Гельмгольца

Поэтому рассмотрим устойчивость первоначально плоской границы раздела двух идеальных жидкостей (т.е. эффекты вязкости отбрасываются) с плотностями ρ , ρ_p и поверхностным натяжением σ , движущихся с

относительной скоростью u вдоль этой границы и с ускорением g в направлении, перпендикулярном границе, причем $g > 0$, если направлено от первой фазы ко второй. В работе [8] для качественного рассмотрения устойчивости сферической частицы в потоке рассмотрена плоская схема (рис. 11.1).

Плоская схематизация моделирует процесс вдоль меридионального большого круга на сфере в плоскости, перпендикулярной скорости обтекания. По схеме на рис. 11.1 при достаточно больших числах Вебера We разрушение происходит из-за развития так называемой неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. Число Вебера определяется формулой

$$We = \frac{\rho u^2 D}{\sigma},$$

где D – диаметр капли (или пузырька). В зависимости от режима движения частицы величина критического значения числа Вебера может меняться в широких пределах $1,2 < We_* < 60$.

Степень деформации капли (или пузырька) в зависимости от числа Вебера можно оценить с помощью выражения

$$\frac{D_m}{D} = 1 + 0,03We,$$

где D_m – диаметр миделева сечения частицы.

Механизм потери устойчивости Рэля – Тейлора

Плоская схематизация процесса потери устойчивости формы капли (или пузырька) за счет механизма Рэля – Тейлора приведена на рис. 11.2 [8]. Эта схема моделирует процесс около лобовой или кормовой точки.

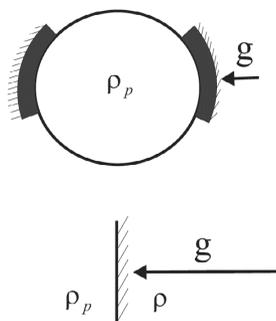


Рис. 11.2. Плоская схематизация для качественного анализа устойчивости сферической поверхности обтекаемой частицы по механизму Рэля – Тейлора

Механизм Рэлея – Тейлора возникает при достаточно больших числах Бонда. Число Бонда определяется по формуле

$$Bo = \frac{\rho_p D^2 g}{\sigma}$$

Из решения Адамара для сферической частицы дисперсной фазы, движущейся в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса, следует, что разность нормальных напряжений на поверхности частицы постоянна и не стремится ее деформировать. Исходя из этого, Бэтчелором сделан вывод о том, что если вязкости и плотности дисперсной фазы и дисперсионной среды таковы, что при малых числах Рейнольдса позволяют пренебречь силами инерции, то нет никаких ограничений на размер сферической частицы дисперсной фазы. Таким образом, согласно Дж. Бэтчелору форма капли, падающей в вязкой жидкости, при малых Re не зависит ни от We , ни от Bo . Однако результаты теоретических исследований [6] показали, что при критическом значении числа Бонда, равном $Bo_{кр} \approx 90$, может наблюдаться потеря устойчивости формы капли даже при малых числах Рейнольдса.

11.2. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ КАПЛИ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ

При движении капли жидкости в закрученном потоке другой несмешивающейся жидкости наблюдается деформация изначально сферической жидкой капли. Ниже приведены основные закономерности потери устойчивости формы капли, движущейся во вращающемся потоке жидкости, на основе обработки экспериментальных данных по движению капли ртути в закрученном потоке раствора хлористого цинка в глицерине [31]. Параметры экспериментов: $D = 4 \div 6$ мм; скорость вращения сосуда с жидкостью $n = 4 \div 9$ об/с; $\rho_p = 13\,550$ кг/м³; $\rho = 1\,270$ кг/м³; $\sigma = 0,3$ Н/м; $\mu = 2,2 \div 15$ Па·с. Описание физико-математической модели движения частицы дисперсной фазы (в том числе капли) в закрученном потоке приведено в разделе 7.1.

Изменение критериев подобия вдоль траектории движения капли

Потеря устойчивости формы капли в закрученном потоке жидкости определяется следующими безразмерными критериями:

$$\text{Re} = \frac{\rho \sqrt{(u_p^z)^2 + (u_p^r)^2 + (u_\phi - u_p^\phi)^2} D}{\mu},$$

$$\text{We} = \frac{\rho [(u_p^z)^2 + (u_p^r)^2 + (u_\phi - u_p^\phi)^2] D}{\sigma},$$

$$\text{Bo} = \frac{\rho_p D^2}{\sigma} |\vec{\omega}|,$$

где u_p^z , u_p^r , u_p^ϕ – аксиальная, радиальная, тангенциальная компонента скорости капли (см. раздел 7.1); u_ϕ – скорость дисперсионной среды (жидкости); $|\vec{\omega}|$ – суммарное ускорение массовых сил.

Ускорение массовых сил $|\vec{\omega}|$, входящее в выражение для числа Бонда, складывается из трех компонент

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{|\vec{\omega}_z|^2 + |\vec{\omega}_r|^2 + |\vec{\omega}_\phi|^2}.$$

где

$$|\vec{\omega}_z| = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right), \quad |\vec{\omega}_r| = \frac{1}{r} \left((u_p^\phi)^2 - \frac{\rho}{\rho_p} u_\phi^2 \right), \quad |\vec{\omega}_\phi| = \frac{u_p^r u_p^\phi}{r}.$$

Направление вектора $\vec{\omega}$, действующего на каплю A , в плоскости, перпендикулярной оси вращения, определяется углом β (рис. 11.3):

$$\beta = \text{arctg} \frac{|\vec{\omega}_\phi|}{|\vec{\omega}_r|}.$$

Проведем оценку влияния составляющих ускорения капли на величину числа Бонда. С этой целью рассчитаем компоненты ускорения капли для радиальной координаты $r = 0,065$ м. В качестве примера в табл. 11.1 приведены значения компонент вектора ускорения капли и соответствующие критерии подобия для следующих начальных параметров: $\mu = 2,2 \div 15$ Па·с; $D = 3 \div 5$ мм; $n = 5,7 \div 8$ об/с. Величина аксиальной компоненты ускорения капли для заданных начальных параметров равна $\omega_z = 8,887$ м/с². В табл. 11.1 $[u_p] = \text{м/с}$; $[\omega] = \text{м/с}^2$.

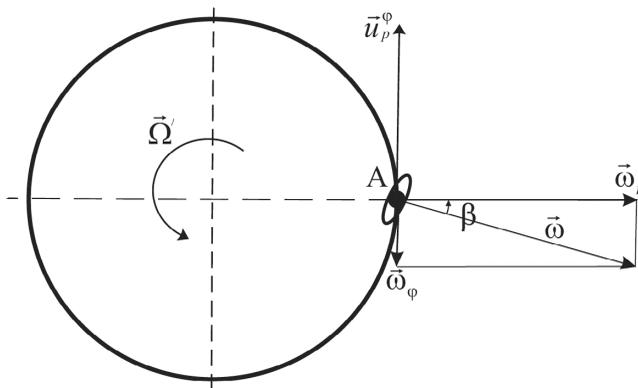


Рис. 11.3. Радиальная $\vec{\omega}_r$ и тангенциальная $\vec{\omega}_\phi$ компоненты вектора ускорения капли

Превалирующее влияние на величину числа Бонда оказывает радиальная компонента вектора ускорения ω_r . Вклад аксиальной компоненты не превышает 10%, а тангенциальной – 16%.

Таблица 11.1
Влияние компонент ускорения капли на число Бонда

$\mu = 15 \text{ Па}\cdot\text{с}, n = 5,7 \text{ об/с}$									
$D, \text{ мм}$	ω_r	ω_ϕ	u_p^r	u_p^ϕ	u_p^z	V_ϕ	Bo	Re	We
3	82,8	1,22	0,03	2,33	0,004	2,33	28	0,01	0,01
4	82,8	2,14	0,06	2,32	0,007	2,33	49	0,02	0,06
5	82,8	3,35	0,09	2,32	0,011	2,33	77	0,04	0,19
$\mu = 2,2 \text{ Па}\cdot\text{с}, n = 5,7 \text{ об/с}$									
$D, \text{ мм}$	ω_r	ω_ϕ	u_p^r	u_p^ϕ	u_p^z	V_ϕ	Bo	Re	We
3	72,1	7,72	0,2	2,28	0,027	2,33	30	0,39	0,66
4	65,9	12,13	0,36	2,19	0,049	2,33	49	0,89	2,49
5	61,9	14,09	0,43	2,13	0,063	2,33	72	1,38	4,83
$\mu = 15 \text{ Па}\cdot\text{с}, n = 8 \text{ об/с}$									
$D, \text{ мм}$	ω_r	ω_ϕ	u_p^r	u_p^ϕ	u_p^z	V_ϕ	Bo	Re	We
3	148,1	3,36	0,07	3,26	0,04	3,27	55	0,02	0,057
4	148,1	5,92	0,12	3,26	0,07	3,27	97	0,04	0,240
5	146,6	9,14	0,18	3,24	0,011	3,27	160	0,08	0,720

Изменение критериев подобия вдоль траектории капли показано на рис. 11.4. Числа Рейнольдса, Вебера и Бонда возрастают по мере увеличения радиальной координаты капли. При этом числа Re и Bo линейно зависят от r .

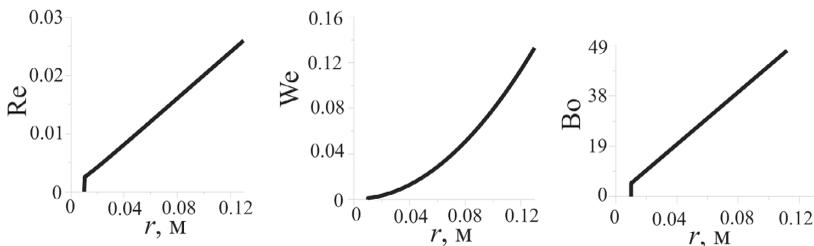


Рис. 11.4. Зависимость критериев подобия от радиальной координаты ($\mu = 15$ Па·с, $n = 5,7$ об/с, $D = 3$ мм)

Деформация капли

При малых значениях размеров капли и угловых скоростей жидкости капля сохраняет сферическую форму на протяжении всей траектории (рис. 11.5, а). При увеличении диаметра капли D и угловой скорости вращения среды n начиная с некоторого критического набора параметров начинается деформация капли, причем степень деформации увеличивается с возрастанием радиальной координаты (рис. 11.5, б, табл. 11.2).

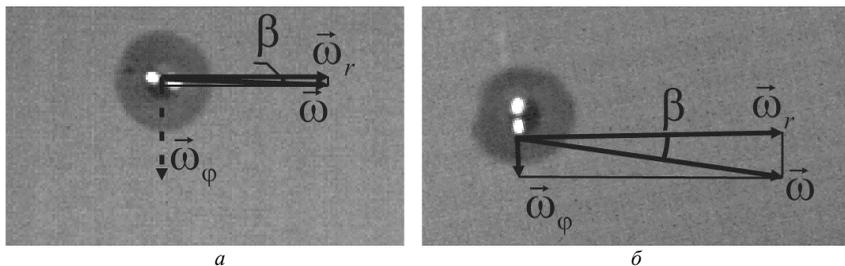
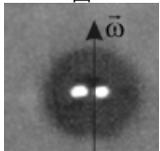
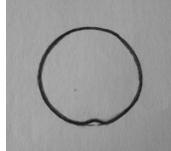
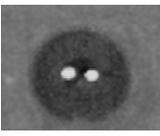
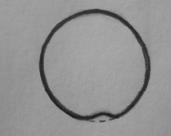
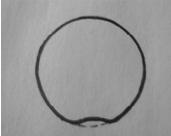
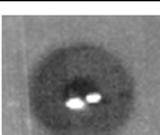
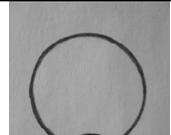
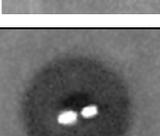
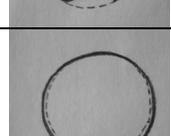
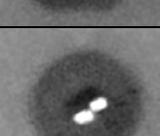
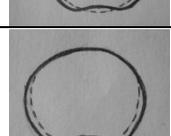
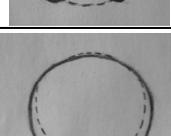


Рис. 11.5. Форма капли ртути для разных начальных параметров ($\mu_l = 7,67$ Па·с):
 а – $D = 3$ мм, $n = 4$ об/с, $Re = 0,045$, $We = 0,1$, $Bo = 28$, $\beta = 1,9^\circ$;
 б – $D = 6$ мм, $n = 6,06$ об/с, $Re = 0,34$, $We = 2,9$, $Bo = 142$; $\beta = 7,9^\circ$

Таблица 11.2

Форма капли в зависимости от радиальной координаты
($D = 6$ мм, $\mu_l = 7,67$ Па·с, $n = 6,06$ об/с)

Форма капли		Bo	Re	We	r , см	D_m / D
Фото	Схема					
<p>1 мм</p> 		79	0,18	0,85	3,85	1
		120	0,28	1,9	5,9	1
		142	0,34	2,79	7	1
		162	0,38	3,5	8	1,07
		182	0,43	4,6	9	1,07
		192	0,46	5,1	9,5	1,08
		227	0,54	6,92	11,2	1,13

В табл. 11.2 приведены формы капли, соответствующие значения радиальной координаты и критериев подобия, а также отношения диаметра миделева сечения D_m к исходному диаметру капли D .

На первом этапе потери устойчивости капли происходит незначительная деформация сферической формы, проявляющаяся в появлении небольшой «вмятины» на поверхности капли (рис. 11.6). По мере увеличения числа Бонда или числа Рейнольдса размер «вмятины» увеличивается (второй этап). На третьем этапе потери устойчивости наряду с появлением «вмятины» наблюдается сплющивание капли.

Деформация капли в закрученном потоке жидкости была одинаковой и характеризовалась образованием осесимметричной «вмятины» со стороны, противоположной направлению суммарного вектора ускорения капли $\vec{\omega}$.

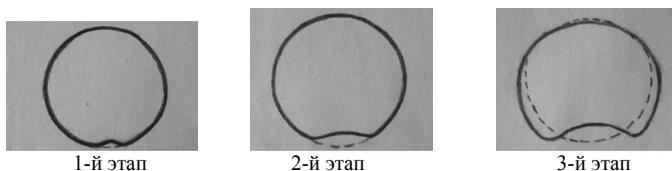


Рис. 11.6. Стадии деформации капли при числах Рейнольдса $Re < 1$

Отметим, что величина угла β , характеризующего отклонение ориентации «вмятины» от радиального направления (от оси Or), зависит от начальных размера капли и физических свойств (плотности, вязкости) дисперсионной среды. Значение β возрастает с увеличением диаметра капли, угловой скорости вращения жидкости и с уменьшением вязкости жидкости. Увеличение угла β тем больше, чем больше сила Кориолиса.

Рассмотрим критические условия (критические значения числа Бонда $Bo_{кр}$ и Вебера $We_{кр}$), характеризующие потерю устойчивости формы капли (соответствующие началу ее деформации). Значения $Bo_{кр}$ и $We_{кр}$ существенно зависят от числа Рейнольдса. Для диапазона чисел Рейнольдса $Re = 0,01 \div 4$ деформация начинается при $Bo_{кр} > 21$ и $We_{кр} > 0,5$. Зависимость $Bo_{кр}$ от Re приведена на рис. 11.7. Значение $Bo_{кр}$ монотонно уменьшается с возрастанием числа Рейнольдса.

Выразим число Бонда через We и Re в виде

$$Bo = \frac{\rho_p D^2}{\sigma} |\vec{\omega}| = \frac{We}{Re} \frac{\rho_p D^2}{\mu} \frac{|\vec{\omega}|}{|\vec{U}|}, \quad (11.1)$$

где $We = \frac{\rho |\vec{U}|^2 D}{\sigma}$, $Re = \frac{\rho |\vec{U}| D}{\mu}$.

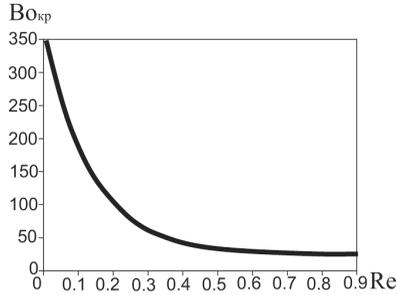


Рис. 11.7. Зависимость критического значения числа Бонда от числа Рейнольдса

Из уравнения движения капли, записанного в проекции на ось вектора ускорения массовых сил $\vec{\omega}$

$$m \frac{du_p}{dt} = m|\vec{\omega}| - C_D \frac{\pi D^2 \rho |\vec{U}|^2}{4} ,$$

для квазистационарного режима ($du_p/dt = 0$) следует:

$$\frac{|\vec{\omega}|}{|\vec{U}|} = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho}{\rho_p} \frac{|\vec{U}|}{D} . \quad (11.2)$$

Подставляя (11.2) в (11.1), получим:

$$Bo = \frac{3}{4} C_D We . \quad (11.3)$$

Для стоксовского режима движения ($C_D = 24/Re$) эта зависимость имеет вид

$$Bo = 18 \frac{We}{Re} . \quad (11.4)$$

На рис. 11.8 проведено сравнение зависимости (11.4) с экспериментальными данными, приведенными в табл. 11.2.

Для анализа механизма, по которому происходит потеря устойчивости формы капли, проведем оценку действующих на каплю сил. Данная оценка представляет интерес, так как в общепринятой форме числа Бонда и Вебера записываются с точностью до постоянных коэффициентов.

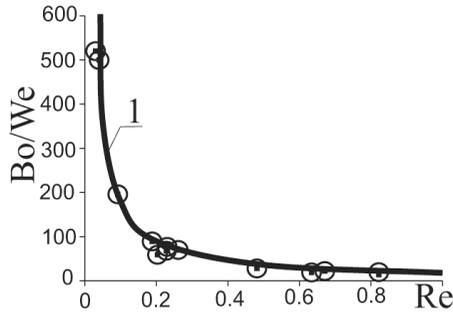


Рис. 11.8. Зависимость Bo/We от Re для стоковского режима:
 1 – зависимость (11.14); точки – экспериментальные данные
 по критическим значениям чисел Бонда и Вебера

На единичную площадку dS , расположенную на поверхности капли, действуют следующие силы.

1. Сила скоростного напора (динамического давления), которая для лобовой точки капли равна

$$F_{\partial n} = p_{\partial n} dS = \frac{\rho_l |\bar{U}|^2}{2} dS, \quad (11.5)$$

где $p_{\partial n}$ – динамическое давление.

2. Сила поверхностного натяжения, определяемая формулой Лапласа

$$F_{\sigma} = p_{\sigma} dS = \frac{4\sigma}{D} dS, \quad (11.6)$$

где p_{σ} – поверхностное давление.

3. Суммарная массовая сила

$$F_{\omega} = p_{\omega} dS = \frac{m|\bar{\omega}|}{dS} dS,$$

где p_{ω} – давление, создаваемое массовыми силами.

Полагая $m = \rho_p \pi D^3 / 6$, $dS = \pi D^2 / 4$, получим

$$F_{\omega} = \frac{2}{3} \rho_p |\bar{\omega}| D dS. \quad (11.7)$$

С учетом (11.5)–(11.7) можно получить выражения для оценки вклада рассмотренных сил в числа Вебера и Бонда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{\partial H}}{F_{\sigma}} &= \frac{1}{8} \frac{\rho_l |\vec{U}|^2 D}{\sigma} = \frac{1}{8} \text{We} \\ \frac{F_{\omega}}{F_{\sigma}} &= \frac{1}{6} \frac{\rho_p |\vec{\omega}| D^2}{\sigma} = \frac{1}{6} \text{Bo} \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

Введем граничные значения числа Бонда Bo^* и числа Вебера We^* , при которых, соответственно, $F_{\omega} = F_{\sigma}$ и $F_{\partial H} = F_{\sigma}$ (равенство конкурирующих сил, действующих на каплю). Из (11.5)–(11.7) следует, что

$$\text{Bo}^* = 6, \text{We}^* = 8.$$

С учетом зависимости (11.4) соответствующее граничное значение числа Рейнольдса Re^* равно

$$\text{Re}^* = 18 \frac{\text{We}^*}{\text{Bo}^*} = 24.$$

Таким образом, при $\text{Re} \ll \text{Re}^*$ потеря устойчивости капли происходит по механизму Рэлея – Тейлора ($F_{\omega} \gg F_{\partial H}$), а при $\text{Re} \gg \text{Re}^*$ – по механизму Кельвина – Гельмгольца ($F_{\omega} \ll F_{\partial H}$).

11.3. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ ПУЗЫРЬКА

Рассмотрим результаты экспериментального исследования режимов деформации одиночного пузырька воздуха при его всплытии в вязкой жидкости при числах Рейнольдса $\text{Re} < 1$ [23]. Данное исследование проведено с целью конкретизации механизма потери устойчивости формы границы раздела фаз (Кельвина – Гельмгольца или Рэлея – Тейлора) и дополняет рассмотренное ранее исследование деформации капли в потоке вязкой жидкости.

В зависимости от значений чисел Рейнольдса, Бонда и Вебера сразу же после ввода воздуха в жидкость формируется пузырек определенной конфигурации – сфера (рис. 11.9, а), сферический сегмент с секущей плоскостью, расположенной ниже (рис. 11.9, б, в) или выше (рис. 11.9, г) диаметральной плоскости.

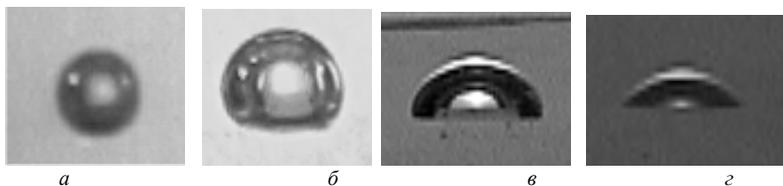


Рис. 11.9. Зависимости формы пузырька от критериев подобия ($D = 1,7$ см):
 $a - Re = 0,03, Bo = 12$; $б - Re = 0,24, Bo = 56$; $в - Re = 4,2, Bo = 57$;
 $г - Re = 34, Bo = 54$

Пузырек сферической формы формируется практически сразу после ввода воздуха в жидкость и сохраняет свою форму на протяжении всей траектории движения. При образовании пузырька в форме сферического сегмента наблюдалась нерегулярная деформация первоначального сферического пузырька, сопровождающаяся колебаниями поверхности раздела фаз и, в конечном счете, образованием сферического сегмента.

Конфигурация пузырька в виде сферического сегмента зависит от числа Рейнольдса. При меньших вязкостях жидкости (большем числе Рейнольдса) секущая плоскость сегмента расположена выше диаметральной плоскости пузырька, чем при больших вязкостях.

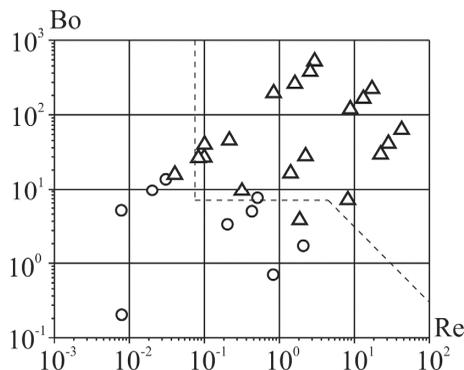


Рис. 11.10. Зависимость формы пузырька от Bo и Re :
 \bigcirc – сферический пузырек; Δ – деформированный пузырек

На рис. 11.10 приведена классификация форм пузырька в зависимости от чисел Рейнольдса и Бонда [23]. При малых значениях чисел Рейнольдса и Бонда ($Re < 1, Bo < 1$) форма стационарно всплывающих пузырьков близка к сферической. При увеличении значений чисел Рейнольдса или Бонда происходит деформация сферической межфазной поверхности, и пузырьки приобретают форму шарового сегмента.

В табл. 11.3 приведены критические значения чисел Бонда и Вебера, соответствующие началу деформации пузырька, а также соответствующие им значения числа Рейнольдса. Под началом деформации пузырька понимается минимальное отклонение формы от сферической. При этом характер деформации пузырька на начальном этапе полностью соответствует характеру деформации капли. В обоих случаях на поверхности дисперсной частицы появляется «каверна».

Таблица 11.3

Критические значения критериев подобия, характеризующие начало деформации пузырька

Re	Bo _{кр}	We _{кр}	μ _l , Па·с
0,04	15,8	0,03	4,1
0,28	9,6	0,15	1,02
1,4	3,0	0,95	0,19

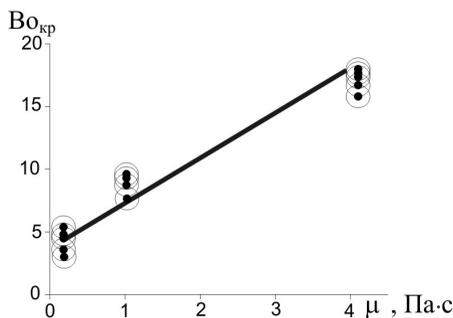


Рис. 11.11. Зависимость $Bo_{кр}$ от вязкости раствора

Из табл. 11.3 видно, что значение критического числа Бонда возрастает в диапазоне $Bo_{кр} = 3,0 \div 15,8$ при варьировании вязкости жидкости в диапазоне $\mu = 0,19 \div 4,1$ Па·с. На рис. 11.11 приведена зависимость критического значения числа Бонда от вязкости раствора.

Поскольку в проведенных экспериментах пузырек движется в Стоксовском режиме, то числа Бонда и Вебера связаны формулой

$$\frac{Bo}{We} = \frac{12}{Re}. \quad (11.9)$$

На рис. 11.12 приведено сравнение зависимости (11.9) с экспериментальными данными, приведенными в табл. 11.3. Точками на рис. 11.12

обозначены осредненные по пяти экспериментам опытные данные (разброс экспериментальных данных для каждого значения вязкости не превышает 2%).

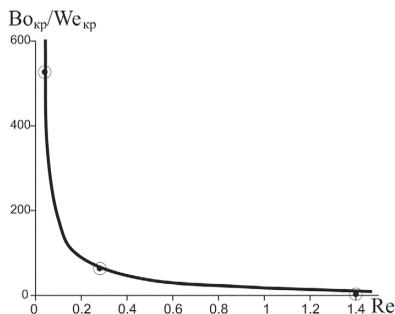


Рис. 11.12. Зависимость $Bo_{кр}/We_{кр}$ от Re

Для анализа механизма потери устойчивости сферической формы пузырька полученные экспериментальные данные представлены в виде зависимостей формы пузырька от чисел Рейнольдса и Вебера (рис. 11.13). Как следует из рис. 11.13, значение числа Вебера, соответствующее потере устойчивости сферической формы пузырька при $Re < 1$, лежит в диапазоне $We = 0,03 \div 0,5$. Сопоставление указанных значений чисел Бонда (рис. 11.10) и Вебера (рис. 11.13) позволяет сделать вывод о потере устойчивости границы раздела фаз за счет развития неустойчивости Рэлея – Тейлора, поскольку критическое значение числа Вебера $We < 1$ (массовые силы преобладают над силами динамического напора).

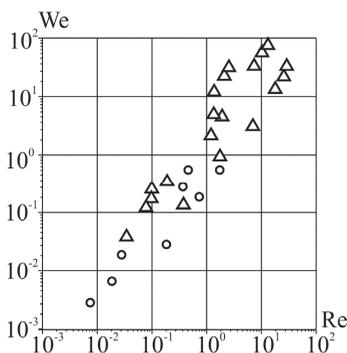


Рис. 11.13. Зависимость формы пузырька от We и Re :
 \circ – сферический пузырек; Δ – деформированный пузырек

12. КОАГУЛЯЦИЯ И ДРОБЛЕНИЕ КАПЕЛЬ ПРИ ВЗАИМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

При движении полидисперсного облака капель в несущей среде происходят их столкновения из-за разного скоростного запаздывания капель разных размеров. В результате столкновения капли могут сливаться (коагулировать), дробиться, приобретать вращательное движение.

Определение условий устойчивости системы сталкивающихся капель представляет интерес не только как одна из классических проблем механики жидкости, но является актуальным при решении ряда прикладных задач газодинамики, ядерной физики, метеорологии, астрофизики.

Существенное влияние на результат взаимодействия оказывают физические свойства жидкости, в первую очередь коэффициент динамической вязкости и коэффициент поверхностного натяжения. Рассмотрим полученные при экспериментальном исследовании основные типы взаимодействия капель маловязкой жидкости (дистиллированная вода) и вязкой жидкости (водно-глицериновый раствор) [6].

Установка для вязких жидкостей (рис. 12.1) состояла из двух генераторов 1 типа «колеблющаяся пластина», создающих встречные потоки монодисперсных капель с относительной скоростью $3 \div 8$ м/с и частотой отрыва $20 \div 120$ Гц. Для получения возможно более полной информации о взаимодействии киносъемка велась двумя скоростными камерами 2, расположенными перпендикулярно друг другу и потокам капель. Сталкивающиеся частицы освещались фотолампами 3 с фокусирующими системами 4 так, что создавалась возможность съемки теньевым методом. Полученные пары кинограмм обрабатывались совместно на дешифраторе. Экспериментальный стенд для капель воды отличался от описанного только тем, что для получения снарядов использовался генератор типа «вращающийся капилляр».

12.1. ТИПЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕВЯЗКИХ КАПЕЛЬ

Процесс взаимодействия капель с заданным отношением диаметров ($\gamma = D_2 / D_1$, $D_2 \geq D_1$) определяется углом столкновения α (рис. 3.5) и критерием Вебера

$$We = \frac{\rho_p |\vec{u}_1 - \vec{u}_2|^2 D_1}{\sigma}, \quad (12.1)$$

где ρ_p , σ – плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости; \vec{u}_1 , \vec{u}_2 – скорости сталкивающихся капель.

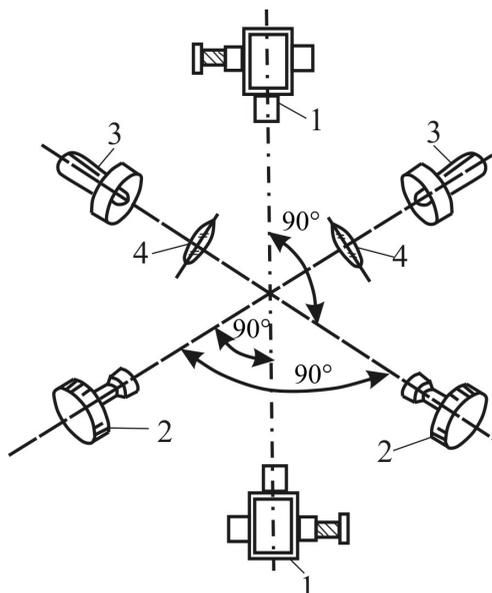


Рис. 12.1. Схема установки для исследования взаимодействия капель:
1 – генератор капель; 2 – кинокамера; 3 – фотолампа; 4 – фокусирующая система

Для капель невязкой жидкости при $\gamma = 1,9 \pm 0,8$ в диапазоне чисел Вебера $We = 0,1 \div 120$ наблюдаются следующие типы взаимодействия.

- При $We = 0 \div 0,5$ наблюдается слияние капель под действием сил поверхностного натяжения (рис. 12.2, а). Причину слияния капель при малых скоростях столкновения можно объяснить колебаниями поверхности капель, понижением давления в зазоре между ними и насыщением атмосферы парами жидкости.

- Для столкновений при числах Вебера $We = 0,7 \div 1,5$ наблюдается отскок капли-снаряда от капли-мишени (рис. 12.2, б). Вероятной причиной отскока считают наличие газовой прослойки между каплями. Можно предположить, что импульс силы сталкивающихся капель недостаточен для вытеснения газовой прослойки между каплями и реализации физического контакта между ними. Явление отскока можно объяснить упругими свойствами поверхностного слоя капель; слияние капель возможно лишь

при значительной их деформации, когда кинетическая энергия столкновения сравнима со свободной энергией поверхности. Это предположение, однако, противоречит фактам слияния капель при близких к нулю скоростях столкновения (рис. 12.2, *a*).

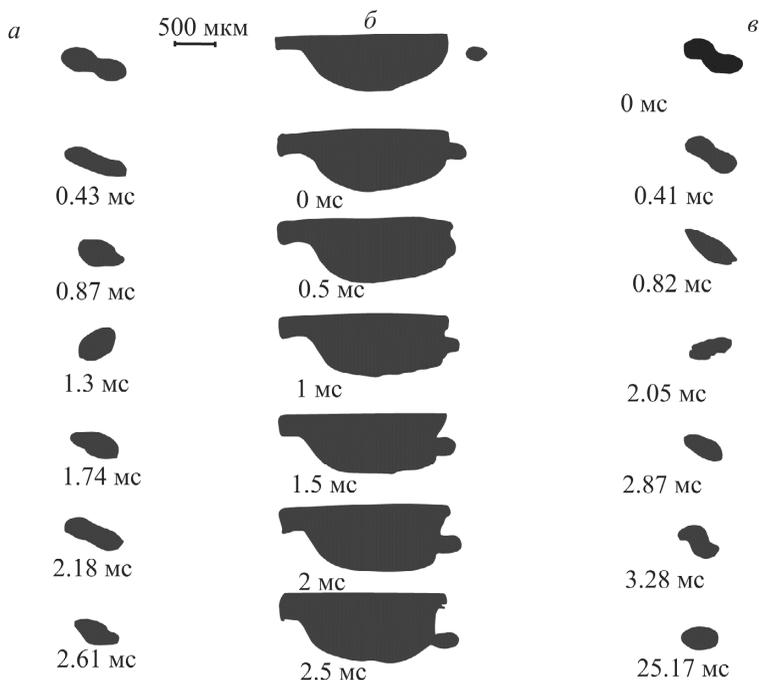


Рис. 12.2. Последовательность кадров столкновения капель дистиллированной воды при $We < We_{кр}$

- При значениях $We = 2 \div 15$ наблюдается устойчивое слияние капель (рис. 12.2, *в*). При этом кинетическая энергия капель достаточна для вытеснения газовой прослойки, и капли входят в физический контакт. Процесс слияния сопровождается сложным движением образовавшейся капли – развитием в ней различных типов колебаний и вращением.

- Столкновение капель при значениях $We > 15$ приводит к временному слиянию капель с последующим разрушением образовавшейся капли (рис. 12.3, *a*). При этом образуются две капли, размеры которых примерно равны размерам сталкивающихся капель. Одной из возможных при-

чин разрушения первоначально слившейся капли является ее вращение, возникающее при нецентральной соударении ($\alpha \neq 0$).

• С дальнейшим увеличением We картина взаимодействия резко меняется. При центральном соударении с $We > 50$ наблюдается «пробивание» капли-мишени. В момент слияния диаметр мишени увеличивается на $10 \div 15\%$, затем из тыльной стороны мишени вылетает капля, имеющая примерно тот же размер, что и капля-снаряд (рис. 12.3, б). При этом между каплями образуется перешеек диаметром $\sim 0,1D_1$ и длиной $\sim 4D_1$, который разрушается с образованием четырех и более капель-спутников диаметром до $\sim 0,2D_1$.

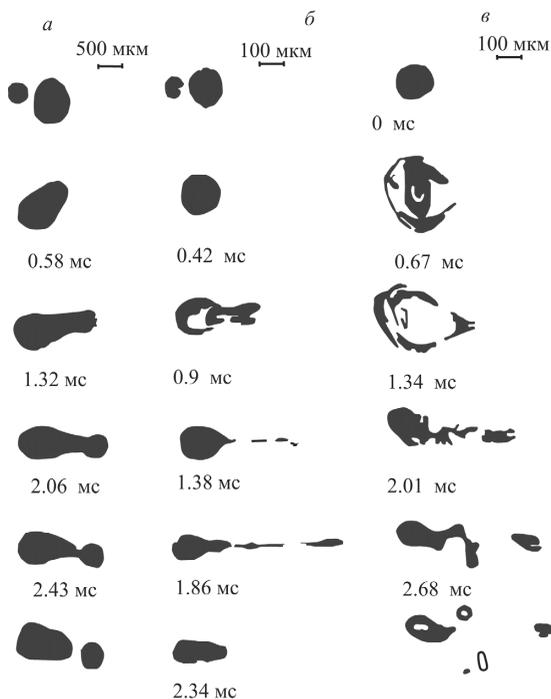


Рис. 12.3. Последовательность кадров столкновения капель дистиллированной воды при $We > We_{кр}$

• При столкновениях с $We > 100$ наблюдается раздувание капли-мишени в несколько раз с сохранением сферической формы капли и с образованием возмущений поверхности волновой структурой. Затем сле-

дует взрывообразное разрушение капли с образованием большого числа осколков, радиально разлетающихся из зоны взаимодействия (рис. 12.3, в). Вероятно, при достижении определенного значения We взаимодействие капель идет в кавитационном режиме.

12.2. ТИПЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЯЗКИХ КАПЕЛЬ

При столкновениях, отличных от центрального, образовавшаяся капля приобретает вращательное движение, так как система двух взаимодействующих капель с диаметрами D_1 и D_2 ($D_2 \geq D_1$) обладает моментом импульса

$$\vec{M} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} [\vec{R}_{21} \times (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)], \quad (12.2)$$

$$|\vec{M}| = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| \delta,$$

где m_1 , m_2 – массы сталкивающихся капель; \vec{u}_1 , \vec{u}_2 – векторы скорости капель; \vec{R}_{21} – вектор, направленный из центра капли-мишени к центру капли-снаряда; $\delta = 0,5(D_1 + D_2) \sin \alpha$ – прицельное расстояние (эксцентриситет столкновения).

Далее введем безразмерные критерии подобия – нормализованный момент импульса

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{(D_e / 2)^{3,5} \sqrt{\rho \sigma}}, \quad (12.3)$$

где $D_e = \sqrt[3]{D_1^3 + D_2^3}$ – диаметр эквивалентной капли (сферической капли, имеющей тот же объем, что и слившиеся).

Процесс взаимодействия свободно летящих капель вязкой жидкости определяется безразмерными критериями We (уравнение (12.1)), Ω (уравнение (12.3)), отношением диаметров капель $\gamma = D_2 / D_1$ и числом Рейнольдса, рассчитанным для движения капли-снаряда внутри капли-мишени

$$Re = \frac{\rho_p |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| D_1}{\mu_p}. \quad (12.4)$$

В диапазоне значений критериев $\Omega = 0 \div 20$, $\gamma = 1 \div 2,5$, $Re = 10 \div 25$, $We = 80 \div 500$ наблюдаются следующие типы взаимодействия.

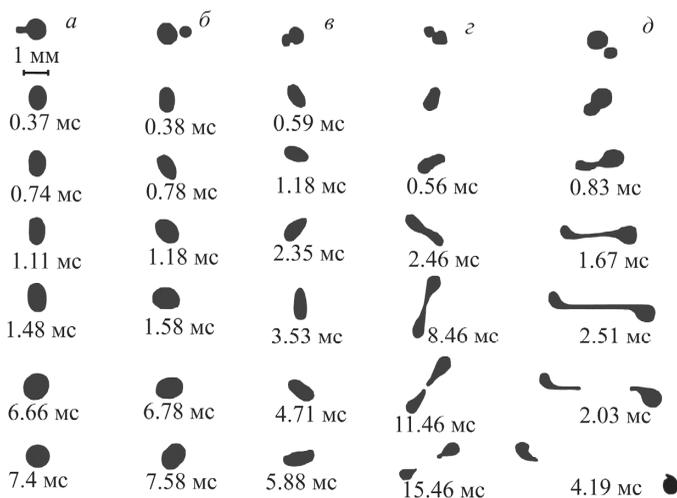


Рис. 12.4. Последовательность кадров столкновения капель водно-глицериновой смеси:

а – $We = 198$; $Re = 26,2$; $\Omega = 0$; б – $We = 202$; $Re = 16,7$; $\Omega = 3$;
в – $We = 155$; $Re = 15,2$; $\Omega = 4,5$; з – $We = 172$; $Re = 18,7$; $\Omega = 7,3$;
д – $We = 149$; $Re = 15,9$; $\Omega = 12,2$

• При соударениях, близких к центральному (величина прицельного расстояния $\delta = 0,5(D_1 + D_2) \sin \alpha \rightarrow 0$), а нормализованный момент импульса $\Omega \sim 0$, капли сливаются без вращения. Внутри образовавшейся в результате слияния капли наблюдаются сложные колебательные движения, деформирующие поверхность капли. Однако вследствие вязкости жидкости эти колебания быстро затухают, а капля под действием сил поверхностного натяжения приобретает сферическую форму (рис. 12.4, а).

• При увеличении Ω за счет увеличения прицельного расстояния либо скорости столкновения система капель приобретает вращательное движение. В зависимости от величины Ω наблюдаются две устойчивые формы вращающейся капли. При $\Omega < 5$ капля устойчива и приобретает форму эллипсоида вращения (рис. 12.4, б). В некоторых случаях наблюдается вторая устойчивая форма вращающейся капли, предполагаемая С. Чандрасекхаром [32]. При этом начальный эллипсоид вращения резко переходит в другой, более вытянутый (рис. 12.4, в).

- При $\Omega > 5$ первоначально слившаяся вращающаяся капля начинает вытягиваться, на концах образуются утолщения, связанные утончающейся перемычкой (рис. 12.4, з). В результате дальнейшей эволюции происходит деление на две капли соизмеримых размеров. Связывающая перемычка стягивается с образованием 3–4 осколков, масса которых намного меньше массы основных капель. Распад перемычки происходит при удалении капель друг от друга на $10 \div 15$ диаметров.

- При больших значениях прицельного расстояния наблюдается взаимодействие капель, близкое к касательному (рис. 12.4, д). В этом случае вращающаяся объединенная капля не успевает сформироваться; связывающая перемычка быстро трансформируется в нить, которая распадается на мелкие фрагменты. Обе крупные капли приобретают вращательное движение.

12.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВЯЗКИХ КАПЕЛЬ

Рассмотрим полученные экспериментально результаты взаимодействия капель вязкой жидкости в зависимости от нормализованного момента импульса Ω .

При столкновениях возможно либо слияние, либо дробление капель. При столкновениях, близких к центральному, происходит слияние капель (рис. 12.4, а).

В случае слияния первоначально бесформенная конфигурация капли в течение нескольких миллисекунд приобретает устойчивую равновесную форму. Слившиеся капли всегда вращаются. В зависимости от величины Ω наблюдаются две характерные равновесные формы.

- При $\Omega < \Omega_{2кр} \approx 3,4 \pm 0,5$ вращающаяся капля после установления приобретает форму, близкую к эллипсоиду вращения. На рис. 12.4, б приведены кадры кинограммы для данного типа взаимодействия.

- В случаях слияния с $\Omega > \Omega_{2кр}$ первоначальная конфигурация очень быстро (за время $\sim (1 \div 2)$ мс) приобретает неосесимметричную форму, напоминающую трехосный эллипсоид. Данный тип взаимодействия показан на рис. 12.4, в. После установления, протекающего за время 3,6 мс, эта конфигурация вращалась в поле съемки вокруг своей короткой оси без заметного изменения формы. При больших значениях Ω получаются более вытянутые эллипсоиды.

- В случаях столкновений с параметром $\Omega > \Omega_{1кр} = 6 \pm 0,9$ наблюдается только дробление капель (рис. 12.4, з, д).

Проведем анализ полученных критических значений нормализованного момента импульса $\Omega_{кр}$. Если произойдет слияние капли-снаряда диаметром D_1 с каплей-мишенью диаметром D_2 , то образуется сферическая капля диаметром $D_e = \sqrt[3]{D_1^3 + D_2^3}$.

Кинетическая энергия вращения этой капли составляет

$$E_{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{M}|^2}{J}. \quad (12.5)$$

Момент инерции капли определяется формулой

$$J = 0,1m_e D_e^5 = \frac{\pi}{60} \rho_p D_e^5,$$

где m_e – масса эквивалентной капли диаметром D_e .

Предположим, что дробление вращающейся капли произойдет только в том случае, когда энергия E_{ω} больше, чем разность между поверхностными энергиями капли D_e и исходных капель D_1 и D_2 :

$$\Delta E_{\sigma} = \pi \sigma (D_1^2 + D_2^2 - D_e^2). \quad (12.6)$$

Подставляя в (12.6) выражения для $|\vec{M}|$ и J , получим:

$$E_{\omega} = \frac{5\pi\rho_p |\vec{u}_1 - \vec{u}_2|^2 \delta^2}{6D_e^{11}} (D_1 \cdot D_2)^6. \quad (12.7)$$

Приравнявая (12.6) и (12.7), получим формулу для критического значения угла столкновения $\alpha_{кр}$ (при $\alpha < \alpha_{кр}$ капли сливаются):

$$\alpha_{кр} = \arcsin \sqrt{\frac{f(\gamma)}{We}}, \quad (12.8)$$

где $f(\gamma) = \frac{4,8[1 + \gamma^2 - (1 + \gamma^3)^{2/3}](1 + \gamma^3)^{11/3}}{\gamma^6(1 + \gamma)^3}$.

Критические значения $\alpha_{кр}$ и $\Omega_{кр}$ связаны соотношением

$$\Omega_{кр} = \frac{\pi\sqrt{8We}\gamma^3(1 + \gamma)}{3(1 + \gamma^3)^{13/6}} \sin \alpha_{кр}. \quad (12.9)$$

Подставляя в (12.9) значение $\alpha_{кр}$ из (12.8), получим

$$\Omega_{кр} = 6,49 \frac{\sqrt{1+\gamma^2 - (1+\gamma^3)^{2/3}}}{\sqrt[3]{1+\gamma^3}}.$$

При проведении экспериментов заметной зависимости процесса слияния и дробления капель от числа Рейнольдса в исследованном диапазоне обнаружено не было. Поэтому граница, отделяющая области слияния и дробления, определялась в виде $\Omega_{1кр} = f(We, \gamma)$. Результаты экспериментального определения этой зависимости приведены на рис. 12.5.

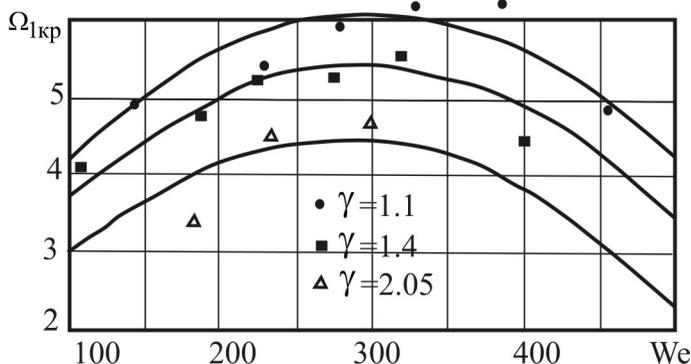


Рис. 12.5. Экспериментальные зависимости $\Omega_{1кр}$ от We и γ для капель водно-глицериновых смесей

При $\Omega > \Omega_{1кр}$ наблюдалось дробление капель, при $\Omega < \Omega_{1кр}$ – их слияние.

12.4. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ СЛИЯНИЯ КАПЕЛЬ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ

В рамках модели идеальной жидкости можно получить аналитическую оценку критических условий при столкновениях капель [6]. Для количественного описания процесса взаимодействия капель идеальной жидкости (воды) используются следующие безразмерные критерии:

$$\gamma = D_2 / D_1, \text{ We} = \frac{\rho_p |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|^2 D_1}{\sigma}, \Omega = \frac{|\bar{M}|}{(D_e / 2)^{3.5} \sqrt{\rho \sigma}}, \quad (12.10)$$

где

$$|\bar{M}| = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| \delta. \quad (12.11)$$

Для капель воды силы, обусловленные вязкостью, пренебрежимо малы по сравнению с силами поверхностного натяжения и инерционными, поэтому влияние критериев, содержащих вязкость, несущественно:

$$\text{Lp} = \rho_p \sigma D_2 / \mu_p^2 \sim 10^5, \text{ Re} = \frac{\rho_p |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| D_1}{\mu_p} \sim 10^3.$$

Экспериментальное исследование типов взаимодействия водяных капель в широком диапазоне значений $\text{We} = 0,1 \div 120$ (при $\gamma = 1,9$) показало, что для $\text{We} = 15 \div 50$ взаимодействие характеризуется слиянием капель с последующим возможным дроблением под действием центробежных сил. Следовательно, в этом диапазоне чисел Вебера целесообразно искать границу устойчивости системы капель. На рис. 12.6 приведены экспериментальные результаты обработки более 300 столкновений капель в диапазонах $\gamma = 1,15 \div 2,6$, $\text{We} = 10 \div 50$ [6]. Здесь же приведены аппроксимирующие кривые, полученные методом наименьших квадратов:

$$\Omega_{\text{кр}} = 11,38 - 9,50 \gamma + 0,13 \text{We} - 0,88 \cdot 10^{-2} \gamma \text{We} - 0,16 \cdot 10^{-2} \text{We}^2 + 1,90 \gamma^2.$$

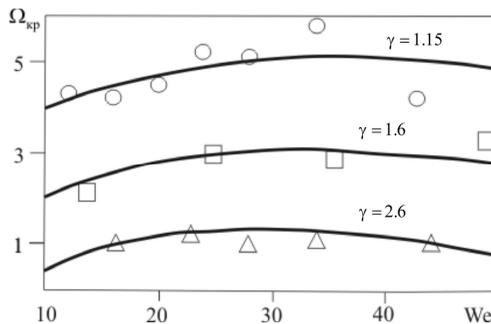


Рис. 12.6. Экспериментальные зависимости $\Omega_{\text{кр}}$ от We и γ для капель дистиллированной воды

Если при фиксированных γ , We значения Ω находятся выше кривой $\Omega_{кр}$, то система капель неустойчива и распадается после взаимодействия; если значения Ω попадают в область устойчивости (ниже кривой $\Omega_{кр}$), то наблюдается слияние капель.

Найдем зависимость $\Omega_{кр}$ только от критерия γ , предположив, что при рассматриваемом типе взаимодействия, характерном для $We = 10 \div 50$, зависимость $\Omega_{кр}$ от We незначительна. Справедливость этого предположения подтверждается экспериментальными результатами, представленными на рис. 12.6.

Рассмотрим упрощенную модель касательного столкновения, при котором прицельное расстояние $\delta \cong D_1/2 + D_2/2$ (рис. 12.7). (Так как δ не входит явно в искомую зависимость $\Omega_{кр}(\gamma)$, последняя будет справедлива и для столкновений, не являющихся касательными.) Если при касательном столкновении момент Ω меньше критического, то следует ожидать слияния капель; при этом система сливающихся капель будет вращаться, а их центры масс – сближаться. В случае $\Omega > \Omega_{кр}$ происходит распад капель, при котором капли, коснувшись поверхностями, будут удаляться друг от друга. При $\Omega = \Omega_{кр}$ капли вращаются, не распаваясь и не сливаясь вокруг центра масс системы.

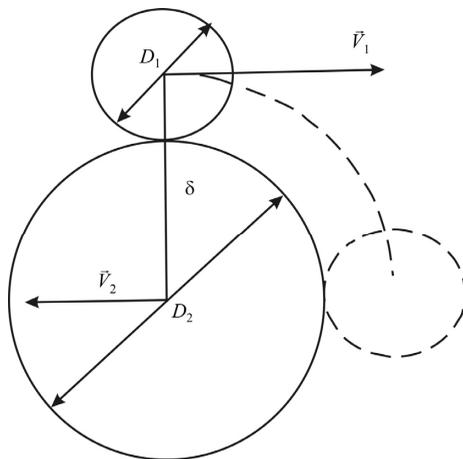


Рис. 12.7. Схема касательного столкновения

Условия равновесия в последнем случае можно найти из вариационного принципа минимума потенциальной энергии [33], приравняв к нулю первую вариацию потенциальной энергии системы во вращающейся системе координат при постоянной угловой скорости вращения ω . Выражение для потенциальной энергии системы капель имеет вид

$$E = -\frac{J\omega^2}{2} + \sigma S, \quad (12.12)$$

где J – момент инерции системы.

При вычислении площади S приближенно будем считать ее равной сумме поверхностей двух капель S_1, S_2 за вычетом удвоенной площади контакта. Тогда с точностью до величины h^2 (рис. 12.8) получим

$$S = S_1 + S_2 - 2\pi h D_1 D_2 / (D_1 + D_2), \quad (12.13)$$

где $h = h_1 + h_2$ – глубина погружения.

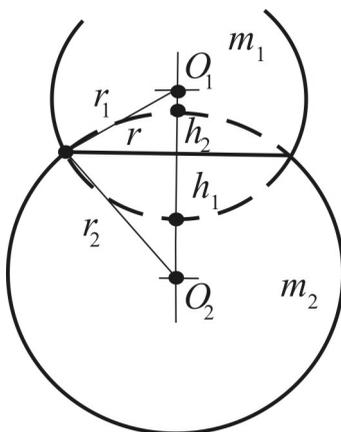


Рис. 12.8. Геометрия касательного столкновения

Так как при взаимодействии влияние вязкости не учитывается, при вращении капель в условиях равновесия будем рассматривать только вращение их центров масс относительно общего центра масс системы. Вращением каждой капли вокруг собственного центра масс будем пренебрегать. В этом приближении момент инерции системы относительно ее центра масс имеет вид

$$J = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} - h \right)^2. \quad (12.14)$$

Подставляя (12.12), (12.13) в (12.14), получим выражение для потенциальной энергии во вращающейся системе координат:

$$E = -\frac{1}{2} \omega^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} - h \right)^2 + \sigma(S_1 + S_2) - 2\pi h \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} \sigma.$$

Система капель находится в равновесном состоянии, если в окрестности $h = 0$ при $\omega = \text{const}$ вариация

$$\delta E = \omega^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} - h \right)^2 - 2\pi \sigma \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} = 0. \quad (12.15)$$

Подставляя в (12.15) выражения (12.10), (12.11) и связь $|\vec{M}| = J\omega$, получим

$$K_1 \equiv \Omega_{\text{кр}} \frac{(1 + \gamma)^{5/3}}{\gamma^2(1 + \gamma)} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = 7,26. \quad (12.16)$$

На рис. 12.9 представлена зависимость $\Omega_{\text{кр}}(\gamma)$, рассчитанная по формуле, полученной из (12.16).

$$\Omega_{\text{кр}} = 7,26 \frac{\gamma^2(1 + \gamma)}{(1 + \gamma^2)^{5/3}}.$$

Здесь же приведены экспериментальные точки $\Omega_{\text{кр}}(\gamma)$, осредненные по We. Экспериментальные точки для комплекса K_1 приведены на рис. 12.10 в зависимости от критерия We. С учетом разброса экспериментальных данных эти точки ложатся вокруг значения $6,8 \pm 1,3$, что удовлетворительно согласуется с аналитической оценкой.

В пределах исследованных диапазонов изменения определяющих процесс критериев $We = 10 \div 50$, $\gamma = 1,15 \div 2,6$ зависимость (12.16) может быть использована для оценки границ устойчивости системы двух сталкивающихся капель идеальной жидкости.

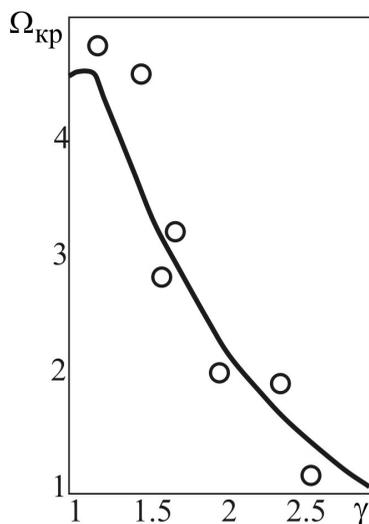


Рис. 12.9. Сравнение расчетной и экспериментальной зависимости $\Omega_{кр}(\gamma)$

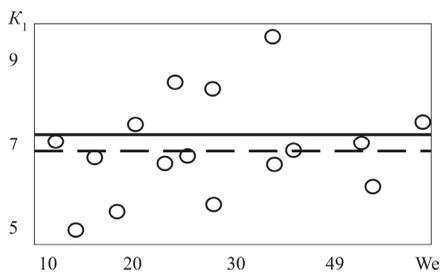


Рис. 12.10. Сравнение теоретического и экспериментального значений комплекса K_1 для капель дистиллированной воды

12.5. ОБОБЩЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДЛЯ ПАРАМЕТРА КОАГУЛЯЦИИ И ДРОБЛЕНИЯ

При течении в сопле двухфазной смеси, состоящей из газа и капель, размеры последних являются одним из наиболее существенных параметров, определяющих интегральные характеристики всего потока. В двухфазном течении эти размеры изменяются как в результате дробления капель газовым потоком, так и вследствие массообмена между ними в про-

цессе столкновений. Последний может включать слияние капель, обмен массой и дробление капель.

Важнейшей интегральной характеристикой, определяющей закономерности массообмена при взаимодействии капель в двухфазном потоке, является параметр коагуляции и дробления φ_{ji} – математическое ожидание отношения изменения массы капли-мишени D_i , вызванного взаимодействием $j-i$, к общей массе столкнувшихся с ней капель-снарядов D_j ($D_j < D_i$). В настоящее время для течений в соплах наиболее широко используются эмпирические зависимости для φ_{ji} [10]. Эти зависимости не охватывают диапазон капель близких размеров, взаимодействие которых может внести значительный вклад в массообмен. Так, при слиянии капль с $\gamma_{ji} = 3$ масса крупной капли изменяется только на 1/27, а при $\gamma_{ji} = 1$ – вдвое. Столкновения фиксированной капли i с каплями j тем чаще, чем больше значение γ_{ji} .

С целью получения обобщенной формулы для параметра коагуляции и дробления во всем диапазоне изменения соотношения размеров капель в НИИ ПММ ТГУ проведены исследования взаимодействия капель близких размеров [6].

В результате получена зависимость для параметра коагуляции и дробления в виде

$$\varphi_{ji} = 1 - 0,247 \operatorname{Re}_{ji}^{0,434} \operatorname{Lp}_i^{-0,133} \gamma_{ji}^{-0,273}. \quad (12.17)$$

В опытах по изучению взаимодействия капель в качестве модельных жидкостей применяли дистиллированную воду, спирт, водно-глицериновые растворы, трансформаторное масло.

Попытки использовать зависимости типа (12.17) для аппроксимации полученных данных во всем диапазоне изменения параметров и раздельно в нескольких диапазонах, разбитых по γ_{ji} , свидетельствовали о большой погрешности аппроксимации. Поэтому экспериментальные данные аппроксимировали с помощью следующего выражения:

$$\varphi_{ji} = A + B T_1(\lambda) + C T_2(\lambda), \quad (12.18)$$

где $T_1 = \lambda$; $T_2 = 2\lambda^2 - 1$ – полиномы Чебышева. Аргумент λ имеет вид

$$\lambda = \left(\frac{\operatorname{Re}_{ji}}{\operatorname{Re}_0} \right)^\alpha \left(\frac{\operatorname{Lp}_i}{\operatorname{Lp}_0} \right)^\beta \left(\frac{\gamma_{ji}}{\gamma_0} \right)^\delta. \quad (12.19)$$

Константы Re_0 , Lp_0 , γ_0 обеспечивали изменение λ в пределах $0 < \lambda < 1$. Коэффициенты A , B , C и показатели степени α , β , δ в (12.19) выбирались из условия минимума суммы S , составленной по методу наименьших квадратов:

$$S = \sum_{k=1}^N (\varphi_{ji}^{(k)} - \bar{\varphi}_{ji}^{(k)})^2,$$

где $\varphi_{ji}^{(k)}$, $\bar{\varphi}_{ji}^{(k)}$ – расчетные и опытные значения параметра коагуляции и дробления; k – номер серии; N – общее число серий, т.е. отыскивался минимум функции $S = S(A, B, C, \alpha, \beta, \delta)$ с учетом ограничения по λ :

$$0 \leq \left(\frac{Re_{ji}}{Re_0} \right)^\alpha \left(\frac{Lp_i}{Lp_0} \right)^\beta \left(\frac{\gamma_{ji}}{\gamma_0} \right)^\delta \ll 1. \quad (12.20)$$

Минимум отыскивался с помощью метода Флетчера. Чтобы удовлетворить условию (12.20), на каждом шаге поиска Re_0 , Lp_0 , γ_0 принимали равными соответствующим величинам той серии, в которой $((Re_{ji}^{(k)})^\alpha (Lp_{ji}^{(k)})^\beta (\gamma_{ji}^{(k)})^\delta)$ было минимальным.

В качестве начального приближения A , B , C , α , β , δ задавались таким образом, чтобы зависимость (12.18) совпадала с полученной формулой (12.17). Поиск минимума функции S продолжали до тех пор, пока модули ее частных производных A , B , C , α , β , δ не превышали $5 \cdot 10^{-3}$; при этом изменения переменных A , B , C , α , β , δ на последовательных шагах поиска минимума не превышали 10^{-3} . В результате получена формула [6]

$$\begin{aligned} \varphi_{ji} &= 1,4 + 1,979 \lambda + 0,507(2\lambda^2 - 1), & (12.21) \\ \lambda &= \left(\frac{Re_{ji}}{Re_0} \right)^{0,572} \left(\frac{Lp_i}{Lp_0} \right)^{-0,153} \left(\frac{\gamma_{ji}}{\gamma_0} \right)^{-0,597}, \\ Re_0 &= 383,6, Lp_0 = 370,37, \gamma_{ji} = 2,37. \end{aligned}$$

Эта зависимость справедлива в следующей области:

$$6 < Re_{ji} < 385, 0,2 < Lp_i < 600, 1 < \gamma_{ji} < 12.$$

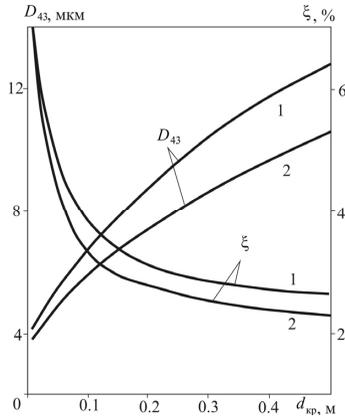


Рис. 12.11. Зависимость среднемассового диаметра частиц D_{43} и двухфазных потерь удельного импульса ξ от диаметра критического сечения сопла:
 1 – расчет с использованием формулы (12.17); 2 – расчет с использованием формулы (12.21)

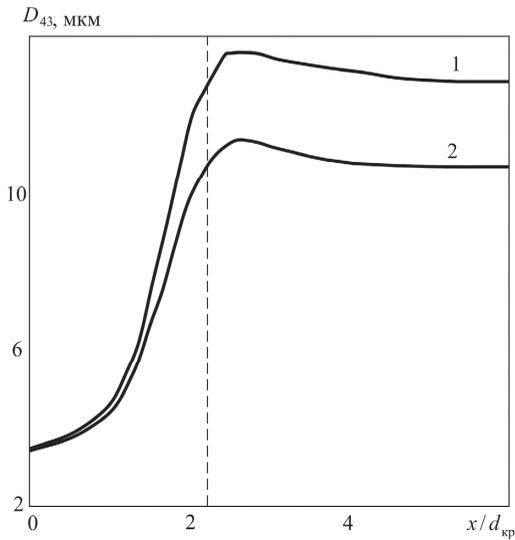


Рис. 12.12. Изменение среднемассового диаметра частиц D_{43} по длине сопла, рассчитанное с использованием формул (12.17) и (12.21) для φ_{ji} :
 1 – расчет с использованием формулы (12.17); 2 – расчет с использованием формулы (12.21)

При различных начальных значениях $A, B, C, \alpha, \beta, \delta$ поиск минимума суммы S приводил к различным выражениям типа (12.21). Однако полученные зависимости в экспериментальном диапазоне значений $Re_{ji}, Lp_i, \gamma_{ji}$ приводят к практически одинаковым значениям φ_{ji} и отличаются вне этого диапазона.

Расчеты двухфазных течений начинаются с величины Re_{ji} близкой к нулю. Поскольку минимальные значения чисел Рейнольдса в экспериментах достаточно велики, то при выводе формулы (12.17) применена правдоподобная гипотеза: $\varphi_{ji} \rightarrow 0$ при $Re_{ji} \rightarrow 0$. При получении выражения (12.21) эта гипотеза учтена с помощью выбора начальных значений $A, B, C, \alpha, \beta, \delta$ из формулы (12.17). Погрешности расчетов в области малых значений Re_{ji} при использовании (12.21) малы вследствие невысокой интенсивности столкновений капель.

Сравнение полученной ранее формулы (12.17) и обобщенной зависимости (12.21) для определения параметра коагуляции и дробления проведено на примере расчета потерь удельного импульса частиц окиси алюминия при двухфазном течении в сопле Лаваля в одномерной постановке.

Результаты расчетов (рис. 12.11, 12.12) свидетельствуют о том, что применение аппроксимационной формулы (12.21) приводит к существенному уменьшению расчетных значений среднего размера частиц и, соответственно, уровня двухфазных потерь удельного импульса. Данная аппроксимация для параметра коагуляции и дробления является наиболее универсальной из известных в настоящее время, так как охватывает почти весь диапазон соотношения размеров частиц.

13. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ РАЗМЕРОВ ЧАСТИЦ

Практически все свойства частиц дисперсной системы прежде всего определяются их размером. Поэтому методы измерения размеров частиц имеют большое значение для разных отраслей современной техники и технологии, а также при оценке влияния конкретных систем на экологию окружающей среды. Процедура экспериментального определения размеров частиц называется дисперсным анализом. Дисперсный анализ является обязательным методом контроля всех производственных операций, связанных с измельчением материалов и использованием порошкообразных продуктов.

В зависимости от размеров частиц, их формы, фазового состояния, концентрации и других характеристик в настоящее время используется целый ряд методов анализа дисперсного состава аэрозолей. Все эти методы можно разделить на следующие группы.

- Измерение размеров индивидуальных частиц (микроскопический анализ).
- Механическое разделение частиц (ситовой анализ).
- Методы седиментации (седиментометрия), основанные на осаждении частиц под действием силы тяжести или в поле центробежных сил.
- Косвенные методы, основанные на измерении зависящих от размера частиц оптических, электрических и других характеристик аэрозольных систем (фотометрия, кондуктометрия и т.д.).
- Методы определения удельной поверхности частиц.

Рассмотрим особенности и области применимости основных методов дисперсного анализа, необходимые для выбора метода измерения размеров частиц конкретной аэрозольной системы [16].

13.1. МЕТОД МИКРОСКОПИРОВАНИЯ

Изучение дисперсного состава пыли или порошка методом микроскопирования основано на визуальном изучении отдельных частиц – их числа, формы и размеров. Наблюдения производятся либо непосредственно под микроскопом, либо путем анализа увеличенных видео- или фотоснимков изучаемых препаратов. При этом подсчет числа частиц и их распределения по фракциям в современных приборах осуществляется при помощи автоматических сканирующих (просматривающих поле зрения под микроскопом) устройств.

При нормальной остроте зрения на расстоянии наилучшего видения (~250 мм) глаз человека может различать предметы, состоящие из линий или точек, отстоящие друг от друга не менее чем на 0,08 мм (80 мкм). Эта величина называется разрешающей способностью глаза. Для повышения разрешающей способности глаза применяются специальные оптические приборы, дающие увеличенное изображение предмета. Простейшим из них является лупа, в качестве которой применяются собирающие линзы с фокусным расстоянием от 10 до 100 мм. Лупа дает увеличение от 7 до 20 крат, что позволяет рассматривать предметы размером до 0,01 мм (10 мкм). Приблизительно рассчитать увеличение N , даваемое лупой, можно по формуле

$$N = \frac{L}{F}, \quad (13.1)$$

где $L = 250$ мм – расстояние наилучшего видения; F – фокусное расстояние лупы, мм.

Например, если $F = 50$ мм, то лупа имеет пятикратное увеличение. Кажется бы, с помощью лупы можно получать очень большие увеличения, – надо только уменьшить ее фокусное расстояние. Например, при $F = 0,25$ мм увеличение лупы в соответствии с (13.1) равно 1000 крат. Однако пользование лупами с очень малым фокусным расстоянием, а следовательно, и с малым диаметром, практически невозможно. Поэтому лупы с увеличением более 40 крат не применяются.

Для изучения более тонких частиц применяется световой (или оптический) микроскоп. Оптическая система микроскопа состоит из объектива (обращенного к объекту) и окуляра (обращенного к глазу). Действие микроскопа эквивалентно действию лупы с фокусным расстоянием F , равным фокусному расстоянию всего микроскопа, т.е. увеличение микроскопа рассчитывается также по формуле (13.1). Фокусное расстояние микроскопа, как системы из двух линз, может быть сделано значительно меньшим, чем фокусное расстояние объектива или окуляра. Поэтому увеличение микроскопа значительно больше увеличения, даваемого объективом $N_{об}$ и окуляром $N_{ок}$, и равно их произведению:

$$N = N_{об} \cdot N_{ок}.$$

Общее увеличение микроскопа в видимой области спектра можно изменять от 15 до 1 800 крат. Повысить разрешающую способность микроскопа и наблюдать частицы меньших размеров можно применяя свет с меньшей длиной волны изучения.

Создание электронного микроскопа позволило значительно расширить область визуального изучения дисперсных систем в диапазоне размеров наиболее мелких частиц. Оптическая схема электронного микроскопа аналогична оптической схеме светового микроскопа. В этом приборе вместо световых лучей используются электронные, имеющие также волновую природу, а вместо стеклянных линз – электронные линзы. При этом фокусировка электронных пучков производится с помощью электрических и магнитных полей. Поскольку длина волны электрона в сотни тысяч раз меньше длины световых волн, разрешающая способность электронного микроскопа намного выше, чем у оптического, и может достигать $6 \cdot 10^{-4}$ мкм (6 ангстрем).

Предельные размеры частиц D_{\min} , которые еще могут быть видимы раздельно при различных методах наблюдения, приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1

Разрешающая способность оптических приборов

Прибор	Глаз	Лупа	Микроскоп	Электронный микроскоп
D_{\min} , мкм	100	10	0,12	0,0006

13.2. СИТОВОЙ АНАЛИЗ

Ситовой анализ дисперсности твердых частиц основан на их механическом разделении по крупности. Материал загружается на сито с ячейками известного размера и путем вибрации сита разделяется на две части – остаток и проход. Просеивая материал через набор различных сит, можно разделить пробу на несколько фракций. Размеры частиц этих фракций ограничены размерами отверстий используемых сит. Под размером отверстия сита понимают длину стороны квадрата ячейки a (рис. 13.1).

Нижняя граница размеров ячеек сит составляет около 40 мкм. Отношение размера ячейки сита к размеру ячейки последующего (более мелкого) сита является постоянной величиной и называется модулем набора сит ($m = 1,6; 1,25; 1,12; 1,06$). Полотно сита представляет собой сетку из термически обработанной проволоки из сплава цветных металлов. Круглые сита имеют диаметр 20 см и высоту бурта 5 см. Квадратные сита имеют стороны квадрата размером 22 см и высоту бурта 9 см.

Ситовой анализ проводится двумя способами.

- Сита устанавливаются в виде набора – сверху наиболее крупное сито, далее – по мере уменьшения ячейки. Проба порошка помещается на

верхнее сито, и материал последовательно проходит через весь набор. После просеивания взвешивается осадок на каждом сите и строится гистограмма распределения. Пример табличного задания гистограммы распределения при ситовом анализе приведен в табл. 13.2. Общая масса пробы $M = 114,56$ г.

- Пробу сначала помещают на наиболее тонкое сито, а полученный остаток перекалдывают на следующее по крупности ячеек сито. При этом грубые зерна способствуют процессу просева на наиболее тонких ситах.

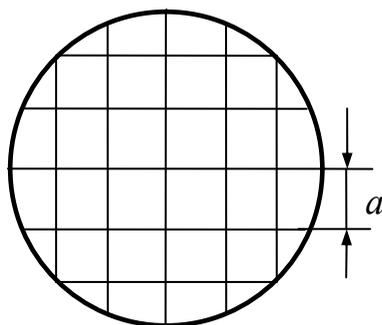


Рис. 13.1. Схема стандартного сита: a – размер ячейки

Таблица 13.2

Результаты ситового анализа

Размер ячеек сита, мкм	Граничные размеры частиц, мкм	Масса фракции частиц, г
250	> 250	0,42
200	$250 \div 200$	1,84
160	$200 \div 160$	3,26
125	$160 \div 125$	5,74
100	$125 \div 100$	8,22
80	$100 \div 80$	9,00
63	$80 \div 63$	11,14
40	$63 \div 40$	18,10
–	$40 \div 0$	56,84

13.3. МЕТОДЫ СЕДИМЕНТАЦИИ

Методы седиментации основаны на зависимости скорости осаждения частиц под действием силы тяжести от их размера. При осаждении сфе-

рической частицы диаметром D в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса $Re < 1$ сила сопротивления выражается формулой Стокса

$$F_S = 3\pi\mu D u_p, \quad (13.2)$$

где F_S – сила сопротивления; u_p – скорость осаждения частиц; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости.

При достижении стационарной скорости осаждения u_0 сила сопротивления (13.2) уравновешивается силами тяжести и Архимеда:

$$F_A = \frac{\pi D^3}{6}(\rho_p - \rho)g, \quad (13.3)$$

где ρ_p – плотность материала частицы; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Из условия равенства этих сил (13.2), (13.3) можно получить формулу для расчета скорости стационарного осаждения u_0 :

$$u_0 = \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} g D^2. \quad (13.4)$$

Из формулы (13.4) можно получить выражение для расчета размера частиц D по измеренной скорости стационарного осаждения u_0

$$D = \sqrt{\frac{18u_0\mu}{(\rho_p - \rho)g}}. \quad (13.5)$$

Погрешность измерения размеров частиц методом седиментации определяется погрешностями измерения μ , ρ_p , ρ , а также выполнением условия $Re < 1$ (стоксовский режим осаждения).

Устройство для измерения размеров частиц методом седиментации называется седиментометром (рис. 13.2).

Седиментометр состоит из корпуса 2, в который заливается жидкость 3, приемной емкости 4 и взвешивающего устройства 5. В верхнюю часть корпуса помещают слой полидисперсных аэрозольных частиц 1. Частицы начинают осаждаться в дисперсионной среде 3 (дистиллированная вода, спирт, водно-глицериновый раствор). В первую очередь из верхнего слоя выпадают фракции наиболее крупных (тяжелых) частиц, которые, проходя за время t высоту слоя жидкости h , осаждаются в приемной емкости 4. Масса осевших частиц измеряется взвешивающим устройством 5.

В процессе седиментации измеряется зависимость массы осевших частиц от времени, т.е. находится функция накопления осадка.

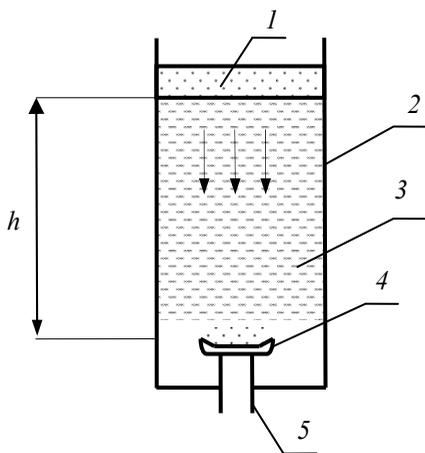


Рис. 13.2. Схема седиментометра: 1 – слой полидисперсных частиц; 2 – корпус; 3 – жидкость; 4 – приемная емкость; 5 – взвешивающее устройство

По измеренной скорости осаждения частиц или функции накопления осадка можно с использованием формул (13.2)–(13.5) определить дисперсный состав аэрозольных частиц в пробе.

13.4. ФОТОСЕДИМЕНТАЦИОННЫЙ МЕТОД

Анализ дисперсного состава порошкообразных материалов фотоседиментационным методом основан на том, что пучок света, прошедший через суспензию, уменьшает свою интенсивность. Чем больше оптическая плотность среды, тем больше ослабляется интенсивность проходящего через нее пучка света.

Схема фотоседиментометра приведена на рис. 13.3. В корпусе 2 установлены прозрачные окна 4. На некотором расстоянии h от первичного слоя 1 полидисперсных частиц расположена оптико-электронная система, состоящая из источника излучения 5 – лазера – и приемника излучения б. В процессе осаждения слоя частиц измеряется зависимость коэффициента пропускания измерительного объема среды шириной l :

$$T(t) = \frac{I(t)}{I_0},$$

где $I(t)$ – интенсивность прошедшего через суспензию пучка излучения;
 I_0 – интенсивность излучения входящего пучка.

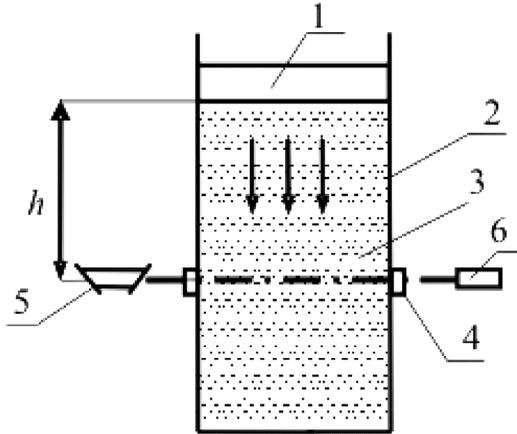


Рис. 13.3. Схема фотоседиментометра: 1 – слой полидисперсных частиц; 2 – корпус; 3 – жидкость; 4 – прозрачные окна; 5 – лазер; 6 – приемник излучения

При стоксовском режиме скорость стационарного осаждения частиц диаметром D определяется формулой (13.4).

Предположим, что в начальный момент времени полидисперсные частицы равномерно распределены в слое 1. К моменту времени t за счет гравитационных сил из начального слоя на глубину h выпадут все частицы, размер которых превышает величину $D(t)$

$$D(t) = \sqrt{\frac{18\mu h}{gt(\rho_p - \rho)}}.$$

Эта формула получена из условия

$$u_p = \frac{h}{t} = gD^2 \frac{\rho_p - \rho}{18\mu}.$$

Оптическая плотность слоя полидисперсных частиц определяется следующей зависимостью:

$$\tau = \ln \frac{1}{T} = \frac{\pi C_n l}{4} \int_0^D Q(\alpha, m) D^2 f(D) dD,$$

где $Q(\alpha, m)$ – фактор эффективности ослабления; C_n – счетная концентрация частиц; $f(D)$ – функция распределения частиц по размерам.

С помощью приведенных формул можно по зависимости $T(t)$ определить функцию распределения по размерам частиц исследуемой суспензии.

13.5. ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СЕПАРАЦИЯ

Седиментометрический анализ суспензий в поле гравитационных сил применим только для фракций с размерами частиц более $1 \div 2$ мкм. Это объясняется тем, что большая продолжительность седиментации более тонких частиц приводит к неприемлемо большим затратам времени на проведение анализа. Кроме того, при длительной седиментации в обычных лабораторных условиях трудно обеспечить термостабильность, которая исключила бы возникновение конвекционных токов жидкости.

Центробежные силы, воздействующие на частицы суспензии в кювете центрифуги, в сотни раз превышают силу тяжести. В ультрацентрифугах это превышение может достигать тысяч и даже сотен тысяч раз. Вследствие этого время осаждения частиц резко сокращается, что позволяет проводить анализ порошков субмикронных размеров.

В поле действия центробежных сил, когда сила сопротивления жидкости относительно движению частицы подчиняется закону Стокса, справедлива следующая формула:

$$3\pi\mu D u_p = \frac{\pi D^3}{6} (\rho_p - \rho) \omega^2 R,$$

где u_p – радиальная скорость перемещения частицы от центра к периферии, м/с; ρ_p , ρ – плотности частицы и жидкости соответственно; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, Па·с; D – диаметр частицы, м; ω – угловая скорость вращения центрифуги, с^{-1} ; R – расстояние от центра вращения до частицы, м.

Скорость u осаждения частицы на боковые стенки центрифуги возрастает в связи с воздействующей на нее центробежной силой. Подстав-

ляя в это уравнение переменную скорость осаждения $u_p = dR/dt$ и проинтегрировав, находим время τ , необходимое для перемещения частицы с окружности радиусом R_1 на окружность радиусом R_2 :

$$\tau = \frac{18\mu}{D^2(\rho_p - \rho)\omega^2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Наиболее простым методом определения дисперсного состава суспензии при центробежной сепарации является определение плотности суспензии на заданном радиусе окружности путем отбора проб. Этот метод требует периодических остановок центрифуги, что снижает достоверность результатов дисперсного анализа. При режиме осаждения в условиях $Re < 1$ необходимо использовать уточненную зависимость для коэффициента сопротивления.

Другой способ основан на видеосъемке прозрачной вращающейся кюветы с последующим фотометрированием видеок кадров или на просвечивании лучом лазера вращающегося слоя жидкости с целью определения его оптической плотности (аналог фотоседиментационного метода).

В настоящее время разработан ряд устройств, позволяющих применять для анализа дисперсионного состава суспензий на центрифугах метод осаждения осадка на чашечке (центробежные весы Фигуровского, центробежные весы Бюркгольца и др.).

13.6. КОНДУКТОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Кондуктометрический метод (от англ. conductivity – электропроводность) позволяет определять концентрацию и размеры частиц в суспензиях. Метод основан на изменении электропроводности электролита в момент прохождения частицы через капилляр соединяющий два сосуда, в которых установлены электроды. Этот метод был предложен Коултером в 1949 г., поэтому прибор для измерения параметров частиц называется счетчиком Коултера. Схема счетчика Коултера представлена на рис. 13.4. Он состоит из двух сосудов 1 и 2, соединенных капилляром 3. В сосудах установлены электроды 4 и 5, соединенные с источником электрического напряжения 6. В электрическую цепь включено нагрузочное сопротивление 7, электрическое напряжение с которого подается на ЭВМ. В сосуде 1 помещена исследуемая суспензия, которая подается под давлением в сосуд 2 с чистой дисперсной средой с заданным объемным расходом

Q ($\text{м}^3/\text{с}$). Каждая частица δ в суспензии увеличивает сопротивление между электродами 4 и 5 в момент ее прохождения через капилляр 3. При этом электрический ток в цепи уменьшается, и с сопротивления нагрузки снимается импульс напряжения, амплитуда которого пропорциональна объему проходящей частицы. Поступающие от датчика импульсы напряжения усиливаются и обрабатываются с помощью ЭВМ. С помощью специальной программы проводится подсчет числа частиц каждого размера и строится гистограмма распределения.

Счетная концентрация частиц определяется по формуле

$$C_n = \frac{f}{Q},$$

где f (Гц) – частота импульсов, Q ($\text{м}^3/\text{с}$) – объемный расход суспензии.

Распределение частиц по размерам (по объему) определяется из анализа амплитуд U_i импульсов. Для этого предварительно проводится градуировка счетчика (пропускаются суспензии с заданным размером частиц).

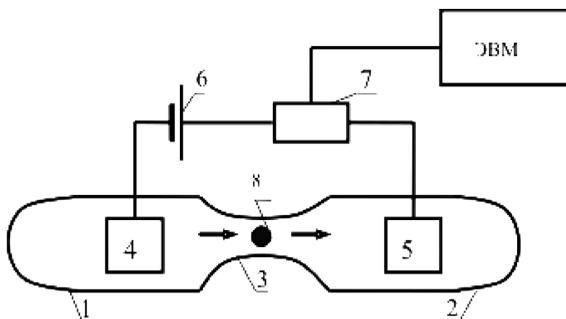


Рис. 13.4 Счетчик Коултера: 1, 2 – сосуд; 3 – капилляр; 4, 5 – электроды; 6 – источник электрического напряжения; 7 – нагрузочное сопротивление

Диаметр капилляра в счетчике Коултера должен соответствовать степени дисперсности анализируемого порошка. Максимальный эквивалентный диаметр частиц не должен превышать 40% диаметра отверстия. Частицы не должны химически реагировать с электролитом, коагулировать или набухать. В промышленных образцах (Швеция, Германия) используют сменные датчики с отверстиями $30 \div 560$ $\mu\text{м}$, что позволяет проводить дисперсный анализ частиц в диапазоне размером $1 \div 250$ $\mu\text{м}$. ЭВМ позволяет выдавать на печать дифференциальную функцию счетного $f(D)$ или массового $g(D)$ распределений частиц по размерам.

13.7. ИЗМЕРЕНИЕ УДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В ряде случаев степень дисперсности порошкообразных материалов характеризуется величиной их удельной поверхности $S_{уд}$. От величины удельной поверхности используемых порошков, в частности, зависит прочность цемента, процесс горения пылеугольного топлива, теплопроводность и звукопроницаемость измельченных веществ и т.д. Поэтому во всех случаях, когда основные технологические свойства порошкообразного материала зависят от поверхности его частиц, основным критерием степени измельчения должна быть величина удельной поверхности.

Наиболее распространенными способами определения удельной поверхности порошков являются измерение воздухопроницаемости слоя порошкообразного материала при протекании через него воздуха при давлении, близком к атмосферному, или при протекании через слой сильно разреженного воздуха при высоком вакууме.

Рассмотрим способ определения $S_{уд}$ при давлении, близком к атмосферному. В этом случае предполагается, что воздух протекает через капиллярную модель пористого тела, т.е. течение воздуха через слой порошка полагается подобным его движению через пучок извилистых капилляров. Внутренняя поверхность капилляров в единице объема слоя равна суммарной поверхности измельченного материала.

Схема прибора для измерения $S_{уд}$ приведена на рис. 13.5. Исследуемый слой 1 измельченного материала размещен в корпусе 2 между перфорированными дисками 3. Нижняя камера 4 соединена трубками с сосудом 5 и дифференциальными U-образным манометром 6. В сосуд 5 наливается вода 7, которая через кран 8 может сливаться в мерную емкость (стаканчик) 9.

При открытом кране 8 жидкость из сосуда 5 вытекает в стаканчик 9; при этом в верхней полости сосуда 5 образуется разрежение. Под действием перепада давления $\Delta p = p_a - p$ (p_a – атмосферное давление; p – давление в верхней полости сосуда 5 и в сообщающейся с ней камере 4) атмосферный воздух проходит через слой 1 и заполняет верхнюю полость сосуда 5. Величина перепада давления Δp измеряется дифференциальным манометром 6.

Перед проведением измерений слой порошка уплотняется плунжером. Предварительно определяются плотность материала частиц ρ_p и насыпная плотность слоя порошка I

$$\rho_n = \frac{M}{V},$$

где M , V – масса и объем слоя.

Пористость уплотненного слоя порошка определяется из соотношения

$$\varepsilon = \frac{\rho_p - \rho_H}{\rho_p}.$$

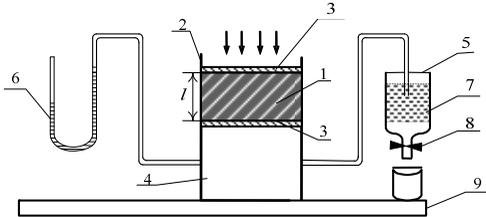


Рис. 13.5. Схема устройства для измерения удельной поверхности:
 1 – исследуемый слой; 2 – корпус; 3 – перфорированные диски;
 4 – нижняя камера; 5 – сосуд; 6 – дифференциальный манометр;
 7 – вода; 8 – кран; 9 – мерная емкость

Перепад давления Δp в слое порошка связан со скоростью прохождения воздуха через слой u формулой Коцени – Кармаша:

$$\Delta p = 5l \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \mu S^2 u,$$

где l , S – толщина и площадь сечения слоя; μ – коэффициент динамической вязкости воздуха.

С помощью формулы Коцени – Кармаша можно получить рабочую формулу для определения удельной поверхности

$$S_{уд} = \frac{14\sqrt{\varepsilon^3}}{\rho_p(1-\varepsilon)} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 S \Delta p}{l \mu Q}}, \quad (13.6)$$

где Q – объемный расход воздуха, прошедшего через слой, $\text{м}^3/\text{с}$.

Величина Q определяется по объему слитой жидкости, поскольку поступающий в верхнюю полость сосуда 5 воздух вытесняет эквивалентный объем воды.

Таким образом, процедура определения удельной поверхности порошка сводится к измерению объемного расхода жидкости Q , вылившегося за период измерения $15 \div 30$ с, и перепада давления Δp . После подстановки измеренных величин в формулу (13.6), рассчитывается величина $S_{уд}$. Диапазон измеряемых значений удельной поверхности для данного метода составляет $S_{уд} = (3 \div 15) \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{г}$.

14. ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДИСПЕРСНОСТИ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотренные выше методы измерения размеров частиц основаны на анализе частиц в пробах, отобранных из двухфазного потока. При больших скоростях потока использование этих методов затруднительно из-за необходимости обеспечивать представительность отобранных проб, а при измерении дисперсности капель и пузырьков – вообще проблематично из-за коагуляции и дробления частиц дисперсной фазы в процессе отбора.

Наиболее перспективными являются оптические методы, позволяющие определять размеры частиц непосредственно в двухфазном потоке без нарушения его структуры. Эти методы основаны на явлениях рассеяния оптического излучения частицами и связаны с постановкой и решением обратных задач оптики аэрозолей.

14.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ЧАСТИЦЕЙ

Методы оптической диагностики двухфазных потоков основаны на практическом использовании закономерностей взаимодействия оптического излучения с малыми частицами. Основы оптики аэрозолей подробно изложены в монографиях К.С. Шифрина, В.Е. Зуева, Д. Дейрменджана, Г.К. Ван де Хюлста [34–37] и других авторов. Рассмотрим основные понятия и определения, необходимые при анализе конкретных методов измерения.

Одиночные частицы

При взаимодействии частицы с полем падающего на нее электромагнитного излучения появляется поле излучения, рассеянное в иных направлениях, чем поле падающего излучения. При этом поток падающего излучения ослабляется за счет рассеяния и поглощения излучения частицей. Для количественного описания этих эффектов вводятся следующие характеристики.

1. Факторы эффективности ослабления Q , рассеяния Q_p и поглощения Q_n – доля попавшего внутрь контура частицы потока излучения,

соответственно, уходящая из прямого пучка, рассеянная частицей во всех направлениях и поглощенная частицей. Факторы эффективности являются безразмерными величинами и связаны между собой соотношением

$$Q = Q_p + Q_n. \quad (14.1)$$

2. Полные сечения ослабления Σ , рассеяния Σ_p и поглощения Σ_n – отношение потока излучения, соответственно, изымаемого частицей из падающего на нее пучка, рассеянного во всех направлениях и поглощенного частицей, к плотности потока излучения в падающем на частицу пучке. Эти характеристики имеют размерность площади. Для сферических частиц диаметром D полные сечения определяются формулами

$$\Sigma = \frac{\pi D^2}{4} Q, \quad \Sigma_p = \frac{\pi D^2}{4} Q_p, \quad \Sigma_n = \frac{\pi D^2}{4} Q_n. \quad (14.2)$$

3. Индикатриса рассеяния $J(\theta)$ – отношение потока излучения, рассеянного частицей в единичном телесном угле в данном направлении θ , к полному потоку рассеянного частицей излучения.

Индикатриса рассеяния является безразмерной функцией угла рассеяния θ и характеризует пространственное распределение рассеянного частицей излучения. Интеграл от нее по всему пространству равен единице. Угол рассеяния θ определяется направлением падающей волны, точкой рассеяния (рассеивающей частицей) и направлением на приемник излучения (рис. 14.1).

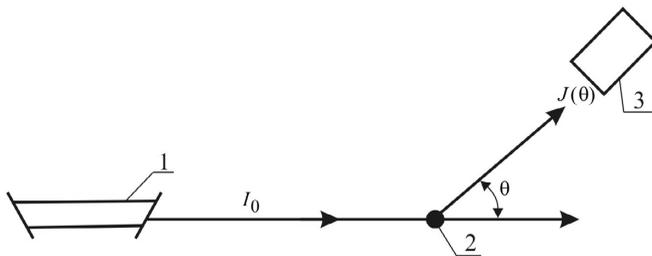


Рис. 14.1. Индикатриса рассеяния: 1 – источник излучения; 2 – частица; 3 – приемник излучения

В оптике аэрозолей показано, что для однородных сферических частиц количественные характеристики рассеяния излучения полностью

определяются двумя параметрами – комплексным показателем преломления материала частицы

$$m = n - i \cdot \kappa$$

и безразмерным параметром дифракции (параметром Ми)

$$\beta = \frac{\pi D}{\lambda}, \quad (14.3)$$

где n – показатель преломления; κ – показатель поглощения; λ – длина волны падающего излучения.

Если размер частицы много меньше длины волны излучения ($\beta < 0,2$ или $D < 0,06\lambda$), то характеристики рассеяния излучения определяются простыми зависимостями (приближение Рэлея):

$$Q_p = \frac{8}{3} \cdot \frac{[(n^2 - \kappa^2 + 2) + (n^2 + \kappa^2)^2]^2 + (6n\kappa)^2}{[(n^2 - \kappa^2 + 2)^2 + (2n\kappa)^2]^2} \cdot \beta^4, \quad (14.4)$$

$$Q = \frac{24n\kappa\beta}{(n^2 - \kappa^2 + 2)^2 + (2n\kappa)^2}.$$

Интенсивность излучения, рассеянного под произвольным углом θ , определяется соотношением

$$I_p(\theta) = I_0 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2L^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^2 \left(\frac{D}{2} \right)^6, \quad (14.5)$$

где L – расстояние от частицы до приемника излучения; I_0 – интенсивность падающего на частицу излучения.

Для рэлеевского рассеяния характерна сильная зависимость интенсивности рассеянного света от размера частицы ($\sim D^6$) и от длины волны падающего на частицу излучения ($\sim \lambda^{-4}$), а также симметрия индикатрисы рассеяния (рис. 14.2).

Другой предельный случай, когда размер частиц много больше длины волны ($\beta > 30$ или $D > 10\lambda$), характеризуется тем, что фактор эффективности рассеяния практически постоянен ($Q_p = const = 2$), т.е. рассеяние не зависит от длины волны зондирующего излучения и оптических констант материала частиц. В этом случае взаимодействие излучения с частицей определяется законами геометрической оптики.

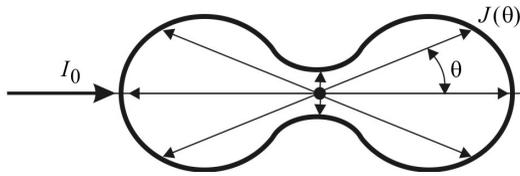


Рис. 14.2. Рэлеевская индикатриса рассеяния

Точное аналитическое решение проблемы определения факторов эффективности и индикатрисы рассеяния (в функции параметра дифракции β и комплексного показателя преломления m) для произвольных значений параметра дифракции было получено немецким ученым Ми (1908 г.) в результате применения теории электромагнитного поля Максвелла к задаче рассеяния света однородной сферической частицей, на которую в определенном направлении падает плоская волна. Решение проводится численно по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} Q(\beta, m) &= \frac{2}{\beta^2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) \operatorname{Re}(a_k + b_k), \\ Q_p(\beta, m) &= \frac{2}{\beta^2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) \operatorname{Re}(|a_k|^2 + |b_k|^2), \\ Q_n(\beta, m) &= Q(\beta, m) - Q_p(\beta, m), \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

где Re – вещественная часть комплексного числа.

Коэффициенты Ми a_k , b_k записываются в виде (используется обозначение $y = m\beta$):

$$\begin{aligned} a_k(\beta, m) &= \frac{\left[\frac{A_k(y)}{m} + \frac{k}{\beta} \right] \operatorname{Re}[\xi_k(\beta)] - \operatorname{Re}[\xi_{k-1}(\beta)]}{\left[\frac{A_k(y)}{m} + \frac{k}{\beta} \right] \xi_k(\beta) - \xi_{k-1}(\beta)}, \\ b_k(\beta, m) &= \frac{\left[mA_k(y) + \frac{k}{\beta} \right] \operatorname{Re}[\xi_k(\beta)] - \operatorname{Re}[\xi_{k-1}(\beta)]}{\left[mA_k(y) + \frac{k}{\beta} \right] \xi_k(\beta) - \xi_{k-1}(\beta)}. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Круговые функции $\xi_k(\beta)$ определяются при помощи рекуррентного соотношения:

$$\xi_k(\beta) = \frac{2k-1}{\beta} \xi_{k-1}(\beta) - \xi_{k-2}(\beta), \quad (14.8)$$

где

$$\xi_0(\beta) = \sin \beta + i \cdot \cos \beta; \quad \xi_{-1}(\beta) = \cos \beta - i \cdot \sin \beta. \quad (14.9)$$

Для коэффициентов $A_k(y)$ также используется рекуррентное соотношение:

$$A_k(y) = \left[\frac{k}{y} - A_{k-1}(y) \right]^{-1} - \frac{k}{y}, \quad (14.10)$$

где $A_0(y) = \text{ctgy}$.

Предел суммирования в (14.6) устанавливается в процессе численного счета из условия, чтобы последний член ряда в этой сумме составлял меньше 10^{-8} от суммы предыдущих членов.

Рис. 14.3 иллюстрирует зависимость фактора эффективности рассеяния от безразмерного параметра дифракции для конкретных значений длины волны и комплексного показателя преломления m .

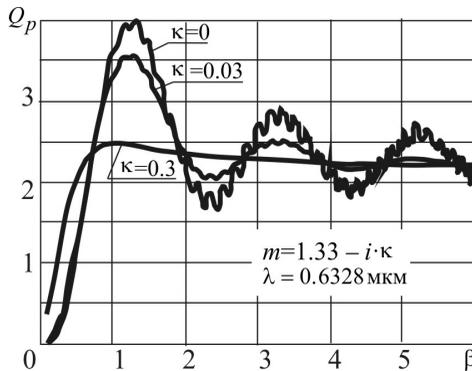


Рис. 14.3. Зависимость $Q_p(\beta, m = 1,33 - i \cdot \kappa)$

Монодисперсная среда

При прохождении излучения с длиной волны λ через слой толщиной l , состоящий из равномерно распределенных монодисперсных частиц диаметром D со счетной концентрацией C_n , происходит его ослабление за счет рассеяния и поглощения частицами. Количественной характеристикой ослабления является спектральный коэффициент пропускания T_λ , равный отношению потока излучения, прошедшего сквозь слой, к упавшему на него потоку излучения (рис. 14.4).

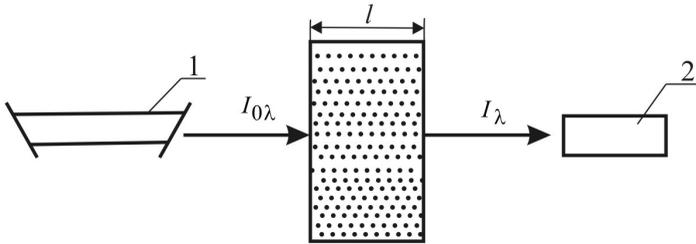


Рис. 14.4. Коэффициент пропускания слоя частиц: 1 – источник излучения; 2 – приемник излучения

Величина коэффициента пропускания T_λ определяется законом Бугера:

$$T_\lambda = \frac{I_\lambda}{I_0} = \exp(-\tau_\lambda) = \exp(-K_\lambda l), \quad (14.11)$$

где τ_λ – спектральная оптическая плотность слоя.

Спектральный показатель ослабления K_λ , характеризующий ослабление света единичным объемом среды, содержащим независимо рассеивающие частицы, определяется следующим выражением:

$$K_\lambda = \Sigma \cdot C_n = \frac{\pi D^2}{4} C_n Q(\beta, m). \quad (14.12)$$

Характеристики излучения, рассеянного или ослабленного монодисперсной средой (без учета влияния многократного рассеяния), могут быть определены простым суммированием результатов одиночных взаимодействий излучения с каждой частицей.

Полидисперсная среда

При рассмотрении полидисперсных сред, состоящих из частиц разных размеров, будем предполагать, что частицы сферические, рассеяние света на каждой из них происходит независимо от других, а слой рассеивающей среды достаточно тонкий, так что рассеяние второго и более порядков можно не учитывать.

Показатель ослабления для полидисперсной среды с дифференциальной функцией $f(D)$ распределения частиц по размерам равен

$$K_\lambda = \frac{\pi C_n}{4} \int_0^\infty Q(\beta, m) D^2 f(D) dD. \quad (14.13)$$

Заменяя C_n через массовую концентрацию C_m (суммарная масса частиц в единице объема)

$$C_m = C_n \frac{\pi D^3}{6} \rho,$$

где ρ – плотность материала частицы, выражение (14.13) можно представить в виде:

$$K_\lambda = \frac{3C_m}{2\rho} \frac{\int_0^\infty Q(\beta, m) D^2 f(D) dD}{\int_0^\infty D^3 f(D) dD}. \quad (14.14)$$

По аналогии с одиночной частицей, вводится понятие усредненного фактора эффективности ослабления для полидисперсной среды (полифактор):

$$\bar{Q} = \frac{\int_0^\infty Q(\beta, m) D^2 f(D) dD}{\int_0^\infty D^2 f(D) dD}. \quad (14.15)$$

С учетом (14.15) выражение для спектральной оптической плотности полидисперсной среды имеет вид:

$$\tau_{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{C_m \bar{Q}}{\rho D_{32}}. \quad (14.16)$$

Важную роль в описании оптических характеристик полидисперсной среды имеет усредненный параметр дифракции

$$\beta_{32} = \frac{\pi D_{32}}{\lambda}, \quad (14.17)$$

где D_{32} – средний объемно-поверхностный диаметр частиц.

Этот параметр играет роль, во многом аналогичную параметру дифракции β в случае монодисперсных сред.

Рассмотрим основные обратные методы оптики аэрозолей, позволяющие определить функцию распределения частиц по размерам $f(D)$ из результатов измерения характеристик ослабления и рассеяния излучения полидисперсными частицами.

14.2. МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ

Предположим, что частицы являются однородными сферами диаметром D . Будем также считать, что элемент объема облучается параллельным пучком монохроматического света и что в рассеянном пучке отсутствуют интерференция и многократное рассеяние. В этом случае задача определения $f(D)$ сводится к обращению интегрального уравнения первого рода

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} F(x, D) f(D) dD, \quad (14.19)$$

где $f(D)$ – дифференциальная функция распределения частиц по размерам; $F(x, D)$ – ядро уравнения, известное из теории рассеяния света на отдельной частице; $\varphi(x)$ – функция, определяемая в специально поставленном эксперименте. В частности, если ядро $F(x, D)$ – индикатриса рассеяния $J(\theta, D)$ одиночной частицы, то $\varphi(x)$ является полидисперсной

индикатрисой рассеяния $\varphi(\theta)$, описывающей рассеяние излучения под углом θ .

Если ядро $F(x, D)$ – фактор эффективности ослабления $Q(\lambda, D)$ одиночной частицы, то $\varphi(x)$ является полидисперсным показателем ослабления $K(\lambda)$.

Обращение уравнения (14.19) путем замены его алгебраической системой приводит к принципиальным трудностям, свойственным интегральным уравнениям первого рода. Получающаяся алгебраическая система является плохо обусловленной – небольшие неточности в $\varphi(x)$ и $F(x, D)$ приводят к громадным ошибкам в определении $f(D)$. Формально правильное решение содержит отрицательные корни, что физически бессмысленно. Причина этих трудностей связана с некорректностью обратной задачи.

В работах К.С. Шифрина [34] показано, что существует три случая, в которых удастся получить аналитическую формулу для ядра $F(x, D)$. Это случаи индикатрисы рассеяния под малыми углами, коэффициента рассеяния для «мягких» частиц и полной индикатрисы для «мягких» частиц. Для этих случаев ядро $F(x, D)$ будет зависеть только от произведения аргументов, и уравнение (14.19) удастся точно обратить. При этом искомая функция $f(D)$ явно выражается через интеграл от $\varphi(x)$ и некоторого несложного ядра (в каждом случае свое).

Метод спектральной прозрачности основан на измерении спектрального коэффициента пропускания T_λ аэрозольной системы в некотором диапазоне длин волн зондирующего излучения. Исходным для метода спектральной прозрачности является уравнение, выражающее закон Бугера для полидисперсной системы частиц:

$$T(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{I_0(\lambda)} = \exp \left[-\pi C_n l \int_0^\infty Q(\beta, m) D^2 f(D) dD \right]. \quad (14.20)$$

По измеренной экспериментальной зависимости $T(\lambda)$ можно из (14.20) получить формулу для показателя ослабления:

$$K(\lambda) = \frac{\pi C_n}{4} \int_0^\infty Q(\beta, m) D^2 f(D) dD. \quad (14.21)$$

При обращении интегрального уравнения (14.21) приняты следующие допущения.

- Частицы сферические и однородные.
- Рассеяние однократно и некогерентно.
- Частицы «мягкие», т.е. комплексный показатель преломления $m = n - i \cdot \kappa$ вещественный ($\kappa = 0$) и близок к единице ($n \approx 1$).

В работах [34, 37] показано, что в рамках данных допущений явление рассеяния зависит не от n и β в отдельности, а от величины

$$y = 2\pi(n-1) \frac{D}{\lambda} = \alpha \nu D,$$

где $\alpha = 2\pi(n-1)$; $\nu = \lambda^{-1}$ – волновое число.

Для фактора эффективности ослабления при этом справедлива формула [37]

$$Q = 2 \left(1 - \frac{\sin 2y}{y} + \frac{1 - \cos 2y}{2y^2} \right). \quad (14.22)$$

При $y \rightarrow \infty$ величина $Q(y) \rightarrow 2$, совершая затухающие колебания вокруг значения $Q = 2$. Подставляя (14.22) в уравнение (14.21), получим основное интегральное уравнение метода спектральной прозрачности

$$K(\lambda) = \frac{\pi C_n}{2} \int_0^\infty \left[1 - \frac{\sin 2y}{y} + \frac{1 - \cos 2y}{2y^2} \right] D^2 f(D) dD. \quad (14.23)$$

Применяя к уравнению (14.23) преобразование Меллина, можно получить формулу для определения $f(D)$. Эта формула содержит интегралы от измеренной зависимости $K(\lambda)$ и ввиду ее громоздкости не приводится.

Метод спектральной прозрачности применим в области, где зависимость фактора эффективности ослабления от λ наиболее сильно выражена (в области до первого максимума функции Q). Устойчивое решение возможно, если прозрачность (спектральный коэффициент пропускания) определена во всем интервале длин волн $0 < \lambda < \infty$. Тем не менее, если учитывать асимптотику поведения $Q(\beta)$ (например, при $\beta \rightarrow 0$ взаимодействие излучения со средой описывается в приближении Рэлея, а при

$\beta \rightarrow \infty$ описывается приближением геометрической оптики), то требуемый интервал λ можно сузить, руководствуясь соотношениями [36]

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\min} &= 0,5\alpha D_0, \\ \lambda_{\max} &= 3\alpha D_0. \end{aligned} \right\}$$

При этом в интервале $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ достаточно произвести порядка 20–30 измерений коэффициента пропускания на равноотстоящих значениях λ . Погрешность измерения должна быть не ниже 1%.

Техническая реализация метода спектральной прозрачности связана, как правило, с использованием тепловых источников зондирующего излучения в сочетании со сканирующими спектральными приборами. Использование перестраиваемых по длине волны лазеров на органических красителях позволяет существенно упростить схему оптико-электронного прибора для диагностики аэрозолей и расширить область практического использования метода спектральной прозрачности.

14.3. МЕТОД МАЛЫХ УГЛОВ

Теоретической основой метода является использование аналитического описания рассеяния света частицами, более крупными по сравнению с длиной волны излучения, под малыми углами рассеяния к направлению падающего излучения.

Как показывают расчеты, частицу можно считать крупной при значении параметра дифракции $\beta > 30$. Например, при длине волны излучения $\lambda = 0,6328$ мкм (излучение гелий-неонового лазера) крупными можно считать частицы диаметром $D > 6$ мкм. Большинство распылителей жидкости (центробежные, акустические и пневматические форсунки) содержат крупные (по оптическим свойствам) частицы, и для исследования характеристик распылителей можно успешно применять метод малых углов.

Интенсивность излучения $I(\theta)$, рассеянного крупной частицей под малыми углами рассеяния ($\theta \ll 1$), может быть представлена в виде [34]

$$I(\theta) = I_0 D^2 \frac{J_1^2(\beta\theta)}{4\theta^2}, \quad (14.24)$$

где I_0 – интенсивность падающего на частицу излучения; D – диаметр частицы; J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка; $\beta = \pi D / \lambda$ – параметр дифракции; θ – угол рассеяния (в радианах).

В формуле (14.6) учитывается только дифракционное рассеяние, так как его интенсивность в области малых углов намного превосходит интенсивность рассеяния вследствие преломления.

Распределение интенсивности рассеянного света для крупных частиц ($\beta \gg 1$) под малыми углами ($\theta \ll 1$), рассчитанное по формуле (14.24), представлено на рис. 14.5.

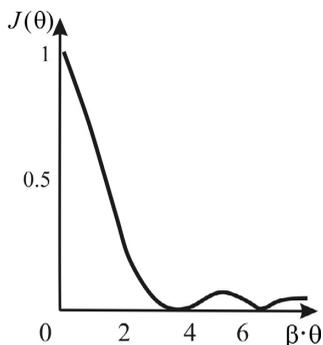


Рис. 14.5. Распределение интенсивности рассеянного света для монодисперсной системы крупных частиц под малыми углами

При выполнении условий рассеяния света независимыми частицами интенсивность излучения, рассеянного полидисперсной системой частиц, определяется из уравнения теории дифракции [34, 36]:

$$I(\theta) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^3 \frac{I_0}{\theta^2} \int_0^{\infty} \beta^2 f(\beta) J_1^2(\beta\theta) d\beta, \quad (14.25)$$

где $f(\beta)$ – дифференциальная функция счетного распределения частиц по размерам (выраженная через параметр дифракции).

Решение интегрального уравнения (14.25) для функции $f(\beta)$ имеет вид [34]

$$f(\beta) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^3 \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} D(\theta) H(\beta\theta) d\beta. \quad (14.26)$$

Ядро обращенного интегрального уравнения (14.26), зависящее от произведения $(\beta\theta)$, равно

$$H(\beta\theta) = -2\pi\beta\theta J_1(\beta\theta)Y(\beta\theta),$$

где $Y(\beta\theta)$ – функция Неймана.

Измерительная информация об индикатрисе рассеяния содержится в функции $D(\theta)$:

$$D(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{I(\theta)}{I_0} \theta^3 \right] = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^3 \int_0^\infty \beta^2 f(\beta) K(\beta\theta) d\beta,$$

где ядро $K(\beta\theta)$ имеет вид

$$K(\beta\theta) = \frac{d}{d(\beta\theta)} \left[\beta\theta J_1^2(\beta\theta) - \frac{1}{\pi} \right].$$

Функцию распределения частиц по размерам по экспериментальным измерениям индикатрисы рассеяния определяют из решения обратной задачи оптики аэрозолей с использованием приведенных зависимостей.

Техническая реализация метода малых углов возможна с использованием различных оптических схем. Один из вариантов схемы измерения малоуглового рассеяния приведен на рис. 14.6. Измерения интенсивности рассеянного излучения проводятся в фокальной плоскости δ приемной линзы 7 (за пределами фокального пятна, в котором собран прямой пучок). Коллиматор, состоящий из элементов 1–6, создает параллельный монохроматический пучок излучения. При использовании в качестве источника зондирующего излучения ОКГ (лазера) схема коллиматора существенно упрощается.

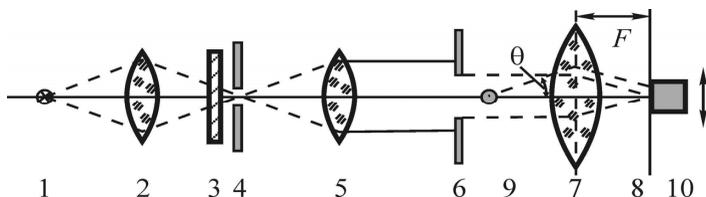


Рис. 14.6. Оптическая схема измерения малоуглового рассеяния: 1 – точечный источник; 2 – конденсорная линза; 3 – интерференционный светофильтр; 4 – точечная диафрагма; 5 – коллимационная линза; 6 – выходная диафрагма; 7 – приемная линза; 8 – фокальная плоскость приемной линзы; 9 – измерительный объем; 10 – фотоприемник

Измеряемые частицы расположены в измерительном объеме \mathcal{V} . Излучение, рассеянное под данным углом θ , приходит в фокальную плоскость δ на заданное расстояние от ее центра. Регистрация интенсивности рассеянного излучения $\bar{I}(\theta)$ производится фотоприемником 10 (фотодиод, фотоумножитель), который перемещается в фокальной плоскости δ по радиусу, от центра к периферии.

На рис. 14.7 приведен другой вариант схемы измерения интенсивности рассеянного излучения, используемый для определения дисперсности капель в факеле распыла форсунок. Система оптической диагностики включает блок лазерного излучателя и блок измерения параметров лазерного излучения.

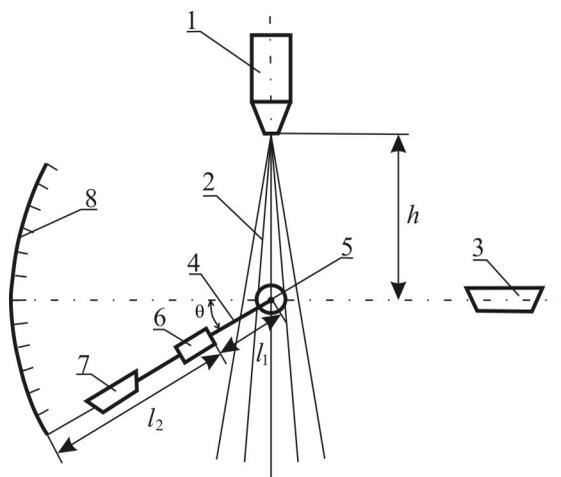


Рис. 14.7. Оптическая схема измерения малоуглового рассеяния: 1 – исследуемая форсунка; 2 – факел распыла; 3 – источник зондирующего излучения; 4 – консоль; 5 – ось вращения; 6 – приемник излучения; 7 – лазерная указка; 8 – измерительная шкала

Определение угла рассеяния зондирующего излучения проводится с помощью лазерной указки, закрепленной на консоли соосно с приемником излучения. Значение угла рассеяния рассчитывается по показаниям измерительной шкалы и геометрическим характеристикам оптической системы. Приборный комплекс позволяет автоматически регистрировать экспериментальные данные в реальном масштабе времени.

При обработке экспериментальной информации измеренный угол рассеяния (в градусах) переводится в радианы, а полученная из решения

обратной задачи функция распределения $f(\beta)$ приводится к зависимости $f(D)$. В качестве аппроксимирующей функции для $f(D)$ можно использовать гамма-распределение.

Диапазон углов измерения при реализации метода малых углов $\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}$ определяется следующим образом. Величина θ_{\max} обычно принимается равной $\theta_{\max} \approx (5 \div 6)^\circ$, поскольку при $\theta > 6^\circ$ орельная часть рассеяния резко уменьшается. Величина θ_{\min} порядка 10 угловых минут определяется размерами фокального пятна, в котором собрано прямое излучение.

Пределы применимости метода малых углов по размерам частиц ограничены снизу условием корректности выполнения неравенства $\beta > 30$ (для $\lambda = 0,6328$ мкм, например, $D_{\min} \approx 3$ мкм). При уменьшении длины волны зондирующего излучения нижний предел по размеру частиц можно снизить в соответствии с формулой

$$D_{\min} = \frac{30\lambda}{2\pi} \approx 9,6\lambda.$$

Со стороны больших размеров ограничение определяется техническими возможностями оптико-электронного прибора. Для крупных частиц дифрагированная составляющая индикатрисы рассеяния направлена вперед в узком конусе ($\theta \sim \beta^{-1}$), и ее трудно отделить от зондирующего пучка. На практике обычно принимают значение верхнего предела измерений $D_{\max} \approx 100$ мкм.

К достоинствам метода малых углов относятся его слабая чувствительность к показателю преломления материала частиц, а также сравнительная простота схемы оптико-электронного прибора и возможность проведения динамических измерений. Измерение малоугловой индикатрисы можно осуществить, например, с помощью позиционно-чувствительных приемников излучения – диссекторов с очень высоким временным и пространственным разрешением.

14.4. МЕТОД ПОЛНОЙ ИНДИКАТРИСЫ

В методе полной индикатрисы используется то же основное уравнение (14.6), что и в методе малых углов. Полидисперсная индикатриса

$\bar{J}(\theta)$ измеряется, в отличие от метода малых углов, в гораздо большем диапазоне углов рассеяния $\theta = \theta_{\min} \div \theta_{\max}$. Данный метод применим в рамках тех же допущений, что и метод спектральной прозрачности, за исключением того, что условие оптической «мягкости» частиц записывается в виде

$$\beta(n-1) < 1.$$

Индикатриса рассеяния для «мягкой» частицы записывается в виде

$$J(\theta, D) = I_0 \psi(\beta) Q(q) D^2, \quad (14.27)$$

где

$$\psi(\beta) = 2\pi^2 \left[\frac{3}{4\pi} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \right]^2 \frac{1 + \cos^2 \beta}{(1 - \cos \beta)^2};$$

$$Q(q) = \left(\frac{\sin q - q \cos q}{q} \right)^2,$$

где

$$q = 2\beta \sin(\alpha/2).$$

Основное уравнение метода аналогично общему интегральному уравнению (14.28):

$$\bar{J}(\theta) = \int_0^{\infty} J(\theta, \beta) f(D) D^2 dD. \quad (14.28)$$

По оценкам К.С. Шифрина, в случае гамма-распределения частиц по размерам достаточно пяти экспериментальных точек при погрешности измерения 1% для восстановления $f(D)$. Требуемый диапазон углов рассеяния при этом зависит от моды распределения. При $D_0 = 0,1$ мкм необходимо получить экспериментальное значение индикатрисы в диапазоне углов $\theta = 30 \div 130^\circ$, для $D_0 = 2,5$ мкм – $\theta = 1 \div 5^\circ$ (для длины волны зондирующего излучения $\lambda = 0,55$ мкм). Для малых частиц необходимо измерять индикатрису в большом диапазоне углов. Минимальное значе-

ние D_0 для $\theta_{\max} = 180^\circ$ составляет 0,9 мкм ($\lambda = 0,55$ мкм). Для продвижения в область меньших значений D_0 необходимо работать на более коротких длинах волн. При измерениях распределений частиц с большими значениями D_0 информация о распределении лежит в области малых углов рассеяния, тем более узкой, чем больше D_0 . При этом целесообразно использование метода малых углов.

14.5. ЛИДАРНЫЙ МЕТОД

Использование рассеяния излучения в обратном направлении ($\theta \cong 180^\circ$) выделяются в отдельную группу методов ввиду возможности построения схем дистанционной диагностики аэрозоля. Большой вклад в развитие лидарных методов внесли работы Института оптики атмосферы СО РАН, г. Томск [35]. Принцип действия лидара заключается в следующем. Короткий импульс, длительностью $\sim 10^{-8}$ с, узконаправленного (в телесном угле $\sim 10^{-3}$ рад) лазерного излучения направляется на исследуемый объект. Приемный телескоп, расположенный рядом с излучателем, собирает рассеянное в обратном направлении излучение на входе приемника излучения. По характеристикам полученного сигнала определяется расстояние L до исследуемого объекта.

Соотношение между рассеивающими характеристиками аэрозоля и регистрируемым сигналом $P(L)$ дается лидарным уравнением, которое в предположении однократного рассеяния и малой длительности зондирующего импульса имеет вид

$$P(L) = \frac{E}{L^2} AT_\lambda^2(L) \beta_\pi(L), \quad (14.29)$$

где $T_\lambda(L) = \exp\left[-\int_0^L K_\lambda(x) dx\right]$ – прозрачность (коэффициент пропускания) по линии зондирования; A – аппаратная константа; β_π – коэффициент обратного рассеяния, который связан с коэффициентом ослабления K_λ с помощью лидарного отношения κ_π соотношением $\beta_\pi = \kappa_\pi K_\lambda$; E – энергия излучения импульса.

Если пренебречь молекулярным рассеянием и поглощением, то коэффициенты β_π и K_λ в лидарном уравнении полностью определяются характеристиками аэрозоля. Характеристики сигнала определяются двумя независимыми величинами: T_λ и β_π или κ_π и профилем K_λ , поэтому в общем случае уравнение (14.29) не может быть решено. Рассмотрим частные случаи, когда решение возможно.

1. Если зондируемая среда достаточно прозрачна (можно принять $T_\lambda(R) \approx 1$), то из (14.29) находится $\beta_\pi(L)$.

2. Для среды с постоянной микроструктурой или, в более общем случае, с постоянным лидарным отношением уравнение разрешается относительно κ_π :

$$\kappa_\pi = \frac{2E}{A} \frac{\int_0^L P(x)x^2 dx}{1 - T_\lambda^2(L)}.$$

При $\kappa_\pi = \text{const}$ достаточно измерять прозрачность в одной точке. В случае оптически плотных сред интегрирование можно вести до L_k при $T_\lambda^2(L_k) \ll 1$, тогда

$$\kappa_\pi = \frac{2E}{A} \int_0^{L_k} P(x)x^2 dx,$$

$$K_\lambda(L) = \frac{P(L)L^2}{2 \int_0^L P(x)x^2 dx}.$$

Таким образом, в приближении лидарного уравнения (14.29) определение микроструктуры аэрозоля возможно только на основе использования зависимости от λ величин κ_π , коэффициентов ослабления и коэффициентов обратного рассеяния. Естественно, что при определении параметров микроструктуры по полученным зависимостям $\beta_\pi(\lambda)$, $\kappa_\pi(\lambda)$ приходится решать обратную задачу, и все изложенные выше трудности характерны и для лидарных методов диагностики.

14.6. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ СРЕДНЕГО РАЗМЕРА И КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ

Обратные методы оптики аэрозолей, позволяющие определять функцию распределения частиц по размерам $f(D)$, успешно используются для диагностики факела распыла форсунок, парожидкостных и запыленных потоков, атмосферных аэрозолей и других двухфазных сред. Применение этих методов в условиях высокотемпературных двухфазных потоков ограничено как по максимальной температуре потока, так и по предельным значениям концентрации частиц и размеров исследуемого объекта. Наиболее перспективны в этих условиях методы, основанные на измерении спектральных коэффициентов пропускания двухфазного потока для нескольких фиксированных длин волн λ_i зондирующего излучения [17]. Эти методы не позволяют найти функцию распределения частиц по размерам без априорной информации о виде функциональной зависимости $f(D)$, однако для оценки средних размеров частиц обладают рядом преимуществ: простотой аппаратного оформления и юстировки, оперативностью получения результатов, обоснованностью применения теории Ми, закона Бугера и приближения однократного рассеяния, а также возможностью диагностики оптически плотных излучающих двухфазных потоков. Рассмотрим метод, основанный на измерении спектрального коэффициента пропускания T_λ для двух фиксированных длин волн λ_1 и λ_2 излучения зондирующего лазера.

Основным уравнением метода является выражение для оптической плотности слоя равномерно распределенных полидисперсных частиц, записанное применительно к двум длинам волн:

$$\tau_{\lambda,i} = \ln \left(\frac{1}{T_{\lambda,i}} \right) = \frac{1,5C_m l \bar{Q}(\lambda_i)}{\rho D_{32}}, \quad i = 1, 2. \quad (14.30)$$

Усредненные факторы эффективности ослабления \bar{Q} , входящие в (14.30), являются важнейшими характеристиками, определяющими оптические свойства совокупности полидисперсных частиц. Выяснение зависимости \bar{Q} от микроструктуры среды представляет интерес при решении как прямых, так и обратных задач оптики дисперсных сред. Величина усредненного фактора эффективности рассеяния для непоглощающих частиц ($\kappa = 0$) не зависит от вида функции распределения $f(D)$, а опре-

деляется (при заданном $m = n - ik$) усредненным параметром дифракции β_{32} или средним диаметром D_{32} (при заданном β_{32}).

Этот результат может быть положен в основу метода измерения среднего объемно-поверхностного диаметра частиц D_{32} . Для проверки вывода об однозначной зависимости \bar{Q} от β_{32} и распространения его на более широкий класс частиц ($k \neq 0$) в работах авторов было проведено расчетно-теоретическое исследование влияния вида функции распределения на характер зависимости $\bar{Q}(\beta_{32})$ на примере частиц окиси алюминия.

Расчеты усредненных факторов эффективности проводились для трех функций распределения, отличающихся по своему виду:

$$f(D) = a \exp(-bD);$$

$$f(D) = aD^2 \exp(-bD^2);$$

$$f(D) = a \exp(-b \ln^2 \beta D).$$

Здесь a – нормирующий множитель; b , β – параметры распределения, связанные с D_{32} соотношениями $D_{32} = 3/b$, $D_{32} = 1,5/\sqrt{b}$, $D_{32} = \beta^{-1} \exp 1,75/b$ соответственно.

На рис. 14.8 приведены графики зависимости $\bar{Q}(\beta_{32})$ для $m = 1,8 - 0,0074i$ (оксид алюминия). Кривые $\bar{Q}(\beta_{32})$, соответствующие различным распределениям $f(D)$, совпадают (с погрешностью не более 4%) для значений $\beta_{32} > 10$. Следовательно, для точных измерений D_{32} необходим выбор длины волны излучения лазера таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\lambda < 0,1\pi D_{32}.$$

При использовании гелий-неоновых и аргоновых лазеров возможна диагностика полидисперсных частиц окиси алюминия рассматриваемым методом при D_{32} не менее 1,5 мкм. Как видно из приведенных графиков, в диапазоне размеров частиц $D_{32} = 1 \div 15$ мкм величина усредненного фактора эффективности ослабления значительно отличается от своего асимптотического значения $\bar{Q} = 2$. Допущение $\bar{Q} = 2$, принятое в некоторых работах, является грубым и приводит к большим погрешностям в определении D_{32} .

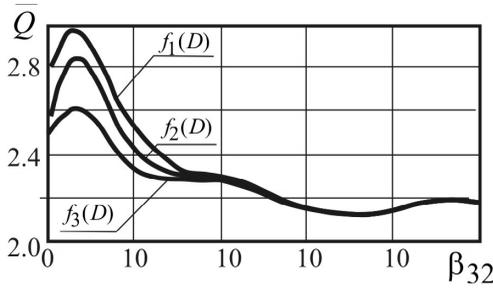


Рис. 14.8. Зависимость $\bar{Q}(\beta_{32})$ для трех функций распределения частиц по размерам ($m = 1,8-0,0074i$)

Отношение $\tau_{\lambda,i}$ для двух длин волн является однозначной функцией D_{32} :

$$\frac{\tau_{\lambda,2}}{\tau_{\lambda,1}} = \frac{\bar{Q}(\lambda_2)}{\bar{Q}(\lambda_1)} = F_2(D_{32}), \quad i = 1, 2. \quad (14.31)$$

Таким образом, по экспериментально измеренным $T_{\lambda,i}$ и рассчитанному графику $F_2(D_{32})$ (рис. 14.9) можно непосредственно найти D_{32} и концентрацию частиц в зоне измерений:

$$C_m = \frac{\tau_{\lambda,i} \rho_k D_{32}}{1,5 l \bar{Q}(\lambda_i D_{32})}.$$

В случае измерений с использованием одной длины волны зондирующего излучения по измеренному значению τ_{λ} можно определить D_{32} , если известна концентрация частиц. При этом D_{32} определяется путем решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q} &= F_1(\lambda, D_{32}), \\ \bar{Q} &= \frac{\tau_{\lambda} \rho}{1,5 C_m l} D_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (14.32)$$

Решение системы (14.32) удобно проводить графическим способом (рис. 14.10). На заранее построенном графике $F_1(\lambda, D_{32})$ проводится через начало координат прямая с угловым коэффициентом

$$k = \frac{\tau_{\lambda} \rho}{1,5 C_m l}.$$

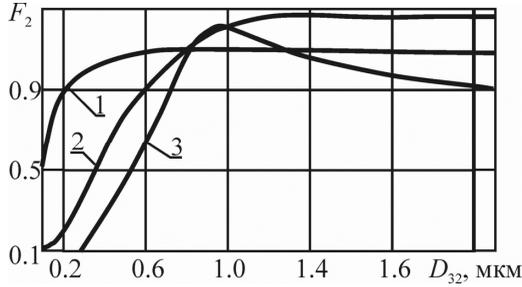


Рис. 14.9. Рабочий график для определения D_{32} частиц окиси алюминия по результатам измерений T_λ на двух длинах волн: 1 – $\lambda_1 = 0,63$ мкм; $\lambda_2 = 1,15$ мкм; 2 – $\lambda_1 = 0,63$ мкм; $\lambda_2 = 3,39$ мкм; 3 – $\lambda_1 = 0,365$ мкм; $\lambda_2 = 1,01$ мкм

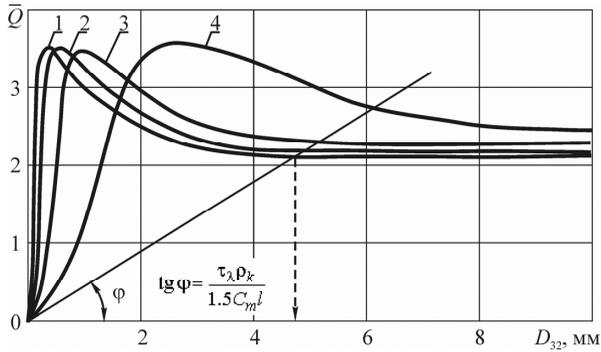


Рис. 14.10. Рабочий график для определения D_{32} частиц окиси алюминия по результатам измерений T_{λ_i} на одной длине волны: 1 – $\lambda = 0,48$ мкм; 2 – $\lambda = 0,63$ мкм; 3 – $\lambda = 1,15$ мкм; 4 – $\lambda = 3,39$ мкм

Абсцисса точки пересечения дает искомую величину D_{32} . При измерениях с использованием одного лазера концентрацию частиц необходимо определить независимым способом. Можно использовать для этого экспериментально измеренную скорость частиц u :

$$C_m = \frac{4zG}{\pi l^2 u \rho},$$

где G – массовый секундный расход в потоке; z – массовая доля частиц в потоке; ρ_k – плотность материала частиц.

Кроме того, C_m можно найти расчетным путем:

$$C_m = \frac{\rho_g z}{1 - z},$$

где плотность газа ρ_g рассчитывается по таблицам газодинамических функций.

Рабочие графики, необходимые при практической реализации этого метода, приведены на рис. 14.11 для частиц окиси алюминия.

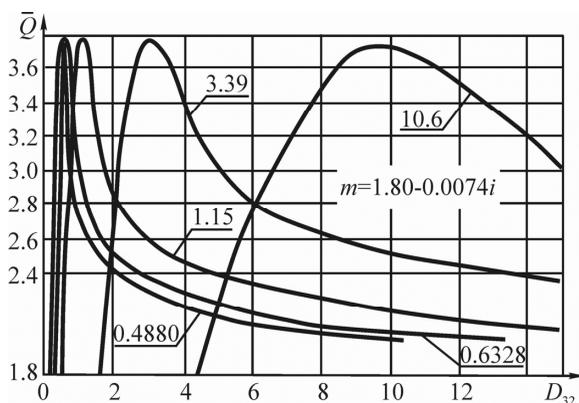


Рис. 14.11. Зависимость $\bar{Q}(D_{32})$ для частиц окиси алюминия (цифрами указаны значения длины волны зондирующего излучения λ , мкм)

В различных технических устройствах часто возникает необходимость определять дисперсность и концентрацию частиц сажи в потоке. В первую очередь эта задача актуальна при исследовании технических пламен и течений продуктов сгорания углеводородных топлив. Использование измерения спектральной прозрачности для двух длин волн позволяет реализовать экспрессный метод диагностики сажевых частиц. Характеристики сажи в продуктах сгорания достаточно хорошо изучены путем анализа микрофотографий отобранных проб. Частицы сажи являются сильными поглотителями в оптическом диапазоне ($\alpha \sim 1$); модальный диаметр частиц имеет порядок $D_0 \sim 0,1$ мкм. Распределение частиц по размерам можно с достаточной достоверностью аппроксимировать функцией:

$$f(D) = \frac{4D^2}{\sqrt{\pi}D_0} \exp\left(-\frac{D^2}{D_0^2}\right).$$

Наличие априорной информации о дисперсности частиц позволяет использовать для нахождения $f(D)$ метод параметризации. Подставляя $f(D)$ в систему уравнений (14.30), получим

$$\frac{\tau_{\lambda,2}}{\tau_{\lambda,1}} = \frac{\int_0^{\infty} D^4 Q(\lambda_2) \exp(-D^2 / D_0^2) dD}{\int_0^{\infty} D^4 Q(\lambda_1) \exp(-D^2 / D_0^2) dD} = \Phi(D_0),$$

где $\Phi(D_0)$ – однозначная функция модального диаметра D_0 .

Полидисперсный показатель ослабления для данной функции распределения также однозначно зависит от D_0 :

$$K_{\lambda} = C_m \Psi(D_0) = C_m \frac{\int_0^{\infty} D^4 Q(\lambda_2) \exp(-D^2 / D_0^2) dD}{\int_0^{\infty} D^4 Q(\lambda_1) \exp(-D^2 / D_0^2) dD}.$$

Рассчитанные заранее графики $\Phi(D_0)$ и $\Psi(D_0)$ позволяют по измеренным значениям $\tau_{\lambda,2}$, $\tau_{\lambda,1}$ определить средний размер и концентрацию частиц.

На рис. 14.12 приведены графики факторов эффективности для сажевых частиц в диапазоне размеров, характерных для реальных пламен. Как видно из этих графиков, основной вклад в ослабление лазерного излучения вносит поглощение; влияние рассеяния незначительно. Графики функций $\Phi(D_0)$ и $\Psi(D_0)$ приведены на рис. 14.13. Эти графики являются рабочими при использовании лазерного метода измерения параметров сажевых частиц в потоке.

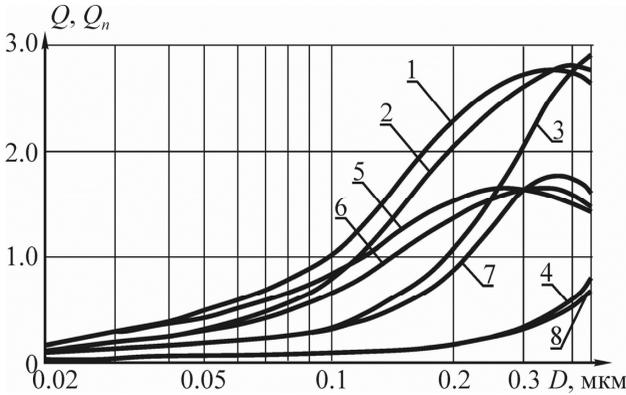


Рис. 14.12. Факторы эффективности $Q(1\div 4)$, $Q_n(5\div 8)$ для частиц сажи:
 1 – $\lambda = 0,49$ мкм; 2 – $\lambda = 0,63$ мкм; 3 – $\lambda = 1,15$ мкм; 4 – $\lambda = 3,39$ мкм;
 5 – $\lambda = 0,49$ мкм; 6 – $\lambda = 0,63$ мкм; 7 – $\lambda = 1,15$ мкм; 8 – $\lambda = 3,39$ мкм

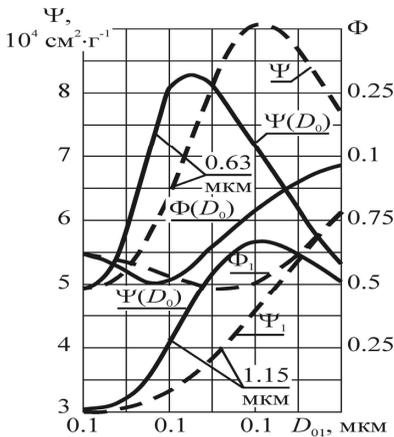


Рис. 14.13. Рабочие графики для определения D_0 и C_n частиц сажи (цифрами указаны значения длины волны зондирующего излучения λ , мкм)

В настоящее время в ряде фирм налажен выпуск серийных приборов для измерения дисперсного состава проб аэрозолей с использованием рассмотренных выше оптических методов. В качестве примера приведем основные характеристики серийных приборов «Analysette 22» (рис. 14.14, табл. 14.1) и «Mastersizer 2000» (рис. 14.15, табл. 14.2).



Рис. 14.14. Лазерный анализатор размеров и формы частиц «Analysette 22»



Рис. 14.15. Анализатор размера частиц (гранулометрического состава) «Mastersizer 2000»

Таблица 14.1

Технические характеристики «Analysette 22»

	Analysette 22 MicroTec plus	Analysette 22 NanoTec plus
Диапазон измерений	0,08–2 000 мкм Поддиапазоны: 0,08–45 мкм 15–2000 мкм 0,08–2000 мкм	Диспергирование: – в жидкой среде: 0,01–2 000 мкм – в сухой среде: 0,1–2 000 мкм Поддиапазоны: 0,01–45 мкм 0,08–45 мкм 15–2000 мкм 0,01–2000 мкм 0,08–2 000 мкм

	Analysette 22 MicroTec plus	Analysette 22 NanoTec plus
Лазер	Два полупроводниковых лазера Зеленый ($\lambda = 532$ нм, 7 мВт), ИК ($\lambda = 940$ нм, 9 мВт) Линейная поляризация Средний срок службы 10 000 ч	Три полупроводниковых лазера 2 x зеленый ($\lambda = 532$ нм, 7 мВт), 1 x ИК ($\lambda = 940$ нм, 9 мВт) Линейная поляризация Средний срок службы 10 000 ч
Количество классов размеров частиц	Макс. 108	Макс. 165
Оптическая конструкция	Инверсная конструкция Фурье Перемещаемая измерительная ячейка (патент FRITTSCH)	
Линзы Фурье	Фокусное расстояние 260 мм и 560 мм (зеленый или инфракрасный) Диаметр лазерного пучка в линзе Фурье 10 мм	
Юстировка лазерного луча	Автоматическая	
Класс защиты лазера	1 (согласно EN 60825)	
Датчик	57 элементов 2 сегмента: 1 x для вертикального и 1 x для горизонтального направления поляризации лазерного излучения	
Типичная продолжительность измерения	5–10 с (регистрация результатов одного измерения) 2 мин (полный цикл измерения)	
Блок диспергирования в жидкой среде	Объем жидкости 300–500 см ³ Центробежный насос с регулируемой производительностью Ультразвук с регулируемой мощностью (макс. 60 Вт) Используемые материалы в контуре пробы: нержавеющая сталь, тефлон, стекло BK7, шланги из Norprene®	
Блок диспергирования в жидкой среде малой емкости	Объем жидкости прибл. 100 мл Центробежный насос с регулируемой производительностью Макс. размер частиц прибл. 600 мкм (в зависимости от материала) Используемые материалы в контуре пробы: сталь, тефлон, стекло, перфторированный каучук (Kalrez®), Norprene®	
Блок диспергирования в сухой среде	Объем пробы < 1–100 см ³ Высоочастотный лотковый питатель Сопло Вентури с кольцевым зазором Требуемое подключение сжатого воздуха: мин. 5 бар, 125 л/мин, без масла, влаги и твердых частиц. Требуется внешнее вытяжное устройство	

Таблица 14.2

Технические характеристики «Mastersizer 2000»

Параметр	Спецификации
Диапазон измерения	От 0,02 до 2 000 микрон, в зависимости от свойств материала
Принцип анализа размеров частиц	Восстановление распределения частиц по размерам осуществляется с использованием полной теории светорассеяния Ми. Возможно использование приближения Фраунгофера.
Система детектирования	Красный свет: регистрация рассеяния во всём угловом диапазоне. Синий свет: регистрация рассеяния на большие углы в прямом и обратном направлениях.

Параметр	Спецификации
Источники света	Красный свет: гелий-неоновый лазер. Синий свет: твердотельный источник света.
Система оптической юстировки	Быстрая автоматическая юстировка с использованием специальной мишени и многоэлементного детектора.
Система смены модуля диспергирования и подачи образца	Автоматическое распознавание и конфигурирование модуля диспергирования и подачи образца после установки измерительной кюветы кассетного типа в кюветное отделение анализатора размеров частиц.
Электропитание	Однофазное, 110/240 В, 50/60 Гц, 60 ВА Рекомендуется подключать анализатор к сети через ИБП типа on-line с двойным преобразованием напряжения и номинальной мощностью не менее 1000 ВА.
Габариты	Длина: 1293 мм Ширина: 255 мм Высота: 375 мм

15. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

Среди современных экспериментальных методов измерения скорости движения частиц дисперсной фазы в потоке можно выделить три метода: времяпролетный метод, PIV-метод и лазерная доплеровская анемометрия.

Времяпролетный метод

Суть времяпролетного метода измерения скорости частицы или совокупности частиц заключается в том, что на участке свободного движения частиц на некотором расстоянии друг от друга L устанавливаются два детектора, которые регистрируют моменты прохождения каждой частицы. По измеренному интервалу времени Δt между сигналами детекторов определяется скорость движения частицы

$$u_p = \frac{L}{\Delta t}.$$

Пример реализации схемы времяпролетного метода для измерения скорости гравитационного осаждения частицы приведен на рис. 15.1.

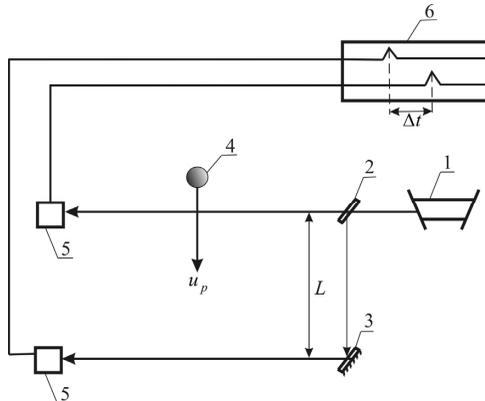


Рис. 15.1. Пример схемы времяпролетного метода:
1 – лазер; 2 – полупрозрачное зеркало; 3 – зеркало; 4 – частица;
5 – приемник излучения; 6 – осциллограф

Излучение лазера 1 с помощью полупрозрачного зеркала 2 и зеркала 3 делится на два параллельных зондирующих луча, расположенные на расстоянии L друг от друга (измерительная база). При осаждении частица 4 последовательно пересекает эти лучи, при этом момент прохождения каждого луча регистрируется приемниками излучения 5 и двухлучевым осциллографом 6.

PIV-метод

PIV-метод (Particle Image Velocimetry), или метод измерения скорости, основанный на двухэкспозиционном изображении трассирующих частиц с цифровой обработкой [38]. В отличие от времяпролетного метода PIV-метод позволяет определять не только скорость движения частицы, но и ее траекторию.

Измерение скорости частицы основано на регистрации перемещения частицы в плоскости сечения за фиксированный интервал времени. Измерительная плоскость (область, в которой находится частица) «вырезается» световым ножом (рис. 15.2). Частицы в измерительной плоскости должны быть освещены минимум дважды. Образы частиц регистрируются на цифровую камеру. Последующая обработка изображений позволяет рассчитать смещения частиц за время между вспышками источника света. В качестве источника излучения обычно используются твердотельные импульсные лазеры. Такие лазеры имеют малую длительность импульса ($\sim 4 \div 10$ нс) и достаточно высокую энергию в импульсе.

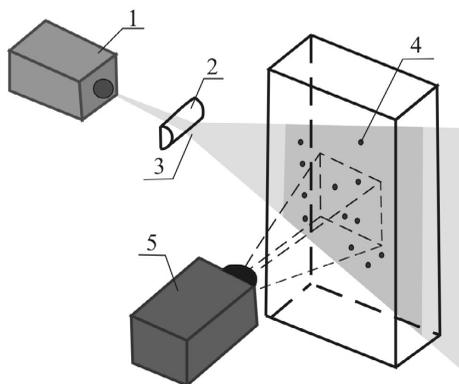


Рис. 15.2. Схематичное изображение PIV-метода измерения скорости: 1 – лазер; 2 – оптическая система; 3 – световой нож; 4 – частица; 5 – видеокамера

При больших временах динамической релаксации частиц данный метод применим для измерения скорости в потоках жидкости или газа. Основными преимуществами метода являются бесконтактность, возможность измерения мгновенных распределений скорости, широкий диапазон измеряемых скоростей – вплоть до сверхзвуковых.

Лазерная доплеровская анемометрия

Одним из перспективных методов измерения скорости частицы является лазерная доплеровская анемометрия. Принцип действия лазерного доплеровского анемометра (ЛДА) заключается в измерении доплеровского сдвига частоты рассеянного движущейся частицей (или совокупностью частиц) излучения, который является линейной функцией скорости частицы. ЛДА имеет целый ряд преимуществ перед другими методами измерения скорости:

- бесконтактность;
- широкий диапазон измеряемых скоростей ($10^{-6} \div 10^6$ м/с);
- высокое пространственное (до 10^{-11} см³) и временное ($10^{-7} \div 10^{-9}$ с) разрешение;
- высокая точность (0,2÷3,0%);
- метод является абсолютным.

Подробное изложение теоретических и практических вопросов лазерной доплеровской анемометрии содержится в ряде фундаментальных монографий и обзорных статей. В настоящем параграфе рассматриваются лишь основные принципы и схемы построения ЛДА [39].

Рассмотрим изменение частоты зондирующего излучения при рассеянии на движущейся частице. Пусть монохроматический источник света испускает волну с круговой частотой ω_0 и волновым вектором \vec{k}_0 (рис. 15.3).

Свет, падая на движущуюся со скоростью u_p частицу, рассеивается во все стороны. Рассеянная волна с волновым вектором \vec{k}_p будет иметь частоту ω_p . Поскольку частица движется, она воспринимает световую волну с частотой ω' , которая отличается от частоты ω_0 падающей волны от неподвижного источника:

$$\omega' = \omega_0 \left(1 - \frac{u_p}{c} \cos \alpha \right), \quad (15.1)$$

Движущуюся частицу, которая рассеивает свет, попавший на нее от неподвижного источника, в свою очередь также можно рассматривать в качестве некоторого источника излучения с частотой ω' . За счет эффекта Доплера приемник излучения (ПИ) зафиксирует частоту ω_p :

$$\omega_p = \omega' \left(1 - \frac{u_p}{c} \cos \beta \right)^{-1}, \quad (15.2)$$

где β – угол между направлением распространения волны и направлением движения частицы. Выражая в (15.2) частоту ω' согласно формуле (15.1), получаем

$$\omega_p = \omega_0 \frac{1 - \frac{u_p}{c} \cos \alpha}{1 - \frac{u_p}{c} \cos \beta}. \quad (15.3)$$

Предположив $u_p \ll c$, знаменатель дроби в (15.3) разложим в степенной ряд:

$$\omega_p = \omega_0 \left(1 - \frac{u_p}{c} \cos \alpha \right) \left[1 + \frac{u_p}{c} \cos \beta + \left(\frac{u_p}{c} \cos \beta \right)^2 + \dots \right].$$

Оставляя только члены, линейные относительно u_p , получим выражение для частоты рассеянной волны

$$\omega_p = \omega_0 \left[1 - u_p \frac{(\cos \alpha - \cos \beta)}{c} \right]. \quad (15.4)$$

Соотношение (15.4) лежит в основе доплеровского метода измерения скорости. Оно позволяет рассчитывать частоту рассеянной волны (если известны ω_0 , u_p и пространственные координаты источников и приемников излучения), а также находить скорость частицы по измеренной частоте рассеянной волны. Доплеровский сдвиг частоты, определяемый соотношением $\omega_D = \omega_p - \omega_0$, может быть записан в виде

$$\omega_D = \gamma u_p \cos \varphi, \quad (15.5)$$

где $u_p \cos \varphi$ – проекция вектора скорости частицы на направление разностного вектора $\bar{k}_p - \bar{k}_0$.

Коэффициент $\frac{4\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ находится через известные параметры оптической системы (угол рассеяния) и известную длину волны лазерного излучения λ . Поэтому измерение доплеровского сдвига дает информацию о скорости:

$$u_p = \frac{\omega_D}{\gamma u_p \cos \varphi} = \lambda \omega_D \left(4\pi \cos \varphi \sin \frac{\theta}{2}\right)^{-1}. \quad (15.6)$$

Из (15.6) видно, что максимальный доплеровский сдвиг частоты получается при $\theta = 180^\circ$ и $\varphi = 0$ и составляет $\omega_D^* = 4\pi u_p / \lambda$. В табл. 15.1 приведены значения длин волн, частот и $u_D^* = \omega_D^* / 2\pi$ при $u_p = 1$ м/с для некоторых типов лазеров.

Таблица 15.1

Значения λ , u_0 , u_D^* для основных типов лазеров

Параметр	Тип лазера					
	He-Cd	Ar	Ar	He-Ne	He-Ne	CO ₂
λ , мкм	0,4416	0,4880	0,5145	0,6328	3,39	10,60
$u_0 \cdot 10^{-14}$, Гц	6,789	6,143	5,827	4,738	0,884	0,283
u_D^* , МГц	4,526	4,096	3,885	3,158	0,590	0,189

Максимальный доплеровский сдвиг частоты изменяется от 0,19 МГц (лазер на CO₂) до 4,53 МГц (гелий-кадмиевый лазер).

Основные схемы ЛДА

По способу выделения доплеровского сдвига частоты ЛДА делятся на две группы: в первой используется фотоэлектронный, во второй – оптический спектральный метод.

Фотоэлектронный метод (метод фотосмещения или прямого фотодетектирования) основан на гетеродинном преобразовании опорного и рассеянного излучения. В случае прямого фотодетектирования излучение направляет-

ся на ПИ, электрический сигнал с которого поступает на измерительный прибор. В методе фотосмещения на ПИ направляется, кроме сигнальной волны, еще и опорная. В системах лазерной анемометрии приходится регистрировать малые мощности рассеянного излучения (от 10^{-10} Вт и менее) при частоте модуляции от единиц герц до сотен мегагерц. Поэтому в качестве приемников оптического излучения используются в основном фотоэлектронные умножители (ФЭУ), фотодиоды и фототриоды, которые обладают достаточной чувствительностью и быстродействием. Верхний предел скорости, которая может быть зарегистрирована с помощью этого метода, составляет сотни метров в секунду, что ограничено полосой пропускания ПИ (оптимальный предел $u_{\max} = 500$ м/с). С точки зрения практической реализации данные ЛДА достаточно просты при измерении сравнительно невысоких скоростей и наиболее широко и успешно применяются при изучении дозвуковых потоков, в то время как измерение скоростей $u_p > 10^3$ м/с таким методом представляет значительные технические трудности.

Оптический (спектральный) метод выделения доплеровского сдвига отличается тем, что опорный и рассеянный пучки подаются на вход спектрального прибора высокой разрешающей силы (например интерферометр Фабри – Перо). Доплеровский сдвиг частот при этом определяется путем измерения на выходе спектрального прибора смещения спектра рассеянного излучения по отношению к спектру опорного сигнала. Данные схемы ЛДА позволяют практически неограниченно расширить диапазон измерений в области более высоких скоростей и являются более перспективными при исследовании сверхзвуковых потоков, поскольку для спектрального метода регистрации надежность и точность измерений с ростом скорости только увеличиваются. Минимальная же величина скорости, которая может быть зарегистрирована оптическим методом, определяется разрешающей способностью спектрального прибора и монохроматичностью излучения (u_{\min} составляет ~ 1 м/с и точность измерений при этом очень низка). При изучении нестационарных двухфазных потоков более перспективны схемы ЛДА со сканированием спектра. Эти схемы позволяют регистрировать спектральную функцию флуктуаций интенсивности рассеянного излучения, по которой могут быть восстановлены функции распределения частиц по размерам и скоростям.

Все многообразие оптических схем ЛДА можно свести к трем основным типам: схемы с опорным пучком, дифференциальные и инверсно-дифференциальные. Разновидности схемы с опорным пучком представлены на рис. 15.4, а–в.

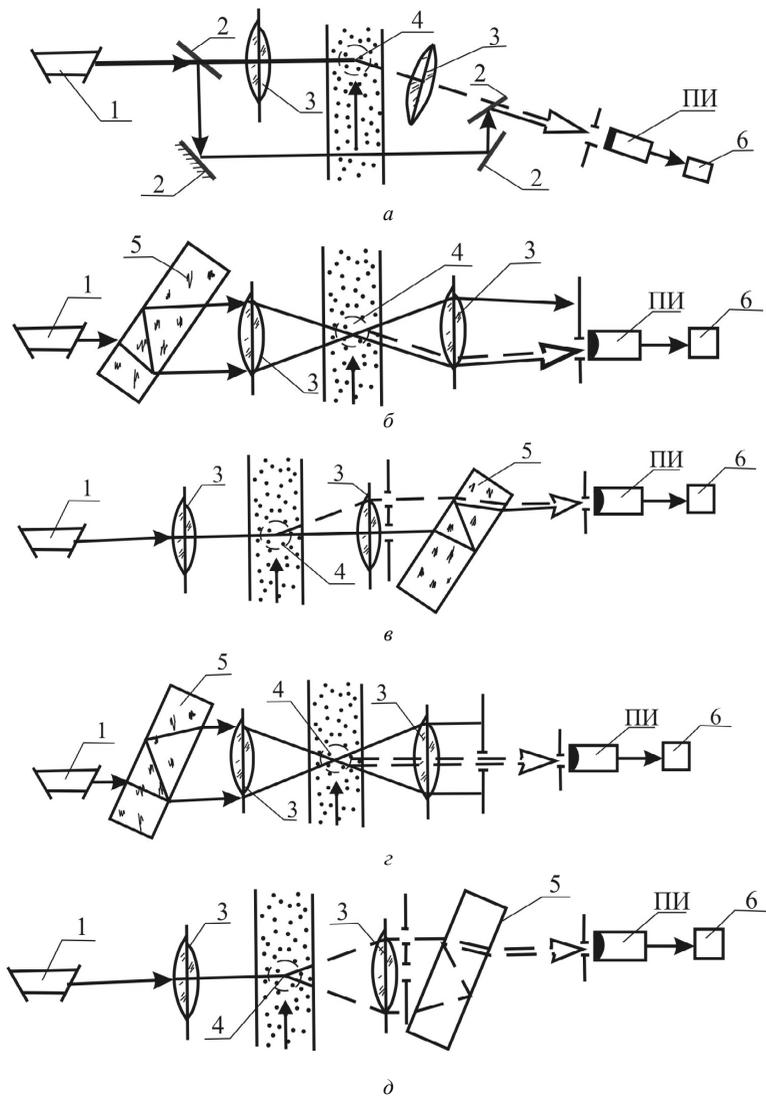


Рис. 15.4. Оптические схемы ЛДА: с опорным пучком (*а*, *б*, *в*), дифференциальная (*г*), инверсно-дифференциальная (*д*): 1 – лазер; 2 – зеркало; 3 – объектив; 4 – зона измерений; 5 – плоскопараллельная пластина; 6 – электронный блок

В исследуемую область потока направляется один лазерный пучок. Выделенная под углом к направлению падающего пучка рассеянная волна поступает на ПИ, работающий в режиме фотосмещения. В качестве опорного пучка используется часть падающего. Источником освещающего и опорного пучков служит один и тот же лазер.

Доплеровский сдвиг частоты в рассеянном пучке определяется выражением (15.5). В схеме с опорным пучком выделяемый доплеровский сдвиг частоты пропорционален проекции вектора скорости частицы на вектор, равный разности волновых векторов рассеянной и падающей волн. Зависимость результата измерения ω_D от геометрии как освещающего, так и опорного пучков является характерной особенностью схем с опорным пучком. Этот тип оптических схем ЛДА имеет несколько разновидностей, отличающихся способом формирования опорной волны. В схеме (рис. 15.4, а) опорный пучок не проходит через исследуемую среду. Достоинство такой схемы – отсутствие влияния исследуемой среды на структуру опорного пучка, недостатки – большое число оптических элементов, что затрудняет юстировку. В схемах (рис. 15.4, б, в) опорный пучок формируется из падающего, прошедшего через исследуемую среду. Выделенный рассеянный и опорный пучки пространственно совмещаются и направляются на ПИ. Совмещение выполняется обычно наклонной плоскопараллельной пластинкой, в которой опорная волна испытывает двойное отражение. Эта разновидность схем реализуется обычно меньшим числом оптических элементов, чем предыдущая. Особенностью является влияние рассеивающей среды на структуру опорного пучка.

Схема (рис. 15.4, б) отличается от схемы (рис. 15.4, а) инверсией пучков, при которой источник и ПИ меняются местами. В ЛДА такого типа пространственное совмещение опорного и рассеянного пучков получается автоматически. Достоинство этой схемы заключается в возможности визуального контроля за локализацией объема, по которому усредняется результат измерения. Этот объем находится в области пересечения освещающего и опорного пучков.

Дифференциальная схема ЛДА характеризуется тем, что в исследуемую среду направляются два лазерных пучка, мощности которых одного порядка. Рассеянное излучение собирается приемным объектом и посылается на ПИ (рис. 15.4, в). Доплеровские сдвиги частоты на пространственно-совмещенных волнах, рассеянных от 1-го и 2-го падающих пучков:

$$\omega_{D1} = (\vec{k}_p - \vec{k}_{01})\vec{u}, \quad \omega_{D2} = (\vec{k}_p - \vec{k}_{02})\vec{u}. \quad (15.7)$$

Эти волны оптически смешиваются на ПИ, электрический сигнал с выхода имеет составляющую разностной частоты

$$\omega_D = \omega_{D2} - \omega_{D1} = (\vec{k}_{01} - \vec{k}_{02})\vec{u}. \quad (15.8)$$

Следовательно, в дифференциальной схеме доплеровский сдвиг частоты пропорционален проекции вектора скорости частицы на вектор, равный разности волновых векторов падающих пучков. Для дифференциальных схем ЛДА результат измерения доплеровского сдвига частоты определяется геометрией освещающих пучков и не зависит от приемной апертуры, ограничивающей рассеянное излучение. Поэтому оптико-электронный прибор по принципу дифференциальной схемы может работать с большими приемными апертурами. Визуализация исследуемой области осуществляется пересечением падающих пучков, что является достоинством дифференциальной схемы. В таких схемах анемометров определяется разность доплеровских сдвигов частоты, и ПИ работает в режиме прямого фотодетектирования. Если в дифференциальной схеме источник излучения и ПИ поменять местами, получается так называемая инверсно-дифференциальная схема (рис. 15.4, д). В этой схеме в исследуемую область направляется один лазерный луч. Выделенные под углами θ_1 , θ_2 к направлению падающего рассеянные пучки пространственно совмещаются и направляются на ПИ, работающий в режиме оптического смещения. Доплеровские сдвиги частоты в первом и втором рассеянных пучках определяются выражениями

$$\omega_{D1} = (\vec{k}_{p1} - \vec{k}_0)\vec{u}, \quad \omega_{D2} = (\vec{k}_{p2} - \vec{k}_0)\vec{u}. \quad (15.9)$$

Электрический сигнал на выходе ПИ будет иметь составляющую разностной доплеровской частотой

$$\omega_D = \omega_{D2} - \omega_{D1} = (\vec{k}_{p1} - \vec{k}_{p2})\vec{u}. \quad (15.10)$$

Разностный доплеровский сдвиг частоты в инверсно-дифференциальной схеме не зависит от геометрии падающего пучка и определяется только геометрией рассеянных. Измеряемый в этой схеме доплеровский сдвиг частоты пропорционален проекции вектора скорости на разностный вектор, построенный на волновых векторах выделенных рассеянных пучков.

Одним из условий применения ЛДА для диагностики гетерогенных потоков является наличие достаточно большого числа рассеивающих

частиц в зоне измерений, поскольку интенсивность рассеянного света от малого количества частиц может оказаться недостаточной для регистрации доплеровского сдвига частот.

При исследовании высокоскоростных двухфазных потоков ($u \sim 10^3$ м/с), как отмечено выше, наиболее перспективны схемы ЛДА с оптическим спектральным выделением доплеровского сдвига частоты. Практическая реализация таких схем связана с разработкой сканирующих спектрометров, обладающих высокой разрешающей способностью и светосилой. Параметры такого спектрометра определяют основные характеристики ЛДА – чувствительность, диапазон и точность измерений.

На формирование сигнала ЛДА оказывает влияние целый ряд факторов, определяемых как свойствами частиц, рассеивающих излучение, так и параметрами схемы измерения. К числу таких факторов относятся, в частности, амплитуда и длительность импульсов от отдельных частиц, зависящие от дисперсного состава, скорости их движения, а также соотношение между частотой следования этих импульсов и временем регистрации спектра рассеянного сигнала t_p , определяемым при прочих равных условиях эксперимента скоростью сканирования спектра. Время высвечивания отдельной частицы при прохождении зондируемого объема в сверхзвуковом потоке $t_1 \ll t_p$ ($u = 500$ м/с, $t_1 = 0,2 \cdot 10^{-6}$ с), поэтому для регистрации контура рассеянного сигнала необходимо обеспечить прохождение достаточно большого числа частиц через исследуемый объем за время измерения. Если измерения ведутся в потоке с малой концентрацией частиц, то увеличивается необходимое значение t_p . Так, опыты, проведенные по исследованию эффекта скоростного отставания «одиночных» частиц в сверхзвуковом сопле ($p_0 = 0,8$ МПа, $T_0 = 260$ К, $M = 2,8$), т.е. в условиях, когда расстояние между частицами в потоке на два и более порядка превышает их средний размер $L \geq 10^2 D$, показывают, что значение t_p должно быть в пределах $0,1 \div 1$ с.

С другой стороны, исследование импульсных процессов, а также измерение скорости в условиях пульсаций потока требует уменьшить время измерения так, чтобы $t_p \ll \tau^*$, где τ^* – характерное время процесса. Например, для регистрации «мгновенной» скорости при пульсации потока с частотой $\sim 10^3$ Гц значение t_p должно быть $\leq 10^{-4}$ с.

Таким образом, решение различных задач газовой динамики двухфазных потоков требует от системы сканирования ЛДА обеспечения в широких пределах $t_p = 10 \div 10^{-4}$ с.

Чувствительность ЛДА при использовании обычно применяемых интерферометров Фабри – Перо с плоскими зеркалами при фотоэлектрической записи спектра не обеспечивает уверенной регистрации рассеянного сигнала, поскольку необходимо выделять узкий участок спектра (с помощью малой диафрагмы), что приводит к большим потерям света. Значительный выигрыш в светосиле можно получить при переходе к конфокальному (сферическому) резонатору, позволяющему использовать для регистрации определенной длины волны без потери спектрального разрешения приемник, имеющий значительно большую угловую апертуру. Конфокальный спектрометр более удобен в эксплуатации, поскольку требования к точности настройки конфокальных зеркал значительно ниже, что важно с точки зрения юстировки и работы интерферометра при высоком уровне вибраций и акустических шумов в условиях газодинамических экспериментов.

В заключение отметим, что методы лазерной доплеровской анемометрии позволяют измерять не только скорость, но размер и концентрацию частиц. Определение размеров основано на зависимости амплитуды доплеровского сигнала от размера движущихся частиц, а концентрации – на измерении числа импульсов фототока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М. : Мир, 1971. 536 с.
2. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. М. : Мир, 1972. 440 с.
3. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1980. 172 с.
4. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. М. : Энергия, 1976. 296 с.
5. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. М. : Энергоиздат, 1981. 472 с.
6. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1986. 264 с.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.
8. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 2. 360 с.
9. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. М. : ВИНТИ, 1972. Т. 6. С. 93–176.
10. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техники. Комплексные и специальные разделы механики. М. : ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 3–80.
11. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем : учеб. пособие. М. : Изд-во МЭИ, 2000. 374 с.
12. Шилиев М.И., Шилиев А.М. Аэродинамика и тепломассообмен газодисперсных потоков : учеб. пособие. Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2003. 272 с.
13. Архипов В.А., Шереметьева У.М. Аэрозольные системы и их влияние на жизнедеятельность : учеб. пособие. Томск : Изд-во Том. гос. педаг. ун-та, 2007. 134 с.
14. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли – пыли, дымы и туманы. Л. : Химия, 1969. 428 с.
15. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию. М. : Мир, 1987. 280 с.
16. Коузов П.А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л. : Химия, 1971. 280 с.
17. Архипов В.А., Бондарчук С.С. Оптические методы диагностики гетерогенной плазмы продуктов сгорания : учеб. пособие. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2010. 265 с.
18. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М. : Наука, 1977. 440 с.
19. Архипов В.А., Березиков А.П. Основы теории инженерно-физического эксперимента. Томск : Изд-во Том. политехн. ун-та, 2008. 206 с.

20. Броунштейн Б.И., Фишбейн Г.А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л. : Химия, 1977. 279 с.
21. Иродов И.Е. Основные законы механики : учеб. пособие. М. : Высшая школа, 1985. 248 с.
22. Архипов В.А. Курс лекций по теории и практике закрученных потоков. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1999. Ч. 2. 62 с.
23. Архипов В.А., Васенин И.М., Трофимов И.М., Усанина А.С. Устойчивость формы частиц дисперсной фазы при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 2. С. 5–14.
24. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М. : Гостехиздат, 1958. 348 с.
25. Витман Л.А., Кацнельсон Б.Д., Палеев И.И. Распыливание жидкости форсунками. М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1962. 264 с.
26. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М. : Изд-во АН СССР, 1955. 350 с.
27. Васенин И.М., Дьяченко Н.Н., Елкин К.Е., Нариманов Р.К. Математическое моделирование двухфазных конвективных течений с малыми частицами // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45, № 6(268). С. 19–25.
28. Хоргуани В.Г., Калов Х.М. О падении высококонцентрированной системы грубодисперсных аэрозольных частиц в атмосфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1975. Т. 11, № 3. С. 278–284.
29. Висицкий Е.В., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Движение частицы в вязкой жидкости под действием силы тяжести и вибрации при наличии силы Бассе // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 5. С. 763–775.
30. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С. Экспериментальное исследование нестационарных режимов всплытия одиночного пузырька // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86, № 5. С. 1097–1106.
31. Архипов В.А., Трофимов В.Ф., Усанина А.С. Экспериментальное исследование потери устойчивости формы капли // Оптика атмосферы и океана. 2012. Т. 25, № 12. С. 1034–1038.
32. Чандрасекхар С. Устойчивость вращающейся жидкой капли // Сб. переводов «Механика». 1966. № 5. С. 92–117.
33. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. М. : Наука, 1976. 504 с.
34. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1951. 288 с.
35. Зуев В.Е., Наац И.Э. Обратные задачи лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск : Наука, 1982. 242 с.
36. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М. : Мир, 1971. 165 с.
37. Г. Ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. М. : ИЛ, 1961. 537 с.
38. Ринкевичус Б.С. Лазерная анемометрия М. : Энергия, 1978. 160 с.
39. Дубнищев Ю.Н., Ринкевичус Б.С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. М. : Наука, 1982. 304 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица гамма-функции

<i>x</i>	$\Gamma(x)$	<i>x</i>	$\Gamma(x)$	<i>x</i>	$\Gamma(x)$	<i>x</i>	$\Gamma(x)$
1,00	1,0000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
0,1	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
0,2	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
0,3	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
0,4	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
<hr/>							
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
0,6	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
0,7	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
0,7	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
0,9	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
<hr/>							
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
<hr/>							
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88767	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
<hr/>							
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581
<hr/>							
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

Значения гамма-функции для $x < 1$ и для $x > 2$ могут быть вычислены с помощью формул:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Приложение 2

Размерности механических и теплодиффузионных величин в системе СИ

Основные единицы

Величина	Наименование	Обозначение	
		Русск.	Intern.
Длина	метр	м	m
Масса	килограмм	кг	kg
Время	секунда	с	s
Сила электрического тока	ампер	А	A
Термодинамическая температура	кельвин	К	K
Количество вещества	моль	моль	mol
Сила света	кандела	кд	cd

Механические величины

Величина	Обозначение		Размерность
	Русск.	Intern.	
Скорость	м/с	m/s	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Ускорение	м/с ²	m/s ²	$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Энергия и работа	Дж	J	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$
Мощность	Вт	W	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$
Сила	Н	N	$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Давление	Па	Pa	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Плотность	ρ	ρ	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
Коэффициент динамической вязкости	μ	μ	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент кинематической вязкости	ν	ν	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент поверхностного натяжения	σ	σ	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$

Теплодиффузионные величины

Величина	Обозначение		Размерность
	Русск.	Intern.	
Количество теплоты	Дж	J	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$
Тепловой поток	Вт	W	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$
Плотность теплового потока	Вт/м ²	W/m ²	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Удельная теплоемкость	с	c	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$
Коэффициент теплопроводности	λ	λ	$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$
Коэффициент теплоотдачи	α	α	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$
Коэффициент температуропроводности	κ	κ	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент диффузии	D	D	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент массоотдачи	α	α	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Газовая постоянная	R	R	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$

Основные критерии подобия в механике гетерогенных сред

Название критерия	Формула	Физический смысл	Связь между критериями
А	$\frac{R_0 r_c}{n r_{ex}^2} = \frac{u_\phi}{u_z}$	Характеризует интенсивность закрутки жидкости в ЦБФ (R_0 – плечо закручивания (расстояние от оси симметрии ЦБФ до оси входного канала; r_c – радиус сопла; r_{ex} – радиус входного тангенциального канала; n – количество входных каналов; u_ϕ – тангенциальная компонента скорости на срезе сопла; u_z – осевая компонента скорости в сопле)	$\frac{1}{2Ro}$
Ar	$\frac{gD^3}{\nu^2} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)$	Соотношение между подъемной (архимедовой) силой, обусловленной разностью плотностей фаз, и силой молекулярного трения	$\frac{Re^2}{Fr} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)$
Bo	$\frac{gD^2 \rho - \rho_p }{\sigma}$	Соотношение между силами инерции и силами поверхностного натяжения (g – ускорение массовых сил, в частности, силы тяжести). Характеризует деформацию капли и пузырька в поле массовых сил	$\frac{At \cdot Ca}{Re}$
Ca	$\frac{\mu_p u_l}{\sigma}$	Соотношение между силой молекулярного трения и силой поверхностного натяжения для капли, помещенной на подложку (u_l – скорость движения линии трехфазного контакта)	$\frac{We}{Re}$
Ec	$\frac{u^2}{c_p \Delta T}$	Соотношение между кинетической энергией потока и его энтальпией (c_p – удельная теплоемкость; ΔT – характеристическая разность температур в потоке)	–
Eu	$\frac{\Delta p}{\rho u^2}$	Соотношение между силами давления и силами инерции в потоке (Δp – перепад давлений)	–
Fr	$\frac{u^2}{gD}$	Соотношение между силами инерции и силами тяжести в потоке	$\frac{Re^2}{Ga}$

Название критерия	Формула	Физический смысл	Связь между критериями
Ca Критерий Галилея	$\frac{g\rho^2 D^2}{\mu^2}$	Соотношение между силой тяжести и силой молекулярного трения	$\frac{Re^2}{Fr}$
Gr Число Грасгофа	$\frac{gD^3\beta\Delta T}{\nu^2}$	Соотношение между подъемной (архимедовой) силой, вызванной неравномерным распределением плотности в неоднородном поле температур, и силой молекулярного трения (β – температурный коэффициент объемного расширения среды; ΔT – повышение температуры данной частицы среды по сравнению с ненагретыми частицами). Является критерием свободной тепловой конвекции	–
Kn Число Кнудсена	$\frac{l}{D}$	Отношение длины свободного пробега молекул к характерному размеру в поле течения. Характеризует влияние разреженности газа на характер течения	–
Lp Число Лапласа	$\frac{\sigma\rho_p D}{\mu_p^2}$	Соотношение между силами поверхностного натяжения и силами молекулярного трения для капель и пузырьков	$\frac{1}{Oh^2}$
Lu Число Ляшенко	$\frac{u^3 \rho_p^2}{g\mu_p \rho - \rho_p }$	Соотношение между силой инерции и подъемной силой. Характеризует процессы гравитационного осаждения частиц в потоке газа	$\frac{Re^3}{Ag}$
M Число Маха	$\frac{u}{c}$	Отношение скорости газа к скорости звука. Учитывает влияние сжимаемости среды на характер ее движения (c – местная скорость звука)	–
Mo Число Моргана	$\frac{g\mu_p^4 \rho - \rho_p }{\rho_p^2 \sigma^3}$	Характеризует форму пузырьков и капель в поле силы тяжести	–
Ne Критерий Ньютона	$\frac{FD}{m\mu_p^2}$	Критерий механического подобия. Характеризует соотношение между работой внешних сил и кинетической энергии частицы (F – суммарная сила, действующая на частицу массой m)	–

Название критерия		Формула	Физический смысл	Связь между критериями
Oh	Число Онезорге	$\frac{\mu_p}{\sqrt{\sigma \rho} D}$	Соотношение между силами молекулярного трения и силами поверхностного натяжения	$\frac{1}{\sqrt{Gr}}$
Re	Число Рейнольдса (движение частицы в несущей среде)	$\frac{\rho \bar{u} - \bar{u}_p D}{\mu}$	Соотношение между силами инерции и силами молекулярного трения в потоке (\bar{u}_1, \bar{u}_2 – векторы скорости капель; D_1 – диаметр капли-снаряда)	–
	Число Рейнольдса (движение капли-снаряда в капле-мишени)	$\frac{\rho_p \bar{u}_1 - \bar{u}_2 D_1}{\mu_p}$		
Ro	Число Россби	$\frac{u_z}{2u_\phi}$	Критерий интенсивности закрутки (u_z – осевая компонента скорости; u_ϕ – тангенциальная компонента скорости на границе вихря). Характеризует интенсивность атмосферных вихрей (смерчи, торнадо и др.)	$\frac{1}{2A}$
Stk	Число Стокса	$\frac{\rho_p D^2 u_p}{\mu L}$	Отношение длины инерционного пробега частицы к характерному размеру претрады L . Характеризует действие инерционных сил в запыленных потоках	–
Str	Число Струхала (критерий гомохронности No)	$\frac{ut}{L}$	Соотношение между силой инерции $\rho u^2/L$ и величиной $\rho u/L$, учитывающей влияние нестационарности на скорость несущей среды (t – характерный интервал времени; L – характерный размер в поле течения)	–
We	Критерий Вебера для капли	$\frac{\rho \bar{u} - \bar{u}_p ^2 D}{\sigma}$	Соотношение между силами динамического напора и силами поверхностного натяжения. Характеризует деформацию и дробление капель и пузырьков в потоке	Ca · Re
	Критерий Вебера для пузырька (по Р.И. Нигматулину)	$\frac{\rho_p \bar{u} - \bar{u}_p ^2 D}{\sigma}$		

Название критерия	Формула	Физический смысл	Связь между критериями
α Параметр Магера	$\frac{u_\phi}{a_0} \sqrt{\frac{k-1}{2}}$	Локальный критерий интенсивности закрутки для закрученного потока газа (u_ϕ – тангенциальная компонента скорости на стенке канала; a_0 – скорость звука в заторможенном потоке; k – показатель адиабаты газа)	–
β Параметр дифракции (параметр Ми)	$\frac{\pi D}{\lambda}$	Определяет количественные характеристики рассеяния монохроматического излучения однородными сферическими частицами (λ – длина волны излучения)	–
γ Отношение диаметров капель	$\frac{D_2}{D_1}$	Определяет процесс взаимодействия капель при взаимных столкновениях (D_1, D_2 – диаметры капель, $D_2 > D_1$)	–
ε Параметр Г.Г. Черного	$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{[\bar{\Gamma}^2(\psi') d\psi']}{\psi'^2} d\psi$	Интегральный критерий интенсивности закрутки ($\bar{\Gamma}$ – безразмерная циркуляция; ψ – линия тока)	–
Φ Параметр Хиггира – Бэра	$\frac{K_\phi}{K_z R}$	Интегральный критерий интенсивности закрутки (K_ϕ – осевой поток момента импульса; K_z – осевой поток импульса; R – радиус цилиндрического канала)	–
ϕ_{ji} Параметр коагуляции и дробления	–	Математическое ожидание отношения изменения массы капли-мишени D_i , вызванного взаимодействием j -й, к общей массе, столкнувшихся с ней капель-снарядов D_j ($D_j < D_i$)	–
Ω Безразмерный момент импульса	$\frac{ \bar{M} }{(D_e/2)^{3.5} \sqrt{\rho_p \sigma}}$	Определяет условия дробления за счет центробежных сил вращающейся системы капель, образовавшейся при столкновении (\bar{M} – момент импульса; D_e – диаметр эквивалентной сферической капли, объем которой равен сумме объемов взаимодействующих капель)	–

Обозначения:

D – диаметр частицы дисперсной фазы (капли, пузырька, твердой частицы);

g – ускорение свободного падения;

u_p, u – скорость частицы дисперсной фазы и дисперсионной среды;

μ_p, μ – коэффициент динамической вязкости частицы дисперсной фазы и дисперсионной среды;

ν – коэффициент кинематической вязкости дисперсионной среды;

ρ_p, ρ – плотность частицы дисперсной фазы и дисперсионной среды;

σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Учебное издание

Владимир Афанасьевич Архипов, Анна Сергеевна Усанина

**ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ
В НЕСУЩЕЙ СРЕДЕ**

Учебное пособие

Редактор А.Н. Воробьева
Компьютерная верстка А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано к печати 24.06.2014 г. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 14,6.
Тираж 100 экз. Заказ № 293.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–53-15-28

ISBN 978-5-9462-1458-2



9 785946 214582 >