ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

17

ТОМСК—1952

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

17

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Томск — 1952

Отв. редактор проф. В. Т. Макаров

Редактор выпуска проф. П. П. Куфарев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Проф. В. Т. Макаров (отв. редактор, ректор университета), проф. А. П. Бунтин (зам. отв. редактора), проф. В. А. Пегель (зам. отв. редактора), проф. Б. Г. Иоганзен (ученый секретарь редколлегии), И. Е. Попов, доц. Е. Н. Аравийская, доц. Н. Ф. Бабушкин, доц. Д. А. Васильев, доц. М. С. Горохов, доц. А. И. Данилов, доц. В. В. Демидов, доц. П. В. Коппин, член-корр. АН СССР В. Д. Кузнецов, проф. П. П. Куфарев, доц. Н. А. Нагинский, проф. И. М. Разгон, проф. Б. В. Тронов, проф. М. В. Тронов.

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

К ВОПРОСУ О СВОЙСТВАХ ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

З. И. Клементьев

В работе предполагается знакомство с понятиями и фактами теории полуупорядоченных пространств [1], [2].

В предыдущих наших заметках было показано, что совокупность вполне аддитивных функций $\{\Phi\}$, определенных на борелевском теле $B=\{e\}$, может быть рассматриваема как пространство $Z=\{\Phi\}$ (0) линейных функционалов на пространстве X типа K_σ с единицей [3].

Нами также указаны [4] некоторые свойства пространства Z и в качестве следствий указаны некоторые свойства семейств вполне аддитивных функций. В настоящей заметке мы указываем дополнительно некоторые свойства пространства Z, из которых непосредственно получается ряд свойств вполне аддитивных функций. В качестве таких свойств мы останавливались на некоторых результатах, полученных В. М. Дубровским [5]. Последнее обстоятельство и послужило поводом для написания настоящей заметки. Приведем прежде всего одно определение и одно замечание, касающиеся полуупорядоченных пространств, заимствованные из работ А. Г. Пинскера [6] и Б. З. Вулиха [7].

1) Единичный элемент $\varphi \in X$, $\varphi > 0$, не допускающий представления в виде суммы двух существенно положительных единичных элементов: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, называется ортом. Пусть, далее, X пространство типа K_σ с единицей. X называется непрерывным, если среди его единичных элементов нет ни одного орта. X называется дискретным, если для каждого единичного элемента $\varphi > 0$ существует орт $\varphi' \leq \varphi$ [6].

2) Определение непрерывности и дискретности не зависит от выбора единицы в X [7].

Следующие утверждения являются почти очевидными, при этом имеется в виду, что пространство X и пространство функционалов являются нормальными пространствами [4].

3) Если X^* ортогональное подпространство из X, то оно непрерывно или дискретно одновременно с X. (Имеется в виду, что X или непрерывно или дискретно).

4) Для любого $\Phi \in Z$, $\Phi > 0$, существует ортогональное подпространство $X_0 \subset X$ такое, что $\Phi(x) > 0$ для любого $x \in X_0$, $x > 0$ и $\Phi(x) = 0$ для $x \in X - X_0$.

5) Аналогично, если имеется семейство функционалов $S = [\Phi_\lambda] \subset Z$, если Z_0 минимальное ортогональное подпространство, содержащее S, и Φ_0 единица в Z_0, то существует ортогональное подпространство $X_0 \subset X$ такое, что

$$\Phi_0(x) > 0 \qquad \text{при} \quad x \in X_0,\ x > 0,$$

$$\Phi_0(x) = 0 \qquad \text{при} \quad x \in X - X_0.$$

6) Пространство X является суммой ортогональных подпространств

$$X = X_c + X_d,$$

где X_c непрерывно и X_d дискретно.

Семейство $S=\{\Phi_\lambda\}$ называется равномерно непрерывным, если

$$\Phi_\lambda(\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}+\ldots)\to 0 \quad \text{при } n\to\infty$$

равномерно относительно λ, где $\{\varphi_n\}$ последовательность дизъюнктных единичных элементов.

7) Свойство равномерной непрерывности равносильно тому, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\Phi_0(\varphi_e)<\delta$ будем иметь $\Phi_\lambda(\varphi_e)<\varepsilon$ независимо от λ.

Через φ_e мы обозначаем единичный элемент, являющийся характеристической функцией совокупности e.

Указанное определение и доказательство упомянутого свойства равномерно непрерывного семейства S были даны нами в несколько отличных терминах ранее [4].

Докажем наконец теорему.

8) Если семейство $S=\{\Phi_\lambda\}$ равномерно непрерывно и X_0 непрерывное пространство, то значения $\Phi_\lambda(\varphi_0)$ ограничены одним числом при всех λ, при этом φ_0 единица в X_0.

Доказательство. Пусть Φ_0 единица в Z_0 (относительно обозначений здесь см. 5). Пусть φ такой единичный элемент, что на φ семейство S неограничено и пусть

$$\varphi^*=\inf\{\varphi\},$$

где inf берется по всем указанным φ. Можно предполагать, что или $\varphi^*=0$, или $\varphi^*>0$.

а) Допустим, что $\varphi^*=0$. В силу нормальности X_0 найдется последовательность $\{\varphi_n\}\in\{\varphi\}$ такая, что $\inf\{\varphi_n\}=0$. Далее, или найдется такая подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}\subset\{\varphi_n\}$, что существуют $\varphi'_{n_k}\leq\varphi_{n_k},\varphi'_{n_k}$ попарно дизъюнктны и на φ'_{n_k} семейство S неограничено, или такой подпоследовательности не найдется. В последнем случае, как нетрудно видеть, найдется такое n_0, что

$$\varphi_p=\inf(\varphi_{n_0+1},\ \varphi_{n_0+2},\ldots,\ \varphi_{n_0+p})>0,$$

$\varphi_p\to 0$ и семейство S неограничено на φ_p, $p=1,2,\ldots$ В обоих случаях мы приходим к противоречию с условием о равномерной непрерывности семейства S.

б) Пусть теперь $\varphi^*>0$ и $\Phi_0(\varphi^*)=\alpha$, $(\alpha>0)$. В силу непрерывности X_0, φ^* разлагается в сумму дизъюнктных элементов:

$$\varphi^*=\varphi'+\varphi''$$

и таких, что $\Phi_0(\varphi')>0$, $\Phi_0(\varphi'')>0$.

Не умаляя общности можно считать

$$\Phi_0(\varphi')<\frac{\alpha}{2}.$$

Обозначим $\varphi'=\varphi_1$. Аналогично найдется дизъюнктная часть φ_2 от φ_1, $\varphi_2\leq\varphi_1$, такая, что

$$\Phi_0(\varphi_2)<\frac{\alpha}{4}$$

и так далее. Вообще найдется φ_n такой, что

$$\Phi_0(\varphi_n)<\frac{\alpha}{2^n},$$

$n=1,2,\ldots$

Последнее же очевидно противоречит условию равномерной непрерывности семейства, если принять во внимание 7).

Теорема, таким образом, доказана.

В заключение изложенные выше нами замечания сопоставим с некоторыми понятиями, введенными В. М. Дубровским [5] относительно семейств вполне аддитивных функций и результатами, указываемыми им в цитируемой работе.

Принимая во внимание, что семейство вполне аддитивных функций изоморфно полуупорядоченному пространству функционалов, как нами уже указывалось выше, легко видеть следующее.

1. Тот факт, что в пространстве Z_0 существует единица Φ_0, означает существование регулярной меры по терминологии Дубровского, (или регулярного базиса), семейства $S = \Phi_\lambda(e)$ вполне аддитивных функций, что составляет содержание теоремы 1 рассматриваемой работы Дубровского.

2. Понятие существенной делимости меры $M(e)$ равносильно понятию непрерывности пространства X_0.

3. Теорема II содержится в нашем замечании 2).

4. Теоремы III и IV содержатся в наших замечаниях 3), 4), 5), 6).

5. Теорема V содержится в нашей теореме 8.

Относительно этой теоремы V Дубровского следует заметить, что в ее формулировке, данной Дубровским, условие „существования какого-либо базиса $M(e)$, относительно которого семейство будет иметь свойство существенной делимости" излишне, так как характер подпространства X_0 в отношении его дискретности или непрерывности, точнее, его непрерывное и дискретное подпространство, вполне определяется заданием семейства $\{\Phi_\lambda\}$ и не зависит от выбора единицы, или, что одно и то же, от выбора базиса $M(e)$, как это явствует из нашего замечания 2).

Нам кажется, что точка зрения на семейства вполне аддитивных функций как на полуупорядоченные пространства значительно облегчает решение соответствующих вопросов. Цель заметки и состоит в том, чтобы указать на это обстоятельство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Мат. сб., т. 2, вып. 1, 1937.
2. Л. В. Канторович. Мат. сб., т. 7, вып. 2. 1940.
3. З. И. Клементьев. Учен. зап. ТГУ, № 14, 1950.
4. З. И. Клементьев. Учен. зап. ТГУ, № 14, 1950.
5. В. М. Дубровский. Изв. Ак. Наук, т. 13, № 4, 1949.
6. А. Г. Пинскер. ДАН, 33, 1941.
7. Б. З. Вулих. Мат. сб., т. 24 (64) : 1.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАЦИЙ, ПЕРЕВОДЯЩИХ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

З. И. Клементьев

В настоящей заметке мы даем доказательство теоремы, указанной С. Бохнером [1], о том, что общая форма линейной положительной операции U, переводящей пространство $(C)=\{f(t)\}$ непрерывных функций $f(t)$ на $[0,1]$ в некоторое полуупорядоченное пространство X, представляется в виде интеграла Стильтьеса

$$U(f)=\int_0^1 f(t)\,E(dt),$$

где E аддитивная функция интервала $[a,b]\subset[0,1]$ с значениями в X.

Доказательство, которое мы здесь предлагаем, короче и, как нам кажется, проще. При этом мы придерживаемся терминов и обозначений Л. В. Канторовича, в работе которого „Linear operations in semi-ordered sbaces", [2] рассматривается аналогичный вопрос об общей форме регулярной операции из пространства (C) в пространство типа K_6.

Указываемое нами доказательство можно рассматривать как некоторую модификацию доказательства Канторовича применительно к рассматриваемому случаю.

§ 1. Полуупорядоченным линейным пространством $X=\{x, y,\ldots\}$ мы здесь назовем линейное (с вещественными коэффициентами), множество элементов произвольной природы, при этом в X определено отношение >0, (т. е. для каждого $x\in X$ имеем или $x>0$, или x не >0), удовлетворяющее аксиомам:

I 0 не >0.

II Если $x_1>0$, $x_2>0$, то $x_1+x_2>0$.

III Если $x>0$, $\lambda>0$, то $\lambda x>0$, (λ — вещественное число).

Эти аксиомы позволяют ввести определения $x_1>x_2$ (если $x_1-x_2>0$), $x_1<x_2$, и т. д., а также понятия верхней и нижней границ множества $E\subset X$.

IV. Всякая монотонная не убывающая последовательность элементов из X,

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant\ldots$$

ограниченная сверху, обладает точной верхней границей: $\sup x_n=x_0$, т. е., таким элементом $x_0\in E$, что $x_0\geqslant x_n$, $n=1,2,\ldots$, и $x_0<x^1$, если x^1 любая другая верхняя граница последовательности $\{x_n\}$.

Эти аксиомы позволяют без труда доказать следующие теоремы, которые будут иметься в виду в дальнейшем. При этом предполагается, что рассматриваемые последовательности монотонны и ограничены, если не оговорено противное.

1) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ такие последовательности, что $x_n \geqslant$ некоторого y_m, а $y_n \geqslant$ некоторого x_m, то

$$\sup x_n = \sup y_n.$$

2) $\sup(x_n + y_n) = \sup x_n + \sup y_n$.

3) $\sup(ax_n) = a \sup x_n$.

4) Для всякой ограниченной снизу монотонной последовательности $\{x_n\}$ существует

$$\inf x_n = -\sup(-x_n).$$

5) Если последовательность чисел $\varepsilon_n \to 0$, то

$$\sup_n (\varepsilon_n x) = 0$$

для $x \leqslant 0$.

6) Если $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_n$, $n = 1,2,\ldots$, и если существует z такое, что $y_n - x_n \leqslant \varepsilon_n z$, где $\varepsilon_n \to 0$, то

$$\sup x_n = \inf y_n.$$

7) Если последовательность $\{z_n\}$ не обязательно монотонная, но такая, что $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, причем $\sup x_n = \sup y_n = x_0$, то существует $\sup z_n = x_0$.

В дальнейшем, если $\{x_n\}$ монотонная ограниченная последовательность, мы вместо $\sup x_n$, (или $\inf x_n$) будем также писать $\lim x_n$.

§ 2. Пусть U линейная операция на пространстве непрерывных функций $(C) = \{f(t)\}$ на $[0,1]$ с значениями в X, т. е. такая, что

$$U(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha U(f_1) + \beta U(f_2) \text{ и } U(f) \in X.$$

Будем считать $f > 0$, если $\min f(t) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Операцию U будем называть положительной, если $U(f) \geqslant 0$ при любом $f > 0$ и $U \neq 0$. Операцию U будем называть, согласно Л. В. Канторовичу, регулярной, если ее можно представить в виде разности двух положительных операций: $U = U_1 - U_2$, где $U_1 > 0$, $U_2 > 0$, или если $U \geqslant 0$.

Очевидно, множество $\{U\}$ всех регулярных операций есть линейное множество.

Мы будем также рассматривать функцию вещественной переменной t,

$$x = g(t),$$

значения которой принадлежат пространству X, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Функцию $g(t)$ будем называть монотонно не убывающей, если из $t_2 > t_1$ следует $g(t_2) \geqslant g(t_1)$. Функцию $g(t)$ будем называть функцией ограниченной вариации, если она представима в виде разности 2-х не убывающих функций:

$$g(t) = g_1(t) \quad g_2(t),$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ не убывающие функции.

Введем далее в рассмотрение интеграл Стильтьеса.

Пусть $\{D_j\}$ последовательность следующих друг за другом подразделений сегмента $[0,1]$ на части точками

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{p_j} = 1$$

и m_j и M_j соответственно наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $f(t)$ на сегменте $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,1,2,\ldots,p_j - 1$.

Пусть далее $g(t)$ не убывающая функция указанного выше вида.

Возьмем

$$sp_j = \sum_{i=0}^{p_j - 1} m_i \, |g(t_{i+1}) - g(t_i)|,$$

$$Sp_j = \sum_{i=0}^{p_j - 1} M_i \, |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.$$

Тогда, как нетрудно видеть, существует

$$\lim_{j \to \infty} sp_j = \lim_{j \to \infty} Sp_j,$$

не зависящий от выбора последовательности подразделений $\{D_j\}$, при условии, что максимальная длина частичных промежутков $[t_i, t_{i+1})$ стремится к нулю при $j \to \infty$. Указанный общий предел будем называть интегралом Стилтьеса от непрерывной функции $f(t)$ относительно функции $g(t)$ и обозначать

$$\int_0^1 f(t)\, dg(t).$$

Заметим, что если $t_i \leqslant \xi_i \leqslant t_{i+1}$, и

$$\sigma p_j = \sum_{i=0}^{p_j - 1} f(\xi_i) \, |g(t_{i+1}) - g(t_i)|,$$

то

$$\sup \sigma p_j = \int_0^1 f(t)\, dg(t).$$

Докажем теперь теорему.

Теорема. Всякая указанная выше линейная положительная операция $U(f)$ представима в виде:

$$U(f) = \int_0^1 f(t)\, dg(t), \tag{1}$$

где $g(t)$ не убывающая функция вещественной переменной t с значениями в X.

Доказательство. а) Что интеграл (1) является линейной положительной операцией — очевидно.

б) Пусть U произвольная линейная положительная операция. Полагаем

$$g(\tau) = \lim U(f_\tau^{(n)}),$$

где $0 < t \leqslant 1$ и $f_\tau^{(n)}(t)$ такая непрерывная функция, что $f_1^n(t) \equiv 1$ и при $\tau < 1$

$$f_\tau^{(n)}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant \tau + \dfrac{1}{2n}, \\ 0, \text{ если } \tau + \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \\ \text{линейна, если } \tau + \dfrac{1}{2n} \leqslant t \leqslant \tau + \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

n натуральное число такое, что $\frac{1}{n} < 1$ т.

Далее полагаем $g(0) = \lim_{t \to 0} g(t) = 0$, $g(1) = U(f(t) \equiv 1)$.

Возьмем подразделение сегмента $[0,1]$ точками

$$0 = t_{-1} = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = t_{p+1} = 1$$

и затем последовательности точек

$$t_i^1 > t_i^2 > \ldots > t_i^k > t_i$$

такие, что $\lim_{k \to \infty} t_i^{(k)} = t_i$, $i = 1,2\ldots, p$ 1.

Заметим, что

$$\lim_{k \to \infty} g(t_i^k) = \lim_{k \to \infty} g(t_i^k \quad 0) = g(t_i)$$

в силу монотонности функции $g(t)$ и ее непрерывности справа.

Пусть $t_i < t_i^k < t_{i+1}$, $i = 0,1,2,\ldots, p-1$, m_i и M_i соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(t)$ в (t_{i-1}^k, t_{i+2}^k), $i = 1,2,\ldots, p-2$ и l достаточно большое натуральное число,

$$l \geq \frac{1}{t_0^k}, \quad l > \frac{1}{2(t_{i+1}^k - t_i^k)}, \quad i = 0,1,2,\ldots, p \quad 1.$$

Тогда при достаточно больших n, $n \geq N(l)$, будем иметь:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \left[f_{t_{i+1}^k - \frac{1}{l}}^{(n)}(t) \quad f_{t_i + \frac{1}{l}}^{(n)}(t) \right] \leq f(t) \leq \sum_{i=0}^{n-2} M_i \left[f_{t_{i+\frac{1}{l}}^k}^{(n)}(t) \quad f_{t_{i-\frac{1}{l}}^k}^{(n)}(t) \right] +$$

$$+ M_{p-1} \left[f_1(t) - f_{t_{i+\frac{1}{l}}^k}^{(n)}(t) \right] + M_0 f_{t_0^k - \frac{1}{l}}^{(n)}(t).$$

Применяя к этим неравенствам операцию U, переходя затем к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\sum_{i=0}^{p-1} m_i \left[g\left(t_{i+1}^k \quad \frac{1}{l} \right) - g\left(t_i^k + \frac{1}{l} \right) \right] \leq U(f) \leq M_0 g\left(t_0^k - \frac{1}{l} \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{p-2} M_i \left[g\left(t_{i+1}^k + \frac{1}{l} \right) - g\left(t_i^k \quad \frac{1}{l} \right) \right] + M_{p-1} \left[g(1) - g\left(t_{p-1}^k - \frac{1}{l} \right) \right]$$

Переходя далее к пределу при $l \to \infty$, будем иметь:

$$\sum_{i=0}^{p-1} m_i \left| g(t_{i+1}^k \quad 0) - g(t_i^k) \right| \leq U(f) \leq M_0 g(t_0^k - 0) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{p-2} M_i \left| g(t_{i+1}^k) \quad g(t_i^k \quad 0) \right| + M_{p-1} \left| g(1) \quad g(t_{p-1}^k \quad 0) \right|.$$

Переходя, наконец, к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$s_p = \sum_{i=0}^{p-1} m_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \leqslant U(f) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} M_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.$$

Как нетрудно видеть, в последних неравенствах m_i и M_i можно рассматривать как наименьшее и наибольшее значения функции $f(t)$ в (t_i, t_{i+1}).

Взяв теперь последовательность подразделений $\{D_j\}$, как указано выше, мы находим, что

$$U(f) = \lim_{j \to \infty} s_{p_j} = \lim_{i \to \infty} S_{p_j} = \int_0^1 f(t)\, dg(t),$$

что и требовалось доказать.

Если U произвольная регулярная операция

$$U = U_1 - U_2,$$

где U_1 и U_2 положительные операции, то по определению

$$U(f) = U_1(f) - U_2(f) = \int_0^1 f(t)\, dg_1(t) - \int_0^1 f(t)\, dg_2(t) = \int_0^1 f(t)\, dg(t),$$

где $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$ функция ограниченной вариации, $g_1(t)$ и $g_2(t)$ монотонные не убывающие функции со значениями в X.

ЛИТЕРАТУРА.

1. S. Bochner. Annals of Math., 48, № 1.1947.
2. Л. В. Канторович. Мат. сб. 7/49/, № 2. 1940.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ КОНУСА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Е. Д. Томилов и А. Ю. Лисс

Как известно, Карман [1] дал первое приближение для решения задачи об обтекании снаряда сверхзвуковым потоком газа. Им рассматривалась линеаризированная задача для весьма тонкого снаряда сначала конической, а затем произвольной формы.

Как известно, решение Кармана может быть применено для конусов с углом раствора при вершине не свыше 20°.

В данной работе, на основе решения Кармана, дается второе приближение для решения этой же задачи, основанное на сохранении уравнении для потенциала скоростей возмущения членов высшего порядка малости.

Течение считается коническим. Граничные условия на головной ударной волне удовлетворяются приближенно. В результате получены формулы для потенциала скоростей возмущения и для коэффициента сопротивления.

§ 1. Составление дифференциального уравнения для потенциала возмущения

Пусть U — скорость набегающего потока, направленная по оси конуса. Полагая поток безвихревым, можем вектор скорости $\vec{V}$ положить равным:

$$\vec{V} = \operatorname{grad} \Phi,$$

причем потенциал Φ состоит из двух частей:

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi,$$

где $\varphi_1 = Ux$ потенциал невозмущенного потока, а φ — потенциал скоростей возмущения, вызванного присутствием конуса в потоке.

Цилиндрическую систему координат x, r, Θ выбираем, как обычно, помещая начало в вершину конуса и направляя ось x по оси конуса в сторону течения.

Проекции полной скорости на оси x и r тогда будут

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{1.1}$$

Линеаризированное уравнение для потенциала φ будет

$$k^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \tag{1.2}$$

где

$$k = \operatorname{ctg}\alpha_1 = \sqrt{M^2 - 1};$$

α_1 — угол Маха;

$$M = \frac{U}{a_1};$$

a_1 — скорость звука в невозмущенном потоке.

Интеграл этого уравнения Карман ищет в виде:

$$\varphi = \int_0^{x-kr} \frac{c(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}}, \tag{1.3}$$

где $c(\xi)$ — интенсивность источников, распределенных по оси снаряда.

Для конуса он полагает

$$c(\xi) = KU\xi.$$

При этом определенная из граничных условий постоянная K оказалась равной

$$K = \frac{\operatorname{tg}^2\vartheta_0}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{tg}^2\vartheta_0}}, \tag{1.4}$$

где через ϑ_0 обозначен угол образующей конуса с осью x.

Для дальнейшего удобнее потенциал φ представить в иной форме. Подставляя $c(\xi)$ в (1.3) и беря квадратуру, легко находим, что

$$\varphi = KU\left(x \operatorname{arch}\frac{x}{kr} - kr\sqrt{\frac{x^2}{k^2r^2} - 1}\right)$$

или

$$\varphi = KUx\left(\operatorname{arch}\frac{x}{kr} - \sqrt{1 - \frac{k^2r^2}{x^2}}\right). \tag{1.5}$$

Если перейти здесь к полярным координатам ρ, ϑ в плоскости меридионального сечения

$$x = \rho\cos\vartheta,$$

$$r = \rho\sin\vartheta,$$

то получим:

$$\varphi = KU\rho\cos\vartheta\left(\operatorname{arch}\frac{1}{k\operatorname{tg}\vartheta} - \sqrt{1 - k^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right). \tag{1.6}$$

Вводя обозначение

$$f(\vartheta) = KU\cos\vartheta\left(\operatorname{arch}\frac{1}{k\operatorname{tg}\vartheta} - \sqrt{1 - k^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right), \tag{1,7}$$

мы видим, что потенциал возмущения имеет вид

$$\varphi = \rho f(\vartheta), \tag{1.8}$$

а составляющие скорости возмущения в направлении радиуса-вектора и в перпендикулярном к нему направлении v_ρ и v_ϑ будут:

$$v_\rho = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = f(\vartheta),$$

$$v_\vartheta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{df}{d\vartheta}.$$

Проекции этой же скорости на оси x и r выразятся в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x = v_\rho \cos\theta - v_\theta \sin\theta = f\cos\theta - \frac{df}{d\theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r = v_\rho \sin\theta + v_\theta \cos\theta = f\sin\theta + \frac{df}{d\theta}\cos\theta. \tag{1.9}$$

Заметим, что по свойствам конического течения выражение (1.8) для φ, а также формулы (1.9) будут оставаться неизменными при любой степени точности решения задачи, меняться же при этом будет только вид функции $f(\theta)$.

Запишем точное дифференциальное уравнение для потенциала скорости осесимметричного течения в цилиндрических координатах:

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - a^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial r} + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 - a^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{a^2}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \tag{1.10}$$

Если выразить местную скорость звука a через скорость звука невозмущенного потока a_1 с помощью уравнения Бернулли

$$a^2 = a_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}\left[\left(U + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 - U^2\right] =$$

$$= a_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}\left[2U\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2\right],$$

то после несложных преобразований с учетом (1.1) можно записать уравнение (1.10) в виде

$$-\left(\frac{U^2}{a_1^2} - 1\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} =$$

$$= \frac{1}{a_1^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\left\{\frac{\gamma+1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2U\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2\right\} +$$

$$+ \frac{1}{a_1^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\left\{\frac{\gamma-1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2U\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2\right\} +$$

$$+ \frac{2}{a_1^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial r}\left(U + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\gamma-1}{2a_1^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + 2U\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]. \tag{1.10a}$$

Правая часть полученного уравнения включает члены второй и третьей степени относительно потенциала φ и его производных. Заменяя правую часть нулем, получим линеаризированное уравнение для потенциала осесимметричного течения газа.

Чтобы получить уравнение второго приближения, нужно оставить в правой части (1.10а) главные члены.

Оценим порядок потенциала φ и его производных.

Из формулы (1.4а) имеем:

$$\varphi = KUx\left(\operatorname{arch}\frac{x}{kr} - \sqrt{1-\frac{k^2r^2}{x^2}}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = KU\operatorname{arch}\frac{x}{kr};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -KU\frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{k^2r^2}{x^2}};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{KU}{x\sqrt{1-\frac{k^2r^2}{x^2}}};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r} = \frac{-KU}{r\sqrt{1-\frac{k^2r^2}{x^2}}};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{KUx}{r^2\sqrt{1-\frac{k^2r^2}{x^2}}},$$

где согласно (1.4)

$$K = -\frac{\operatorname{tg}^2\vartheta_0}{\sqrt{1-k^2\operatorname{tg}^2\vartheta_0}}.$$

Будем считать, что тангенс угла наклона образующей конуса к оси

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \varepsilon$$

величина малая.

Тогда при $M \neq 1$ будем иметь, что $K \sim \varepsilon^2$ и вблизи поверхности конуса φ и его производные имеют следующий порядок:

$$\begin{aligned}
&\varphi \sim Ux\varepsilon^2\ln\varepsilon,\\
&\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \sim U\varepsilon^2\ln\varepsilon,\\
&\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right| \sim U\varepsilon,\\
&\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right| \sim \frac{U}{x}\varepsilon^2,\\
&\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r}\right| \sim \frac{U}{x}\varepsilon,\\
&\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right| \sim \frac{U}{x}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

В поле течения вдали от поверхности конуса и головного конуса Маха, т. е. при $\operatorname{tg}\vartheta_0 + \delta \leqslant \frac{r}{x} \leqslant \frac{1}{k} - \delta$,

где δ — некоторая положительная величина, имеем:

потенциал $\varphi \sim Ux\varepsilon^2$,

его первые производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \sim \frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim U\varepsilon^2$, (1.11 а)

и вторые производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r} \sim \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \sim \frac{U}{x}\varepsilon^2$.

Пользуясь произведенными оценками, можно заключить, что в поле течения вдали от поверхности конуса главными членами в правой части (1.10а) будут квадратичные члены относительно φ и его производных

$$(\gamma+1)\frac{U}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(\gamma-1)\frac{U}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{2U}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+$$

$$+\frac{\gamma-1}{r}\frac{U}{a_1^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=$$

$$=\frac{M}{a_1}\left[(\gamma+1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+(\gamma-1)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right], \qquad (1.11б)$$

имеющие порядок $\frac{U^3}{xa_1^2}\varepsilon^4$.

У поверхности конуса в правой части (1.10а) главными являются члены порядка ε^2 и $\varepsilon^2\ln\varepsilon$. Они имеют вид:

$$(\gamma-1)\frac{U}{a_1^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{2U}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+$$

$$+\frac{\gamma+1}{2a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{\gamma-1}{2a_1^2}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^3. \qquad (1.11 в)$$

Оценивая порядок членов в (1.10а), мы видим, что все члены, кроме $\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, вблизи поверхности конуса имеют порядок $\varepsilon^2\ln\varepsilon, \varepsilon^2$ и выше. Следовательно, вблизи поверхности конуса

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\sim\varepsilon^2\ln\varepsilon.$$

Пользуясь этой оценкой, преобразуем два последних слагаемых (1.11в)

$$\frac{\gamma+1}{2a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{\gamma-1}{2a_1^2}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^3=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2a_1^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+$$

$$+O(\varepsilon^4\ln\varepsilon). \qquad (1.11г)$$

Точно также можно преобразовать последнее слагаемое в выражении (1.11б). Из (1.10а) следует, что вдали от поверхности конуса

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=(M^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+O(\varepsilon^4).$$

Следовательно, вдали от поверхности конуса

$$(\gamma-1)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=(M^2-1)(\gamma-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+$$
$$+O(\varepsilon^6). \qquad (1.11д)$$

Объединяя главные члены (1.11б), (1.11в) и учитывая (1.11г) и (1.11д), получим выражение для правой части уравнения во втором приближении

$$-\frac{M}{a_1}\left[(\gamma+1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\right.$$
$$\left.+(M^2-1)(\gamma-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]+\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2=$$
$$=\frac{M}{a_1}\left\{[M^2(\gamma-1)+2]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right\}+\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2.$$

Уточненное уравнение осесимметричного течения, таким образом, записывается в виде

$$-(M^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=$$
$$=-\frac{M}{a_1}\left\{[M^2(\gamma-1)+2]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right\}+$$
$$+\frac{1}{a_1^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2. \qquad (1.12)$$

Переходя к полярным координатам согласно формулам (1.5) и используя равенства (1.8) и (1.9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(\vartheta)$

$$f''(1-M^2\sin^2\vartheta)+f'\operatorname{ctg}\vartheta+f(2-M^2\sin^2\vartheta)=$$
$$=(f+f'')\left\{\frac{M}{a_1}[(M^2(\gamma-1)+2)(f\cos\vartheta-f'\sin\vartheta)\sin^2\vartheta-2(f\sin\vartheta+\right.$$
$$\left.+f'\cos\vartheta)\sin\vartheta\cos\vartheta]+\frac{1}{a_1^2}(f\sin\vartheta+f'\cos\vartheta)^2\cos^2\vartheta\right\}. \qquad (1.13)$$

Здесь штрихами обозначены производные от f по ϑ.

§ 2. Получение второго приближения

Первое приближение (1.7), данное Карманом, является решением линейного однородного уравнения, получающегося приравниванием нулю правой нелинейной части уравнения (1.13).

Желая получить второе приближение, подставим в правую часть этого уравнения определенную по (1.7) функцию $f(\vartheta)$ и проинтегрируем полученное уравнение при имеющихся граничных условиях задачи.

С целью облегчения вычислений введем новую переменную

$$u=\operatorname{arcth}\frac{1}{k\operatorname{tg}\vartheta}, \qquad (2.1)$$

так что

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1+k^2\operatorname{ch}^2 u}{k\operatorname{sh} u}. \tag{2.2}$$

Будем далее функцию (1.7) называть $f_1(\theta)$.

Для последующих вычислений полезно заметить соотношения

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2\operatorname{ch}^2 u}},\\ \cos\theta &= \frac{k\operatorname{ch} u}{\sqrt{1+k^2\operatorname{ch}^2 u}},\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

и обратные

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sh} u &= \frac{\sqrt{1-k^2\operatorname{tg}^2\theta}}{k\operatorname{tg}\theta},\\ \operatorname{ch} u &= \frac{1}{k\operatorname{tg}\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Тогда (1.7) дает

$$f_1 = UKk\frac{u\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u}{\sqrt{1+k^2\operatorname{ch}^2 u}}. \tag{2.5}$$

Вычисления приводят к выражениям:

$$\left.\begin{aligned}f_1'' + f_1 &= \frac{UK}{k}\frac{(1+k^2\operatorname{ch}^2 u)^2}{\operatorname{sh} u},\\ f_1\cos\theta - f_1'\sin\theta &= UK u,\\ f_1\sin\theta + f_1'\cos\theta &= -UKk\operatorname{sh} u.\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Для производных же искомой функции получим согласно (2.2):

$$\frac{df}{d\theta} = -\frac{1+k^2\operatorname{ch}^2 u}{k\operatorname{sh} u}\frac{df}{du},$$

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} = \frac{(1+k^2\operatorname{ch}^2 u)^2}{k^2\operatorname{sh}^2 u}\frac{d^2f}{du^2} +$$

$$+\frac{\operatorname{ch} u\,[1+k^2\operatorname{ch}^2 u - 2(1+k^2)]\,(1+k^2\operatorname{ch}^2 u)}{k^2\operatorname{sh}^3 u}\frac{df}{du}.$$

Подставляя эти значения в левую, а выражения (2.6) — в правую часть (1. 13), используя для подсчета коэффициентов формулы (2. 3), в результате всех вычислений придем к уравнению:

$$\frac{d^2f}{du} - \frac{2(1+k^2)\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u(1+k^2\operatorname{ch}^2 u)}\frac{df}{du} + \frac{1+k^2(\operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u)}{(1+k^2\operatorname{ch}^2 u)^2}f =$$

$$= -\frac{1+k^2}{k}K^2U\frac{[(\gamma-1)(1+k^2)+2]\,u + 2k^2\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u + Kk^3\operatorname{sh}^2 u\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u\sqrt{1+k^2\operatorname{ch}^2 u}} =$$

$$= F(u). \tag{2.7}$$

Для разыскания общего интеграла, как известно, необходимо знать два линейно-независимых интеграла однородного уравнения, получающегося из (2.7) заменой правой части нулем.

Один такой интеграл нам известен. Это интеграл (2.5), который мы, опуская несущественную постоянную UKk, возьмем в виде.

$$f_1 = \frac{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{ch}^2 u}}. \tag{2.8}$$

Другой же интеграл найдется по известной из теории дифференциальных уравнений формуле в виде:

$$f_2 = f_1 I, \tag{2.9}$$

если через I обозначить

$$I = \int \frac{du}{1^2} e^{-\int P du},$$

где P—коэффициент при $\frac{df}{du}$ в нашем уравнении.

Легко видеть, что

$$-\int P du = 2(1+k^2)\int \frac{\operatorname{ch} u\, du}{\operatorname{sh} u (1+k^2 \operatorname{ch}^2 u)} = \ln \frac{\operatorname{sh}^2 u}{1+k^2 \operatorname{ch}^2 u},$$

так что:

$$I = \int \frac{\operatorname{sh}^2 u}{(u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)^2} du.$$

Это в свою очередь дает

$$I = \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u - u \operatorname{ch} u}, \tag{2.10}$$

и

$$f_2 = -\frac{\operatorname{ch} u}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{ch}^2 u}}. \tag{2.10 а}$$

Общий интеграл найдем по известной из теории дифференциальных уравнений формуле

$$f(u) = \frac{1}{A}\Big[f_2(u) \int F(u) e^{\int P(u) du} f_1(u)\, du - f_1(u) \int F(u) e^{\int P(u) du} \times$$

$$\times f_2(u)\, du \Big] +$$

$$+ c_1 f_1(u) + c_2 f_2(u). \tag{2.11}$$

Здесь

$$A = \frac{f_2(u)}{f_1(u) \int \frac{e^{-\int P(u)\, du}}{f_1^2(u)} du} = \frac{I}{I} = 1,$$

c_1 и c_2—произвольные постоянные.

Подставляя значения $f_1(u)$, $f_2(u)$, $F(u)$ и

$$e^{\int P(u) du} = \frac{1+k^2 \operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u},$$

вычислим входящие в (2.11) интегралы:

$$\int F(u)e^{\int P(u)\,du} f_1(u)\,du = \frac{1+k^2}{k} K^2U \times$$

$$\times \int \frac{\{[(\gamma-1)(1+k^2)+2]u+2k^2\mathrm{sh}u\mathrm{ch}u+Kk^4\mathrm{sh}^2u\mathrm{ch}^2u\}(u\mathrm{ch}u-\mathrm{sh}u)}{\mathrm{sh}^3 u}\,du =$$

$$= \frac{1+k^2}{k} K^2U\left\{-[(\gamma-1)(1+k^2)+2]\frac{u^2}{2\mathrm{sh}^2u}+k^2(u^2-2u\mathrm{cth}u)+\right.$$

$$\left.+Kk^4\left[\frac{u\,\mathrm{ch}^2u}{2}-\frac{3}{4}(\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u+u)+u\ln\mathrm{sh}\,u-B(u)\right]\right\}, \qquad (2.12)$$

где

$$B(u)=\int \ln \mathrm{sh}\,u\,du;$$

$$\int F(u)e^{\int P(u)du} f_2(u)\,du = -\frac{1+k^2}{k} K^2U \times$$

$$\times \int \frac{\{[(\gamma-1)(1+k^2)+2]u+2k^2\mathrm{sh}u\mathrm{ch}u+Kk^4\mathrm{sh}^2u\mathrm{ch}^2u\}\,\mathrm{ch}\,u\,du}{\mathrm{sh}^3 u} =$$

$$= -\frac{1+k^2}{k} K^2U\left\{-[(\gamma-1)(1+k^2)+2]\frac{u+\mathrm{sh}u\mathrm{ch}u}{2\mathrm{sh}^2u}+2k^2(u-\mathrm{cth}u)+\right.$$

$$\left.+Kk^4\left(\ln\mathrm{sh}u+\frac{\mathrm{ch}^2u}{2}\right)\right\}. \qquad (2.13)$$

Используя выражения (2.12) и (2.13), после некоторых упрощений запишем искомую функцию f в виде

$$f=-\frac{1+k^2}{k}\frac{K^2U}{\sqrt{1+k^2\mathrm{ch}^2u}}\left\{[(\gamma-1)(1+k^2)+2]\frac{u\,\mathrm{sh}\,u-\mathrm{ch}\,u}{2}+\right.$$

$$+k^2[-u^2\,\mathrm{ch}\,u+2(u\,\mathrm{sh}\,u-\mathrm{ch}\,u)]+$$

$$\left.+Kk^4\left[-\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}^2u-\frac{3}{4}u\,\mathrm{ch}\,u+\mathrm{sh}\,u\ln\mathrm{sh}\,u-B(u)\mathrm{ch}\,u\right]\right\}+$$

$$+c_1\frac{u\,\mathrm{ch}\,u-\mathrm{sh}\,u}{\sqrt{1+k^2\,\mathrm{ch}^2u}}-c_2\frac{\mathrm{ch}\,u}{\sqrt{1+k^2\,\mathrm{ch}^2u}}. \qquad (2.14)$$

Граничными условиями для определения c_1 и c_2 являются условия на головном характеристическом конусе и на поверхности тела.

Из точного решения известно, что несколько впереди головного характеристического конуса находится коническая ударная волна, впереди которой в потоке отсутствуют возмущения. На ударной волне терпит разрыв нормальный компонент скорости, в то время как тангенциальный компонент остается непрерывным, т. е. непосредственно за скачком тангенциальный компонент добавочной скорости равен нулю.

Естественно перенести условие равенства нулю тангенциального компонента добавочной скорости со скачка уплотнения на головной характеристический конус, так как расстояние между ними в случай тонких тел вращения весьма мало [1]).

[1]) Как следует из работы Lighthill'a „The Shock Strength in Supersonic Conical Fields", Philosophical Magazine, vol 40, 7th Series, № 311, Dec. 1949, угол между головным характеристическим конусом и ударной волной имеет порядок ε^4.

Это условие запишется в виде

$$f=0 \text{ при } u=0. \tag{2.15}$$

На границе тела, т. е. при $\vartheta=\vartheta_0$ нормальная составляющая полной скорости $V_\vartheta=0$. А так как

$$V_\vartheta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(U\rho\cos\vartheta+\varphi)=-U\sin\vartheta+\frac{df}{d\vartheta},$$

граничным условием на поверхности тела будет

$$\frac{df}{d\vartheta}-U\sin\vartheta=0 \quad \text{при } u=u_0=\operatorname{arch}\frac{1}{k\operatorname{tg}\vartheta_0}. \tag{2.16}$$

На основании (2.14) условие (2.15) дает

$$-\frac{1+k^2}{k}\frac{K^2U}{\sqrt{1+k^2}}\left\{[(\gamma-1)(1+k^2)+2]\left(-\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+k^2(-2)+Kk^4[-B(0)]\right\}-c_2\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}=0.$$

Отсюда

$$c_2=\frac{1+k^2}{k}K^2U\left[\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}+2k^2+Kk^4B(0)\right]. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.14), получим

$$f=-\frac{1+k^2}{k}\frac{K^2U}{\sqrt{1+k^2\operatorname{ch}^2u}}\left\{\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}u\operatorname{sh}u+\right.$$
$$+k^2(-u^2\operatorname{ch}u+2u\operatorname{sh}u)+Kk^4\left[-\frac{1}{4}\operatorname{sh}u\operatorname{ch}^2u-\frac{3}{4}u\operatorname{ch}u+\operatorname{sh}u\ln\operatorname{sh}u+\right.$$
$$\left.\left.+(B(0)-B(u))\operatorname{ch}u\right]\right\}+c_1\frac{u\operatorname{ch}u-\operatorname{sh}u}{\sqrt{1+k^2\operatorname{ch}^2u}}. \tag{2.18}$$

Продифференцируем f по ϑ:

$$\frac{df}{d\vartheta}=\frac{df}{du}\frac{du}{d\vartheta}=-\frac{1+k^2}{k}K^2U\left(-\frac{1+k^2\operatorname{ch}^2u}{k\operatorname{sh}u}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{1+k^2\operatorname{ch}^2u}}\times\right.$$
$$\times\left[\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}(\operatorname{sh}u+u\operatorname{ch}u)+k^2(-u^2\operatorname{sh}u+2\operatorname{sh}u)+\right.$$
$$+Kk^4\left[-\frac{1}{4}\operatorname{ch}^3u-\frac{2}{4}\operatorname{sh}^2u\operatorname{ch}u-\frac{3}{4}\operatorname{ch}u-\frac{3}{4}u\operatorname{sh}u+\operatorname{ch}u\ln\operatorname{sh}u+\operatorname{ch}u+\right.$$
$$\left.\left.+\operatorname{sh}u(B(0)-B(u))-\operatorname{ch}u\ln\operatorname{sh}u\right]\right]-\frac{k^2\operatorname{ch}u\operatorname{sh}u}{(1+k^2\operatorname{ch}^2u)^{3/2}}\left[\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}u\operatorname{sh}u+\right.$$
$$+k^2(-u^2\operatorname{ch}u+2u\operatorname{sh}u)+Kk^4\left[-\frac{1}{4}\operatorname{sh}u\operatorname{ch}^2u-\frac{3}{4}u\operatorname{ch}u+\operatorname{sh}u\ln\operatorname{sh}u+\right.$$
$$\left.\left.\left.+(B(0)-B(u))\operatorname{ch}u\right]\right]\right\}-c_1\frac{u+k^2\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u}{k\sqrt{1+k^2\operatorname{ch}^2u}}.$$

Пользуясь граничным условием (2.16), после небольших упрощений получим выражение для постоянной c_1:

$$c_1 = \frac{1+k^2}{k}\frac{K^2U}{u_0+k^2\mathrm{sh}u_0\mathrm{ch}u_0}\left\{(1+k^2\mathrm{ch}^2u_0)\left[\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}\times\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{u_0\mathrm{ch}u_0}{\mathrm{sh}u_0}+1\right)+k^2(-u_0^2+2)+Kk^4\left[-\frac{3}{4}\mathrm{ch}\,u_0\,\mathrm{sh}\,u_0-\frac{3}{4}u_0+\right.$$

$$\left.+B(0)-B(u_0)\right]-k^2\mathrm{ch}\,u_0\left[\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}u_0\mathrm{sh}u_0+k^2(-u_0^2\mathrm{ch}u_0+\right.$$

$$+2u_0\mathrm{sh}u_0)+Kk^4\left[-\frac{1}{4}\mathrm{ch}^2u_0\mathrm{sh}\,u_0-\frac{3}{4}u_0\mathrm{ch}u_0+\mathrm{sh}u_0\ln\mathrm{sh}u_0+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\mathrm{ch}u_0(B(0)-B(u_0))\right]\right]\right\}-\frac{Uk}{u_0+k^2\mathrm{sh}u_0\mathrm{ch}u_0}. \qquad (2.19)$$

Таким образом, решение определяется равенством (2.18), в котором постоянная c_1 вычисляется по формуле (2.19).

§ 3. Разложение решения в ряд. Коэффициент сопротивления конуса

Считая раствор конуса малой величиной, найдем главную часть полученного решения, разлагая его по степеням $\varepsilon = \mathrm{tg}\,\theta_0$. Как было найдено в § 1, компонент скорости v_x по линейной теории имеет порядок $U\varepsilon^2\ln\varepsilon$. Члены высшего порядка малости в линейном решении недостоверны.

Мы будем искать решение для величины скорости и давления на поверхности конуса с точностью до членов порядка ε^4, $\varepsilon^4\ln\varepsilon$ и $\varepsilon^4\ln^2\varepsilon$, пренебрегая членами высшего порядка, как недостоверными.

На поверхности конуса

$$u_0 = \mathrm{arch}\frac{1}{k\mathrm{tg}\theta_0} = \mathrm{arch}\frac{1}{k\varepsilon} = \ln\left(\frac{1}{k\varepsilon}+\frac{1}{k\varepsilon}\sqrt{1-k^2\varepsilon^2}\right) = \ln\left[\frac{1}{k\varepsilon}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k\varepsilon}\left(1-\frac{k^2\varepsilon^2}{2}+O(\varepsilon^4)\right)\right] = \ln\frac{2}{k\varepsilon}\left[1-\frac{k^2\varepsilon^2}{4}+O(\varepsilon^4)\right] = \ln\frac{2}{k\varepsilon}-$$

$$-\frac{k^2\varepsilon^2}{4}+O(\varepsilon^4). \qquad (3.1)$$

Разложим в ряд по степеням ε величину K:

$$K = -\frac{\mathrm{tg}^2\theta_0}{\sqrt{1-k^2\mathrm{tg}^2\theta_0}} = -\varepsilon^2+O(\varepsilon^4). \qquad (3.2)$$

Заметим, что

$$\mathrm{ch}u_0 = \frac{1}{k\varepsilon},$$

$$\mathrm{sh}u_0 = \sqrt{\mathrm{ch}^2u_0-1} = \frac{1}{k\varepsilon}-\frac{k\varepsilon}{2}+O(\varepsilon^3),$$

Разложение для интеграла $B(u)$ имеет вид

$$B(u)=\int \ln\operatorname{sh} u\,du=\int \ln\frac{e^u-e^{-u}}{2}\,du=\int \ln\frac{e^u}{2}du+\int \ln(1-e^{-2u})du=$$

$$=\int(u-\ln 2)\,du-\int\left(e^{-2u}+\frac{e^{-4u}}{2}+\frac{e^{-6u}}{3}+\ldots+\frac{e^{-2nu}}{n}+\ldots\right)du=$$

$$=\frac{u^2}{2}-u\ln 2+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2u}}{1^2}+\frac{e^{-4u}}{2^2}+\ldots+\frac{e^{-2nu}}{n^2}+\ldots\right). \qquad (3.3)$$

Пользуясь известной формулой для суммы ряда, найдем

$$B(0)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{12}, \qquad (3.3а)$$

$$B(u_0)=\frac{u_0^2}{2}-u_0\ln 2+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2u_0}}{1}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2\frac{2}{k\varepsilon}-\ln 2\ln\frac{2}{k\varepsilon}+O(\varepsilon^2). \qquad (3.3б)$$

Теперь мы можем выделить главные члены в выражении для c_1:

$$c_1=\frac{1+k^2}{k}U\frac{\varepsilon^4+O(\varepsilon^6)}{\frac{k^2}{k\varepsilon}\frac{1}{k\varepsilon}+O(\varepsilon^0)}\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+1\right)\left[\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\frac{1}{k\varepsilon}\ln\frac{2}{k\varepsilon}+O(\varepsilon)}{\frac{1}{k\varepsilon}+O(\varepsilon)}+1\right)+\right.$$

$$\left.+k^2\left[-\ln^2\frac{2}{k\varepsilon}+2+O(\varepsilon^2)\right]+k^4\left[-\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)\right]\left[-\frac{3}{4}\frac{1}{k^2\varepsilon^2}+O(\varepsilon^0)\right]\right]-$$

$$-\frac{k^2}{k\varepsilon}\left[\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}\frac{1}{k\varepsilon}\ln\frac{2}{k\varepsilon}+k^2\left(-\frac{\ln^2\frac{2}{k\varepsilon}}{k\varepsilon}+\frac{2\ln\frac{2}{k\varepsilon}}{k\varepsilon}\right)+O(\varepsilon)+\right.$$

$$\left.\left.+k^4\left[-\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)\right]\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{k^3\varepsilon^3}+O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\right]\right\}-$$

$$-\frac{Uk}{\ln\frac{2}{k\varepsilon}+\frac{k^2}{k\varepsilon}\left(\frac{1}{k\varepsilon}-\frac{k\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon^2)}.$$

Или после несложных преобразований

$$c_1=a_1\varepsilon^3+b_1\varepsilon^4+O(\varepsilon^6), \qquad (3.4)$$

где

$$\left.\begin{aligned}a_1&=-Uk,\\ b_1&=-Uk\left[\frac{k^2}{2}-\ln\frac{2}{k\varepsilon}-(1+k^2)\left(\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2k^2}+\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{5}{2}-2\ln\frac{2}{k\varepsilon}\right)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (3.4а)$$

Найдем разложение $f(u_0)$ по степеням ε, сохраняя в итоге члены порядка ε^4.

$$f(u_0)=-\frac{1+k^2}{k}U\frac{\varepsilon^4+O(\varepsilon^6)}{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2}}}\left\{\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}\frac{1}{k\varepsilon}\ln\frac{2}{k\varepsilon}+\right.$$

$$+k^3\left(-\frac{1}{k\varepsilon}\ln^2\frac{2}{k\varepsilon}+\frac{2}{k\varepsilon}\ln\frac{2}{k\varepsilon}\right)+O(\varepsilon)+k^4\left|-\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)\right|\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{k\varepsilon}\frac{1}{k^2\varepsilon^2}+\right.$$

$$\left.\left.+O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\right\}+\left|a_1\varepsilon^2+b_1\varepsilon^4+O(\varepsilon^6)\right|\times$$

$$\times\frac{\frac{1}{k\varepsilon}\left(\ln\frac{2}{k\varepsilon}-\frac{k^2\varepsilon^2}{4}\right)-\frac{1}{k\varepsilon}+\frac{k\varepsilon}{2}+O(\varepsilon^3)}{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2}}}.$$

Произведя необходимые выкладки, окончательно получим:

$$f(u_0)=a_f\varepsilon^2+b_f\varepsilon^4+O(\varepsilon^6), \tag{3,5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_f&=-U\left(\ln\frac{2}{k\varepsilon}-1\right),\\ b_f&=-U\left\{k^2\ln^2\frac{2}{k\varepsilon}-2(1+k^2)\ln\frac{2}{k\varepsilon}+\frac{5}{2}k^2+\right.\\ &\left.+\frac{1+k^2}{2k^2}\left[(\gamma-1)(1+k^2)+2\right]+\frac{13}{4}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5a}$$

Составляющая добавочной скорости по оси x на поверхности конуса на основании (1.9) равна

$$v_x=f(u_0)\cos\vartheta_0-\left(\frac{dt}{d\vartheta}\right)_0\sin\vartheta_0$$

или, учитывая граничное условие (2.16),

$$v_x=-U\sin^2\vartheta_0+f(u_0)\cos\vartheta_0.$$

Используя разложения $\sin\vartheta_0$ и $\cos\vartheta_0$ по степеням $\varepsilon=\operatorname{tg}\vartheta_0$

$$\sin\vartheta_0=\frac{\operatorname{tg}\vartheta_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta_0}}=\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{2}+O(\varepsilon^5),$$

$$\cos\vartheta_0=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta_0}}=1-\frac{\varepsilon^2}{2}+O(\varepsilon^4),$$

и формулы (3.5) и (3.5а), найдем разложение для v_x

$$v_x=a_x\varepsilon^2+b_x\varepsilon^4+O(\varepsilon^6), \tag{3.6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_x&=-U\ln\frac{2}{k\varepsilon},\\ b_x&=-U\left\{k^2\ln^2\frac{2}{k\varepsilon}-\left(2k^2+\frac{5}{2}\right)\ln\frac{2}{k\varepsilon}+\frac{5}{2}k^2+\right.\\ &\left.+\frac{1+k^2}{k^2}\cdot\frac{(\gamma-1)(1+k^2)+2}{2}+\frac{11}{4}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.6a}$$

Чтобы перейти от величины скорости к давлению на поверхности тела, нужно воспользоваться уравнением Бернулли

$$\frac{(U+v_x)^2+v_r^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=i_0=\text{const}, \tag{3.7}$$

и условием адиабатичности процесса

$$\frac{p}{p_1}=\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma}. \tag{3.8}$$

После несложных выкладок, в процессе которых используются оценки малости величин v_x и v_r вблизи поверхности конуса

$$v_x\sim U\varepsilon^2\ln\varepsilon,$$
$$v_r\sim U\varepsilon$$

и граничное условие, эквивалентное условию (2.16),

$$v_r=(U+v_x)\operatorname{tg}\vartheta_0,$$

можно получить следующую формулу давления на поверхности конуса или для коэффициента сопротивления конуса

$$c_x=\overline{p}=\frac{p-p_1}{\frac{\rho_1U^2}{2}}=-\left(2\frac{v_x}{U}+\operatorname{tg}^2\vartheta_0\right)+\frac{M^2}{4}\left(2\frac{v_x}{U}+\operatorname{tg}^2\vartheta_0\right)^2$$
$$\left(\frac{v_x}{U}\right)^2-2\frac{v_x}{U}\operatorname{tg}^2\vartheta_0+O(\varepsilon^6). \tag{3.9}$$

Если подставить значение v_x из формулы (3.6), то мы окончательно получим выражение для коэффициента сопротивления конуса, верное до членов порядка ε^4 включительно:

$$c_x=\overline{p}=\left(2\ln\frac{2}{k\varepsilon}-1\right)\varepsilon^2+\left[3k^2\ln^2\frac{2}{k\varepsilon}-(5k^2+4)\ln\frac{2}{k\varepsilon}+\frac{13}{4}k^2+\right.$$
$$\left.+\frac{15}{4}+\frac{(1+k^2)^2}{k^2}(\gamma+1)\right]\varepsilon^4. \tag{3.10}$$

Полученная формула в точности совпадает с аналогичной формулой, данной в работе Broderick'a „Supersonic Flow Past a Semi-Infinite Cone" опубликованной в „The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics", vol. II, part 1, march 1949. При этом формула получена Broderick'ом более сложным методом.

В последней работе также показывается, что неучет головного скачка уплотнения не ведет к ошибкам в решении, найденном с точностью до ε^4 включительно.

Заметим в заключение, что анализом, аналогичным приведенному выше, можно показать, что учет опущенных в правой части уравнения (1.12) членов не повлияет на наше решение, полученное с точностью до членов порядка ε^4 включительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика ч. II, гл. I, изд. 1948.

Кафедра теоретической механики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

П. П. Куфарев и *А. Э. Фалес*

§ 1. В работе рассматривается следующая задача. Пусть z_1, z_2 две фиксированные в $|z|<1$ точки, α, β — неотрицательные числа, и Γ — кривая Жордана, разбивающая $|z|<1$. Рассмотрим функционал

$$I(\Gamma;\ z_1,\ z_2) = |f'_1(0)|^{\alpha}\,|f'_2(0)|^{\beta}, \tag{1}$$

где $z=f_k(w)$, $f_k(0)=z_k$, $f_k'(0)>0$ — функция, конформно отображающая $|w|<1$ на область $B_k(k=1,2)$. Требуется найти кривую $\Gamma: z=\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant t_0$, дающую функционалу $I(\Gamma;\ z_1,\ z_2)$ максимальное значение.

Краткое сообщение о решении задачи было дано в [1], [2]. Данная статья представляет более подробное изложение содержания заметок [1], [2].

§ 2. Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство областей $G(t)$, $0\leqslant t\leqslant t_0$, получаемых из $|z|<1$ проведением разреза по дуге Γ: $z=\varphi(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$. Известно, что при надлежащем выборе параметра t функция $z=\Phi(w,t)$, $\Phi(0,t)=0$, $\Phi(w,0)=w$, отображающая $|w|<1$ на $G(t)$, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+w\,\frac{\mu(t)+w}{\mu(t)-w}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial w}=0, \tag{2}$$

где $\mu(t)=e^{i\alpha(t)}$ и $\alpha(t)$ — непрерывная вещественная функция.
Иначе говоря

$$z=\Phi(w,t)=\omega(0,w,t), \tag{3}$$

где $\omega(\tau,\ w,\ t)$ решение уравнения

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\omega\,\frac{\mu(\tau)+\omega}{\mu(\tau)-\omega}, \tag{4}$$

принимающее при $\tau=t$ значение w.
Пусть $\xi_k(t)$ — решение уравнения (4),

$$\frac{d\xi_k(t)}{dt}=\xi_k\,\frac{\mu(t)+\xi_k}{\mu(t)-\xi_k}; \tag{5}$$

принимающее при $t=0$ значение z_k.
Обозначим через $z=\Phi_k(u,t)$ функцию, отображающую $|u|<1$ на $G(t)$ так, что

$$\Phi_k(0,t)=z_k,\quad \Phi'_{ku}(0,t)>0.$$

По теореме Каратеодори о ядре последовательности областей,

$$f_k(u)=\Phi_k(u,t_0)=\lim_{t\to t_0-0}\Phi_k(u,t) \tag{6}$$

Далее,

$$\Phi_k(u, t) = \Phi\left(\frac{e^{-i\lambda_k(t)}u + \xi_k(t)}{1 + \xi_k(t)e^{-i\lambda_k(t)}u}, t\right) \tag{7}$$

где λ_k определяется из условия

$$\left.\frac{\partial \Phi_k}{\partial u}\right|_{u=0} = (1 - \xi_k\xi_k)\, e^{-i\lambda_k} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right|_{w=\xi_k} > 0 \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\lambda_k = \arg\, \Phi'_w(\xi_k(t), t) \tag{9}$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $\Phi_k(u, t)$. Обозначив $ue^{-i\lambda_k} = v$, имеем

$$w = \frac{v + \xi_k}{1 + \xi_k v}, \tag{10}$$

откуда

$$v = \frac{w - \xi_k}{1 - \xi_k w}. \tag{11}$$

Положим $\Phi_k(u, t) = \Phi(w, t) = \Psi(v, t)$.
Находя значение производных

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial w}$$

и подставляя полученные значения в (2), получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \left(\frac{dv}{dt} + w\frac{\mu + w}{\mu - w}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0. \tag{12}$$

Подсчитаем

$$L = \frac{dv}{\partial t} + w\frac{\mu + w}{\mu - w}. \tag{13}$$

Определяя из (11) $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{dv}{\partial w}$ и учитывая (5) и (10), получим после очевидных элементарных вычислений

$$L = \frac{v}{|\mu - \xi_k|^2} \cdot \frac{\alpha + \beta v}{|\mu - \xi_k - \mu(\bar{\mu} - \bar{\xi}_k)v|}, \tag{14}$$

где

$$\alpha = \mu + 2\xi_k - \mu^2\bar{\xi}_k - \xi^2{}_k\bar{\xi}_k - \bar{\mu}\xi^2{}_k$$

$$\beta = \mu(\bar{\mu} + 2\bar{\xi}_k - \bar{\mu}^2\xi_k - \mu\bar{\xi}^2{}_k - \bar{\xi}^2{}_k\xi).$$

Представим теперь $\alpha + \beta v$ в виде

$$\alpha + \beta v = B\,|\mu - \xi_k + \mu(\bar{\mu} - \bar{\xi}_k)v| + A\,|\mu - \xi_k - \mu(\bar{\mu} - \bar{\xi}_k)v|.$$

Определяя A и B, находим

$$A = \frac{2i\,\mathrm{Im}\,[\mu^2(\mu - \xi_k)^2]}{|\mu - \xi_k|^2}; \qquad B = \frac{(1 - \xi_k\xi_k)^2}{|\mu - \xi_k|^2}.$$

Следовательно, L можно представить в виде

$$L = v\left\{\frac{(1-\xi_k\bar{\xi}_k)^2}{|\mu-\xi_k|^4}\cdot\frac{\varkappa+v}{\varkappa-v}+2i\,\mathrm{Im}\frac{\mu^2}{(\mu-\xi_k)^2}\right\}, \tag{15}$$

где

$$\varkappa = \frac{\mu-\xi_k}{1-\bar{\xi}_k\mu}.$$

Переходя в уравнении (12) к функции $\Phi_k(u,t)$, получаем для $\Phi_k(u,t)$ уравнение

$$\frac{\partial\Phi_k(u,t)}{\partial t}+\left(\frac{du}{dt}+L\frac{du}{dv}\right)\cdot\frac{\partial\Phi_k(u,t)}{\partial u}=0 \tag{16}$$

или

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial t}+u\left\{\frac{(1-\xi_k\bar{\xi}_k)^2}{|\mu-\xi_k|^4}\cdot\frac{\varkappa+v}{\varkappa-v}+i\left[\frac{d\nu_k}{dt}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\,Im\frac{\mu^2}{(\mu-\xi_k)^2}\right]\right\}\cdot\frac{\partial\Phi_k}{\partial u}=0. \tag{17}$$

Остается определить $\frac{d\nu_k}{dt}$. Для этого продифференцируем по w уравнение (2) и разделим затем на $\Phi'_w(w,t)$; получим

$$\frac{\partial\log\Phi'_w}{\partial t}+w\frac{\mu+w}{\mu-w}\cdot\frac{\partial\log\Phi'_w}{\partial w}=1-\frac{2\mu^2}{(\mu-w)^2}$$

Полагая здесь $w=\xi_k(t)$ и учитывая (5), находим

$$\frac{d\log\Phi'_w(\xi_k(t),t)}{dt}=\frac{\partial\log\Phi'_w}{\partial t}+$$

$$+\frac{d\xi_k}{dt}\cdot\frac{\partial\log\Phi'_w(\xi_k,t)}{\partial w}=1-\frac{2\mu^2}{(\mu-\xi_k)^2}. \tag{18}$$

Отсюда и из (9) следует, что

$$\frac{d\nu_k}{dt}=\frac{d\arg\Phi'_w(\xi_k,t)}{dt}=-2\mathrm{Im}\frac{\mu^2}{(\mu-\xi_k)^2}. \tag{19}$$

Итак, уравнение (2) для $\Phi_k(u,t)$ принимает вид

$$\frac{\partial\Phi_k(u,t)}{\partial t}+\frac{(1-\xi_k\bar{\xi}_k)^2}{|\mu-\xi_k|^4}u\frac{\nu_k+u}{\nu_k-u}\cdot\frac{\partial\Phi_k}{\partial u}=0, \tag{20}$$

где

$$\nu_k=\varkappa e^{i\nu_k}=\frac{\mu-\xi_k}{1-\bar{\xi}_k\mu}e^{i\nu_k}. \tag{21}$$

В частности из (20) следует формула

$$d\log|\Phi'_{uk}(0,t)|=-\frac{(1-\xi_k\bar{\xi}_k)^2}{|\mu-\xi_k|^4}=-\left(\frac{d\log|\xi_k|}{dt}\right)^2. \tag{22}$$

Эта формула может быть также получена непосредственно из соотношения (18) и равенства

$$\frac{d\log|\Phi'_{kn}(0,t)|}{dt}=\frac{d\log(1-\xi_k\bar{\xi}_k)}{dt}+\frac{d\log\Phi'_w(\xi_k,t)}{dt}, \tag{23}$$

которое следует из (8).

§ 3. Из (1) и (6) имеем

$$-\log I(\Gamma;z_1,z_2)=\lim_{t\to t_0}|\alpha\log|\Phi'_1(0,t)|+\beta\log|\Phi'_2(0,t)|=$$

$$=\int_0^{t_0}\left[\alpha\frac{d\log|\Phi'_1(0,t)|}{dt}+\beta\frac{d\log|\Phi'_2(0,t)|}{dt}\right]dt-$$

$$-\log|\Phi'_{1u}(0,0)|^{\alpha}|\Phi'_{2u}(0,0)|^{\beta}. \tag{24}$$

Но из (7), учитывая, что $\xi_k(0)=z_k$, находим

$$|\Phi'_{ku}(0,0)|=1-|z_k|^2. \tag{25}$$

Окончательно из (24), (22) и (25) находим следующую формулу для $\log I$.

$$\log I(\Gamma;z_1,z_2)=\int_0^{t_0}\left[\alpha\left(\frac{d\log|\xi_1|}{dt}\right)^2+\beta\left(\frac{d\log|\xi_2|}{dt}\right)^2\right]dt-$$

$$-\log(1-|z_1|^2)^{\alpha}(1-|z_2|^2)^{\beta}. \tag{26}$$

Таким образом, рассматриваемая экстремальная задача сводится к определению минимума интеграла (26).

§ 4. Не уменьшая общности, можно положить $\alpha\geq\beta$.
Рассмотрим сначала случай, когда $z_1=0$, $z_2=\rho$, $0<\rho<1$.
Тогда $\xi_1=0$, и, так как $\lim\limits_{t\to t_0-0}|\xi_2|=1$,

$$-\log I(\Gamma;0,\rho)=\int_0^{t_0}\left[\alpha+\beta\left(\frac{d\log|\xi|}{dt}\right)^2\right]dt-$$

$$-\log(1-\rho^2)^{\beta}=\int_{\rho}^{1}\left[\alpha x+\frac{\beta}{x}\right]d\log|\xi|-\log(1-\rho^2)^{\beta}, \tag{27}$$

где

$$x=\frac{dt}{d\log|\xi|}>0. \tag{28}$$

(Индекс у ξ_2 мы не пишем).

§ 5. Предположим сначала, что

$$\frac{k-1}{k+1}<\rho<1, \qquad k=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{29}$$

Так как при $x\geq 0$

$$\alpha x+\frac{\beta}{x}\geq 2\sqrt{\alpha\beta}, \tag{30}$$

то из (27) находим

$$I \leqslant \rho^2 \sqrt{\alpha\beta}\,(1-\rho^2)^{\beta}. \tag{31}$$

Знак равенства имеет место, если

$$\frac{d\log|\xi|}{dt} = \frac{1-|\xi|^2}{|\mu-\xi|^2} = k = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{32}$$

Для нахождения экстремальной функции надо определить функции $\mu(t) = \exp[i\alpha(t)]$ и $\xi(t)$. Для нахождения 3 функций $\alpha(t)$, $|\xi|$, $\arg\xi = \varphi$ имеем 3 дифференциальных уравнения, из (5) и (32).

$$\begin{cases} \dfrac{d\log|\xi|}{dt} = k \\ \dfrac{d\log|\xi|}{dt} = \dfrac{1-|\xi|^2}{|\mu-\xi|^2} = k \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{2\,\mathrm{Im}\,\dfrac{\xi}{\mu}}{|\mu-\xi|^2}. \end{cases} \tag{33}$$

Из (33_1) находим

$$|\xi| = \rho e^{kt} = r. \tag{34}$$

Далее из (33_2) имеем

$$|\mu-\xi|^2 = 1 + r^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\xi}{\mu} = \frac{1}{k}(1-r^2). \tag{35}$$

Отсюда

$$\cos(\varphi-\alpha) = \frac{1}{r}\,\mathrm{Re}\,\frac{\xi}{\mu} = \frac{k-1}{2k}\cdot\frac{1}{r} + \frac{k+1}{2k}\cdot r \tag{36}$$

и

$$2\,\mathrm{Im}\,\frac{\xi}{\mu} = 2r\sin(\varphi-\alpha) = \frac{1}{k}\sqrt{2(k^2+1)r^2 - (k-1)^2 - (k+1)^2 r^4} =$$

$$= \frac{k+1}{k}\sqrt{(r^2-a^2)(1-r^2)}, \tag{37}$$

где

$$a = \frac{k-1}{k+1}. \tag{38}$$

Из (33_3), (35) и (37) находим

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{k+1}{kr(1-r^2)}\sqrt{(r^2-a^2)(1-r^2)}. \tag{39}$$

Отсюда определяем φ (как функцию r). После вычислений получаем, учитывая, что $|\xi(0)| = \rho$.

$$\xi = re^{i\varphi} = re^{i\varphi_0}\left(\frac{\sqrt{1-r^2}+i\sqrt{r^2-a^2}}{\sqrt{1-\rho^2}+i\sqrt{\rho^2-a^2}}\right)^{-\frac{k+1}{k}} \times$$

$$\left(\frac{r}{\rho}\cdot\frac{\sqrt{a^2(1-\rho^2)}+i\sqrt{\rho^2-a^2}}{\sqrt{a^2(1-r^2)}+i\sqrt{r^2-a^2}}\right)^{-\frac{k-1}{k}} \tag{40}$$

(Здесь $\varphi_0 = \arg z_2 = \arg\xi(0) = 0$).

Наконец, $\mu(t)$ определяется из (36) формулой

$$\mu = \frac{\xi}{r} e^{i\Theta}, \tag{41}$$

где

$$\Theta = \varphi - \alpha = \arccos\left(\frac{k-1}{2k} \cdot \frac{1}{r} + \frac{k+1}{2k} r\right). \tag{42}$$

Интервал $(0, t_0)$ изменения аргумента t определяем из соотношения (34) и условия, что при $t \to t_0$ $r \to 1$.
Таким образом.

$$t_0 = \frac{1}{k} \log \frac{1}{\rho}. \tag{43}$$

Покажем теперь, что найденной экстремальной функции $\mu(t)$ соответствует определенная кривая $\Gamma(t_0)$, разделяющая круг $|z| < 1$ на две области $B_1 \ni z_1 = 0$ и $B_2 \ni z_2 = \rho$ и дающая функционалу $I(\Gamma, 0, \rho)$ максимум. Действительно, при условии (29) Θ, как легко проверить, будет вещественно. С другой стороны, для функции ξ, определенной формулой (40), $|\xi| = r$. Следовательно, (см. (41)), $|\mu(t)| = 1$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_0$. При выполнении этого условия интеграл $z = \Phi(w, t)$, $\Phi(w, 0) = w$ уравнения Левнера (2) отображает $|w| < 1$ на область, получаемую из $|z| < 1$ проведением разреза по некоторой кривой Жордана $\Gamma(t)$, не проходящей через точку $z = 0$. Далее, по определению t_0, при $t \to t_0$ $|\xi| = r \to 1$. Это может иметь место лишь в двух случаях: или кривая $\Gamma(t_0)$ заканчивается в точке $z_2 = \Phi(\xi_2(t), t)$ или же $\Gamma(t_0)$ разделяет $|z| < 1$ на две области $B_1 \ni z_1 = 0$ и $B_2 \ni z_2 = \rho$. Но первый случай не может иметь место. Действительно, по существу метода.

$$I(\Gamma, z_1, z_2) = \lim |\Phi'_{1w}(0,t)|^{\alpha} |\Phi'_{2w}(0,t)|^{\beta}.$$

См. (24). Если $\Gamma(t_0)$ заканчивается в точке z_2, то при $t \to t_0$ $\Phi'_{2w}(0, t) \to 0$, следовательно $I = 0$ и достигается не максимум, а минимум. Итак, экстремальная кривая $\Gamma(t_0)$ разбивает $|z| < 1$ на две области, из которых одна содержит точку $z_1 = 0$, а другая — точку $z_2 = \rho$ — что и требовалось доказать.

§ 6. Рассмотрим теперь случай $\rho < \frac{k-1}{k+1}$. Разобьем интервал изменения $r = |\xi|$ на два интервала

$$\rho \leqslant r \leqslant \frac{k-1}{k+1} \quad \text{и} \quad \frac{k-1}{k+1} \leqslant r \leqslant 1.$$

Обозначим значение t, соответствующее $r = \frac{k-1}{k+1}$, через t_1, и положим

$$\xi(t_1) = \frac{k-1}{k+1} e^{i\varphi_0} \tag{44}$$

Соответственно разобьем интеграл в (27) на два интеграла

$$Q_1 + Q_2 = \int_{\rho}^{\frac{k-1}{k+1}} \left(\alpha x + \frac{\beta}{x}\right) d \log |\xi| + \int_{\frac{k-1}{k+1}}^{1} \left(\alpha x + \frac{\beta}{x}\right) d \log |\xi|. \tag{45}$$

Минимум Q_2 находится так же, как выше при $x=\frac{1}{k}$, и равен

$$\min Q_2 = 2\pi\sqrt{\alpha\beta}\,\log\frac{k+1}{k-1} \tag{46}$$

и соответствующие функции $\mu(t)$ и $\xi(t)$ на интервале

$$\frac{k-1}{k+1}\leqslant r\leqslant 1,\ t_1\leqslant t\leqslant \frac{1}{k}\log\frac{k+1}{k-1}+t_1=t_0' \tag{47}$$

определяются попрежнему формулами (40) и (41), в которых надо заменить ρ на $\frac{k-1}{k+1}$ и положить

$$r=|\xi|=\frac{k-1}{k+1}\,e^{k(t-t_0)}. \tag{48}$$

Значение t_1 для экстремальной кривой $\Gamma(t_0')$ будет определено ниже. Минимум Q_1 находится иначе, так как для $\rho<r<\frac{k-1}{k+1}$

$$x=\frac{|\mu-\xi|^2}{1-|\xi|^2}>\frac{1}{k}. \tag{49}$$

Функция $f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x}$ — монотонная на интервале $\frac{1}{k}<x<\infty$. Поэтому наименьшее значение Q_1 будет принимать при наименьшем из возможных x. Так как при фиксированном r $\min|\mu-\xi|=1-r$, то

$$x=\frac{dt}{d\log|\xi|}=\frac{|\mu-\xi|^2}{1-|\xi|^2}\geqslant\frac{1-r}{1+r} \tag{50}$$

и

$$\alpha x+\frac{\beta}{x}\geqslant\alpha\frac{1-r}{1+r}+\beta\frac{1+r}{1-r}. \tag{51}$$

Следовательно

$$\min Q_1=\int_{\rho}^{\frac{k-1}{k+1}}\left(\alpha\frac{1-r}{1+r}+\beta\frac{1+r}{1-r}\right)\frac{dr}{r}=$$

$$=\log\left(\frac{k^2-1}{\rho}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1+\rho}{2k}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1-\rho}{2}\right)^{2\beta}. \tag{52}$$

Этот минимум достигается при $|\mu-\xi|=1-r$, то-есть, когда

$$\xi=r\mu. \tag{53}$$

Но в таком случае из (33_0) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2\,\mathrm{Im}\,\frac{\xi}{\mu}}{|\mu-\xi|^2}=0, \tag{54}$$

следовательно,

$$\varphi(t)=\varphi(0)=0. \tag{55}$$

Итак

$$\xi=r,\quad \mu=1 \tag{56}$$

Зависимость между r и t находится из соотношения (см. 5)

$$\frac{d\log r}{dt}=\frac{1+r}{1-r}$$

и имеет вид

$$\frac{r}{(1+r)^2}=\frac{\rho}{(1+\rho)^2}e^t. \tag{57}$$

Теперь могут быть определены величины $\varphi_0=\arg\zeta(t_1)$ и t_1 а вместе с тем и t'_0, (см. (47)) для экстремальной кривой $\Gamma(t'_0)$. Именно, из (55) имеем $\varphi_0=0$, а значение t_1 находим из (57) при $r=\dfrac{k-1}{k+1}$

$$t_1=\log\frac{k^2-1}{4k^2}\,\frac{(1+\rho)^2}{\rho}. \tag{58}$$

Заметим, что, так как $\mu=1$ при $0\leqslant t\leqslant t_1$, то часть $\Gamma(t_1)$ кривой $\Gamma(t'_0)$ есть отрезок радиуса $\arg z=0$ $1\geqslant|z|\geqslant r_1>\rho$. Наконец, из (27), (46) и (52) находим

$$\max J=\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{2\sqrt{\alpha}}\left(1-\rho^2\right)^{\beta}\left(\frac{\rho}{k^2-1}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{2k}{1+\rho}\right)^{2\alpha}\left(\frac{2}{1-\rho}\right)^{2\beta}. \tag{59}$$

§ 7. Зная $\mu(t)$, можно определить кривую Γ, дающую максимум функционалу $J(\Gamma;0,\rho)$. По существу для этого достаточно найти функцию $f_1(w)=\omega(0,w,t_0)$. Для определения $f_1(w)$ воспользуемся следующим непосредственно проверяемым свойством решений уравнений Лёвнера: пусть ω, w_1, w_2 — три решения уравнения Лёвнера (4). Тогда

$$\frac{d\log\dfrac{\omega-w_1}{\omega-w_2}}{d\tau}=\frac{1}{2}\,\frac{d\log\omega e^{-\tau}}{d\tau}\cdot\frac{d\log\dfrac{w_1}{w_2}}{d\tau}. \tag{60}$$

Положим в (4) $w_1=\zeta(\tau)$, $w_2=\zeta^{-1}(\tau)$. *). Если $\dfrac{k-1}{k+1}<\rho$, то учитывая, что по (34)

$$\frac{w_1}{w_2}=\zeta\zeta=\rho^2e^{2k\tau} \tag{61}$$

находим

$$\frac{d\log\dfrac{\omega-\zeta}{\omega-\zeta^{-1}}}{d\tau}=k\,\frac{d\log\omega e^{-\tau}}{d\tau}. \tag{62}$$

Из (62) получим

$$\omega^k\,\frac{\omega-\zeta^{-1}}{\omega-\zeta}\,e^{k\tau}=c. \tag{63}$$

Полагая здесь $\tau=0$, $\omega(0,w,t_0)=f_1(w)$ и $\tau=t_0$, $w=\omega$, и имея в виду, что $|\zeta(t_0)|=1$; $\zeta(0)=\rho$, $\rho e^{kt_0}=1$, получаем уравнение, определяющее $z=f_1(w)$

$$|f_1(w)|^k\,\frac{f_1(w)-\rho^{-1}}{f(w)-\rho}=\frac{w^k}{\rho}. \tag{64}$$

*) Вместе с $\zeta(t)$, ζ^{-1} является решением уравнения (4).

Если $\rho < \frac{k-1}{k+1}$, то, полагая в (63) $\tau = t_1$, $\omega = \omega(t_1, w, t'_0) = \omega_1$, находим для определения ω_1 уравнение

$$\omega_1^k \frac{\omega_1 - a}{1 - a\omega_1} e^{kt_1} = \frac{w^k}{a}. \tag{65}$$

Затем $f_1(w)$ определяется через ω_1 из соотношения $f_1(w) = \omega(0, w, t_0) = \omega(0, \omega_1(t_1, w, t_0), t_1)$, или, так как $\rho = 1$ при $0 \leq t \leq t_1$

$$\frac{f_1(w)}{|1 - f_1(w)|^2} e^{t_1} = \frac{\omega_1}{(1 - \omega_1)^2}. \tag{66}$$

При $\rho > \frac{k-1}{k+1}$ кривая Γ принадлежит границе каждой из области B_1, B_2, при $\rho < \frac{k-1}{k+1}$ — прямолинейная часть кривой Γ принадлежит лишь границе B_1.

§ 8. Для того, чтобы получить решение задачи для произвольных z_1 и z_2, достаточно выполнить линейное преобразование круга $|z| < 1$ в себя, переводящее точки 0 и ρ в z_1 и z_2

$$\zeta = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}. \tag{67}$$

При этом преобразовании $f_k(w)$ переходит в

$$\varphi_k(w) = \frac{f_k(w) - z_1}{1 - \bar{z}_1 f_k(w)}. \tag{68}$$

Дифференцируя (67), имеем

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1 - \bar{z}_1 z_1}{(1 - z_1 z)^2}. \tag{69}$$

Поэтому

$$\varphi'_k(w) = \frac{1 - \bar{z}_1 z_1}{|1 - \bar{z}_1 f_k(w)|^2} f'_k(w). \tag{70}$$

Так как при $w = 0$ $f_k(w) = z_k$, то из (70) получается

$$|\varphi'_1(0)|^\alpha |\varphi'_2(0)|^\beta = |1 - \bar{z}_1 z_1|^{-\alpha} \left| \frac{1 - \bar{z}_1 z_1}{(1 - \bar{z}_1 z_2)^2} \right|^\beta |f'_1(0)|^\alpha |f'_2(0)|^\beta. \tag{71}$$

Учитывая, что по (67) при $\rho < \frac{k-1}{k+1}$

$$\rho = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_1} \right| \tag{72}$$

$$|\varphi'_1(0)|^\alpha |\varphi'_2(0)|^\beta = \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{2\beta} \left(1 - \rho^2 \right)^\beta \left(\frac{\rho}{k^2 - 1} \right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{2k}{1+\rho} \right)^{2\alpha} \left(\frac{2}{1-\rho} \right)^{2\beta}. \tag{73}$$

окончательно находим

$$\max J(\Gamma; z_1, z_2) = 4^{\alpha+\beta} k^{2\alpha} \frac{(k-1)-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{(k+1)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2} \times$$

$$\times \left|\frac{z_2 - z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|^{\alpha+\beta} \frac{|1-\bar{z}_1 z_2|^{2\beta}}{|1-\bar{z}_1 z_1|^{\beta-\alpha}} \cdot \left(1-\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|^2\right)^{\beta} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(1+\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|\right)^{2\alpha}} \cdot \frac{1}{\left(1-\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|\right)^{2\beta}}. \tag{74}$$

Аналогично при $\rho > \dfrac{k-1}{k+1}$ получаем

$$\max J = \frac{|1-\bar{z}_1 z_1|^{\alpha-\beta}}{|1-\bar{z}_1 z_2|^{2\sqrt{\beta}}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}} \cdot |z_2 - z_1|^{2\sqrt{\alpha\beta}} \times$$

$$\times \left(1-\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|^2\right)^{\beta}. \tag{75}$$

§ 9. Рассмотрим в частности, случай $\alpha = \beta = 1$. (Задача М. А. Лаврентьева, поставленная и решенная им вместе с рядом других экстремальных задач еще в 1934 году [3]. В этом случае $k = 1$ и неравенство $\rho > \dfrac{k-1}{k+1}$ всегда выполняется. По (75) находим

$$\max J = |z_2 - z_1|^2 \left(1-\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|^2\right). \tag{76}$$

Функция $z = f_1(w)$ в случае $z_1 = 0, z_2 = \rho$ определяется из соотношения (см. (64))

$$w = z \frac{1-\rho z}{\rho - z} \tag{77}$$

(и условия $f_1(0) = 0$).

Эта функция отображает $|w| < 1$ на содержащий $z = 0$ круговой двуугольник B_1, ограниченный дугой окружности $|z| = 1$ и дугой Γ окружности

$$c: \quad \left|z - \frac{1}{\rho}\right|^2 = \frac{1-\rho^2}{\rho^2} \tag{78}$$

ортогональной к $|z| = 1$. Это нетрудно проверить, если учесть, что по (77) обратная функция $w(z)$ удовлетворяет равенствам

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\overline{f(z)}}; \quad f(z_1) = \frac{1}{\overline{f(z)}}; \quad f(z_2) = f(z), \tag{79}$$

где

$$z_1 = -\frac{\rho - \bar{z}}{1-\rho z}; \quad z_2 = \frac{1-\rho z}{\rho - z} \tag{80}$$

точки, симметричные соответственно z и $\dfrac{1}{\bar{z}}$ относительно окружности c. Из равенств (79) следует, что двулистная в плоскости функция (77) однолистна в $|z| < 1$. Эта функция голоморфна в двуугольнике B_1 и принимает на границе B_1 значения, по модулю равные единице, откуда вытекает, что она отображает $|w| < 1$ на B_1.

Следовательно, $f_1(w)=z$ отображает B_1 на $|w|<1$. Покажем, что неевклидовы расстояния $d(0, \Gamma)$, $d(\rho, \Gamma)$ точек 0 и ρ от дуги Γ равны. Для этого заметим, что

$$d(0, \Gamma)=d(0, \alpha), \quad d(\rho \Gamma)=d(\rho, \alpha),$$

где α — точка пересечения Γ с радиусом $\arg z=0$,

$$\alpha=\frac{1}{\rho}-\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}. \tag{81}$$

Но так как при неевклидовом движении

$$\xi=\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$$

α и ρ переходят соответственно в 0 и α, то, очевидно

$$d(0, \alpha)=d(\alpha, \rho). \tag{82}$$

Итак, экстремальная кривая Γ есть неевклидова прямая, ортогональная неевклидовой прямой, проходящей через точки $z_1=0$ и $z_2=\rho$ и находящейся на одинаковом расстоянии от этих точек. Так как переход от частного случая $z_1=0$, $z_2=\rho$ к общему случаю произвольных z_1 и z_2 выполняется при помощи линейного преобразования круга в себя, то-есть неевклидова движения, то это определение экстремальной кривой Γ сохраняется и в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Куфарев. Доклады Академии Наук СССР, 73 № 5 (1950).
2. П. П. Куфарев и А. Э. Фалес. ДАН СССР, т. L XXXI, №6.
3. М. А. Лаврентьев. Труды Математического института им. Стеклова, 5 (1934).

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Е. Н. Аравийская

Известные в теории функций нескольких комплексных переменных интегральные представления С. Бергмана и А. Вейля [1], [2], [3] относятся к функциям, регулярным в области, ограниченной конечным числом кусков аналитических гиперповерхностей. Интеграл берется по двумерной части границы области, образованной пересечением граничных аналитических гиперповерхностей. Эти интегральные представления, аналогичные интегральной формуле Коши в теории одного комплексного переменного, уже нашли себе ряд важных приложений к решению основных проблем теории аналитических функций многих комплексных переменных. Поэтому представляются не лишенными интереса некоторые замечания, касающиеся характеристики класса областей, для которых имеют место упомянутые интегральные представления.

Пусть D ограниченная область пространства двух комплексных переменных (2-х к. п.) w и z и $f_k(w,z)$, $k=1,2,\ldots\nu$, регулярные в ней функции. Пусть область Δ вместе со своей границей, то есть, $\bar{\Delta}$, находится в D и определяется условиями

$$f_k(w,z) \in \Delta_k, \quad k=1,2,\ldots\nu, \tag{1}$$

где Δ_k, $k=1,2,\ldots\nu$, ограниченная область в плоскости комплексного переменного f_k, и граница ее C_k состоит из конечного числа аналитических кривых $f_k=\varphi_k(\lambda_k)$, $\varphi_k(\lambda_k)$ — аналитическая функция вещественного параметра λ_k. Граница области Δ состоит из кусков аналитических гиперповерхностей — „граней“ S_k „пластинчатого“ строения:

$$f_k(w,z)=\varphi_k(\lambda_k), \quad k=1,2,\ldots\nu. \tag{2}$$

„Грани“ S_k могут пересекаться только по кускам двумерных поверхностей (предполагается, что $\frac{\partial(f_k,f_s)}{\partial(w,z)} \neq 0$). Пересечение граней S_k и S_s — „ребро“ многогранника — обозначим через σ_{ks}.

Будем предполагать в дальнейшем выполненным также ряд условий, касающихся ориентации „многогранника“ Δ, его „граней“ S_k и „ребер“ σ_{ik} (см. [2], стр. 304—305).

А. Вейль [1], [3] показал, что для всякой регулярной в $\bar{\Delta}$ функции $f(w,z)$ 2-х комплексных переменных w и z

$$I(w_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{s\ k}\int\int_{\sigma_{sk}}\frac{f(w,z)(P_kQ_s-P_sQ_k)\,dw\,dz}{[f_k(w,z)-f_k(w_0,z_0)]\,[f_s(w,z)-f_s(w_0,z_0)]}= \tag{3}$$

$$=\begin{cases} f(w_0,z_0), \text{если } (w_0,z_0)\in\Delta, \\ 0, \text{ если } (w_0,z_0) \text{ вне } \Delta. \end{cases}$$

Причем функции $P_k \equiv P_k(w,z;\ w_0,z_0)$ и $Q_k(w,z;\ w_0,z_0) \equiv Q_k$ предполагаются регулярными функциями от w,z, w_0,z_0, если (w,z) D и $(w_0,z_0) \in D$, удовлетворяющими условиям

$$f_k(w,z) - f_k(w_0,z_0) = (w - w_0) P_k + (z - z_0) Q_k,\ k = 1,2,\ldots\nu. \qquad (4)$$

В 1940 г. Ока [4] заменяет условие (4) менее сильным, предполагая, что для каждой функции $f_k(w,z)$ можно найти такие три регулярные при (w,z) D и $(w_0,z_0) \in D$ функции $P_k(w,z;\ w_0,z_0)$, $Q_k(w,z;\ w_0,z_0)$, $R_k(w,z;\ w_0,z_0)$, что $[f_k(w,z) - f_k(w_0,z_0,|\ R_k(w,z;\ w_0,z_0) =$

$$= (w - w_0) P_k(w,z;\ w_0,z_0) + (z - z_0) Q_k(w,z;\ w_0,z_0), \qquad (5)$$

где $R_k(w_0,z_0;\ w_0,z_0) = 1$, и показывает, что всякую конечную область регулярности D пространства переменных w, z можно аппроксимировать изнутри последовательностью замкнутых множеств $\Delta_k\{|w| \leqslant r_k,\ |z| \leqslant r_k',|f_s^{(k)}(w,z)| \leqslant 1\}$, принадлежащих к классу π_1 (замкнутое множество F принадлежит классу π_1, если существует последовательность множеств $F_n\{|w| < \rho_n,\ |z| < \rho'_n,\ |\Psi_k^{(n)}(w,z)| < 1\}$, $k = 1,2,\ldots\nu$, имеющая F своим пределом, $\Psi_k^{(n)}(w,z)$ — многочлены (см. [1] стр. 270—272)).

Пусть выше определенная область Δ — одно из множеств этой последовательности. В силу результатов Ока [4] можно, не нарушая общности, предположить, что $Z_k = f_k(w,z)$, $k = 1,2,\ldots\nu$, суть корни системы уравнений

$$F_k(w,z,Z_1,Z_2,\ldots Z_\nu) = 0,\ k = 1,2,\ldots\nu,$$

где $F_k(w,z,Z_1,Z_2,\ldots Z_\nu)$ многочлены, обладающие тем свойством, что в пространстве $\nu+2$ к. п. w, $z,Z_1,Z_2,\ldots Z_\nu$ существует открытое множество U, содержащее замкнутое множество

$$\Sigma\{Z_k = f_k(w,z),\ (w,z)\ \ \Delta,\ k = 1,2,\ldots\nu\},$$

на котором аналитические функции

$$Z_k - f_k(w,z),\ k = 1,2,\ldots\nu,$$

равномерно аппроксимируются полиномами, т. е., можно построить многочлены $F_k(w,z,Z_1,Z_2,\ldots Z_n)$, произвольно близкие на U к функциям $Z_k - f_k(w,z)$. Тогда из результатов Ока [4] вытекает способ построения функций

$$P_k(w,z;\ w_0,z_0),\quad Q_k(w,z;\ w_0,z_0),\ R_k(w,z;\ w_0,z_0).$$

Для этого решаем по $Z_k - Z_k^0$, $k = 1,2,\ldots\nu$, систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\nu} C_{sk}(Z_k - Z_k^0) = (w - w_0) A_s + (z - z_0) B_s,\ s = 1,2,\ldots\nu, \qquad (6)$$

где

$$A_s = \frac{F_s(w,z,Z_1,\ldots Z_\nu) - F_s(w,z_0,Z_1,\ldots Z_\nu)}{z - z_0},$$

$$B_s = \frac{F_s(w,z_0,Z_1,\ldots Z_\nu) - F_s(w_0,z_0,Z_1,\ldots Z_\nu)}{w - w_0},$$

$$C_{sk} = \frac{F_s(w_0,z_0,Z^0_1,\ldots Z^0_{k-1},Z_k,\ldots Z_\nu) - F_s(w_0,z_0,Z_1{}^0,\ldots Z^0_k,Z_{k+1}\ldots Z_\nu)}{Z_k - Z^0_k},$$

$$C^0_{sk} = \left(\frac{\partial F_s}{\partial Z_k}\right)_0,$$

$(w_0,z_0,Z^0_1,\ldots Z^0_\nu)$ и $(w,z,Z_1,\ldots Z_\nu)$ две конечные точки пространства $\nu+2$ к. п. $w, z, Z_1,\ldots Z_\nu$.

Введем обозначения

$$\begin{vmatrix} C_{11}C_{12}\ldots C_{1\nu} \\ C_{21}C_{22}\ldots C_{2\nu} \\ \ldots\ldots \\ C_{\nu1}C_{\nu2}\ldots C_{\nu\nu} \end{vmatrix} = J, \quad \begin{vmatrix} C^0_{11},C^0_{12}\ldots C^0_{1\nu} \\ C^0_{21}C^0_{22}\ldots C^0_{2\nu} \\ \ldots\ldots \\ C^0_{\nu1}C^0_{\nu2}\ldots C^0_{\nu\nu} \end{vmatrix} = J_0 = \left(\frac{\partial(F_1,\ldots F_\nu)}{\partial(Z_1,\ldots Z_\nu)}\right)_0.$$

Тогда J_0 можно считать отличным от нуля, так как если $F_k \to Z_k - f_k(w,z)$, то $J_0 \to 1$.
Из (6) получаем

$$(Z_k - Z^0_k)J = \begin{vmatrix} C_{11}C_{12}\ldots(w-w_0)A_1 + (z-z_0)B_1\,C_{1\,k+1}\ldots C_{1\nu} \\ C_{21}C_{22}\ldots(w-w_0(A_2 + (z-z_0)B_2\,C_{2k+1}\ldots C_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{\nu1}C_{\nu2}\ldots(w-w_0)A_\nu + (z-z_0)B_\nu\,C_{\nu\kappa+1}\ldots C_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

После почленного деления последнего равенства на J_0 получаем

$$(Z_k - Z_k{}^0)R_k = (w-w_0)P_k + (z-z_0)Q_k,$$

где $R_k = \dfrac{J}{J_0}$,

$$P_k = \frac{A_1\Delta_{1k} + A_2\Delta_{2k} + \ldots + A_\nu\Delta_{\nu k}}{J_0}, \quad Q_k = \frac{B_1\Delta_{1k} + B_2\Delta_{2k} + \ldots + B_\nu\Delta_{\nu k}}{J_0},$$

Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента C_{ik} определителя J.
Тогда

$$P_kQ_S - P_SQ_k = \frac{\sum_{r,l=1}^{\nu}\Delta_{rk}\Delta_{ls}(A_rB_l - A_lB_r)}{J^2},$$

$$A_rB_l - A_lB_r =$$

$$= \frac{F_r(w,z_0,Z_1,\ldots Z_\nu)F_l(w_0,z_0,\ldots Z_1,\ldots Z_\nu) - F_l(w,z_0,Z_1,\ldots Z_\nu)F_r(w_0,z_0,Z_1,\ldots Z_\nu)}{(z-z_0)(w-w_0)},$$

Обозначим через $\widetilde{C}_{ik}$, $\widetilde{\Delta}_{rk}$, $\widetilde{\Delta}_{ls}$, $\widetilde{J}$, $\widetilde{F}_r(w,z_0)$, $\widetilde{F}_r(w_0,z_0)$ выражения, полученные соответственно из C_{ik}, Δ_{rk}, Δ_{ls}, J, $F_r(w,z_0,Z_1(w,z),\ldots Z_\nu(w,z))$, $F_r(w_0,z_0,Z_1(w,z),\ldots Z_\nu(w,z))$ подстановкой в них $Z_k = f_k(w,z)$,

$Z^0_k = f_k(w_0, z_0)$. Тогда интеграл Вейля (3) примет вид:

$$-4\pi^2 I(w_0,z_0) =$$

$$\sum_{r,}^{\nu}\sum_{l=1}^{}\sum_{s,\ k}\int_{\sigma_{sk}}\int \frac{f(w,z)\Delta_{rk}\Delta_{es}\left[\widetilde{F}_r(w,z_0)\widetilde{F}_e(w_0z_0)-\widetilde{F}_r(w_0z_0)\widetilde{F}_e(w,z_0)\right]dwdz}{\left[f_k(w,z)-f_k(w_0,z_0)\right]\left[f_s(w,z)-f_s(w_0,z_0)\right](w-w_0(z-z_0)\widetilde{J}^2} \quad (7)$$

Полиномы $F_k(w,z,Z_1,\ldots Z_\nu)$, $k=1,2,\ldots\nu$, можно выбрать так, чтобы для $(w,z)\in\Delta$, $(w_0,z_0)\in\Delta$ были произвольно малыми величины:

$$\left|\widetilde{C}_{kk}\right|-1,\ \left|\widetilde{C}_{sk}\right|,\ s\neq k,\quad \left|\widetilde{\Delta}_{kk}\right|-1,\quad \left|\widetilde{\Delta}_{sk}\right|,\ s\neq k,\quad \left|\widetilde{J}\right|-1,$$

$$\left|\widetilde{F}_k(w_0,z_0)-\left[f_k(w,z)-f_k(w_0,z_0)\right]\right|.$$

Тогда интеграл $J(w_0,z_0)$ при (w_0,z_0) Δ будет произвольно мало отличаться от интеграла

$$I_1(w_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{s,k\\ s<k}}\int_{\sigma_{sk}}\int\frac{f(w,z)}{(z-z_0)(w-w_0)}\left|\begin{matrix}F_k(w,z_0,f_1(w,z),\ldots,f_\nu(w,z))\\ F_k(w_0,z_0,f_1(w,z),\ldots,f_\nu(w,z)\end{matrix}\right.$$

$$\left.-\frac{F_s(w,z_0,f_1(w,z),\ldots,f_\nu(w,z))}{F_s(w_0,z_0,f_1(w,z),\ldots,f_\nu(w,z)}\right|dw\,dz. \quad (8)$$

Покажем, что формула (8) дает интегральное представление функции $f(w,z)$ в области, внутри Δ находящейся, при одном дополнительном условии. Метод рассуждений будет вполне аналогичен обычному методу доказательства формулы Вейля [1].

Пусть по данной системе функций $f_1(w,z),\ldots f_\nu(w,z)$, определяющей многогранник Δ, можно построить многочлены $F_k(w,z,Z_1,Z_2,\ldots Z_\nu)$, $k=1,2,\ldots\nu$, таким образом, чтобы

$$\left|f_k(w,z)-f_k(w_0,z_0)-F_k(w_0,z_0,f_1(w,z),\ldots f_\nu(w,z)\right|<\delta, \quad (8)$$

если $(w,z)\in\Delta$ и $(w_0,z_0)\in D$, где δ произвольно взятая положительная величина.

Формула (7) превращается в обычную формулу Коши, если Δ есть бицилиндр: $|z|\leqslant r$, $|w|\leqslant r$, так как в этом случае можно положить $\nu=2$, $F_1(w,z,Z_1,Z_2)\equiv Z_1-z$, $F_2(w,z,Z_1,Z_2)\equiv Z_2-w$.

Обозначим выражение

$$\frac{1}{(w-w_0)(z-z_0)}\left|\begin{matrix}F_k[w,z_0,f_1(w,z),\ldots f_\nu(w,z)]\\ F_k[w_0,z_0,f_1(w,z),\ldots f_\nu(w,z)]\end{matrix}\right.-$$

$$\left.-\frac{F_s[w,z_0,f_1(wz),\ldots f_\nu(w,z)]}{F_s[w_0,z_0,f_1(w,z),\ldots f_\nu(w,z)]}\right|$$

через φ_{ks}. Очевидно, справедливы следующие тождества

$$\varphi_{ks}+\varphi_{sk}=0,\quad \varphi_{ks}+\varphi_{sl}+\varphi_{lk}=0,\quad k,\ s,\ l=1,\ 2,\ldots\nu.$$

Предположим сначала, что точка (w_0,z_0) такова, что $f_k(w_0,z_0)$ при некотором значении k находится вне Δ_k. Пусть это будет при $k=1$; другие $f_i(w_0,z_0)$, $i \neq k$ не лежат на C_i; и

$$|f_s(w,z)-f_s(w_0,z_0)|>\delta_1,\ \delta_1>\delta,\quad s=1,2,\ldots\nu,\ f_s(w,z)\quad C_s. \tag{9}$$

Тогда в силу (8) имеем

$$|f_s(w,z)-f_s(w_0,z_0)-F_s[w_0,z_0,f_1(w,z),\ldots f_\nu(w,z)]|<\delta.$$

$$|F_s[w_0,z_0,f_1(w,z),\ldots f_\nu(w,z)]|\geqslant|f_s(w,z)-f_s(w_0,z_0)|-\delta,\quad s=1,2,\ldots\nu,$$

и функции φ_{i1}, $i=1,2,\ldots\nu$, будут регулярны в S_i. Отсюда, по теореме Коши—Пуанкаре [1] получаем

$$I_2(w_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{i<j}\int\int f(w,z)\varphi_{ij}\,dw\,dz=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{i\neq 1}\sum_{j}\int\int f(w,z)\varphi_{i1}\,dw\,dz=0.$$

Суммирование по j в последней сумме проводится так, чтобы $\sum_j \sigma_{ij}$ составляла границу S_i.

Пусть теперь все $f_k(w_0,z_0)$ принадлежат своим Δ_k; причем бицилиндр $E\{|w-w_0|\leqslant\rho,\ |z-z_0|\leqslant\rho,\ \rho>\delta\}$ принадлежит еще области Δ. Пусть $E_1\{|w-w_0|\geqslant\rho\}$, $E_2\{|w-w_0|\geqslant\rho,\ |z-z_0|\geqslant\rho\}$. Тогда $\Delta=E+\Delta.E_1+\Delta.E_2$, если (w_0,z_0) Δ, и $\Delta=\Delta.E_1+\Delta.E_2$, если (w_0,z_0) не принадлежит Δ. Для E формула (7) превращается в формулу Коши, и $I_2(w_0,z_0)=f(w_0,z_0)$. Область $\Delta.E_1$ есть область, определенная теми же условиями, что и Δ с дополнительным требованием $|w-w_0|\geqslant\rho$. Очевидно, точка (w_0,z_0) будет находиться вне области $\Delta.E_1$. В этом случае за одну из функций $f_k(w,z)$ можно взять функцию w, соответствующая область Δ_k не будет содержать круга $|w-w_0|\leqslant\rho$, следовательно точка w_0 лежит вне Δ_k. И так как $\rho>\delta$, то для области ΔE_1, выполняется условие рассмотренного уже частного случая, и $I_2(w_0,z_0)=0$.

Область $\Delta.E_2$ определяется теми же условиями, что и Δ, с добавлением еще условий $|w-w_0|\leqslant\rho$, $|z-z_0|\geqslant\rho$. Снова очевидно, что для $z=z_0$ выполнено условие рассмотренного выше частного случая и $I_2(w_0,z_0)=0$ для области $\Delta.E_2$. В силу аддитивности интеграла (7), поскольку теорема верна для областей E, $\Delta.E$, и $\Delta.E_2$, она будет верна и для Δ. Для случая n комплексных переменных формула (7) имеет вид:

$$I(t_1,t_2,\ldots t_n)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{i_1,i_2,\ldots i_n}\int\cdots\int\frac{f(z,\ldots z_n)\delta_{i_1\ldots i_n}\,dz_1\ldots dz_n}{(z_1-t_1)\ldots(z_n-t_n)U_{i1}(t_1,\ldots t_n)\ldots U_{in}(t_1,\ldots t_n)},$$

где

$$U_k(t_1,\ldots t_n) \equiv F_k[t_1,t_2,\ldots t_n, f_1(z_1,\ldots z_n),\ldots f_\nu(z_1,\ldots z_n)]$$

$$\omega_{i_1\ldots i_n} = \begin{vmatrix} U_{i_1}(t_1,\ldots t_n) & U_{i_2}(t_1,\ldots t_n) & \ldots & U_{i_n}(t_1,\ldots t_n) \\ U_{i_1}(t_1\ldots t_{n-1},z_n) & U_{i_2}(t_1\ldots t_{n-1},z_n) & \ldots & U_{i_n}(t_1\ldots t_{n-1},z_n) \\ U_{i_1}(t_1\ldots t_{n-2},z_{n-1}z_n) & U_{i_2}(t_1,\ldots t_{n-2},z_{n-1},z_n) & \ldots & U_{i_n}(t_1\ldots t_{n-2},z_{n-1},z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\

УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ $A(x)X^2+B(x)Y^2+C(x)Z^2=0$ В ПОЛИНОМАХ

Н. Ф. Канунов

Вопрос о разрешимости неопределенных уравнений над полем рациональных функций слабо освещен в литературе.

В теории алгебр обобщенных кватернионов над функциональным полем представляет интерес рассмотрение условий разрешимости неопределенного уравнения:

$$A(x)X^2+B(x)Y^2+C(x)Z^2=0 \qquad (1)$$

в полиномах, определяющих такую алгебру как полное кольцо матриц. При этом $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, — некоторые целые полиномы.

Цель настоящей работы — выяснить условия разрешимости указанного неопределенного уравнения.

§ 1. Основная теорема; доказательство необходимости

Теорема. Пусть

$$A(x)=a_0x^\alpha+\ldots\ldots+a_\alpha,\ B(x)=b_0x^\beta+\ldots+b_\beta,\ C(x)=c_0x^\gamma+\ldots\ldots+c_\gamma,$$

попарно взаимно-простые полиномы над полем рациональных чисел R, а $A(x)B(x)C(x)$ не равно постоянной.

Для того, чтобы уравнение

$$A(x)X^2+B(x)Y^2+C(x)Z^2=0$$

было разрешимо в полиномах над полем рациональных чисел R, необходимо и достаточно, чтобы:

1) Полином $-A(x)B(x)-A(x)C(x)-B(x)C(x)$ обращался в квадрат элемента поля $R(\alpha_i)$ для любого корня α_i полинома $A(x)\,B(x)\,C(x)$.

2) Если α,β,γ одинаковой четности, то числовое уравнение

$$a_0x^2+b_0y^2+c_0z^2=0$$

арифметически разрешимо в поле R.

3) Если α,β — одинаковой, γ — другой четности, то $-\dfrac{a_0}{b_0}$ равно квадрату рационального числа.

Причем уравнение $a_0x^2+b_0y^2+c_0z^2=0$ назовем арифметически разрешимым, если найдутся рациональные числа x_0, y_0, z_0, удовлетворяющие этому уравнению.

Краткости ради полином

$$-A(x)B(x)-A(x)C(x)-B(x)C(x)$$

обозначим через $\Phi(x)$.

В уравнении (1) каждый из полиномов $A(x), B(x), C(x)$, очевидно, можно считать не содержащим множителя, равного квадрату полинома.

Пусть уравнение (I) разрешимо. Существующие решения X, Y, Z, очевидно, можно положить не имеющими общего делителя.

Если $\varphi_i(x)$ неприводимый множитель $A(x)$, то Y и Z не делятся на $\varphi_i(x)$, ибо $A(x)$ не содержит делителя, равного квадрату.

Пусть α_i любой корень $\varphi_i(x)$, тогда

$$\Phi(\alpha_i) = \left(\frac{C(\alpha_i)\,Z(\alpha_i)}{Y(\alpha_i)}\right)^2$$

полный квадрат поля $R(\alpha_i)$.

То же верно для любого из корней полиномов $B(x)$ и $C(x)$.

Необходимость условия 1) теоремы тем самым доказана.

Далее, если степени полиномов $A(x)$ и $B(x)$ имеют одинаковую четность, а степень $C(x)$ — иную, то можно положить

$$\text{ст}|A(x)X^2| = \text{ст}|B(x)Y^2| > \text{ст}|C(x)Z^2|, \qquad (n)$$

где „ст" означает сокращение слова „степень".

Ибо, очевидно, невозможно, чтобы степень одного члена уравнения (I) была бы больше степеней двух других.

Ясна также невозможность равенств:

$$\text{ст}|B(x)Y^2| = \text{ст}|C(x)Z^2|, \text{ст}|A(x)X^2| = \text{ст}|C(x)Z^2|^2,$$

ибо четность степени полинома $C(x)$ отлична от четности степеней полиномов $A(x)$ и $B(x)$.

Из соотношения (n) и уравнения (I) имеем

$$a_0x_0^2 + b_0y_0^2 = 0,$$

где a_0, b_0, x_0, y_0 старшие коэффициенты соответственно полиномов $A(x), B(x), X, Y$.

Необходимость условия 3) доказана.

Наконец, пусть степени полиномов $A(x), B(x), C(x)$ одновременно четны или одновременно нечетны. Тогда, если

$$\text{ст}|A(x)X^2| = \text{ст}|B(x)Y^2| = \text{ст}|C(x)Z^2|,$$

из разрешимости уравнения (I), очевидно, следует арифметическая разрешимость уравнения

$$a_0x^2 + b_0y^2 + c_0z^2 = 0,$$

причем решением его служит тройка рациональных чисел x_0, y_0, z_0 являющихся старшими коэффициентами полиномов X, Y, Z.

Если же, скажем,

$$\text{ст}|C(x)Z^2| = \text{ст}|B(x)Y^2| > \text{ст}|A(x)X^2|,$$

то из этого соотношения и уравнения (I) снова следует разрешимость уравнения

$$a_0x^2 + b_0y^2 + c_0z^2 = 0,$$

причем числа $x_0, y_0, 0$ дают его решение.

Также легко рассматриваются все остальные случаи.

§ 2. Основные леммы

Выводу достаточности условий 1), 2) или 1), 3) для разрешимости уравнения (I) мы предпошлем доказательство следующих двух лемм, из которых лемма II будет являться основной.

Лемма 1. Если даны l различных попарно взаимно-простых полиномов $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_l(x)$ степеней соответственно равных $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_l$ и l любых полиномов $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, ..., $\Psi_l(x)$ степеней соответственно не превышающих чисел $k_1-1, k_2-1, \ldots\ldots\ldots\ldots, k_l-1$, то существует полином $F(x)$, удовлетворяющий l сравнениям $F(x) \equiv \Psi_i(x) \pmod{\varphi_i(x)}$; $i=1,2,\ldots,l$ такой, что степень $F(x) \leqslant k_1+k_2+\ldots\ldots+k_l-1$.

Доказательство.

Лемма верна для $l=2$, ибо в силу взаимной простоты $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ найдутся полиномы $m_1(x)$, $m_2(x)$ такие, что:

$$m_1(x)\varphi_1(x)+m_2(x)\varphi_2(x)=1,$$

причем степень $m_1(x) \leqslant k_2-1$, степень $m_2(x) \leqslant k_1-1$.

Построим полином

$$F^*(x) \equiv \Psi_1(x)+(\Psi_2(x)-\Psi_1(x))\,\varphi_1(x)\,m_1(x).$$

Ясно, что

$$F^*(x) \equiv \Psi_1(x) \pmod{\varphi_1(x)}, \quad F^*(x) \equiv \Psi_2(x) \pmod{\varphi_2(x)}.$$

Степень $F^*(x) \leqslant k_1+k_2+\nu-1$, где ν есть степень $(\Psi_2(x)-\Psi_1(x))$. Если степень $F^*(x) \leqslant k_1+k_2-1$, полином $F^*(x)$ — искомый. Если же степень $F^* > k_1+k_2-1$, то, разделив $F^*(x)$ на $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$, найдем нужный полином, удовлетворяющий всем условиям леммы.

Пусть доказываемая лемма верна для $l-1$ полиномов, т. е., пусть существует полином $\Psi(x)$, для которого:

1) степень $\Psi(x) \leqslant k_1+k_2+\ldots\ldots+k_{l-1}-1$.

2) $\Psi(x) \equiv \Psi_i(x) \pmod{\varphi_i(x)}$; $i=1,2,\ldots,l-1$.

Взяв полиномы $\varphi_l(x)$ и $\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\ldots\varphi_{l-1}(x)$ (имеющие степени соответственно равные k_l и $k_1+k_2+\ldots\ldots+k_{l-1}$), мы видим, что воспроизводятся условия рассмотренного случая $l=2$, при которых существует полином $F(x)$ такой, что:

1) ст $F(x) \leqslant$ ст $\varphi_l(x)+$ ст$(\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\ldots\varphi_{l-1}(x))$,

2) $F(x) \equiv \Psi_l(x) \pmod{\varphi_l(x)}$; $F(x) \equiv \Psi(x) \pmod{(\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_{l-1}(x))}$.

То-есть $F(x) \equiv \Psi_i(x) \pmod{\varphi_i(x)}$; $i=1,2,\ldots,l$.

Лемма доказана.

Лемма II. Обращение полинома $-A(x)B(x)$ $A(x)C(x)-B(x)C(x)$ в квадрат элемента любого поля $R(\alpha_l)$ для $x=\alpha_l$ — любого из корней полинома $A(x)B(x)C(x)$, равнозначно существованию тождества

$$-B(x)=A(x)[f(x)]^2-C(x)D(x), \qquad (A)$$

где $D(x)$ и $A(x)$ — взаимно простые полиномы, а степень полинома $f(x)$ не больше степени полинома $C(x)$, уменьшенной на единицу, и еще двух других тождеств, получающихся из (A) циклической перестановкой полиномов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ с аналогичными условиями для полиномов, входящих в эти тождества.

Доказательство. Пусть

$$A(x)\,B(x)\,C(x)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\ldots\varphi_l(x)\ldots\ldots\varphi_m(x)+\text{const}.$$

есть разложение полинома $A(x)B(x)C(x)$ на неприводимые множители, причем нумерация последних выбрана так, что

$$C(x)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\ldots\varphi_l(x).$$

Для любого из корней α_i последнего, по условию леммы

$$-A(\alpha_i)\,B(\alpha_i)=\lambda_i^2,\ \lambda_i\in R(\alpha_i),$$

отсюда:

$$-\frac{B(\alpha_i)}{A(\alpha_i)}=\left(\frac{\lambda_i}{A(\alpha_i)}\right)^2,\quad \frac{\lambda_i}{A(\alpha_i)}\in R(\alpha_i).$$

Каждое алгебраическое число поля $R(\alpha_i)$ имеет вид

$$\frac{\lambda_i}{A(\alpha_i)}=p_0\alpha_i^{k_i-1}+p_1\alpha_i^{k_i-2}+\ldots\ldots+p_{k_i-1},$$

где k_i степень одного из неприводимых множителей $\varphi_i(x)$ полинома $C(x)$, корнем которого является α_i.

Таким образом

$$-B(\alpha_i)=A(\alpha_i)(p_0\alpha_i^{k_i-1}+\ldots\ldots+p_{k_i-1})^2.$$

А так как это равенство остается верным для всякого α_i, являющегося корнем $\varphi_i(x)$, то:

$$-B(x)\equiv A(x)\ (p_0x^{k_i-1}+\ldots\ldots+p_{k_i-1})^2\ (\mathrm{mod}\ \varphi_i(x)),$$

или

$$-B(x)\equiv A(x)\,[\Psi_i(x)]^2(\mathrm{mod}\ \varphi_i(x));\ i=1,2,\ldots,l \qquad (*),$$

где $\Psi_i(x)=p_0x^{k_i-1}\ldots\ldots+p_{k_i-1}$.

Для совокупности полиномов $\Psi_i(x)$ и $\varphi_i(x)$; $i=1,2,\ldots,l$, выполняются все условия леммы I, поэтому существует полином $f(x)$, удовлетворяющий l сравнениям:

$$f(x)\equiv\Psi_i(x)\ (\mathrm{mod}\ \varphi_i(x));\ i=1,2,\ldots,l, \qquad (**)$$

причем $\mathrm{ст}\,f(x)\leqslant\mathrm{ст}\,\varphi_1(x)+\ldots\ldots+\mathrm{ст}\,\varphi_l(x)-1=\mathrm{ст}\,C(x)-1$.

Из сравнений (*) и (**) вытекают новые сравнения

$$-B(x)\equiv A(x)\,[f(x)]^2\ (\mathrm{mod}\ \varphi_i(x));\ i=1,2,\ldots,l,$$

откуда в силу взаимной простоты $\varphi_i(x)$; $i=1,2,\ldots,l$ между собой, получаем искомое тождество

$$-B(x)=A(x)\,[f(x)]^2-C(x)\,D(x). \qquad (A)$$

$D(x)$ и $A(x)$ здесь, очевидно, взаимно-простые полиномы, иначе $A(x)$ и $B(x)$ имели бы общий делитель.

В силу симметрии полиномов $B(x)\,A(x)\,C(x)$ и $\Phi(x)$ относительно $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, очевидно, что аналогично можно найти два других тождества, получающихся из (A) круговой перестановкой полиномов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ между собой.

Обратно, если три тождества второй леммы выписаны, то из них легко вывести, что $-A(x)\,B(x)-A(x)\,C(x)-B(x)\,C(x)$ есть квадрат элемента поля $R(\alpha_i)$ для любого корня α_i полинома $A(x).B(x).C(x)$.

§ 3. Доказательство достаточности

Условие 1) нашей теоремы влечет, как показано в лемме II, тождество

$$-B(x)=A(x)\,[f(x)]^2-C(x)\,D(x), \qquad (A)$$

где полиномы $A(x)$ и $D(x)$ взаимно-простые, а $\mathrm{ст}\,f(x)\leqslant\mathrm{ст}\,C(x)-1$,

Полином $D(x)$, вообще говоря, может быть не взаимно-прост с полиномом $B(x)$, а также делиться на квадрат некоторого полинома $\Delta(x)$.

Таким образом

$$D(x) = [\Delta(x)]^2\, b(x)\, D_1(x),\quad B(x) = b(x)\, B_1(x),$$

где $b(x)$—общий наибольший делитель полиномов $B(x)$ и $D(x)$.

Полином $f(x)$ взаимно-прост с $\Delta(x)$, так как $B(x)$ не делится на квадрат полинома; наоборот, из тождества (A) ясно, что $f(x)$ должен делиться на $b(x)$, и поэтому

$$(x) = f_1(x)\, b(x).$$

После этих замечаний тождество (A) можно записать в форме:

$$-B_1(x) = A(x)\, b(x)\, [f_1(x)]^2 - C(x)\, D_1(x)\, [\Delta(x)]^2 \ldots\ldots, \qquad (B)$$

причем $\text{ст}\, f_1(x) \leqq \text{ст}\, C(x) - \text{ст}\, b(x) - 1$.

Далее без ущерба для общности рассуждения можно положить

$$\text{ст}\, A(x) \leqslant \text{ст}\, B(x) \leqslant \text{ст}\, C(x). \qquad (a)$$

Сопоставим всякому уравнению типа (I) целое положительное число

$$l = 2\ \text{ст}\, A(x) + \text{ст}\, B(x) + \text{ст}\, C(x),$$

которое назовем его индексом.

Доказательство достаточности условий 1), 2), 3) для разрешимости всех уравнений вида (I) проведем способом индукции по индексу, причем существенную роль будет играть „процесс понижения индекса", описанный ниже.

Непосредственно установим сначала справедливость теоремы для индексов $l = 0,1,2$,

В случае индекса $l = 0$ полиномы $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, очевидно, обращаются соответственно в числа a_0, b_0, c_0, и наше утверждение тривиально. (Обеспечивается условиями 2) и 3)).

Если $l = 1$, то уравнение (I) имеет вид:

$$X^2 + aY^2 + b(x-d)\, Z^2 = 0.$$

Используя условия 1) или 2)

$$\Phi(d) = -a = p^2,$$

находим решение:

$$X = d + b - x,\quad Y = \frac{d-b-x}{p},\quad Z = 2.$$

Если $l = 2$, уравнение (I) принимает форму:

$$X^2 + a(x-c)\, Y^2 + b(x-d)\, Z^2 = 0,$$

для которого условие 1) теоремы дает

$$-b(c-d) = p^2,\ -a(d-c) = q^2,$$

после чего решение уравнения имеет вид

$$X = c-d,\quad Y = \frac{c-d}{q},\quad Z = \frac{d-c}{p}.$$

Опишем некоторый „процесс понижения индекса", принадлежащий в основных чертах Лагранжу, впервые примененному им при доказательстве разрешимости в целых числах целочисленного уравнения

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

Именно, беря уравнение (I) индекса I в форме

$$A(x)X^2 + B(x)Y^2 = -C(x)Z^2,$$

а тождество (B) в виде

$$A(x)b(x)\,[f_1(x)]^2 + B_1(x) = C(x)\,[\Delta(x)]^2\,D_1(x),$$

перемножив их, получим уравнение

$$b(x)X_1^2 + A(x)\,B_1(x)\,Y^2 + D_1(x)\,Z^2 = 0, \qquad (II)$$

где положено

$$X_1 = A(x)f_1(x)\,X + B_1(x)\,Y,\ Y_1 = b(x)f_1(x)\,Y - X,\ Z_1 = \Delta(x)C(x)Z.$$

Установим индекс I_1 уравнения (II).
Если ст $B_1(x) >$ ст $[A(x)\,b(x)\,[f_1(x)]^2]$, то, приняв во внимание соотношение (a), легко видеть, что ст $B_1(x) =$ ст $B(x) =$ ст $C(x)$, следовательно, ст $b(x) = 0$, ст $D_1(x) = 0$, ст $\Delta(x) = 0$.
Поэтому

$$I_1 = \text{ст } A(x) + B_1(x) < I.$$

Если же ст $B_1(x) =$ ст $[A(x)\,B(x)[f_1(x)]^2]$, то в силу (a) ст$[A(x)(f_1(x))^2] =$ ст $B(x) =$ ст $C(x)$, следовательно, ст $\Delta(x) =$ ст $D_1(x) =$ $=$ ст $b(x) = 0$ и снова

$$I_1 = \text{ст } A(x) + \text{ст } B_1(x) < I.$$

Наконец, если ст $B_1(x) <$ ст $[A(x)\,b(x)\,[f_1(x)]^2]$, то индекс уравнения (II) будет равен
или (когда ст $b(x) \leqslant$ ст $D_1(x)$ и ст $[A_1(x)\,B_1(x)]$)

$$I_1 = 2\,\text{ст } b(x) + \text{ст } A(x) + B_1(x) + \text{ст } D_1(x) \leqslant I - 2\ \text{ст. } \Delta(x) - 2,$$

или (когда ст $b(x) \geqslant$ ст $D_1(x)$ и ст $[A(x)\,B_1(x)] \geqslant$ ст $D_1(x)$)

$$I_1 = 2\text{ст } D_1(x) + \text{ст } A(x) + \text{ст } [B_1(x)\,b(x)] < \text{ст } A(x) + \text{ст } B(x) +$$
$$+ \text{ст } [b(x)\,D_1(x)],$$
$$I_1 \leqslant I - 2\ \text{ст } \Delta(x) - 2,$$

или (когда ст $[A(x)\,B_1(x)] \leqslant$ ст $D_1(x)$ и ст $[A(x)\,B_1(x)] <$ ст $b(x)$)

$$I_1 = 2\text{ст } [A(x)\,B_1(x)] + \text{ст } [b(x)\,D_1(x)] < \text{ст } [A(x)\,B_1(x)] + \text{ст } b(x) +$$
$$+ \text{ст } [b(x)\,D_1(x)].$$
$$I_1 < I - 2\text{ст } \Delta(x) - 2.$$

Условие 1) доказываемой теоремы для уравнения (II) воспроизводится.
Действительно, полином

$$-A(x)\,B(x) - D_1(x)\,b(x) - A(x)\,B_1(x)\,D_1(x)$$

обращается в квадрат элемента любого поля $R(\alpha_l)$ для всякого корня α_l полинома $A(x)\,B(x)\,D_1(x)$.
1) Если α_l корень $A(x)$, докажем, что $-D_1(\alpha_l)\,b(\alpha_l)$ является квадратом элемента поля $R(\alpha_l)$.
Из тождества (B_1)

$$B_1(\alpha_l) = C(\alpha_l)\,[\Delta(\alpha_l)]^2\,D_1(\alpha_l).$$

Из условия 1) для (I)

$$-\frac{B(\alpha_l)}{C(\alpha_l)} = \left(\frac{\lambda}{C(\alpha_l)}\right)^2,\ \lambda \in R(\alpha_l),$$

следовательно, искомое выражение равно $\left(\frac{\Delta(\alpha_i)\lambda}{C(\alpha_i)}\right)^2$.

2) Если α_i корень $B_1(x)$, из условия 1) для (I):

$$A(\alpha_i)\ C(\alpha_i) = \lambda^2,\ \lambda \quad R(\alpha_i).$$

Из тождества (B_1): $A(\alpha_i)\ b(\alpha_i)\ |f_1(\alpha_i)|^2 = C(\alpha_i)\ |\Delta(\alpha_i)|^2\ D_1(\alpha_i)$.
Отсюда

$$D_1(\alpha_i)\ b(\alpha_i) = \left(\frac{\lambda\, b(\alpha_i)\ f_1(\alpha_i)}{C(\alpha_i)\ \Delta(\alpha_i)}\right)^2.$$

3) Если α_i корень $b(x)$, проверим, что $A_1(\alpha_i)\ B_1(\alpha_i)\ D_1(\alpha_i)$ является квадратом элемента поля $R(\alpha_i)$.
Из условия 1) для (I): $A(\alpha_i)\ C(\alpha_i) = \lambda^2$, $\lambda \in R(\alpha_i)$.
Из тождества (B): $B_1(\alpha_i) = C(\alpha_i)\ |\Delta(\alpha_i)|^2\ D_1(\alpha_i)$.
Отсюда:

$$A(\alpha_i)\ B_1(\alpha_i)\ D_1(\alpha_i) = |\lambda\, \Delta(\alpha_i)\ D_1(\alpha_i)|^2.$$

4) Если α_i корень $D_1(x)$, снова, принимая во внимание условие 1) нашей теоремы и тождество (B), получим соотношение

$$A(\alpha_i)\ B(\alpha_i) = \left(\frac{B_1(\alpha_i)}{f_1(\alpha_i)}\right)^2.$$

Условие 1) для уравнения (II) влечет наличие тождества, аналогичного тождеству (A). Следовательно, индекс можно понижать дальше.

Процесс понижения индекса, очевидно, конечен.

Предположим достаточность условий 1), 2) или 1), 3) для всех уравнений типа (I) индекса $< l$, причем пусть $l \geqslant 3$.

Отсюда покажем, что указанных условий достаточно для разрешимости всех уравнений типа (I) индекса равного l. Если это удастся, теорема верна вообще, так как для $l = 0, 1, 2$ она доказана.

Благодаря процессу понижения без ограничения общности, очевидно, можно ограничиться рассмотрением уравнения вида (II), вместо всех уравнений индекса $< l$.

Условие 1) для уравнения (II), как мы видели, вытекает из условия 1) для уравнения (I).

Остается для уравнения (II) проверить воспроизводство двух других условий нашей теоремы.

Пусть степени всех полиномов $b(x)$, $A(x)\ B_1(x)$ и $D_1(x)$ имеют одинаковую четность. Тогда, в случае ст $B_1(x) >$ ст $\{A(x)\ b(x)\ |f_1(x)|^2\}$, имеем ст $D_1(x) = 0$, ст $b(x) = 0$, ст $\Delta(x) = 0$, т. е., ст $|A(x)\ B(x)|$ равна четному числу. Из последнего и из ст $B(x) =$ ст $C(x)$ заключаем об одинаковой четности степеней всех полиномов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$. Но тогда уравнение

$$a_0x^2 + b_0y^2 + c_0z^2 = 0 \qquad (1)$$

арифметически разрешимо. Кроме того, из тождества, являющегося следствием условия 1) для уравнения (I), в рассматриваемом случае, имеем

$$b_0^{(1)} = c_0\, \Delta_0^2\, d_0^{(1)}, \qquad (\alpha)$$

где $b_0^{(1)}$, Δ_0, $d_0^{(1)}$ — старшие коэффициенты соответственно полиномов $B_1(x)$, $\Delta(x)$, $D_1(x)$.

Из (α) и (1) легко видеть, что уравнение

$$b_0^{(2)}x^2 + a_0b_0^{(1)}y^2 + d_0^{(1)}z^2 = 0, \qquad (2)$$

где $b_0^{(2)}$ старший коэффициент $b(x)$, арифметически разрешимо. Причем, если x, y, z, — решение уравнения (1), то решение x_1, y_1, z_1 уравнения (2) получается из соотношений:

$$x_1 = b_0^{(1)} y,\ y_1 = x,\ z_1 = c_0 \Delta_0 z.$$

В случае ст $B_1(x) =$ ст $\{A(x)\, b(x)\, [f_1(x)]^2\}$, следовательно, ст $B_1(x) =$ ст $\{C(x)\, D_1(x)\, [\Delta(x)]^2\}$: снова имеем ст $b(x) = 0$, ст $D_1(x) = 0$, ст $\Delta(x) = 0$, и, таким образом, ст $[A(x)\, B_1(x)]$ равна четному числу. Отсюда ясно, что степени всех полиномов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ должны иметь одинаковую четность.

Из тождества для уравнения (I) в этом случае, имеем:

$$a_0 b_0^{(2)} (f_0^{(1)})^2 + b_0^{(1)} = c_0 d_0^{(1)} (\Delta_0)^2, \tag{3}$$

где $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$ старшие коэффициенты полиномов $B_1(x)$, $b(x)$.

Представляя уравнение (1) в виде

$$a_0 x^2 + b_0 y^2 = -c_0 z^2 \tag{γ}$$

и помножив (β) на (γ), получим уравнение

$$b_0^{(2)} x^2 + a_0 b_0^{(1)} y^2 + d^{(1)}{}_0 z^2 = 0, \tag{2}$$

решение которого

$$x_1 = a_0 f_0^{(1)} x + b_0^{(1)} y,\ y_1 = x - b_0^{(2)} f_0^{(1)} y, z_1 = \Delta_0 c_0 z$$

становится тотчас известным, как только известно решение x, y, z уравнения (1).

Наконец, если ст $B_1(x) <$ ст $\{A(x)\, b(x)\, [f_1(x)]^2\}$, то из одинаковой четности ст $b(x)$ и ст $[A(x)\, B_1(x)]$, (так как ст $Ax +$ ст $b(x) +$ ст $B_1(x) =$ $=$ ст $[A(x)\, B(x)] =$ четному числу) заключаем об одинаковой четности степеней полиномов $A(x)$ и $B(x)$. А из соотношения

$$\text{ст}\ \{A(x)\, b(x)\, [f_1(x)]^2\} = \text{ст}\ \{C(x)\, D_1(x)\, [\Delta(x)]^2\}$$

об одинаковой четности степеней полиномов $A(x)$ и $C(x)$.

Таким образом, снова степени всех полиномов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ должны иметь одну и ту же четность. Но тогда, принимая во внимание соотношение

$$a_0\, b_0^{(2)} (f_0^{(1)})^2 = c_0 d_0^{(1)} [\Delta_0]^2,$$

легко из арифметической разрешимости уравнения (1) показать арифметическую разрешимость уравнения (2).

При этом решение x, y, z уравнения (1) и решение x_1, y_1, z_1 уравнения (2) связаны формулами

$$x_1 = a_0 f_0^{(1)} x,\ y = b_0^{(2)} f_0^{(1)} y,\ z_1 = c_0 \Delta_0 z.$$

Тем самым во всех случаях доказано, что если условия 1), 2) выполнены для уравнения (I), то они также выполняются и для уравнения (II).

Пусть, далее, в уравнении (II) два из трех полиномов

$$b(x),\ A(x) B_1(x),\ D_1(x)$$

имеют степени одинаковой четности, а степень третьего из них иную четность.

Если ст $B_1(x) >$ ст $\{A(x)\, b(x)\, [f_1(x)]^2\}$, то степени полиномов $b(x)$ и $D_1(x)$, как мы видели, равны нулю и таким образом обе четны.

Но тогда мы должны принять ст $|A(x)\,B_1(x)| = 2k+1$, где k целое число. Из последнего ясно, что ст $B(x)$ и ст $A(x)$ — числа различной четности, а из

$$\text{ст } B_1(x) = \text{ст } \{C(x)\,D_1(x)\,\Delta(x)|^2\} \qquad (\delta)$$

усматривается одинаковая четность ст $B(x)$ и ст $C(x)$.

По условию 3) для уравнения (I) имеем соотношение

$$\frac{b_0}{c_0} = r^2,$$

где r рациональное число.

Отсюда и из (δ) легко видеть, что имеет место равенство

$$\frac{b_0^{(2)}}{d_0^{(1)}} = r_1^2,$$

где r_1 рациональное число.

Случай ст $B_1(x) = \text{ст } \{A(x)\,b(x)\,|f_1(x)|^2\} = \text{ст } \{C(x)\,D_1(x)\,|\Delta(x)|^2\}$ невозможен, так как, с одной стороны, ст $|A(x)\,B_1(x)| = 2k+1$ и, следовательно, степени полиномов $A(x)$ и $B(x)$ должны иметь разную четность, а ст $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — должны являться числами одинаковой четности.

Наконец, пусть

$$\text{ст } B_1(x) < \text{ст } \{A(x)\,b(x)\,|f_1(x)|^2\} = \text{ст } \{C(x)D_1(x)\,|\Delta(x)|^2\}.$$

Отсюда, когда $b(x)$ и $D_1(x)$ имеют степени одинаковой четности, то степени полиномов $A(x)$ и $C(x)$ одной и той же четности, а так как четность ст $|A(x)\,B_1(x)|$ иная, нежели ст $b(x)$, то ст $|A(x)\,B(x)| = 2k+1$ и степень $B(x)$ иной четности, чем ст $A(x)$ и ст (x). Легко проследить, как из соотношения

$$\frac{a_0}{b_0} = r^2,$$

где r рациональное число, получается соотношение

$$\frac{b_0^{(2)}}{d_0^{(1)}} = r_1^2,$$

где r_1 рациональное число.

Когда же степени $b(x)$ и $D_1(x)$ имеют различную четность, то из ст $\{A(x)\,b(x)\,|f_1(x)|^2\} = \text{ст } \{C(x)\,D_1(x)\,|\Delta(x)|^2\}$ явствует, что ст $A(x)$ и ст $C(x)$ — числа различной четности. При этом, если ст $|A(x)\,B_1(x)|$ одинаковой четности со ст $b(x)$, то ст $A(x)$ и ст $B(x)$ являются числами одинаковой четности, а ст $C(x)$, следовательно, будет иметь другую четность; если же ст $|A(x)\,B_1(x)|$ и ст $b(x)$ имеют различную четность, то степени полиномов $A(x)$ и $B(x)$ — числа неодинаковой четности, следовательно, четность полиномов $B(x)$ и $C(x)$ совпадает, являясь иной, нежели четность полинома $A(x)$.

В первом из двух только что перечисленных случаев по условию 3) для уравнения (I) будет

$$\frac{a_0}{b_0} = r^2,$$

где r — рациональное число, откуда получаем

$$\frac{b_0^{(2)}}{a_0 b_0^{(1)}} = r_1^2,$$

где r_1 — рациональное число.

Во втором случае из соотношения

$$\frac{b_0}{c_0} = r^2,$$

где r — рациональное число, легко получим

$$-\frac{d_0^{(1)}}{a\, b_0^{(1)}} = r_1^2,$$

где r_1 — рациональное число.

Тем самым показано, что при всех предположениях относительно степеней полиномов-коэффициентов уравнений (I) и (II) из условий 1), 2) первого, следуют условия 1), 2) второго; из условий 1), 3) первого, следуют условия 1), 3) второго.

По предложению все уравнения индекса $< I$, для которых условия 1), 2 или 1), 3) соблюдены, разрешимы. Пусть X_1, Y_1, Z_1 решение уравнения (II), тогда легко усмотреть X, Y, Z — решение уравнения (I).

Таким будет:

$$X = b(x) f_1(x) X_1 - B_1(x) Y, \quad Y = X_1 + A(x) f_1(x) Y_1, \quad Z = \Delta(x) D_1(x) Z_1.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lagrange. Sur la solution des problémes indetérminés du second degré, Oeuvres de Lagrange, т. II, 1868, стр. 375.
2. Лежен Дирихле. Лекции по теории чисел, 1936, стр. 365—68.

Кафедра алгебры
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ ШИРОТЫ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ им. ЭНГЕЛЬГАРДТА ПО СПОСОБУ ТАЛЬКОТТА ЛЕТОМ 1948 года

В. И. Анжина

Летом 1948 года, при прохождении на Энгельгардтовской обсерватории производственной практики, мною были выполнены наблюдения широты зенит-телескопом обсерватории по методу Талькотта. Описание процесса этих наблюдений, их обработки и полученных результатов и составляет содержание настоящей работы.

Наблюдения были выполнены на зенит-телескопе Бамберга, установленном в специальном павильоне обсерватории с раздвижной крышей на надежном каменном фундаменте. Главные характеристики инструмента следующие: фокусное расстояние трубы 1150 мм, диаметр объектива 90 мм, увеличение рабочего окуляра 90; окулярный микрометр имеет цену деления 44,″7; сетка нитей состоит из 11 постоянных вертикальных нитей и одной подвижной горизонтальной нити; талькоттовский уровень имеет две трубы с подписью делений от 0 до 40 и от 50 до 90. Цена одного деления обоих уровней близка к 1,″2. Вертикальный круг имеет цену деления 1′, горизонтальный—10″. Наблюдения велись с помощью звездного хронометра № 437 фирмы Эриксон.

Подготовка наблюдений и их процесс выполнялись в следующем порядке. За час до наблюдений открывалась крыша павильона, что приводило к уравниванию до наблюдений температуры в павильоне и вне его. Затем отсчитывались и записывались показания барометра и термометра при нем. Производилась поверка установки инструмента и его тщательная нивелировка. После этого начинались наблюдения.

Порядок наблюдений следующий:

1. Из рабочего списка пар, составленного для Энгельгардтовской обсерватории, выбиралась пара, которая должна кульминировать в ближайшее время.

Устанавливалась труба по зенитному расстоянию, равному среднему арифметическому из зенитных расстояний северной и южной звезд пары, ставилось на барабане число оборотов, данное в программе наблюдений для первой по времени звезды. После этого труба поворачивалась по высоте до тех пор, пока пузырек талькоттовского уровня не приходил приблизительно на середину; далее зажимался закрепительный винт трубы и вращением ее микрометренного винта пузырек уровня возможно точнее приводился на середину. Когда пузырек окончательно успокаивался, закреплялся зажимной винт трубы, закрепительный же винт алидады вертикального круга отпускался, это делалось для устранения гнутия во всей алидадной системе и предоставления уровням свободы в показании изменения положения трубы.

2. Когда звезда появлялась в поле зрения, подвижная нить ставилась на звезду действием микрометренного винта барабана микрометра.

3. Брались отсчеты I и II уровней Талькотта.

4. Наблюдалось прохождение звезды через постоянные нити, наводя на нее в эти моменты подвижную нить микрометра и беря его отсчеты. Звезда наблюдалась на определенных местах, в зависимости от того, северная звезда или южная. Эти места на нижеприведенной схеме указаны звездочкой.

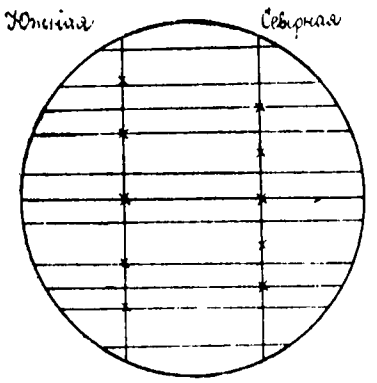


Рис. 1

5. Вторично отсчитывались уровни в обратном порядке (II—I.). Отмечалась температура по термометру, находящемуся при инструменте.

6. Затем инструмент поворачивался на 180°, подвижная нить ставилась на соответствующий оборот барабана микрометра, данный в программе наблюдений для второй звезды. Если пузырек уровня значительно уклонялся от середины, он приводился на середину трубки микрометренным винтом трубы.

7. Наблюдалась вторая звезда пары в том же порядке, как и первая.

В таком порядке велись наблюдения. Период наблюдений занимает время июнь—июль 1948 года. Всего произведено 40 наблюдений.

Обработка наблюдений велась по известной формуле, нахождения широты по методу Талькотта:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{2}(m_0 + m_w)R'' + \frac{1}{2}(i_0 - i_w)\cdot\tau'' + \Delta\rho + k_1,$$

где δ_1 — склонение первой звезды
δ_2 — склонение второй звезды
m_0 — значение показания микрометра при восточном круге
m_w — значение показания микрометра при западном круге
R'' — цена оборота микрометра
i_0 — значение показания уровня при круге восточном
i_w — значение показания уровня при круге западном
τ'' — половина цены деления уровня в секундах дуги
$\Delta\rho$ — поправка за рефракцию
k — поправка за кривизну параллели.

Порядок обработки наблюдений рассмотрим на примере обработки пары IX—I (22872—23073 номера по каталогу Босса), наблюдавшейся с 9 на 10 июня 1948 г.

1. Первым шагом обработки являлось нахождение среднего арифметического из отсчетов микрометра для каждой звезды пары.

m_w 10.9824 — среднее из отсчетов при круге западном,
m_0 30.2348 — среднее из отсчетов при круге восточном.

2. Затем находились поправки отсчетов за периодические и поступательные ошибки микрометра, которые брались из специальных таблиц поправок Энгельгардтовской обсерватории; для данных отсчетов микрометра они оказались равными: —0:0099
—0.0107

3. Затем записывались отсчеты микрометра, исправленные за указанные ошибки винта:

круг западный m_w 10.9725
круг восточный m_0 30.2241

4. Составлялась полуразность отсчетов микрометра: I 2 $(m_0 - m_w) = +9{,}6258$, которая умножалась на цену оборота микрометра. Цена оборота микрометра бралась из таблицы обсерватории „Значение R для различных температур". При наблюдении этой пары $t = +14°.8$ и $R = 44''7364$, при этом указанное выше произведение оказалось равным:

$$\frac{1}{2}(m_0 - m_w)\,R'' = 9{,}6258 \times 44''7364 = +7'10''27.$$

5. После этого находилась поправка за уровень.

Для зенитителескопа Энгельгардтовской обсерватории при восточном круге отсчеты микрометра с увеличением зенитного расстояния—уменьшаются, когда нуль—вдали от объектива. При западном круге отсчеты микрометра с увеличением зенитного расстояния увеличиваются, когда нуль—вблизи от объектива. Следует заметить, что после перевода трубы через зенит поправки за уровень для данного инструмента не изменяются, поэтому общей формулой для наклонности будет формула:

$$i = (n + \bar{n}) - \bar{m};$$

так как нам нужно иметь не самые наклонности, а их полуразности, то эти величины целесообразнее представить в виде:

$$\frac{1}{2}(i_0 - i_w) = \frac{1}{2}[(n + \bar{n})_0 - (n + \bar{n})_w].$$

Таким образом, эти полуразности для обоих уровней получаются следующим образом:

I—уровень		II—уровень	
круг западный	круг восточный	круг западный	круг восточный
11.20	17.70	57.70	59.50
32.50	34.20	74.15	76.20
43.70	51.90	131.85	135.70

Эти величины мы получили в делениях уровня, в формулу же для φ входит величина $\frac{1}{2}(i_0 - i_w) \cdot \tau''$, где τ''—половина цены деления уровня в секундах дуги. Поэтому для получения этой величины следует $(i_0 - i_w)$ умножить на $\frac{1}{4}$ цены деления уровня. В нашем случае для I уровня точная величина $\frac{1}{4}\tau''$ равна $0''.2937$, а для II уровня $\frac{1}{4}\tau'' = 0'',2964$

$$8.20 \times 0''2937 = +2''41$$
$$3.85 \times 0''2964 = +1''{\cdot}14.$$

Среднее из этих величин дает: $\frac{1}{2}(i_0 - i_w)'' = +1''77$.

6. Затем вычислялась величина $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$. Средние координаты звезд брались из общего каталога Босса, в котором отыскивались

номера данных звезд пары и вычислялись склонения и прямые восхождения для 1948 года по известным формулам:

$$\delta_{1948_0} = \delta_0 + t\,(\text{An Var})_\delta + \frac{t^2}{200}\,(\text{Sec Var})_\delta$$

$$\alpha_{1948^0} = \alpha_0 + t\,(\text{An Var})_\alpha + \frac{t^2}{200}\,(\text{Sec Var})_\alpha$$

$22872\,\delta_{1950}$	$+\ 67°33'18''56$	α_{1950}	$16^h55^m47^s69$
$t(\text{AnVar})_\delta$	$+\ 11''08$	$t\,(\text{An Var})_\alpha$	$+\ 0^s08$
$t^2/200\,(\text{Sec Var})_\delta$	$+\ 0''00$	$\alpha_{1948} =$	$16^h55^m47^s77$
δ_{1948}	$=+\ 67°33'29''64$		

$23073\ \delta_{1950}$	$+\ 43°52'44''81$	α_{1950}	$+\ 17^h03^m33^s44$
$t\,(\text{An Var})_\delta$	$+\ 9''78$	$t\,(\text{An Var})_\alpha$	3^s65
$t^2/200\,(\text{Sec Var})_\delta$	$+\ 0''00$	α_{1948}	$= +\ 17^h03^m29^s79$
$\delta_{1948} =$	$+\ 43°52'54''59$		

после чего находим зенитное расстояние $Z = \varphi \quad \delta$; $Z = 7'05''92$ и разность $(Z_s - Z_n)$, где $Z_s = \varphi \quad \delta_2$, $Z_n = \varphi\ , \ \delta_1$.

$$Z_n = \quad 11°43'11''61, \quad Z_s = 11°57'23''10.$$

Составляем $(Z_s - Z_n) = +\ 14'11''49$. По найденным величинам Z_n $(Z_s - Z_n)$ по таблицам рефракции отыскивалась поправка за рефракцию, которая и вводилась в окончательную формулу для φ. Эта поправка оказалась равной $\Delta\rho = +\ 0''12$.

7. После этого по известным формулам с помощью астрономического ежегодника за 1948 год вычислялось приведение на видимое место по склонению $\Delta\delta$, которое оказалось равным:

$$\Delta\delta = -\ 6''50.$$

После этого видимое склонение оказалось равным $\delta = 55°43'05''60$. Чтобы окончательно получить широту, нужно еще ввести поправку за кривизну параллели, которая вычисляется по формуле:

$$k = \frac{15^2}{4^n} \cdot \text{Sin}\ 1'' \left[\Sigma f_s^2\, \Delta \operatorname{tg} \delta_s + \Sigma f_n^2 \operatorname{tg} \delta_N\right],$$

где n — число наведений,

f — условное расстояние от средней нити того места поля зрения, где сделана установка подвижной нити на звезду.

$\delta_{s,N}$ склонение звезды (южной, северной)

Но так как наведения делались в определенных местах поля зрения, то все f будут при всех наблюдениях одинаковы и следовательно суммы Σf_s^2 и Σf_n^2 будут для всех наблюдений постоянны и вычисляются один раз для данной пары.

В рассматриваемом примере эта поправка оказалась равной

$$k = 0.''08.$$

Поправка за наклон подвижной нити не учитывалась, так как известно, что при симметричном расположении наблюдений, на постоянных нитях, около меридиана обеих звезд, эта последняя практически равна нулю.

Для того, чтобы окончательно получить широту, следует просуммировать все вычисленные выше члены:

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \quad +55°43'05''60$$

$$\frac{1}{2}(m_0 \quad m_w)R'' \quad + \quad 7'10''27$$

$$\frac{1}{2}(i_0 - i_w)\tau'' \quad + \quad 1''77$$

$$\Delta\varphi \quad + \quad 0''12$$

$$k \quad + \quad 0''08$$

$$\varphi \quad +55°50'17''84$$

Подобным образом были обработаны все наблюденные 40 пар.

Результаты этой обработки приведены в нижеследующей таблице

№	Название пары	Дата 1948 г.	φ	V	V^2
1	VIII—6	9—10 VI	55°50'17''55	—0.''82	+0''6724
2		15—16 VII	17''44	— 0.93	.8649
3		24—25	18''01	— 0.36	.1296
4		26—27	18''08	— 0.29	.0841
5		27—28	18''54	+ 0.17	.0289
6	IX—1	9—10/VI	17''84	— 0.53	.2809
7		10—11/VII	19''01	+ 0.64	4096
8		15—16	19''27	+ 0 90	.8100
9		24—25	18''34	— 0.03	.0009
10		26—27	19''26	+ 0.89	.7921
11	IX—2	9—10 VI	18''59	+ 0.22	.0484
12		8—9/VII	18''12	— 0.25	.0625
13		10—11	18''76	+ 0.39	.1521
14		26—27	19''28	+ 0.91	.8281
15	IX 4	26—27/VII	55°50' 18''34	— 0''03	0.0009
16	IX—5	8—9	17''61	— 0.76	.5776
17		10—11	17''82	— 0.55	.3025
18		24—25	18''48	+ 0.11	.0121
19		26—27	18''17	— 0.20	.0400
20		27—28	17''51	— 0.86	.7396
21	137	13—14	18''19	— 0.18	.0324
22		16—17	18''37	0.00	.0000
23		24—25	18''67	0.30	.0900
24		26—27	18''14	— 0.23	.0529
25	138	13—14	18''15	— 0.22	.0484
26		15—16	18''48	+ 0.11	.0121
27		16—17	18''70	0.33	.1089
28		24—25	18''82	+ 0.45	.2025
29		26 27	18''44	+ 0.07	.0049
30	136	13—14/VII	18''68	+ 0.31	.0961
31		15—16	18''49	+ 0''12	.0144
32		16—17	18''76	+ 0''39	.1521
33		24—25	18''75	+ 0''38	.1444
34		26—27	18''66	+ 0''29	.0841
35	131	15—16	18''48	+ 0''11	.0121
36		16—17	18''51	+ 0''14	.0196
37		24—25	18''57	+ 0''20	.0400
38		26—27	17''95	— 0''42	.1764
39	133	24—25	17''98	— 0''39	.1521
40		26—27	18''01	— 0''36	.1296
		φ среднее	55°50'18''370	Σ V^2	8''4102

Средняя квадратичная ошибке арифметической средины оказалась равной: $\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[VV]}{m(m-1)}} = \pm\sqrt{\frac{8''4102}{40\times 39}} = \pm\sqrt{\frac{8''4102}{1560}} = \pm 0''005.$

Таким образом, среднее значение широты будет равно:

$$\varphi = 55°50'18''370 \pm 0''005.$$

Полученная ошибка среднего вывода широты указывает на высокую точность результатов наблюдений, выражающуюся в линейной мере величиной порядка 16 см (полагая приближенно 1″ по широте, равной 30 метрам).

Полученное значение $\varphi = 55°50'18''370 \pm 0''005$ можно считать весьма близким к значению мгновенной широты Энгельгардтовской обсерватории для среднего момента наблюдения.

Кафедра астрономии
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВ КРИВЫХ НА СФЕРЕ

А. И. Фет

Семейства кривых на сфере были предметом многочисленных работ. Еще Биркгоф заметил, что наличие нестягиваемых семейств замкнутых кривых позволяет доказать существование замкнутой экстремали на многообразии, гомеоморфном сфере ([1], гл. V). В 1929 г. Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман исследовали категорию пространства замкнутых кривых на сфере [2], доказав, что она не ниже четырех; позже Л. А. Люстерник, пользуясь методом верхних гомологий, доказал, что категория пространства кривых с закрепленными концами на сфере бесконечна ([3], гл. IV).

Насколько нам известно, другие гомотопические инварианты функциональных пространств не изучались. В этой работе определяются фундаментальные группы пространства кривых с закрепленными концами и пространства неориентированных замкнутых кривых на сфере S^n. При этом оставлен в стороне вопрос о независимости топологии функционального пространства от выбора метрической реализации S^n и концов на S^n. Мы рассматриваем этот вопрос в другой работе [6].

§ 1. Пространство кривых с закрепленными концами

А. Пространство $\Omega_{ab}(S^n)$ [4] состоит из всех кусочно непрерывно дифференцируемых дуг на S^n с концами a, b $(a \neq b)$.
При $l_1 \in \Omega_{ab}(S^n)$, $l_2 \in \Omega_{ab}(S^n)$ полагаем:

$$\rho(l_1, l_2) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \rho_{S^n}(P_t, q_t) + |J(l_1) - J(l_2)|,$$

где $\rho_{S^n}(p,q)$ — расстояние на S^n, $J(l)$ — длина кривой l, p_t (соотв. q_t) — точка на l_1 (соотв. l_2), делящая длину l_1 (соотв. l_2) в отношении $t:(1-t)$. t называется приведенным параметром точки p_t на l_1.

Можно доказать (см. [6]), что, с точностью до гомеоморфизма, $\Omega_{ab}(S^n)$ не зависит ни от метрики S^n, ни от точек $a \neq b$. Поэтому мы ограничимся случаем, когда S^n — правильная сфера в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве E^{n+1}, а точки a, b $(a \neq b)$ не диаметрально противоположны на S^n. Мы будем писать вместо $\Omega_{ab}(S^n)$ просто Ω.

В. Обозначим соединяющие a с b дуги больших кругов (вообще говоря, налегающие на самое себя), расположенные в порядке возрастания длин, через $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots$. Тогда, как известно, для геодезической g_k типовые числа $m^j = 0$ при $j \neq k\,(n-1)$, а $m^{k(n-1)} = 1$ (см. [5], § 15). Каждая геодезическая g_k может быть заключена в многообразие M_k ломаных геодезических, такое, что некоторая окрестность $U(g_k)$ в Ω может быть деформирована на Ω в подмножество M_k ([5], § 14), причем g_k остается неподвижной. Пусть соответствующая деформация будет $\varphi_t(l)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ l \in \Omega)$. Возьмем $\varepsilon > 0$, такое, что 2ε-окрестность пространства Ω $U(g_k, 2\varepsilon) \subset U(g_k)$.

Положим

$$\psi_t(l)=\begin{cases}\varphi_t(l)\ (l\in U(g_k,\varepsilon))\\ \varphi_{\delta t}(l)\ \left(l\in|U(g_k,2\varepsilon)\setminus U(g_k,\varepsilon)|,\ \delta=\dfrac{2\varepsilon-\rho(g_k,l)}{\varepsilon}\right)\\ l\ (l\in U(g_k,2\varepsilon),\end{cases}$$

где $0\leqslant t\leqslant 1$, и доопределим $\psi_t(l)$ для всех $l\in\Omega$, положив $\psi_t(l)=l$ при $0\leqslant t\leqslant 1$, $l\overline{\in}U(g_k)$.

Заметим, кроме того, что, по характеру деформации φ_t, $J(\varphi_t(l))$ есть неубывающая функция от t. Таким образом, обозначая через $(J<c)$ множество $l\in\Omega$ таких, что $J(l)<c$, имеем:

$$\psi_1((J<c_k)\cup U(g_k,\varepsilon))\subset|(J<c_k)\cup M_k|,\ \text{где}\ c_k=J(g_k).$$

C. Ломаные геодезические $l\in M_k$ зависят от конечного числа параметров $x^1\ldots x^{r_k}$; положим

$$J(x^1\ldots x^{r_k})=J(l(x^1\ldots x^{r_k})).$$

Согласно [5], § 14, $J(x^1\ldots x^{r_k})$ имеет g_k единственной стационарной точкой, если только M_k не содержит $g_j(j\neq k)$, что очевидно, можно предполагать; кроме того, g_k есть невырожденная стационарная точка $J(x^1\ldots x^{r_k})$ с типовыми числами $m^j=\delta^j_{k(n-1)}$

Согласно результатам М. Морса ([4], гл. V), существует окрестность $V(g_k)$ точки g_k на многообразии M_k, такая, что справедливо следующее предложение:

Через точку g_k пространства $(x^1\ldots x^{r_k})$ проходит кусок плоскости $P^{k(n-1)}$ размерности $k(n-1)$, лежащий, за исключением g_k, во множестве $(J<c_k)$. Существует деформация $\chi_t(l)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ окрестности $V(g_k)$ в $P^{k(n-1)}$ на M_k, при которой

$$\chi_t((J<c_k))\subset(J<c_k).\qquad(*)$$

Построение, аналогичное проведенному в п. (*B*), позволяет распространить деформацию χ_t на множество $[(J<c_k)\cap M_k]\cup V(g^k)$ с сохранением свойства (*) и так, чтобы все точки вне некоторой окрестности $W(g_k)\supset\overline{V(g_k)}$ оставались неподвижными.

Благодаря последнему свойству, можно распространить χ_t на множество

$$(J<c_k)\cup V(g_k)$$

пространства Ω, с сохранением свойства (*).

D. Известно ([5], § 16), что при любом $\delta>0$ множество $(J\leqslant c_{k+1}-\delta)$ можно на Ω деформировать в $(J<c_k)\cup U(g_k)$, где $U(g_k)$ любая заданная окрестность g_k на Ω.

E. Пусть дана замкнутая кривая Λ пространства Ω (точками которой являются кривые $l\in\Omega$). Множество $|\Lambda|$ точек кривой Λ компактно в Ω, как образ окружности. Поэтому результат любой деформации $|\Lambda|$ есть компактное множество.

Докажем, что, если $k(n-1)>1$ и $|\Lambda|\subset(J<c_{k+1})$, то можно деформировать Λ в $(J<c_k)$.

Выберем сначала $V(g_k)\subset M_k$, как в п. (*C*). Затем найдем столь малую окрестность на Ω $\widetilde{U}(g_k)\subset U(g_k)$ (см. п. (*B*)), чтобы было $\psi_1(\widetilde{U}(g_k))\subset V(g_k)$; это возможно, так как $\psi(g_k)=g_k$.

Заметим, что, в силу компактности $|\Lambda|$, $\sup_{l\in|\Lambda|}J(l)$ достигается на $|\Lambda|$, и потому меньше c_{k+1}.

Можно поэтому найти $\delta > 0$ такое, что $|\Lambda| \subset (J \leqslant c_{k+1} - \delta)$. Применяя деформацию п. (E), мы деформируем Λ в $(J < c_k) \cup \tilde{U}(g_k)$.

После этого шага Λ перейдет в Λ_1; $|\Lambda_1| = |\Lambda_{11}| \cup |\Lambda_{12}|$, где $|\Lambda_{11}| \subset (J < c_k)$, $|\Lambda_{12}| \subset V(g_k)$ — замкнутые подмножества $|\Lambda_1|$. Применим, наконец, деформацию γ_t п. (C). $\gamma_t(|\Lambda_{11}|) \subset (J < c_k)$, так что можно найти $\delta_1 > 0$ такое, чтобы было

$$\gamma_1(|\Lambda_{11}|) = |\Lambda_{11}'| \subset (J < c_k - \delta_1), \quad \gamma_1(|\Lambda_{12}|) = |\Lambda_{12}'| \subset P^{k(n-1)}.$$

Λ_{12}', как подмножество кусочно непрерывно дифференцируемой дуги, не заполняет никакого шара в $P^{k(n-1)}$, если только $k(n-1) > 1$. Пусть θ_t — изотопная деформация, переводящая $P^{k(n-1)}$ в себя, точку $p_0 \in |\Lambda_{12}'|$ — в g_k, оставляющая неподвижной границу $P^{k(n-1)}$.

Положим $\omega_t(p) = \theta_t(p)$ при $p \in |\Lambda_{12}'|$, $\omega_t(p) = p$ при $p \in |\Lambda_{11}'|$.

Применяя $\omega_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ ко множеству $|\Lambda_{11}'| \cup |\Lambda_{12}'|$, мы деформируем его в $(J < c_k)$, чем утверждение этого п. доказано.

F. При $n > 2$ фундаментальная группа Ω тривиальна.

В самом деле, в этом случае для всех $k > 0$ $k(n-1) > 1$, и, повторяя нужное число раз операции п. (E), мы деформируем произвольную замкнутую кривую Λ пространства Ω в кривую Λ', лежащую в $(J \leqslant c_1 - \delta)$, $\delta > 0$.

Применим затем деформацию п. (D) к кривой Λ'; получаем кривую Λ'', лежащую в сколь угодно малой окрестности $U(g_0)$ кратчайшей геодезической g_0. Применяя снова деформации п.п. (B), (C), получим Λ''', $|\Lambda'''| = |\Lambda_1'''| \cup |\Lambda_2'''|$, где $|\Lambda_1'''| \subset (J < c_0)$ — пустое множество, так как $(J < c_0)$ пусто, а $|\Lambda_2'''| \subset P0^{(n-1)} = g_0$. Итак, Λ деформирована в точку $g_0 \in \Omega$, так что в Ω нет нестягиваемых замкнутых кривых, ч. т. д.

G. При $n = 2$ фундаментальная группа Ω имеет не более одной независимой образующей.

При $n = 2$ геодезическая g_1 имеет типовое число $m^1 = 1$, так что соответствующая ей плоскость $P^{1(2-1)} = P^1$ есть прямолинейный отрезок, лежащий, за исключением g_1, в $(J < c_1)$.

Возьмем любой замкнутый путь Λ пространства Ω, с началом и концом в g_0 (известно, что выбор начала путей не влияет на фундаментальную группу). Деформации п.п. (B) (E) переводят Λ в Λ', лежащий в $(J \leqslant c_1 - \delta) \cup P^1$ $(\delta > 0)$.

Деформируем множество $(J \leqslant c_1 - \delta)$ в g_0, как в п. (F).

Несколько уменьшив δ, можно считать, что оба отрезка P_1^1 и P_2^1, на которые P^1 делится точкой g_1, своими концами лежат в $(J \leqslant c_1 - \delta)$. Пусть самая близкая к g_0 точка пересечения P_1^1 (соотв. P_2^1) с $(J \leqslant c_1 - \delta)$ будет a_1 (соотв. a_2). При деформации $(J \leqslant c_1 - \delta)$ в g_0 точки a_1, a_2 описывают дуги l_1, l_2, причем, поскольку деформация монотонно сокращает длину, каждая из дуг l_1, l_2 не имеет самопересечений. Только что определенная деформация переводит Λ' в дугу Λ'' с началом и концом в g_0, лежащую на дуге $l_1^{-1}, \overline{a_1 a_2}, l_2 = \sigma$. Но отсюда вытекает, что замкнутый путь Λ'' гомотопен $k\sigma$, где k — целое число. Итак, σ — единственная образующая.

H. Теорема 1. Фундаментальная группа Ω_{ab} (S^2) — бесконечная циклическая; при $n > 2$ фундаментальная группа Ω_{ab} (S^n) тривиальна.

Ввиду результатов пп. (F), (G), нам осталось только найти в фундаментальной группе Ω_{ab} (S^2) элемент бесконечного порядка.

Проведем через прямую $\overline{ab}$ полуплоскость P_φ в трехмерном пространстве под углом φ к заданной полуплоскости, проходящей через $\overline{ab}$. P_φ

высекает на S^2 кривую $l_\varphi \in \Omega$. Докажем, что $\tau = \{l_\varphi\}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, и есть искомый элемент бесконечного порядка. В самом деле, пусть $k\tau$ гомотопно нулю на Ω, т. е. существует деформация α_θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ пути $k\tau$, такая, что $\alpha_1(k\tau) = g_0$. Пусть $p_t(l_\varphi)$ есть точка на l_φ с приведенным параметром $t, 0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, $f(t,\varphi) = p_t(l_\varphi)$ есть непрерывное отображение тора $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ на S^2 степени k (где, при целом m, считается $l_\varphi = l_{\varphi + 2m\pi}$).

Полагая $f_\theta(t,\varphi) = p_t(\alpha_\theta(l_{k\varphi}))$, получаем деформацию $f = f_0$ в несущественное отображение f_1, так как f_1 (t,φ) суть точки g_0. Но это возможно лишь, когда степень отображения $k = 0$, что и требовалось доказать.

§ 2. Пространство замкнутых кривых

1. Пространство $\Pi(S^n)$ состоит из всех замкнутых кусочно непрерывно дифференцируемых кривых на S^n. На каждой кривой $l \in \Pi(S^n)$ можно ввести приведенный параметр t многими способами, в зависимости от выбора начала отсчета и ориентации на l.

Положим для l_1, $l_2 \in \Pi$ (S^n).

$$\rho(l_1,l_2) = \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} \max \rho_{S^n}(p_t,q_t) + |J(l_2) - J(l_1)|,$$

где p_t (соотв. q_t) точка на l_1 (соотв. l_2) с приведенным параметром t в данной параметризации, а inf берется по всевозможным приведенным параметризациям l_1 и l_2. Легко видеть, что метрика ρ удовлетворяет обычным аксиомам.

Почти так же, как в § 1, устанавливается, что при $n > 2$ всякая замкнутая кривая Λ пространства Π стягиваема в точку, а при $n = 2$ фундаментальная группа Π имеет одну образующую. При этом приходится представить S^n в виде эллипсоида с неравными осями и воспользоваться результатами Морса о типовых числах замкнутых геодезических, [4], гл. IX; в этом случае замкнутые геодезические образуют последовательность кривых возрастающей длины (главные эллипсы, повторенные целое число раз).

Докажем, что фундаментальная группа $\Pi(S^2)$—циклическая второго порядка. Представим снова S^2 как правильную сферу. Все окружности на S^2, плоскости которых проходят через заданную касательную прямую к S^2, образуют замкнутый путь M пространства Π, началом и концом которого служит точка касания (рассматриваемая как замкнутая кривая на S^2).

M покрывает сферу S^2 с индексом 1, а потому (см. [3], гл. V) M, рассматриваемый как цикл (mod 2) пространства Ω, не гомологичен нулю. Поэтому замкнутый путь M не гомотопен нулю. Проведем теперь диаметр S^2 через указанную выше точку касания и повернем S^2 вокруг этого диаметра на угол π. Это вращение деформирует M в M^{-1}; итак, путь M гомотопен пути M^{-1}, M^2 гомотопен нулю на $\Pi(S^2)$.

Слегка видоизменяя рассуждение п. (*G*), легко показать, что M может быть взят за образующую фундаментальной группы $\Pi(S^2)$, которая, таким образом, оказывается циклической второго порядка. Итак, доказана

Теорема 2. Фундаментальная группа $\Pi(S^n)$ при $n > 2$ — тривиальна, при $n = 2$—циклическая второго порядка.

Заметим еще, что из доказательств этой работы без труда вытекает тривиальность всех гомотопических групп порядка ниже n 1 пространства $\Omega_{ab}(S^n)$, соотв. $\Pi(S^n)$; $(n-1)$—мерная же гомотопическая группа у обоих пространств нетривиальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Биркгоф. Динамические системы, М., 1941.
2. Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман. Топологические методы в вариационных задачах.
3. Л. А. Люстерник. Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом. Труды Мат. Инст. им. Стеклова, XIX, М., 1947.
4. M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, 1934.
5. Г. Зейферт и В. Трельфаль. Вариационное исчисление в целом, М., 1947
6. А. И. Фет. Вариационные задачи на замкнутых многообразиях. Мат. сборник. (печатается)

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

А. И. Фет

В этой заметке мы доказываем методом пересечений Лефшеца простое обобщение теоремы о неподвижной точке.

Теорема 1. Пусть K n мерный элемент, S — его граница, f непрерывное отображение K на себя, при котором S отображается на себя с ненулевой степенью k, g непрерывное отображение K в себя. Существует точка $x \subset K$ такая, что $f(x)=g(x)$.

Если теорема будет доказана для отображений, сколь угодно близких к f,g, то она будет верна и для f,g. Можно поэтому считать, что f и g — симплициальные отображения одного подразделения K в другое, причем g отображает K в $K \setminus S$. K представим в виде n-мерного подразделенного симплекса.

По той же причине можно считать, что $f(O)=O' \subset K \setminus S$, где O центр симплекса K. Будем рассматривать f и g, как отображения K в другой экземпляр K,K'; расположим K в эвклидовом пространстве R^n, K' — в $R^{n'}$. Образуем произведение $R^{2n}=R^n \times R^{n'}$. Ориентации K и K' определяют ориентацию R^{2n}. Все точки $(x,f(x)) \in R^{2n}$, $x \in K$, образуют цепь $F \subset R^{2n}$ — непрерывный образ K; аналогично, точки $(x,g(x))$, $x \subset K$, образуют цепь $G \subset R^{2n}$, — непрерывный образ K. Слегка сдвинув G, можно привести ее в общее положение с F.

Обозначая $|A|$ полиэдр, несущий цепь A, докажем соотношения:

$$|\Delta F| \cap |G| = 0 \qquad (1')$$

$$|\Delta G| \cap |F| = 0 \qquad (1'')$$

Проекция $|\Delta F|$ в $R^{n'}$, по условию, лежит на $S' = |\Delta K'|$, проекция $|G|$ в $R^{n'}$ лежит в $K' \setminus S'$; этим (1′) доказано. Если бы точки $(x,f(x)) \in |F|$ и $(x,g(x)) \in |\Delta G|$ совпали, то имели бы: $x \in S$, $f(x) \in f(S) \subset S$; между тем $g(x) \in g(K) \subset K' \setminus S'$. Этим доказано (1″).

Пусть T — симплекс подразделения S, $T'=f(T) \subset S'$ — его симплициальный образ. Обозначим $f=f_0$, $g=g_0$; построим аффинное отображение симплекса $|O'T|$ в $|O'T'|$, ставя в соответствие вершине a симплекса T вершину $a'=f(a)$, вершине O — вершину O'. Выполнив это для всех симплексов T сферы S, получим непрерывное отображение f_1 симплекса K в K'. Соединяя отрезком каждую пару точек $f_0(x)$ и $f_1(x)$ и двигаясь по отрезку от $f_0(x)$ к $f_1(x)$ равномерно, мы в единицу времени деформируем f_0 в f_1 через f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Возьмем точку p' внутри одного из симплексов $[O'T']$ и сожмем $g(K)$ в точку p' деформацией g_t, не выходя из $K' \setminus S'$; $0 \leqslant t \leqslant 1$. Аналогично (1′, 1″) докажем, что

$$|\Delta F_t| \cap |G_t| = 0, \ |\Delta G_t| \cap |F_t| = 0 \ (0 \leqslant t \leqslant 1), \qquad (2)$$

где цепи F_t, G_t определяются отображениями f_t, g_t так же, как F,G отображениями f,g.

По известному свойству индекса пересечения, из (2) следует:

$$F_1 \times G_1 = F \times G \tag{3}$$

Легко видеть, что $F_1 \times G_1 = k$. В самом деле, алгебраическое число симплексов $|OT|$, отображаемых f_1 в $|O'T'| \ni p'$, равно k. Каждый из симплексов $(|OT|, |O'T'|)$ цепи F_1 пересекает единственный симплекс $[OT, p'] \in G_1$ в одной внутренней точке, причем индекс пересечения равен 1 или -1, в зависимости от того, отображается ли $|OT|$ с сохранением ориентации или нет.

Согласно (3),

$$F \times G = k \neq 0 \tag{4}$$

В силу общего положения цепей F и G, это доказывает теорему.

Существенное число общих точек, в условиях теоремы 1, $\geqslant k$. Действительно, из (4) выводим:

Теорема 2. В условиях теоремы 1, сколь угодно малой деформацией отображений f, g можно получить такие отображения $\tilde{f}, \tilde{g}$, что $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$ не менее чем в k точках элемента.

Требование $k \neq 0$ теоремы 1, как показал И. А. Зайденман на примере, не может быть снято ни для какой размерности.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А. И. Фет

В учебнике дифференциальных уравнений Камке [1] приведено доказательство Прюфера теоремы о существовании бесконечного множества собственных значений обобщенной краевой задачи:

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)y'\right)+Q(x,\lambda)y=0, 0\leqslant x\leqslant b, \tag{1}$$

с однородными условиями в концах сегмента $[Q, b]$.

Предполагается, что $P(x)>0$, $Q(x,-\infty)=-\infty$, $Q(x,\infty)=\infty$; $Q(x,\lambda')<Q(x,\lambda'')$ при $\lambda'<\lambda''$, $0\leqslant x\leqslant b$.

Мы предлагаем упрощенное доказательство, имеющее еще то преимущество перед доказательством, приведенным у Камке, что попутно получается оценка для собственных значений. В классическом случае $Q(x,\lambda)=q(x)+\lambda r(x), r(x)>0$, такая оценка получается вариационным методом Куранта. Кажется, приведенное ниже доказательство существования собственных значений проще всех обычно излагаемых.

Мы ограничимся для простоты краевыми условиями $y(0)=y(b)=0$.

(a). Введем новые переменные $\rho(x)$, $\vartheta(x)$ по формулам Прюфера

$$y'=\rho\cos\vartheta,\quad y=P\rho\sin\vartheta.$$

Подставляя значения y и y' в (1) и исключая ρ' при помощи соотношения $(P\rho\sin\vartheta)'=\rho\cos\vartheta$, получим уравнение

$$\vartheta'=\frac{1}{P(x)}\cos^2\vartheta+Q(x,\lambda)\sin^2\vartheta \tag{2}$$

Если λ — собственное значение нашей краевой задачи, то решение $\vartheta_\lambda(x)$ уравнения (2), обращающееся в нуль при $x=0$, удовлетворяет условию $\sin\vartheta_\lambda(b)=0$, т. е. $\vartheta_\lambda(b)=n\pi$ (n — целое). И обратно, если $\vartheta_\lambda(b)=n\pi$, то λ — собственное значение.

Итак, мы будем искать λ, при которых $\vartheta_\lambda(b)=n\pi$.

(b). Положим

$$m(\lambda)=\min_{a\leqslant x\leqslant b}Q(x,\lambda),\ M(\lambda)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}Q(x,\lambda).$$

Функции $m(\lambda)$, $M(\lambda)$ непрерывны и монотонно возрастают от $-\infty$ до $+\infty$. Обратные им функции пусть будут $\lambda(m)$, $\Lambda(M)$. Если $\lambda>\lambda(0)$, из (2) следует, что $\vartheta_\lambda(x)$ монотонно возрастает как при увеличении x, так и при увеличении λ.

Рассмотрим уравнения

$$Z'=\underline{s}\cos^2 Z+m(\lambda)\sin^2 Z \tag{3}$$

$$U'=\overline{s}\cos^2 Z+M(\lambda)\sin^2 Z \tag{4}$$

Из (3) имеем $(\operatorname{ctg} Z)' = s \operatorname{ctg}^2 Z + m(\lambda)$,

$$Z = \operatorname{Arcctg}\left[\sqrt{\frac{m(\lambda)}{s}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{s\, m(\lambda)}\, x\right)\right]. \tag{5}$$

Аналогично

$$U = \operatorname{Arcctg}\left[\sqrt{\frac{M(\lambda)}{s}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{s M(\lambda)}\, x\right)\right]. \tag{6}$$

Легко видеть, что решения $Z(x)$, $U(x)$ определены на всей оси x, непрерывны, монотонно возрастают, и что $Z(0) = U(0) = 0$, $Z(\infty) = U(\infty) = \infty$, если только определить в (5) и (6) Arcctg надлежащим образом.

Положим $s = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant b} \dfrac{1}{P(x)}$, $s = \min\limits_{0 \leqslant x \leqslant b} \dfrac{1}{P(x)}$; тогда, сравнивая уравнения (2), (3) и (4), находим без труда

$$Z(x) \leqslant \vartheta(x) \leqslant U(x). \tag{7}$$

Пусть будут x'_n, x_n, x''_n точки, где соответственно $Z(x)$, $\vartheta(x)$, $U(x)$ обращается в $n\pi$, $n = 1,2\ldots$. Из монотонности Z, ϑ, U при $\lambda > \lambda(0)$ выводим: $x_n < x_{n+1}$, $x'_n < x'_{n+1}$, $x''_n < x''_{n+1}$, а из (7) следует

$$x''_n \leqslant x_n \leqslant x'_n \tag{8}$$

$$x'_n = \frac{n\pi}{\sqrt{s m(\lambda)}}, \qquad x''_n = \frac{n\pi}{\sqrt{s M(\lambda)}} \tag{9}$$

Ввиду $m(\lambda) \to \infty$, $M(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, при данном n можно сделать числа (9) сколько угодно малыми, увеличивая λ; таким образом, найдутся такие значения λ, при которых x'_n и x''_n пройдут через b; а, значит, и x_n будет равно b при некотором $\lambda = \lambda_n$. Имеем, по (8):

$$\frac{n\pi}{\sqrt{s M(\lambda)}} \leqslant b \leqslant \frac{n\pi}{\sqrt{s m(\lambda)}} \tag{10}$$

Отсюда $M(\lambda_n) \geqslant \dfrac{n^2\pi^2}{b^2 s}$, $m(\lambda_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{b^2 s}$;

поэтому справедлива

Теорема. Собственные значения $\lambda_n > \lambda(0)$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2 s}\right) \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2 \underline{s}}\right). \tag{11}$$

Если, в частности, $Q(x,\lambda) = q(x) + \lambda r(x)$, $r(x) > 0$, то, полагая

$$\underline{q} = \min_{[0,b]} q(x), \quad \overline{q} = \max_{[0,b]} q(x), \quad \underline{r} = \min_{[0,b]} r(x), \quad \overline{r} = \max_{[0,b]} r(x),$$

находим при $\lambda > 0$ $\lambda(M) \geqslant \dfrac{M - \overline{q}}{\overline{r}}$, $\lambda(m) \leqslant \dfrac{m - \underline{q}}{\underline{r}}$

и при $\lambda < 0$ $\lambda(M) \geqslant \dfrac{M - \overline{q}}{\underline{r}}$, $\lambda(m) \leqslant \dfrac{m - \underline{q}}{\overline{r}}$.

Легко видеть, далее, что всегда $\lambda(0) \leqslant \frac{q}{r}$; полагая $\overline{p} = \frac{1}{s}$, $\underline{p} = \frac{1}{\overline{s}}$, получаем следующие известные неравенства:

при $\lambda_n > -\frac{q}{r}$ $\quad \frac{n^2\pi^2\underline{p}}{b^2\overline{r}} - \frac{\overline{q}}{r} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{n^2\pi^2\overline{p}}{b^2\underline{r}} - \frac{q}{\underline{r}}$, если $\lambda_n \geqslant 0$,

$\frac{n^2\pi^2\underline{p}}{b^2\underline{r}} - \frac{\overline{q}}{\underline{r}} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{n^2\pi^2\overline{p}}{b^2\overline{r}} - \frac{q}{\overline{r}}$, если $\lambda_n < 0$.

Этот результат может быть получен вариационным методом Куранта (при $r \equiv 1$ см. напр., [2], стр. 279).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kamke. Differentialgleichungen reeller Funktionen, 1930.
2. М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник. Основы вариационного исчисления, т. I, ч. 2, М., 1935.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. И. Фет

В работе изучается представление аналитических функций в полуплоскости интегралами Коши и Лапласа. В § 1 рассматриваются интегралы Коши, в § 2—интегралы Лапласа. „Интеграл" без добавочных пояснений означает собственный интеграл, либо несобственный в обычном смысле. (l.i.m.) $\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}$ — интеграл, сходящийся в среднем (как в теореме Планшереля) к функции из $L_2(-\infty,\infty)$.

Преполагается знание общих свойств интеграла Лапласа (см., напр., В. А. Диткин, [1], § 2).

§ 1. Интегралы Коши

Лемма 1. Пусть $\varphi(p,\alpha)$ при каждом значении параметра α из множества Δ имеет ограниченную вариацию на бесконечной прямой $\mathrm{Re}\,p=\delta$, причем

$$|\varphi(p,\alpha)| + \mathrm{Var}\,\mathrm{Re}\,\varphi(p,\alpha) + \mathrm{Var}\,\mathrm{Im}\,\varphi(p,\alpha) = M(\alpha) \leqslant M < \infty \text{ при } \alpha \in \Delta, \quad \mathrm{Re}\,p=\delta; \tag{I}$$

$\varphi(p,\alpha)$ непрерывна по совокупности переменных (p,α),

$$(\mathrm{Re}\,p=\delta,\ \alpha\in\Delta); \tag{II}$$

$$I(\alpha) = \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Phi(p,\alpha)\,dp$$

сходится равномерно относительно $\alpha\in\Delta$, где Φ непрерывна (III).

Тогда: (*a*).

$K(\alpha) = \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Phi(p,\alpha)\,\varphi(p,\alpha)\,dp$ также сходится равномерно относительно $\alpha\in\Delta$.

(*b*). Если $\sup_{-\infty<A,B<\infty}\left\{\left|\int_{\delta+iA}^{\delta+iB} \mathrm{Re}\,\Phi(p,\alpha)\,dp\right| + \left|\int_{\delta+iA}^{\delta+iB} \mathrm{Im}\,\Phi(p,\alpha)\,dp\right|\right\} = S_{I(\alpha)}$, то

$$|K(\alpha)| \leqslant 8\,M(\alpha)\cdot S_{I(\alpha)} \tag{1}$$

(*c*). Если, при каждом $p\,(\mathrm{Re}\,p=\delta)$, $\lim_{\alpha\to\alpha_0}\varphi(p,\alpha)=\psi(p)=\varphi(p,\alpha_0)$ равномерно на каждом конечном интервале изменения p, и интеграл $K(\alpha_0)$ схо

дится, то $\lim_{\alpha \to \alpha_0} K(\alpha) = K(\alpha_0)$. α_0 здесь может быть конечным или бесконечным и лежит на границе Δ.

Разлагая $\Phi(p,\alpha)$ и $\varphi(p,\alpha)$ на вещественную и мнимую части, представим $K(\alpha)$ как сумму четырех интегралов. Достаточно рассмотреть один из них, например:

$$\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \operatorname{Re} \Phi(p,\alpha) \operatorname{Im} \varphi(p,\alpha)\, dp.$$

$\operatorname{Im} \varphi(p,\alpha)$, при каждом α, есть разность двух положительных невозрастающих функций от $\tau = \operatorname{Im} p$. Считая, для простоты, что $\operatorname{Im} \varphi$ не возрастает на $-\infty < \tau < \infty$, имеем, по второй теореме о среднем:

$$\int_A^B \operatorname{Re} \Phi(p,\alpha) \cdot \operatorname{Im} \varphi(p,\alpha)\, d\tau = \int_A^\xi \operatorname{Re} \Phi(p,\alpha) d\tau \cdot \operatorname{Im} \varphi(A,\alpha), \text{ где } A \leqslant \xi \leqslant B. \qquad (2)$$

При достаточно больших A и B одинакового знака, по условию (III) теоремы,

$$\left| \int_A^\xi \operatorname{Re} \Phi(p,\alpha) d\tau \right| < \varepsilon$$

независимо от $\alpha \in \Delta$, откуда следует утверждение (a). При $A \to -\infty$, $B \to \infty$ из (2) получаем (b). Наконец, (c) вытекает из равномерной сходимости $K(\alpha)$ при $\alpha \in \Delta$.

Лемма 2. Функция $\dfrac{1}{(p-z)^k}$ — ограниченной вариации на прямой $\operatorname{Re} p = \delta$ при $\operatorname{Re} z \neq \delta$ и целом $k \geqslant 1$, причем

$$\operatorname{Var} \frac{1}{(p-z)^k} = O\left(\frac{1}{[\operatorname{Re} z - \delta]^k}\right) \text{ при } \operatorname{Re} z \to \delta.$$

Пусть $p = \sigma + i\tau$, $z = x + iy$.

$$\frac{1}{p-z} = \frac{\sigma - x}{(\sigma - x)^2 + (\tau - y)^2} - i \frac{\tau - y}{(\sigma - x)^2 + (\tau - y)^2},$$

откуда следует лемма для $k = 1$.

Остальное доказывается индукцией по k.

Лемма 3. Функция $\dfrac{z_1 - p}{z_2 - p}$ — ограниченной вариации на прямой $\operatorname{Re} p = \delta$ при $\operatorname{Re} z_1 \neq \delta$, $\operatorname{Re} z_2 \neq \delta$. Когда z_1, z_2 пробегают замкнутое ограниченное множество H, не пересекающее прямой $\operatorname{Re} p = \delta$, эта функция имеет равномерно ограниченную вариацию.

Геометрически очевидно, что $\left| \dfrac{z_1 - p}{z_2 - p} \right|$ и $\arg \dfrac{z_1 - p}{z_2 - p}$ имеют равномерно ограниченную вариацию. Отсюда следует,

что

$$\operatorname{Re}\frac{z_1-p}{z_2-p}=\left|\frac{z_1-p}{z_2-p}\right|\cos\arg\frac{z_1-p}{z_2-p}\quad\text{и}$$

$$\operatorname{Im}\frac{z_1-p}{z_2-p}=\left|\frac{z_1-p}{z_2-p}\right|\sin\arg\frac{z_1-p}{z_2-p}$$

имеют равномерно ограниченную вариацию.

Теорема 1. Если интеграл Коши $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{z-p}\,dp$ сходится хотя бы при одном $z=z_0$, $\operatorname{Re}z_0\neq\delta$, то он сходится при всех z_1 $\operatorname{Re}z\neq\delta$, равномерно в каждой замкнутой ограниченной области H, не пересекающей прямой $\operatorname{Re}z=\delta$, и представляет в обеих полуплоскостях $\operatorname{Re}z>\delta$, $\operatorname{Re}z<\delta$ аналитическую функцию $\Psi(z)$.

Положим в лемме 1

$$\alpha=z,\quad \Delta=H,\quad \Phi(p)=\frac{F(p)}{z_0-p},\quad \varphi(p,\alpha)=\frac{z_0-p}{z-p}.$$

Теорема следует из леммы 3 и леммы 1, (a).

Следствие. В условиях теоремы 1 интеграл

$$\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)\,dp}{(z-p)^{k+1}}$$

существует при любом $k\geqslant 1$ и $\operatorname{Re}z\neq\delta$ и равен $\Psi^{(k)}(z)$; сходимость интеграла равномерна в H. Следует из теоремы 1 и лемм 1, 2.

Лемма 4. Если интеграл

$$I(z)=\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)dp}{z-p}$$

сходится в полосе $\sigma_1<\operatorname{Re}z<\delta$ и равен постоянной c, то $c=0$.

Из теоремы 1 видно, что $I(z)$ сходится во всей полуплоскости $\operatorname{Re}z<\delta$ и представляет в ней аналитическую функцию $I(z)$. $I(z)\equiv c$ в силу аналитического продолжения. При $\operatorname{Re}z_0<\delta$, $\operatorname{Re}z<\delta$

$$I(z)=c=\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{z_0-p}\cdot\frac{z_0-p}{z-p}\,dp.$$

Для вещественных $z\leqslant\rho<\operatorname{Re}z_0$ $\varphi(p,z)=\frac{z_0-p}{z-p}$ имеет вариацию, равномерно ограниченную относительно z; это доказывается аналогично лемме 3. Применяя лемму 1, (c), с $\alpha=z$, $\alpha_0=\infty$, $\Delta=(\infty,\rho)$, из $\lim\limits_{z=\operatorname{Re}z\to-\infty}\varphi(p,z)=0$ получаем $c=\lim\limits_{z=\operatorname{Re}z\to-\infty}I(z)=0$, ч. т. д.

Теорема 2. Чтобы непрерывная и ограниченная при $\mathrm{Re}\, z \geqslant \gamma$, аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > \gamma$ функция $F(z)$ была представима в этой полуплоскости интегралом Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{z-p}\,dp,$$

необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл сходился хотя бы при одном z, $\mathrm{Re}\, z \neq \gamma$.

Рассматривая прямоугольник $\gamma \leqslant \mathrm{Re}\, p \leqslant \sigma$, $-N \leqslant \mathrm{Im}\, p \leqslant N$, содержащий z, и устремляя N к бесконечности, получим, в силу ограниченности $F(z)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(p)dp}{z-p} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)dp}{z-p} = F(z). \tag{3}$$

Легко видеть что $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)dp}{z-p}$ не зависит от z, $\gamma < \mathrm{Re}\, z < \sigma$. В самом деле, если $\gamma < \mathrm{Re}\, z_1 < \sigma$, $\gamma < \mathrm{Re}\, z_2 < \sigma$, то

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)dp}{z_1-p} - \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)dp}{z_2-p} = (z_2-z_1)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)dp}{(z_1-p)(z_2-p)}. \tag{4}$$

Из (3) видно, что оба интеграла в левой части (4) не зависят от σ, $\sigma > \mathrm{Re}\, z_1$, $\sigma > \mathrm{Re}\, z_2$; от σ поэтому не зависит и интеграл справа в (4). При $\sigma \to \infty$ этот интеграл, в силу ограниченности $F(p)$, стремится к нулю. Итак, в полосе $\gamma < \mathrm{Re}\, z < \sigma$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)dp}{z-p} = c = \mathrm{const}.$$

По лемме 4, $c = 0$, и теорема 2 вытекает из (3).

Дальше (теорема 5) будет доказано более сильное предложение другим методом.

Следующая теорема решает вопрос о представимости функции интегралом Коши, исходя только из граничных значений.

Теорема 3. Для того, чтобы функция $F(z)$, непрерывная при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$, аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$, была представима в этой полуплоскости интегралом Коши, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны нулю интегралы:

$$I_k = \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F(p)dp}{(p+1)^k}$$

при целых $k \geqslant 1$.

Примечание 1. Если $F(z)$ ограничена, достаточно потребовать, чтобы $I_1 = 0$.

Примечание 2. Из существования I_1, по лемме 2, следует существование остальных I_k.

Если существует I' то, по теореме 1,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F(p)}{z-p}\,dp$$

в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ представляет аналитическую функцию $\Phi(z)$, в полуплоскости $\operatorname{Re} z<0$ — аналитическую функцию $\Psi(z)$. Легко показать, что граничные значения $\varphi(p_0)=\lim\limits_{z\to p_0}\Phi(z)$ и $\psi(p_0)=\lim\limits_{z\to p_0}\Psi(z)$ ($\operatorname{Re} p_0=0$) существуют и связаны соотношением

$$\varphi(p_0)-\psi(p_0)=F(p_0). \tag{5}$$

Для этого достаточно заменить путь интегрирования $\operatorname{Re} p=0$ путем $\Gamma=|\operatorname{Re} p=0,\ \operatorname{Im} p\leqslant \operatorname{Im} p_0-\varepsilon|+\Lambda+|\operatorname{Re} p=0,\operatorname{Im} p\geqslant \operatorname{Im} p_0+\varepsilon|$, где Λ полуокружность $|p-p_0|=\varepsilon$, $\operatorname{Re} p\geqslant 0$. Докажем достаточность наших условий. Если I_k существуют и равны нулю, то, по следствию из теоремы 1, $\Psi^{(k)}(-1)=0$ $(k\geqslant 1)$, $\Psi(-1)=0$, откуда $\Psi(z)\equiv 0$ при $\operatorname{Re} z<0$. Поэтому $\psi(p_0)\equiv 0$ $(-\infty<\operatorname{Im} p_0<\infty,\ \operatorname{Re} p_0=0)$ и (5) дает $\varphi(p_0)=F(p_0)$, что равносильно $\Phi(z)\equiv F(z)$ при $\operatorname{Re} z\geqslant 0$. Докажем необходимость. Если $F(z)$ представима интегралом Коши, то, по теореме 1, существует I_1; по следствию теоремы 1, существуют

$$I_{k+1}=\frac{1}{k!}\Psi^{(k)}(-1)\qquad (k\geqslant 1).$$

Так как $F(z)\equiv\Phi(z)$ в $\operatorname{Re}(z)>0$, $\varphi(p_0)\equiv F(p_0)$; по соотношению (5), $\psi(p_0)\equiv 0$, и, значит, $\Psi(z)\equiv 0$ в $\operatorname{Re} z<0$. Отсюда $\Psi(-1)=I_1=0$, $\Psi^{(k)}(-1)=k!\,I_{k+1}=0$ $(k\geqslant 1)$.

Теорема 4. Функция, представимая интегралом Коши (сходящимся в обычном смысле) в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$, ограничена в каждом угле $|\arg z|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\Phi(z)=\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F(p)dp}{z-p}$, $\operatorname{Re} z>0$; возьмем z_0 в угле $|\arg z_1|<\alpha$, z в угле $|\arg z|\leqslant\alpha$.

$$\Phi(z_0)-\Phi(z)=(z-z_0)\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F(p)dp}{(z_0-p)(z-p)}$$

Согласно лемме 1, (*b*),

$$|\Phi(z_0)-\Phi(z)|\leqslant|z-z_0|\cdot S_{\Phi(z_0)}\cdot\operatorname{Var}\frac{1}{z-p}.$$

По лемме 2, $\operatorname{Var}\limits_{\operatorname{Re} p=0}\frac{1}{z-p}\leqslant\frac{K}{\operatorname{Re} z}$,

где $K=\text{const}>0$.

Отсюда

$$|\Phi(z_0)-\Phi(z)|\leqslant\frac{|z_0-z|}{\operatorname{Re}z}\,S_{\Phi(z_0)}\cdot K,$$

или, при $|\arg(z)|\leqslant\alpha$,

$$|\Phi(z)-\Phi(z_0)|\leqslant\frac{A}{\cos\alpha},$$

где A не зависит от α.

Теорема 5. Пусть $F(z)$ непрерывна при $\operatorname{Re}z\geqslant 0$, аналитична при $\operatorname{Re}z>0$, существует

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F(p)dp}{p+1}\quad\text{и}\quad|F(z)|\leqslant C|z|^r+D,$$

(C и D постоянны) при некотором $r\geqslant 1$ и $\operatorname{Re}z\geqslant 0$. При этих условиях $F(z)$ представима интегралом Коши.

Очевидно, при $k\geqslant r+2$, $\sigma=\operatorname{Re}p\geqslant 0$, существует интеграл

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)dp}{(p+1)^k}.$$

Из теоремы Коши выводим, что он не зависит от σ, и значит, равен I_k. При $\sigma\geqslant 0$, в силу условия теоремы,

$$|I_{k+1}|=\left|\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(p)dp}{(p+1)^{k+1}}\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(p)|\,d\tau}{|p+1|^{k+1}}\leqslant\frac{K}{\sigma+1},$$

где $K=\text{const}$, $k\geqslant r+2$.

Устремляя здесь σ к бесконечности, получаем:

$$I_{r+3}=I_{r+4}=\ldots=0;$$

по теореме 3, в обозначениях этой теоремы,

$$\Psi^{(r+2)}(-1)=\Psi^{(r+3)}(-1)=\ldots=0.$$

Следовательно, $\Psi(z)$ — полином. Но в угле $|\arg z|\geqslant\alpha>\pi$ функция $\Psi(z)$ ограничена, как легко видеть, применяя теорему 4 к левой полуплоскости. Отсюда $\Psi(z)=c=\text{const}$; но, по лемме 4, $c=0$, и теорема 5 вытекает из теоремы 3. Если интеграл Коши сходится абсолютно, можно получить более сильный результат.

Теорема 6. Пусть функция $F(z)$ непрерывна в $\operatorname{Re}z\geqslant 0$, аналитична в $\operatorname{Re}z>0$ и удовлетворяет оценке $F(z)=O(e^{|z|^{\delta}})$, $0<\delta<1$, на последовательности дуг, удаляющихся в бесконечность и опирающихся на ось ординат.

Если существует $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(p)|\,d\tau}{|p+1|}$ ($\tau=\operatorname{Im}p$), то $F(z)$ представима интегралом Коши в полуплоскости $\operatorname{Re}z>0$.

Рассмотрим функцию $G(z,\varepsilon)=F(z)e^{-\varepsilon z^{\gamma_1}}$, где $\delta<\gamma_1<1$, $\varepsilon>0$.

$$|G(z,\varepsilon)|=|F(z)|\,e^{-\varepsilon r^{\gamma_1}\cos(\gamma_1\arg z)}\leqslant Ke^{-r^{\gamma_1}\left(\varepsilon-r^{\delta-\gamma_1}\right)\cos\frac{\gamma_1\pi}{2}}$$

на всех дугах нашей последовательности, начиная с некоторой; здесь $K=\text{const}$. $G(z,\varepsilon)$ при любом $\varepsilon>0$ представима интегралом Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{G(p,\varepsilon)}{z-p}\,dp=G(z,\varepsilon). \tag{6}$$

На прямой $\operatorname{Re}p=0$ $\left|e^{-\varepsilon\rho^{\gamma_1}}\right|=\left|e^{-\varepsilon\rho^{\gamma_1}\cos\frac{\gamma_1\pi}{2}}\right|<1$,

поэтому интеграл в (6) сходится равномерно относительно $\varepsilon, 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{G(p,\varepsilon)dp}{z-p}=\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F(p)dp}{z-p}.$$

Устремляя в (6) ε к нулю, получаем нашу теорему.

Теорема 7. Если $F(z)$ аналитична в $\operatorname{Re}z>0$, непрерывна в $\operatorname{Re}z\geqslant 0$, $|F(z)|\leqslant C|z|^r+D\,(r\geqslant 1)$ и существует интеграл $\int_{-i\infty}^{i\infty}F(p)dp$, то $F(z)$ ограничена в каждой полуплоскости $\operatorname{Re}z\geqslant\delta>0$; именно, $|F(z)|\leqslant\frac{C}{\delta}$ в $\operatorname{Re}z\geqslant\delta$, где C не зависит от δ.

Согласно теореме 5, $F(z)$ представима интегралом Коши. Положим в лемме 1 $\Phi(p,\alpha)=F(p)$, $\alpha=z$, $\varphi(p,\alpha)=\frac{1}{z-p}$, где $\operatorname{Re}p=0$, $\operatorname{Re}z\geqslant\delta$.

По лемме 2, $\operatorname{Var}_{\operatorname{Re}p=0}\frac{1}{z-p}=O\left(\frac{1}{\operatorname{Re}z}\right)=O\left(\frac{1}{\delta}\right)$, и, по лемме 1, $|F(z)|=O=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{F(p)dp}{z-p}\right|\leqslant\frac{C}{\delta}$, где C не зависит от δ.

Теорема 8. Пусть $F(z)$ аналитична в $\operatorname{Re}z>0$, непрерывна в $\operatorname{Re}z\geqslant 0$ и $F(z)=O\left(e^{|z|^\rho}\right)$, где $0<\rho<1$.

Пусть функция $\mu(z)$ аналитична и $\neq 0$ в $\operatorname{Re}z>0$, непрерывна в $\operatorname{Re}z\geqslant 0$, и $\frac{1}{\mu(z)}$ ограничена.

Обозначим $\|F\|_{k,\mu}$ "взвешенное среднее порядка k":

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(i\tau)|^k}{|\mu(i\tau)|}\,d\tau\right]^{1/k}$$

В этих условиях $|F(z)| \leq \|F\|_{k,\mu} \left[\frac{|\mu(z)|}{2\pi\delta}\right]^{1/k}$ при $\mathrm{Re}\, z \geqslant \delta > 0$ (7).

(a) Если $G(z) = O(e^{|z|^p})$, $0 < p < 1$, $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(i\tau)|\, d\tau < \infty$, то, по теореме 6, $G(z)$ представима интегралом Коши, и

$$|G(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{F(p)dp}{z-p}\right| \leqslant \frac{I_1}{2\pi\delta} \tag{8}$$

при $\mathrm{Re}\, z \geqslant \delta > 0$.

(*b*) Если сходится $I_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(i\tau)|^k\, d\tau$, применим (8) к функции $G^k(z)$.

Очевидно, $G^k(z) = O(e^{k|z|^p}) = O(e^{|z|^{p'}})$, где $p < p' < 1$, так что нужная оценка на бесконечности имеет место.

$$|G^k(z)| \leq \frac{I_k}{2\pi\delta}, \quad |G(z)| \leq \sqrt[k]{\frac{I_k}{2\pi\delta}}. \tag{9}$$

(c) Пусть теперь

$$\|F\|_{k,\mu} = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(i\tau)|^k}{|\mu(i\tau)|}\, d\tau \right|^{1/k} < \infty.$$

Полагая в (9) $G(z) = F(z)\,|\mu(z)|^{-1/k}$, получим

$$|F(z)|\cdot|\mu(z)|^{-1/k} \leq \frac{\|F\|_{k,\mu}}{\sqrt[k]{2\pi\delta}},$$

чем теорема доказана.

Две предыдущие теоремы напоминают теорему Фрагмена-Линделефа. На граничные значения здесь налагается интегральное условие. При $k \to \infty$ получаем из теоремы 8, как предельный случай, обычную теорему Фрагмена-Линделефа. Действительно, пусть $\sup\limits_{-\infty < \tau < \infty} |F(i\tau)| = M$. В качестве $\mu(z)$ можно взять, например, e^{z^λ}, где $0 < \lambda < 1$. Как известно, $\lim\limits_{k\to\infty} \|F\|_{k,\mu} = M$, и (7) дает в пределе: $|F(z)| \leqq M$ при $\mathrm{Re}\, z > 0$.

§ 2. Интегралы Лапласа

Лемма 5. Если интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau,t)d\tau$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_t'(\tau,t)\, d\tau$ при $\omega \to \infty$ сходятся в среднем, то

$$(l.i.m.) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_t'(\tau,t)\, d\tau = \frac{d}{dt}(l.i.m.) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau,t)d\tau \tag{10}$$

почти для всех t.

Обозначим

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_t'(\tau,t)\,d\tau,\quad \psi_\omega(t)=\int_{-\omega}^{\omega}\Phi_t'(\tau,t)d\tau.$$

Очевидно,

$$\left|\int_0^t[\psi(t)-\psi_\omega(t)]\,dt\right|^2\leqslant t\int_0^t|\psi(t)-\psi_\omega(t)|^2dt\leqslant t\,\|\psi-\psi_\omega\|^2L_2,$$

откуда

$$\int_0^t\psi\,t)dt=\lim_{\omega\to\infty}\int_0^t\psi_\omega(u)du=\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega}dt\int_0^t\Phi_n'(\tau,u)du=$$

$$=\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega}[\Phi(\tau,t)-\Phi(\tau,0)]\,d\tau=(v.p.)\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\tau,t)\quad\Phi(\tau,0)|\,d\tau.$$

Как известно, можно выделить последовательность $\omega_k\to\infty$ такую, что почти для всех t существует

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\omega_k}^{\omega_k}\Phi(\tau,t)d\tau=(l.i.m.)\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau,t)d\tau.$$

Поэтому существует

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\omega_k}^{\omega_k}\Phi(\tau,0)d\tau=C$$

и

$$\int_0^t\psi(t)\,dt=\int_0^t\left\{(l.i.m.)\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_t'(\tau,t)d\tau\right\}dt=(l.i.m.)\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau,t)d\tau+C.\quad(11)$$

Отсюда вытекает формула (10).

Лемма 6. Если $F(p)$ есть преобразование Лапласа от функции $\mu(t)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>\gamma$, и для $\delta>\gamma$ существует

$\lambda(t)=(l.i.m.)\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}F(p)\,e^{tp}\,dp$, то этот интеграл равен $2\pi i\,\mu(t)e^{-\delta t}$.

Если $F(p)=\int_0^\infty\mu(t)\,e^{-pt}\,dt$ при $\mathrm{Re}\,p>\gamma$, то

$$\frac{F(p)}{p}=\int_0^\infty f_1(t)\,e^{-pt}\,dt,$$

где $f_1(t)=\int_0^t\mu(t)\,dt$.

Полагая $f_1(t)=0$ при $t<0$, имеем:

$$\frac{F(p)}{p}=\frac{F(\delta+i\tau)}{\delta+i\tau}=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e$$

Так как $f_1(t)e^{-\delta t}\in L_2(-\infty,\infty)$, то, по теореме Планшереля, $\frac{F(\delta+i\tau)}{\delta+i\tau}\in L_2(-\infty,\infty)$, и существует на каждом конечном интервале

$$\nu(t)=(l.i.m.)\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{pt}\,dp.$$

По предыдущей лемме, $\nu'(t)=\lambda(t)e^{\delta t}$. Но известно, что $\nu(t)$ существует (*v.p.*), и $\nu'(t)=2\pi i\mu(t)$, откуда $\lambda(t)=2\pi i\mu(t)e^{-\delta t}$, ч.т.д.

Теорема 9. Для того, чтобы аналитическая в $\mathrm{Re}z>\gamma\geqslant 0$ функция $F(z)$ была в этой полуплоскости преобразованием Лапласа, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta>\gamma$ были выполнены следующие условия: (*a*). $\frac{F(p)}{p}$ ограничена при $\mathrm{Re}p\geqslant\delta$; (*b*) $\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{pt}\,dp$ сходится в среднем к ограниченной абсолютно непрерывной функции $\varphi(t)$.

Необходимость. Ограниченность $\frac{F(p)}{p}$ есть известное свойство интеграла Лапласа.

Что интеграл в (*b*) сходится в среднем, доказано выше (см. д-во леммы 6). Известно, что существует

$$(v.p.)\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{pt}\,dp=f_1(t)=O\left(e^{\frac{\gamma+\delta}{2}t}\right),$$

откуда $\varphi(t)=f_1(t)e^{-\delta t}$ ограничена; наконец, $f_1(t)=\int_0^t f(t)\,dt$ (см. лемму 6), так что $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна.

Достаточность.

А. Докажем, что, в условиях теоремы (*a*) и (*b*), $\varphi(0)=0$. Так как $\frac{F(p)}{p^2}\in L_2(-\infty,\infty)$, при $\mathrm{Re}p=\delta>\gamma$, то, по теореме Планшереля, сходится в среднем (*l.i.m.*) $\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p^2}\,e^{i\tau t}\,d\tau$; применяя лемму 5, находим:

$$\frac{d}{dt}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p^2}\,e^{pt}\,dp=\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{pt}dp=\varphi(t)e^{\delta t}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p^3}\,e^{pt}\,dp=\varphi(t)\,e^{\delta t}. \tag{12}$$

Последний интеграл сходится абсолютно; применяя интегральную теорему Коши к функции $\frac{F(p)}{p^3}\,e^{pt}$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p\geqslant\delta$, видим, что при $t<0$ он равен тождественно нулю. Из (12) $\varphi(t)\equiv 0$ при $t>0$; в силу (абсолютной) непрерывности $\varphi(t)$, $\varphi(0)=0$.

В. Так как $\varphi(t)$ ограничена, при $\mathrm{Re}\,z>\delta$ существует $\lim\limits_{t\to\infty}e^{(\delta-z)t}\varphi(t)=0$;

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{(p-z)t}dp=e^{(\delta-z)t}\varphi(t),$$

и существует поэтому интеграл $\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{(p-z)t}dp$.

Имеет место следующая формула, где существование интеграла слева вытекает из последних замечаний:

$$\int_0^\infty\left\{\frac{d}{dt}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{pt}dp\right\}e^{-zt}dt=\left[e^{(\delta-z)t}\varphi(t)\right]_0^\infty+z\int_0^\infty dt\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{(p-z)t}dp; \tag{13}$$

скобка исчезает, в силу $\varphi(0)=0$ (п.А), и (13) принимает вид:

$$\int_0^\infty e^{-zt}\frac{d}{dt}\left[e^{\delta t}\varphi(t)\right]dt=z\int_0^\infty dt\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{(p-z)t}dp. \tag{14}$$

$$\left|\int_0^\infty e^{(\delta-z)t}\left[\varphi(t)-\varphi_\omega(t)\right]dt\right|^2\leqslant\int_0^\infty e^{2(\delta-\mathrm{Re}\,z)t}dt\cdot\|\varphi-\varphi_\omega\|^2_{L_2},$$

где $\varphi_\omega(t)=\int\limits_{\delta-i\omega}^{\delta+i\omega}\frac{F(p)}{p}\,e^{ipt}dp$. Но, по условию, $\|\varphi-\varphi_\omega\|\underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow}0$,

и, значит,

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_0^\infty dt\int_{\delta-i\omega}^{\delta+i\omega}\frac{F(p)}{p}\,e^{(p-z)t}dp=\int_0^\infty dt\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)}{p}\,e^{(p-z)t}\,dp. \tag{15}$$

При $-\omega\leqslant\tau\leqslant\omega$, $0\leqslant t<\infty$, $\left|\frac{F(p)}{p}\,e^{(p-z)t}\right|\leqslant\mathrm{Const.}\,e^{(\delta-\mathrm{Re}\,z)t}$; можно поэтому изменить порядок интеграции:

$$\int_0^\infty dt\int_{\delta-i\omega}^{\delta+i\omega}\frac{F(p)}{p}\,e^{(p-z)t}\,dp=\int_{\delta-i\omega}^{\delta+i\omega}\left\{\frac{F(p)}{p}\int_0^\infty e^{(p-z)t}dt\right\}dp=\int_{\delta-i\omega}^{\delta+i\omega}\frac{F(p)\,dp}{p\,(z-p)}. \tag{16}$$

Пользуясь (14)–(16), видим, что существует

$$z.(v.p)\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)\,dp}{p(z-p)}=\int_0^\infty e^{-zt}\,\frac{d}{dt}\left[e^{\delta t}\varphi(t)\right]dt. \tag{17}$$

С. К интегралу в смысле главного значения нельзя непосредственно применить теорему 2; но из доказательства теоремы 2 легко следует:

$$(v.p.)\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{F(p)\,dp}{p\,(z-p)}=\frac{F(z)}{z}+C,\ C=\text{const}. \tag{18}$$

Из (17) видно, что $F(z)+Cz$ есть преобразование Лапласа от $\frac{d}{dt}\left[e^{\delta t}\varphi(t)\right]$. Поэтому (см. [1], § 1) имеем:

$$\frac{F(z)}{z}+C=\int_0^\infty e^{(\delta-z)t}\varphi(t)\,dt,$$

и при $\mathrm{Re}\,z\to+\infty$ $\frac{F(z)}{z}$ равномерно относительно $\mathrm{Im}\,z$ стремится к $-C$.

Пусть $C\neq 0$. Выберем $\sigma>\gamma$ так, чтобы было

$$\left|\frac{F(\sigma+i\tau)}{\sigma+i\tau}\right|\geqslant\frac{C}{2}\ (-\infty<\tau<\infty).$$

Тогда $\frac{F(\sigma+i\tau)}{\sigma+i\tau}\notin L_2(-\infty,\infty)$, вопреки условию ($b$) нашей теоремы.

Итак, $C=0$; из (17) и (18) следует теорема 9.

Из теоремы 9 легко вывести известные достаточные условия представимости функций интегралами Лапласа.

Следующие две теоремы усиливают теоремы 5 и 6 работы Диткина [1].

Теорема 10. Если $F(p)$ — аналитическая в $\mathrm{Re}\,p>\gamma$, непрерывная и ограниченная в $\mathrm{Re}\,p\geqslant\gamma$ функция, и интеграл $\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)\,e^{tp}\,dp$ сходится равномерно относительно t, $-\infty<t<\infty$, то $F(p)$ есть преобразование Лапласа в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>\gamma$.

Примечание. Условия теоремы, в частности, выполнены, если $F(\gamma+i\tau)$ ограниченной вариации в окрестности $\tau=\pm\infty$, $\lim_{\tau\to\pm\infty}F(\gamma+i\tau)=0$ и $F(p)$ ограничена в $\mathrm{Re}\,p\geqslant\gamma$.

Проверим выполнение условий (a) и (b) теоремы 9.

Условие (a), очевидно, выполняется.

$\frac{F(p)}{p}\in L_2(-\infty,\infty)$, так что сходимость в среднем интеграла (b) вытекает из теоремы Планшереля. В условиях теоремы интеграл (b) можно дифференцировать под знаком интеграла, следовательно, $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна.

Наконец, в наших условиях, при достаточно большом N,

$$\left| \int_{\delta-iN}^{\delta+iN} \frac{F(p)}{p}\, e^{it\tau}\, dp - \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{F(p)}{p}\, e^{it\tau}\, dp \right| < \varepsilon \quad (-\infty < t < \infty),$$

и

$$\int_{\delta-iN}^{\delta+iN} \frac{F(p)}{p}\, e^{i\tau t}\, dp \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,$$ как коэффициент Фурье; следовательно,

$\lim\limits_{t\to\pm\infty} \varphi(t) = 0$, и $\varphi(t)$ ограничена.

Если иметь в виду только теорему 5 [1], вывод сильно упрощается.

Теорема 11. Если $F(p)$ — непрерывная в $\mathrm{Re}\, p \geqslant \gamma$, аналитическая в $\mathrm{Re}\, p > \gamma$ функция, $\dfrac{F(p)}{p}$ ограничена в $\mathrm{Re}\, p \geqslant \gamma$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma + i\tau)|^2 d\tau$ сходится, то $F(p)$ есть преобразование Лапласа в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > \gamma$. Условие (a) выполнено.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(\gamma + i\tau)}{\gamma + i\tau} \right|^2 d\tau \leqslant \mathrm{Const.} \int_{\infty}^{\infty} \left| \frac{F(\gamma + i\tau}{\gamma + i\tau} \right| d\tau \leqslant \mathrm{Const.}\, \|F\|.\, \left\| \frac{1}{p} \right\|,$$

чем доказана сходимость в среднем интеграла (b).

$$|\varphi(t)| \leqslant \|F\|.\, \left\| \frac{1}{p} \right\|, \text{ так что } \varphi(t) \text{ ограничена.}$$

Интеграл $\psi(t) = (l.i.m.) \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{i\tau t}\, dp$ существует, и из леммы 5 следует абсолютная непрерывность $\varphi(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Диткин. Операционное исчисление. Успехи Мат. Наук, нов. серия II/6, 1947.

Кафедра математического анализа
омского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ю. П. Виноградов

В настоящей работе рассматривается задача о притоке жидкости к дренажным трубам.

Задача состоит в следующем. В начальный момент времени в пористой среде дана плоская область G_0 [1]), ограниченная контуром C_0, занятая тяжелой жидкостью и содержащая одну или несколько дренажных труб [2]). На контуре C и на контуре труб давление считается постоянным во все время движения. Спрашивается, как будет перемещаться контур C со временем.

Задача сводится к отысканию потенциала скорости $\varphi(x,y,\tau)$, [3]) удовлетворяющего уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

и некоторым граничным и начальным условиям. Компоненты скорости фильтрации определяются уравнениями:

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=m\frac{dx}{d\tau},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=m\frac{dy}{d\tau}. \tag{2}$$

$$\text{Здесь}\quad \varphi=-\varkappa\left(\frac{p}{\gamma}+y\right)=-\frac{k}{\mu}(p+\gamma y), \tag{3}$$

где p — давление, γ — удельный вес жидкости, $\varkappa$ — коэфициент фильтрации, m — пористость грунта, k — проницаемость грунта, μ — вязкость жидкости.

Для решения задачи область, занятую движущейся жидкостью, отобразим конформно на круг $|w|<1$, так, чтобы центр трубы, находящийся в точке z_0, перешел в центр круга $w=0$.

Пусть отображающие функции будут соответственно

$$w=w(z,\tau)\ \text{и}\ z=z(w,\tau)\quad\left(z(0,\tau)=z_0,\ \frac{\partial z}{\partial w}(0,\tau)>0.\right)$$

Вводя в рассмотрение комплексный потенциал течения $W=\varphi+i\psi$, будем иметь:

$$W=-\frac{(p_2-p_1)\varkappa}{\gamma\left(\log\delta-\log\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w=0}\right)}\log w-\frac{p_1\varkappa}{\gamma}+\varkappa iz, \tag{4}$$

где p_2 и p_1 — соответственно давления на контуре области и контуре трубы и δ — радиус трубы.

---

[1]) Считается, что область G лежит в вертикальной плоскости.

[2]) В данной работе будет рассматриваться только случай, когда имеется одна дренажная труба.

[3]) Здесь τ — время.

Для скорости частицы жидкости в точке z получим

$$v=\frac{dz}{d\tau}=\frac{1}{m}\frac{\partial\overline{W}}{\partial z}=-\frac{(p_2-p_1)\varkappa}{m\gamma\left(\log\delta-\log\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w=0}\right)}\frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}-\frac{\varkappa i}{m}. \tag{5}$$

С другой стороны:

$$v=\frac{dz}{d\tau}=\frac{\partial z}{\partial\tau}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{d\tau}. \tag{6}$$

Из (5) и (6), учитывая, что $\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=1$, находим

$$\overline{w}\frac{\partial z}{\partial\tau}\frac{\partial\overline{z}}{\partial w}+\frac{\varkappa i}{m}\overline{w}\frac{\partial\overline{z}}{\partial w}+\overline{w}\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2\frac{dw}{d\tau}=$$

$$=-\frac{(p_2-p_1)\varkappa}{m\gamma\left(\log\delta-\log\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w=0}\right)} \tag{7}$$

или

$$\overline{w}\frac{\partial z}{\partial\tau}\frac{\partial\overline{z}}{\partial w}+\frac{\varkappa i}{m}\overline{w}\frac{\partial\overline{z}}{\partial w}+\left|w\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2\frac{d\log w}{d\tau}=$$

$$=-\frac{(p_2-p_1)\varkappa}{m\gamma\left(\log\delta-\log\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w=0}\right)}. \tag{8}$$

Для частиц жидкости, находящихся на границе области, из уравнения (8) имеем:

$$\overline{w}\frac{\partial z}{\partial\tau}\frac{\partial z}{\partial w}+\frac{\varkappa i}{m}\overline{w}\frac{\partial\overline{z}}{\partial w}+i\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2\frac{d\arg w}{d\tau}=$$

$$=-\frac{(p_2-p_1)\varkappa}{m\gamma\left(\log\delta-\log\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w=0}\right)}, \tag{9}$$

так как на границе $|w|=1$ и $\frac{d\log|w|}{d\tau}=0$:

Отсюда получаем основное граничное условие задачи в виде:

$$Re\left[w\frac{\partial\overline{z}}{\partial\tau}\frac{\partial z}{\partial w}-\frac{ik\gamma}{\mu m}w\frac{\partial z}{\partial w}\right]=$$

$$=-\frac{(p_2-p_1)\varkappa}{\mu m\left(\log\delta-\log\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w=0}\right)}\,^{1}, \tag{10}$$

$$\left(\frac{\varkappa}{\gamma}=\frac{k}{\mu}\right).$$

---

[1]) Граничное условие (10) было получено для невесомой жидкости ($\gamma=0$) П. Я. Полубариновой-Кочиной и для тяжелой жидкости ($\gamma\neq0$) Л. А. Галиным. См. [1] и [2].

Итак, решение задачи сводится к разысканию голоморфной по w, однолистной при $|w|<1$ функции $z(w,\tau)$ $\left(z(0,\tau)=z_0,\ \frac{\partial z}{\partial w}(0,\tau)>0\right)$, удовлетворяющей на окружности $|w|=1$ граничному условию (10). Функция $z(w,0)=f_0(w)$ считается известной; это функция, отображающая первоначальную область на круг $|w|<1$.

Для небольшого числа наиболее простейших начальных областей удалось найти решение задачи в замкнутой форме (и то при $\gamma=0$). В большинстве же случаев приходится искать решение задачи в виде ряда, просуммировать который не представляется возможным. Разыскание отображающей функции $z(w,\tau)$ в виде ряда поставило вопрос о существовании и единственности решения граничного уравнения (10) и о возможности разложения этого решения в равномерно сходящийся ряд по степеням τ или w.

Этот вопрос был рассмотрен (при $\gamma=0$) для простейших случаев в статье П. П. Куфарева и Ю. П. Виноградова [3] (основные результаты этой статьи принадлежат П. П. Куфареву), где дано доказательство существования решения граничного уравнения (10) для невесомой жидкости ($\gamma=0$) при условии, что функция $\nu_0(w)=\left[\frac{df_0(w)}{dw}\right]^{-1}$ голоморфна в замкнутом круге $|w|\leqslant 1$.

В данной работе теми же методами, что и в упомянутой статье [3], доказывается существование решения граничного уравнения (10) для тяжелой жидкости ($\gamma\neq 0$) и обосновываются методы разыскания решения задачи в виде ряда при том же условии, что функция $\nu_0(w)=\left[\frac{df_0(w)}{dw}\right]^{-1}$ голоморфна в круге $|w|\leqslant 1$.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

§ 1. Вывод уравнения для производной $\frac{dw}{dz}=\nu$.

Прежде всего несколько упростим вид граничного условия (10). Для этого введем новое независимое переменное t, связанное с τ соотношением:

$$t=\int_0^{\tau}\frac{k(p_2-p_1)d\tau}{\mu m\left(\log\delta-\log\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w=0}\right)}. \tag{11}$$

После введения нового переменного уравнение (10) примет вид:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial\bar z}{\partial t}w\frac{\partial z}{\partial w}+f(t)w\frac{\partial z}{\partial w}\right]=1 \tag{12}$$

или

$$w\frac{\partial\bar z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial w}+\frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial\bar z}{\partial w}+f(t)\left(w\frac{\partial z}{\partial w}-\frac{1}{w}\frac{\partial\bar z}{\partial w}\right)=2, \tag{12'}$$

где $f(t)=-\dfrac{i\gamma\left(\log\delta-\log\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w=0}\right)}{p_2-p_1}$. (13)

Деля обе части уравнения (12) на $\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2 = |\nu|^2$ и вводя обозначения $\frac{\partial z}{\partial w} = z'$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z}$, найдем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\dot{z} - f(t)}{w z'}\right] = |\nu|^2. \tag{14}$$

Функция $\frac{\dot{z} - f(t)}{w z'}$ имеет в точке $w = 0$ простой полюс, так как $z(0, t) = 0$ и $z'(0, t) > 0$.

Преобразуем теперь левую часть формулы (14) таким образом, чтобы к функции, стоящей в квадратных скобках, можно было применить формулу Шварца для определения аналитической в круге функции по граничным значениям её вещественной части.

Имеем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\dot{z} - f(t)}{w z'}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{\dot{z} - f(t)}{w z'} + \frac{f(t)}{w z'(0, t)}\right] - \operatorname{Re}\left[\frac{f(t)}{w z'(0, t)}\right] \tag{15}$$

и так как на окружности $|w| = 1$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(t)}{w z'(0, t)}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{\overline{f(t)}\,\overline{w}}{\overline{z'}(0, t)}\right] = -\operatorname{Re}\left[\frac{f(t)\, w}{z'(0, t)}\right], \tag{16}$$

$$\overline{f(t)} = -f(t), \quad \overline{z'}(0, t) = z'(0, t),$$

то формула (14) может быть записана в следующем виде:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\dot{z}(w, t) - f(t)}{w z'(w, t)} + \frac{f(t)}{w z'(0, t)} + \frac{f(t)}{z'(0, t)}\, w\right] = |\nu|^2. \tag{17}$$

Функция $\frac{\dot{z} - f(t)}{w z'} + \frac{f(t)}{z'(0, t)}\left(w + \frac{1}{w}\right)$ будет аналитической в круге $|w| < 1$. Применяя к ней формулу Шварца (считая, что граничные значения функции $\nu(w, t)$ удовлетворяют условию Гёльдера), получим:

$$\dot{z}(w, t) - f(t) - g(t)(1 + w^2)\, z'(w, t) = [P + g_1(t)]\, w z'(w, t), \tag{18}$$

где

$$g(t) = -\frac{f(t)}{z'(0, t)} = -f(t)\,\nu(0, t) \tag{19}$$

$$g_1(t) = -\frac{f(t)}{2}\left(\frac{\partial \nu}{\partial w}(0, t) + \frac{\partial \overline{\nu}}{\partial w}(0, t)\right) \tag{20}$$

$$P(w, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \nu(\omega, t)\,\overline{\nu}\left(\frac{1}{\omega}, t\right)\frac{\omega + w}{\omega - w}\,\frac{d\omega}{\omega} \tag{21}$$

γ — окружность $|\omega| = 1$.

Из уравнения (18) путем дифференцирования по w найдем следующее уравнение для $\nu = \frac{\partial w}{\partial z}$

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = (P w + g + g_1 w + g w^2)\,\frac{\partial \nu}{\partial w} - \nu\left(\frac{\partial (P w)}{\partial w} + 2gw + g_1\right). \tag{22}$$

Следовательно, если $z(w,t)$ — решение граничной задачи, удовлетворяющее начальному условию $z(0,w)=f_0(w)$, то $\nu(w,t)=\dfrac{\partial w}{\partial z}$ будет решением уравнения (22), удовлетворяющим начальному условию $\nu(0,w)=\dfrac{1}{f_0'(w)}$.

Наоборот, если $\nu(w,t)$ — решение уравнения (22), удовлетворяющее начальному условию $\nu(w,0)=\nu_0(w)\neq 0$, $\nu_0(0)\neq 0$, то

$$z(w,t)=\int_0^w \frac{dw}{\nu(w,t)}$$

является решением граничной задачи (12), удовлетворяющим начальному условию

$$z(w,0)=\int_0^w \frac{dw}{\nu_0(w)}.$$

Действительно, пусть $\nu(w,t)$ — решение уравнения (22), удовлетворяющее начальному условию $\nu(w,0)=\nu_0(w)$. Нетрудно видеть, что тогда функция $z(w,t)=\int_0^w \frac{dw}{\nu(w,t)}$ является решением уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{\partial z}{\partial t}-g(1+w^2)\frac{\partial z}{\partial w}-(P+g_1)w\frac{\partial z}{\partial w}\right]=0, \tag{23}$$

т. е. будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t}-g(1+w^2)\frac{\partial z}{\partial w}=(P+g_1)w\frac{\partial z}{\partial w}+f^*(t) \tag{24}$$

и так как $f^*(t)=-g(t)\dfrac{\partial z}{\partial w}(0,t)=f(t)$[1]), то $z(w,t)$ будет решением уравнения (18), а также граничной задачи (12), удовлетворяющим начальному условию $z(w,t)=\int_0^w \frac{dw}{\nu_0(w)}$.

§ 2. Введение комплексного аргумента t

При выводе основного граничного уравнения, а также во всех уравнениях § 1 считалось, что аргумент t принимает только вещественные значения. Однако уравнениям (12), (18), (22) можно придать смысл и для комплексных значений t, если рассматривать функции $z(w,t)$, голоморфные (относительно t и w) в некотором бицилиндре $D(r_0,t_0)$:

$$|w|<r_0,\ |t|<t_0,\ r_0\geqslant 1,\ t_0>0 \tag{25}$$

и знак сопряженности понимать в том смысле, что если

$$z(\omega,t)=\sum\sum A_{ks}\omega^k t^s,\ \text{то}\ \bar{z}(\omega,t)=\sum\sum \bar{A}_{ks}\omega^k t^s.$$

[1]) $f^*(t)$ находим, полагая в уравнении (24) $w=0$.

Покажем, что при таком расширении области значений t, уравнения (12′) и (18) остаются эквивалентными друг другу, если считать, что граничные значения $\nu(w,t)$ попрежнему удовлетворяют условию Гёльдера.

Умножая (12′) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z'(\omega,t)\,\overline{z'}\left(\frac{1}{\omega},t\right)}\frac{\omega+w}{\omega}\frac{dw}{w}\left(|w|<1\right)$

и интегрируя по γ, после некоторых преобразований найдем

$$2P=\frac{2}{w}\frac{\dot z(w,t)}{z'(w,t)}\lim_{w\to 0}\frac{1}{\omega}\frac{\dot z(\omega,t)}{z'(\omega,t)}+\lim_{w\to 0}\frac{1}{\omega}\frac{\overline{\dot z}(\omega,t)}{\overline{z'}(\omega,t)}- \tag{26}$$

$$-\frac{2f(t)}{w}\frac{1}{z'_t(w,t)}-f(t)\lim_{w\to 0}\frac{d}{d\omega}\frac{\omega+w}{z'(\omega,t)(\omega-w)}+$$

$$+f(t)\lim_{w\to 0}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1+\omega w}{z'(\omega,t)(1-\omega w)}=\frac{2}{w}\frac{\dot z(w,t)}{z'(w,t)}$$

$$-\frac{1}{z'(0,t)}\frac{\partial^2 z}{\partial w\partial t}(0,t)+\frac{1}{z'(0,t)}\frac{\partial^2 z}{\partial w\,\partial t}(0,t)-\frac{2f(t)}{wz'(w,t)}+$$

$$+\frac{2f(t)}{wz'(0,t)}-\frac{f(t)z''(0,t)}{|z'(0,t)|^2}+\frac{2f(t)w}{z'(0,t)}-\frac{f(t)\overline{z}''(0,t)}{|z'(0,t)|^2},$$

т. е., получим уравнение (18), из которого указанным выше путем будет следовать и уравнение (22).

Докажем теперь, что наоборот, из уравнения (18) следует уравнение (12′).

Из уравнения (18), учитывая, что $\overline{f(t)}=-f(t)$ и $z'(0,t)>0$, имеем:

$$\frac{1}{w}\frac{\dot z(w,t)}{z'(w,t)}-\frac{f(t)}{wz'(w,t)}+\frac{f(t)}{z'(0,t)}\left(w+\frac{1}{w}\right)-f(t)\frac{[z''(0,t)+\overline{z}''(0,t)]}{2[z'(0,t)]^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\nu(\omega,t)\overline{\nu}\left(\frac{1}{\omega},t\right)}{\omega-w}d\omega-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\nu(\omega,t)\overline{\nu}\left(\frac{1}{\omega},t\right)\frac{d\omega}{\omega},\quad |w|<1 \tag{27}$$

и

$$\frac{w\overline{z}\left(\frac{1}{w},t\right)}{\overline{z'}\left(\frac{1}{w},t\right)}+\frac{wf(t)}{\overline{z'}\left(\frac{1}{w},t\right)}-\frac{f(t)}{z'(0,t)}\left(w+\frac{1}{w}\right)+$$

$$+f(t)\frac{[\overline{z}''(0,t)+z''(0,t)]}{2[z'(0,t)]^2}=-\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\nu(\omega,t)\overline{\nu}\left(\frac{1}{\omega},t\right)}{\omega-w}d\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\nu(\omega,t)\overline{\nu}\left(\frac{1}{\omega},t\right)\frac{d\omega}{\omega},\quad |w|>1\ ^{1})$$

---

1) Соотношение (28) получается из (27), если там заменить w на w^{-1} и взять сопряженные значения.

Мы предположили, что граничные значения $\nu(w,t)$ удовлетворяют условию Гёльдера, следовательно, существуют граничные значения интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\nu(\omega,t)\,\overline{\nu}\left(\frac{1}{\omega},t\right)}{\omega-w}\,d\omega$ как слева, так и справа [1]).

Переходя в формулах (27), (28) к пределу $w\to\omega_0$, $|\omega_0|=1$ и складывая предельные значения, получим:

$$\frac{1}{\omega_0}\,\frac{\dot{z}(\omega_0,t)}{z'(\omega_0,t)}-\frac{f(t)}{\omega_0 z'(\omega_0,t)}+\omega_0\,\frac{\dot{\overline{z}}\left(\frac{1}{\omega_0},t\right)}{\overline{z}'\left(\frac{1}{\omega_0},t\right)}+$$

$$+\omega_0\,\frac{f(t)}{\overline{z}'\left(\frac{1}{\omega_0},t\right)}=2\left[\varphi^+(\omega_0,t)-\varphi^-(\omega_0,t)\right], \tag{29}$$

где $\varphi^+(\omega_0,t)$ и $\varphi^-(\omega_0,t)$—соответственно предельные значения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\nu(\omega,t)\,\overline{\nu}\left(\frac{1}{\omega},t\right)}{\omega-w}\,d\omega \quad \text{слева и справа } (w\to\omega_0).$$

По формулам Племеля $\varphi^+(\omega_0,t)-\varphi^-(\omega_0,t)=\nu(\omega_0,t)\;\overline{\nu}\left(\frac{1}{\omega_0},t\right)$.

Подставляя это значение в (29), получим уравнение (12′).

§ 3. Разыскание частного решения уравнения (22)

Будем искать частное решение уравнения (22) вида:

$$\nu(w,t)=\int_{C_\xi}\frac{X(\xi,t)}{w-x(\xi,t)}\,d\xi \tag{30}$$

(C_ξ—окружность $|\xi|=r$), где $X(\xi,t)$—функция, голоморфная по t и удовлетворяющая условию Гёльдера в области K_{t_0}:

$$|\xi|=r,\ |t|<t_0,\ t_0>0$$

$x(\xi,t)$—также голоморфная функция по t и $|x(\xi,t)|>r_1>1$ в той же области.

Подставляя выражение для $\nu(w,t)$ по формуле (30) в формулу (21), находим:

$$P(w,t)=-\int_{C_\zeta}\int_{C_\xi}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega+w}{(\omega-x)\left(\frac{1}{\omega}-z_1\right)(\omega-w)}\,\frac{d\omega}{\omega}\right]XZ_1\,d\xi d\zeta = [2])$$

$$-\int_{C_\zeta}\int_{C_\xi}\frac{XZ_1}{1-xz_1}\left(1+\frac{2x}{\omega-x}\right)d\xi d\zeta. \quad [3]) \tag{31}$$

---

[1]) См. [4], § 16.

[2]) Здесь и в дальнейшем обозначено $x=x(\xi,t)$, $y=x(\gamma,t)$, $z_1=x(\zeta,\overline{t})$, $X=X(\xi,t)$, $Y=X(\gamma,t)$, $Z_1=\overline{X}(\overline{\xi},t)$.

[3]) При подсчете внутреннего интеграла следует учесть, что $|x|>r_1>1$, $|z_1|>r_1>1$.

Отсюда

$$Pw = -\int\limits_{c_\xi}\int\limits_{c_\zeta} \frac{XZ_1}{1-xz_1}\left(w + 2x + \frac{2x^2}{w-x}\right) d\xi d\zeta \tag{32}$$

и

$$\frac{\partial(Pw)}{\partial w} = \int\limits_{c_\xi}\int\limits_{c_\zeta} \frac{XZ_1}{1-xz_1}\left(\frac{2x^2}{(w-x)^2} - 1\right) d\xi d\zeta. \tag{33}$$

Воспользовавшись формулами (30), (32), (33), найдем правую часть уравнения (22).

Обозначая её через J, будем иметь:

$$J = \int\limits_{c_\xi}\int\limits_{c_{\eta_1}}\int\limits_{c_\zeta} \frac{XYZ_1}{1-xz_1}\left[\frac{2x+y}{(w-y)^2} + \frac{2}{w-y}\right] d\xi d\eta_1 d\zeta -$$

$$-\int\limits_{c_{\eta_1}} \frac{Y(g+g_1y+gy^2)}{(w-y)^2} d\eta_1 -$$

$$-2\int\limits_{c_{\eta_1}} \frac{Y(g_1+2gy)}{w-y} d\eta_1 - 3g\int\limits_{c_{\eta_1}} Y d\eta_1 + \tag{34}$$

$$+\int\limits_{c_\xi}\int\limits_{c_{\eta_1}}\int\limits_{c_\zeta} \frac{XYZ_1}{1-xz_1}\cdot\frac{2x^2}{(w-x)(w-y)^2} d\xi d\eta_1 d\eta_1 -$$

$$-\int\limits_{c_\xi}\int\limits_{c_{\eta_1}}\int\limits_{c_\zeta} \frac{XYZ_1}{1-xz_1}\cdot\frac{2x^2}{(w-x)^2(w-y)} d\xi d\eta_1 d\zeta. \quad [1])$$

Заменяя во всех интегралах, кроме последнего, ξ на η и η_1 на ξ, получим:

$$J = \int\limits_{c_\xi}\int\limits_{c_{\eta_1}}\int\limits_{c_\zeta} \left[\frac{2y+x}{(w-x)^2} + \frac{2}{w-x}\right] \frac{XYZ}{1-yz_1} d\xi d\eta_1 d\zeta -$$

$$-\int\limits_{c_\xi} \frac{X(g+g_1x+gx^2)}{(w-x)^2} d\xi - 2\int\limits_{c_\xi} \frac{X(g_1+2gx)}{w-x} d\xi -$$

$$-3g\int\limits_{c_\xi} X d\xi + \int\limits_{c_\xi}\int\limits_{c_{\eta_1}}\int\limits_{c_\zeta} \frac{XYZ_1}{(w-x)^2(w-y)}\left(\frac{2y^2}{1-yz_1} - \frac{2x^2}{1-xz_1}\right) d\xi d\eta_1 d\zeta. \tag{35}$$

Обозначим в выражении (35) два последних интеграла через I_1 и I_1

$$I_1 = -3g\int\limits_{c_\xi} X d\xi$$

$$I_2 = \int\limits_{c_\xi}\int\limits_{c_{\eta_1}}\int\limits_{c_\zeta} \frac{XYZ_1}{(w-x)^2(w-y)}\left(\frac{2y}{1-yz_1} - \frac{2x^2}{1-xz_1}\right) d\xi d\eta_1 d\zeta.$$

---

[1]) $g(t)$ и $g_1(t)$ определяются по формулам (13), (19) и (20), в которых следует положить $\gamma(w,t) = \int\limits_{c_\xi} \frac{X(\xi,t)}{w-x(\xi,t)} d\xi$.

После некоторых преобразований интеграл I_2 может быть представлен в виде:

$$I_2 = -2\int_{c_\xi}\int_{c_\eta}\int_{c_\zeta}\frac{(x+y-xyz_1)}{(1-xz_1)(1-yz_1)}\left[\frac{1}{(w-x)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{v-x}\,\frac{1}{w-x}\right]XYZ_1 d\xi d\eta d\zeta \quad [2]), \tag{36}$$

Для преобразования I_1 учтем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\xi} X d\xi = h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_x}\frac{h(t)dx}{x-w} = -\frac{h(t)}{2\pi i}\int_{c_\xi}\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}{w-x}\,d\xi, \tag{37}$$

где C_x — контур, в который переходит окружность c_ξ при отображении функцией $x(\xi,t)$. Тогда

$$I_1 = 3gh\int_{c_\xi}\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}{w-x}\,d\xi, \tag{38}$$

где

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\xi} X(\xi,t)d\xi. \tag{39}$$

Воспользовавшись формулами (36) и (38), получим для I следующее выражение:

$$I = \int_{c_\xi}\int_{c_\eta}\int_{c_\zeta}\left[\frac{2y+x}{(w-x)^2}+\frac{2}{w-x}\right]\frac{XYZ_1}{1-yz_1}\,d\xi d\eta d\zeta -$$

$$-\int_{c_\xi}\frac{X(g+g_1x+gx^2)d\xi}{(w-x)^2} - 2\int_{c_\xi}\frac{X(g_1+2gx)}{w-x}\,d\xi +$$

$$+3gh\int_{c_\xi}\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}{w-x}\,d\xi - 2\int_{c_\xi}\int_{c_\eta}\int_{c_\zeta}\frac{x+y-xyz_1}{(1-xz_1)(1-yz_1)}\left[\frac{1}{(w-x)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{v-x}\,\frac{1}{w-x}\right]XYZ_1 d\xi d\eta d\zeta. \tag{40}$$

Для левой части уравнения (22) из (30) имеем:

$$\frac{dv}{dt} = \int_{c_\xi}\frac{X}{(w-x)^2}\,\frac{\partial x}{\partial t}\,d\xi + \int_{c_\xi}\frac{1}{w-x}\,\frac{\partial X}{\partial t}\,d\xi. \tag{41}$$

[2]) См. [3], стр. 185

Приравнивая в выражениях (40) и (41) коэффициенты при одинаковых степенях $w-x$, получим для X и x следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-x\int\limits_{c_{\tau_1}}\int\limits_{c_\zeta}\frac{(1+xz_1)yZ_1}{(1-xz_1)(1-yz_1)}\,d\tau_1 d\zeta-(g+g_1x+gx^2) \tag{42}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t}=2X\int\limits_{c_{\tau_1}}\int\limits_{c_\zeta}\left[\frac{1}{1-yz_1}+\frac{2(x+y-xyz_1}{(x-y)(1-xz_1)(w-yz_1)}\right]yZ_1d\tau_1d\zeta=$$

$$-\left(2g_1X+4gxX-3gh\,\frac{\partial x}{\partial\xi}\right).$$

Следовательно, если $X(\xi,t)$, $x(\xi,t)$ являются решениями системы уравнений (42), то функция (30) будет решением уравнения (22).

§ 4. Связь между правильными решениями системы (42) и решениями уравнения (22).

Введем, так же как в [3], понятие правильного решения системы (42): будем называть функции $X(\xi,t)$, $x(\xi,t)$, удовлетворяющие системе (42), правильным решением системы (42) в области $K_{t_0}:|\xi|=r$, $|t|<t_0$, $t_0>0$, если в этой области:

1) $x(\xi,t)$ и её производные по ξ до второго порядка включительно голоморфны относительно t и

$$\left|\frac{\partial^{l+k}x}{\partial\xi^k\partial t^l}\right|\leq B,\quad l=0,1,2,\quad k=0,1,2. \tag{43}$$

2) Функция $X(\xi,t)$ также голоморфна относительно t и удовлетворяет условиям:

$$|X(\xi_1,t)-X(\xi_2,t)|\leq H|\xi_1-\xi_2|^\mu,0<\mu<1$$

$$\left|\frac{\partial^l X}{\partial t^l}\right|\leq B,\qquad l=0,1,2. \tag{44}$$

В дальнейшем будет доказана следующая теорема о решениях системы (42):

Теорема 1. Пусть $r>1$ и $X_0(\xi)$ функция, определенная на c_ξ и удовлетворяющая на c_ξ условию:

$$|X_0(\xi_1)-X_0(\xi_2)|\leq H_0|\xi_1-\xi_2|^\mu,\ 0<\mu<1. \tag{45}$$

Тогда при достаточно малом t_0 система (42) имеет в K_{t_0} единственное правильное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x_1(\xi,0)=\xi,\qquad X(\xi,0)=X_0(\xi). \tag{46}$$

На основании теоремы 1 и результатов § 3 докажем две теоремы, устанавливающие связь между правильными решениями системы (42) и решениями уравнения (22).

Теорема 2. Пусть $x(\xi,t)$, $X(\xi,t)$ — правильное в K_{t_1} решение системы (42), удовлетворяющее условию

$$|x(\xi,t)|>r_1>1\quad\text{в } K_{t_1}. \tag{47}$$

Тогда функция

$$\nu(w,t)=\int_{c_\xi}\frac{X(\xi,t)}{w-x(\xi,t)}\,d\xi \tag{30}$$

голоморфна в бицилиндре $D(r_1,t_1)$ и является в $D(r_1,t_1)$ решением уравнения (22).

Доказательство. Предварительно покажем, что если $\nu(w,t)$ голоморфна в $D(r_1,t_1)$, $r_1>1$, то $P(w,t)$ также голоморфна не только в $D(1,t_1)$ но и в $D(r_1,t_1)$ и, следовательно, уравнение (22) имеет смысл в $D(r_1,t_1)$. Действительно, из голоморфности $\nu(w,t)$ в бицилиндре $D(r_1,t_1)$ следует голоморфность $\bar{\nu}\left(\frac{1}{w},t\right)$ в области $|w|>\frac{1}{r}$, $|t|<t_1$ и голоморфность функции $\nu(w,t)\bar{\nu}\left(\frac{1}{w},t\right)$ в области

$$\frac{1}{r}<|w|<r,\ |t|<t_1\ .$$

Для точек, лежащих в области $\frac{1}{r}<|w|<1$, $|t|<t_1$ имеем:

$$P(w,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\nu(\omega,t)\,\bar{\nu}\left(\frac{1}{\omega},t\right)\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\nu(\omega,t)\bar{\nu}\left(\frac{1}{\omega},t\right)\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}$$

(γ_r — окружность $|w|=r$) и, таким образом, по принципу аналитического продолжения $P(w,t)$ может быть продолжена на бицилиндр $D(r_1,t_1)$. Теперь доказательство теоремы не представляет затруднений. Из результатов § 3 следует, что $\nu(w,t)$ является решением уравнения (22), а из условия (47) и голоморфности $x(\xi,t)$, $X(\xi,t)$ по t при $|\xi|=r$ и $|t|<t_1$ (по определению правильного решения) следует голоморфность $\nu(w,t)$ в $D(r_1,t_1)$.

Теорема 2а. Если $x(\xi,t)$, $X(\xi,t)$ — правильное в $K_{t_0}(t_0>0)$ решение системы (42), удовлетворяющее начальным условиям (46) и $r_1<r$, $r_1\geqslant 1$, то при достаточно малом $t_1\leq t_0$ функция (30) голоморфна и является решением уравнения (22) в бицилиндре $D(r_1,t_1)$.

Доказательство. В силу начального условия (46) имеем $|x(\xi,0)|=r>r_1$. Возьмем t_1 настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $|t_1|<\frac{r-r_1}{B}$.

Тогда будем иметь $|x(\xi,t)|>r_1$, т. е., функция $x(\xi,t)$ удовлетворяет условию (47). По теореме 2а заключаем, что функция $\nu(w,t)$ (см. (30)) голоморфна в бицилиндре $D(r_1,t_1)$ и является в $D(r_1,t_1)$ решением уравнения (22).

§ 5. Существование решений уравнений (22) и (12′) и их единственность

На основании результатов предыдущего параграфа можно теперь разрешить основной вопрос о существовании и единственности решений уравнений (22) и (12′).

Теорема 3. Пусть функция $\nu_0(w)$ голоморфна в круге $|w|\leq r$ $r>1$, и пусть $r_1<r$, $r_1\geqslant 1$.

Тогда при достаточном малом $t_1>0$, в бицилиндре $D(r_1,t_1)$ существует единственное голоморфное решение $\nu(w,t)$ уравнения (22), удовлетворяющее начальному условию $\nu(w,0)=\nu_0(w)$. Если, кроме того, $\nu_0(w)$ не принимает в $|w|\leq r$ значения нуль, то при достаточно малом $t_2\leq t_1$ решение $\nu(w,t)$ также не принимает в $D(r_1,t_1)$ значения нуль.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству, приведенному в [3] [1]). Разница заключается лишь в том, что здесь для функции $\nu_n(w)$ [2]) будут иметь место следующие рекуррентные формулы:

$$(n+1)\nu_{n+1}=\sum_{n=0}^{n}\left[(P_kw+g_k+g_{1k}w+g_kw^2)\frac{d\nu_{n-k}}{dw}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{d(P_kw)}{dw}+2wg_k+g_{1k}\right)\nu_{n-k}\right], \tag{48}$$

где

$$P_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \nu_m(\omega)\bar{\nu}_{k-m}\left(\frac{1}{\omega}\right)\frac{\omega+w}{\omega-w}\cdot\frac{d\omega}{\omega}. \tag{49}$$

$$g_k=-\left[\frac{i\gamma}{p_2-p_1}\log\frac{\delta}{}\nu_k(0)+\frac{i\gamma}{p_2-p_1}\sum_{m=0}^{k}\frac{\nu_{k-m}(0)}{m!}\frac{d^m}{dt^m}\left(\log\sum_{p=0}^{m}\nu_p(0)t^p\right)_{t=0}\right] \tag{50}$$

$$g_{1k}=-\left[\frac{i\gamma\log\delta}{p_2-p_1}Re\frac{\partial\nu_k}{\partial w}(0)+\right.$$

$$\left.+\frac{i\gamma}{p_2-p_1}\sum\frac{Re\frac{\partial\nu_{k-m}}{\partial w}(0)}{w'.}\frac{d^m}{dt^m}\left(\log\sum_{p=0}^{m}\nu_p(0)t^p\right)_{t=0}\right]. \tag{51}$$

Из теоремы 3 как следствие вытекает теорема 3а. Пусть функция $z_0(w)$ ($z_0(0)=0$, $z'_0(0)>0$) мероморфна в круге $|w|\leq r$, $r>1$ и $z'_0(0)\neq 0$ в круге $|w|\leq r$. Тогда при достаточно малом $t_1>0$ в бицилиндре $D(r_1,t_1)$, $1<r_1<r$ существует единственное мероморфное решение $z(w,t)$ уравнения (18), удовлетворяющее условиям $z(w,0)=z_0(w)$, $z'_w(w,t)\neq 0$ в $D(r_1,t_1)$. Если, в частности, $z_0(w)$ голоморфна в $|w|\leq r_0$ $r_1<r_0\leq r$, то при достаточно малом t_1 функция $z(w,t)$ будет голоморфна в $D(r_1,t_1)$.

§ 6. Однолистность решения

Для окончательного разрешения поставленной в работе задачи требуется доказать однолистность решения. Доказательству однолистности предпошлем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть функции $\tilde{P}(w,t)$, $\tilde{g}(t)$, $\tilde{g}_1(t)$, $\tilde{f}(t)$ — голоморфны и ограничены в $D(r_0,t_0)$, $t_0>0$, $0<r_0<r$ и пусть функция $z=z_0(w)$,

---

[1]) См. [3], стр. 186—187.

[2]) $\nu(w,t)=\nu_0(w)+t\nu_1(w)+\ldots+t^n\nu_n(w)+\ldots$ (52)

$z_0(0)=0$, $z'_0(0)>0$, голоморфна и однолистна в круге $|w|\leq r$. Тогда при достаточно малом $t'_0>0$ решение $z(w,t)$ уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\left[(\tilde{P}+\tilde{g}_1)w+\tilde{g}(1+w^2)\right]\frac{\partial z}{\partial w}=\tilde{f}(t), \tag{53}$$

удовлетворяющее начальному условию $z(w,0)=z_0(w)$, голоморфно в $D(r'_0, t'_0)<r_0$ и отображает круг $|w|\leq r'_0$ на однолистные области $Gr'_0(t)$.

Доказательство. Введем вместо z новую функцию ξ, связанную с z соотношением

$$\xi=z-\int_0^t \tilde{f}(t)\,dt. \tag{54}$$

Достаточно доказать заключение теоремы для ξ, так как в силу соотношения (54) оно распространяется и на z.

Для ξ получим уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+\left[(\tilde{P}+\tilde{g}_1)w+\tilde{g}(1+w^2)\right]\frac{\partial \xi}{\partial w}=0, \tag{55}$$

при начальном условии $\xi(w,0)=z(w,0)=z_0(w)$.

Для простоты доказательства можно считать, что $\xi(w,o)=z_0(w)\equiv w$, поскольку общий случай сводится к этому заменой $\xi=z_0(\xi^*)$ [1]).

В случае $z_0(w)\equiv w$ имеем $\xi(w,t)=\omega(0,w,t)$, где $\omega(\tau,w,t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\left[\tilde{P}(\omega,\tau)+\tilde{g}_1(\tau)\right]\omega+\tilde{g}(\tau)(1+\omega^2), \tag{56}$$

удовлетворяющее начальному условию: $\omega(t,w,t)=w$. Так как по условию теоремы правая часть уравнения (56) ограничена при $|w|<r_0$, $|t|<t_0$,

$$\left|(\tilde{P}+\tilde{g}_1)w+\tilde{g}(1+w^2)\right|\leq M<\infty,$$

то из уравнения (56) следует, что при $|w|\leq r'_0$ и

$$|t|<t'_0=\min\left(\frac{r_0-r'_0}{2M},\ t_0\right)$$

$$\left|\frac{d|\omega|}{d\tau}\right|\leq\left|\frac{d\omega}{d\tau}\right|\leq M \quad \text{и} \quad |\omega(\tau,w,t)|\leq|w|+\left|\int_t^\tau \frac{d|\omega|}{dt}\,dt\right|\leq \tag{57}$$

$$\leq|w|+M|t-\tau|<r'_0+2Mt'_0<r_0.$$

Покажем, что $\omega(\tau,w,t)$ будет голоморфна в $D(r'_0, t'_0)$ и однолистна в $|w|<r'_0$ (при $|\tau|<t'_0$, $|t|<t'_0$).

Известно, что если значения, принимаемые решением $\omega(\tau,w,t)$ уравнения вида (56), не выходят из области голоморфности правой части

---

[1]) После такой замены получим для ξ^* уравнение

$$\frac{\partial \xi^*}{ot}+\left[(\tilde{P}+\tilde{g}_1)w+\tilde{g}(1+w^2)\right]\frac{\partial \xi^*}{\partial w}=0 \text{ при начальном условии } \xi^*(w,o)=w.$$

уравнения, то и само решение голоморфно. В нашем случае это будет выполняться при $|w| \leq r_0'$ и $|\tau| < t_0'$ и, следовательно, функция $\omega(\tau, w, t)$ будет голоморфна по t и w в $D(r_0', t_0')$. Однолистность функции $\omega(\tau, w, t)$ в $|w| < r_0$ (при $|\tau| < t_0'$, $|t| < t_0'$) является следствием того, что по теореме единственности для уравнения (56) из $\omega_1 \equiv \omega(\tau, w_1, t) = \omega(\tau, w_2, t) \equiv \omega_2$ ($|w_1| < r_0'$, $|w_2| < r_0'$) следует, что и $w_1 \equiv \omega(t, \omega_1, \tau) = \omega(t, \omega_2, \tau) = w_2$. Полагая в частности $\tau = 0$, получим, что $\zeta(w, t)$ голоморфна в $D(r_0', t_0')$ и однолистна в $|w| < r_0'$ (при $|t| < t_0'$).

В силу соотношения (54) такое же заключение можно сделать и о функции $z(w, t)$.

Теорема 4. Пусть $z_0(w)$, $z_0(0) = 0$, $z_0'(0) > 0$, голоморфна и однолистна в $|w| \leq r$, $r > 1$.

Тогда при достаточно малом $t_0' > 0$ решение $z(w, t)$ граничной задачи (12'), удовлетворяющее начальному условию $z(w, 0) = z_0(w)$, при $|t| < t_0'$ отображает круг $|w| < 1$ на однолистную область $G(t)$.

Доказательство. По теореме 3а, при достаточно малом $t_0 > 0$ решение $z(w, t)$ голоморфно и $z_w'(w, t) \neq 0$ в бицилиндре $D(r_0, t_0)$, $1 < r_0 < r$. Следовательно, функция $\nu(w, t) = \dfrac{1}{z'(w, t)}$, а также функции $P(w, t)$, $f(t)$, $g(t)$, $g_1(t)$ будут голоморфны и ограничены в $D(r_0, t_0)$. Таким образом, фукции $P(w, t)$, $f(t)$, $g(t)$, $g_1(t)$ и $z_0(w)$ удовлетворяют условию леммы и, следовательно, функция $z(w, t)$ ($z(w, 0) = z_0(w)$) обладает указанными в теореме свойствами.

ГЛАВА ВТОРАЯ

В этой главе будет доказана теорема 1.

Доказательство этой теоремы, которое будет дано ниже, аналогично соответствующему доказательству в [3].

Тем не менее, поскольку оно все же обладает некоторыми особенностями, мы позволим себе привести его. Для упрощения вычислений, так же как в [3] докажем теорему существования и единственности для более простой системы:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\pi i} \int_{C_\eta} f(x, y, Y)\, d\eta + f_1(g, g_1, x) \tag{58}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{X}{\pi i} \int_{C_\eta} \left[\psi(x, y, Y) + \frac{\varphi(x, y, Y)}{y - x} \right] d\eta + f_2\left(g, g_1, h, x, \frac{\partial x}{\partial \xi}, X\right),$$

где функции $g(t)$, $g_1(t)$ и $h(t)$ имеют вид

$$g(t) = \int_{C_\xi} \frac{X}{x}\, d\xi \left(\alpha + \beta \log \int_{C_\xi} \frac{X}{x}\, d\xi\right),$$

$$g_1(t) = \frac{P_1(t) + \overline{P}_1(t)}{2} \left(\alpha + \beta \log \int_{C_\xi} \frac{X}{x}\, d\xi\right), \quad P_1(t) = \int_{C_\xi} \frac{X\, d\xi}{x^2},$$

$h(t) = \int_{C_\xi} X\, d\xi$, ($\alpha, \beta$ — постоянные), и функции f, f_1, f_2, φ, ψ — голоморфны в области $r_1 \leq |x| \leq r_2$, $r_1 \leq |y| \leq r_2$, $r_1 < r < r_2$, $|X| \leq R$, $|Y| \leq R$, $|g| < d$, $|g_1| < d$, $|h| < d$, $\left|\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right| < d$ (d — некоторое достаточно большое число).

Доказательство теоремы для системы (42) вполне аналогично, так как интегрирование по ξ не нарушит сходимости процесса последовательных приближений, применяемого для доказательства.

Лемма (А). Пусть функции $x(\xi, t)$, $x^*(\xi, t)$, $X(\xi, t)$, $X^*(\xi, t)$, определенные в области K_{t_0}: $\xi \subset c_\xi$, $|t| < t_0 (t_0 > 0)$ удовлетворяют в этой области следующим условиям:

1. $x(\xi, t)$, $x^*(\xi, t)$ и их производные по ξ до второго порядка включительно голоморфны относительно t и удовлетворяют неравенствам вида:

$$r_1 \leqslant |x(\xi, t)| < r_2, \quad r_1 < r < r_2 \tag{59}$$

$$A|\xi_1 - \xi_2| \leqslant |x(\xi_1, t) - x(\xi_2, t)| \leqslant B|\xi_1 - \xi_2|, \quad 0 < A < 1 < B \tag{60}$$

$$\left|\frac{\partial^{l+k} x}{\partial \xi^k \partial t^l}\right| \leqslant B, \quad l = 0, 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \quad l + k \neq 0. \tag{61}$$

2. $X(\xi, t)$, $X^*(\xi, t)$ голоморфны относительно t и удовлетворяют неравенствам вида:

$$|X(\xi, t)| \leqslant R \tag{62}$$

$$\left|\frac{\partial^l X}{\partial t^l}\right| \leqslant B, \quad l = 1, 2 \tag{63}$$

$$|X(\xi_1, t) - X(\xi_2, t)| \leqslant H|\xi_1 - \xi_2|^\mu, \quad 0 < \mu < 1. \tag{64}$$

3. $$\left|\frac{\partial^k x}{\partial \xi^k} - \frac{\partial^k x^*}{\partial \xi^k}\right| \quad \Omega(|t|), \quad k = 0, 1, 2 \tag{65}$$

$$|X(\xi, t) - X^*(\xi, t)| \leqslant \Omega(|t|) \tag{66}$$

$$|X(\xi_1, t) - X(\xi_2, t) - X^*(\xi_1, t) + X^*(\xi_2, t)| \leqslant \Omega(|t|)\,|\xi_1 - \xi_2|^\mu, \; 0 < \mu < 1, \tag{67}$$

где $\Omega(|t|)$ — некоторая неотрицательная интегрируемая функция.

4. Функция $P(t) = \int\limits_{c_\xi} \frac{X}{x}\, d\xi$ удовлетворяет условию:

$$|P| > \frac{m}{2}, \quad \text{где} \quad m = \left|\int\limits_{c_\xi} \frac{X_0}{\xi}\, d\xi\right|. \tag{68}$$

Пусть, далее, $X_0(\xi)$ — функция, удовлетворяющая на C_ξ условиям:

$$|X_0(\xi_1) - X_0(\xi_2)| \leqslant H_0|\xi_1 - \xi_2|^\mu, \quad H_0 < H \tag{69}$$

$$|X_0(\xi)| \leqslant R_0, \quad R_0 < R. \tag{70}$$

Пусть, наконец, $f(x, y, Y)$, $\varphi(x, y, Y)$, $\psi(x, y, Y)$,

$f_1(g, g_1, x)$, $f_2(g, g_1, h\ x, \frac{\partial x}{\partial \xi}, X)$ голоморфны в области

$$r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2, \quad r_1 < |y| < r_2, \quad |X| \leqslant R, \quad |Y| \leqslant R, \quad |g| < d, \quad |g_1| < d,$$
$$|h| < d, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| < d$$

M — больше максимумов функций ψ, f_2 и их первых и вторых частных производных, функций φ и её первых, вторых и третьих частных производных и

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^e\,\partial y^m\,\partial y^n}\right| \leqslant M \quad \begin{matrix} k=0,1,2,3,4 \\ l=0,1,2,3,4 \\ m=0,1,2 \\ n=0,1,2 \end{matrix}$$

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^e \partial g^m \partial g_1{}^n}\right| \leqslant M \quad \begin{matrix} k=0,1,2,3,4 \\ l=0,1,2,3,4 \\ m=0,1,2 \\ n=0,1,2 \end{matrix} \tag{72}$$

в этой области.

При выполнении всех этих условий функции

$$\tilde{x}(\xi,t)=\xi+\frac{1}{\pi i}\int_0^t dt\int_{C_\eta} f(x,y,Y)\,d\eta+\int_0^t f_1(g,g_1,x)\,dt.$$

$$\tilde{x}^*(\xi,t)=\xi+\frac{1}{\pi i}\int_0^t dt\int_{C_\eta} f(x^*,y^*,Y^*)\,d\eta+\int_0^t f_1(g^*,g_1{}^*,x^*)\,dt$$

$$\tilde{X}(\xi,t)=X_0(\xi)+\frac{1}{\pi i}\int_0^t dt\int_{C_\eta} X\left[\psi(x,y,Y)+\frac{\varphi(x,y,Y)}{y-x}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t f_2\left(g,g_1,h,x,\frac{\partial x}{\partial\xi},X\right)dt \tag{73}$$

$$\tilde{X}^*(\xi,t)=X_0(\xi)+\frac{1}{\pi i}\int_0^t dt\int_{C_\eta} X^*\left[\psi(x^*,y^*,Y^*)+\frac{\varphi(x^*,y^*,Y^*)}{y^*-x^*}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t f_2\left(g^*,g_1{}^*,h^*,x^*,\frac{\partial x^*}{\partial\xi},X^*\right)dt$$

---

x) Здесь $g(t)=\int\limits_{C_\xi}\frac{X\,d\xi}{x}\left(\alpha+\beta\log\int\limits_{C_\xi}\frac{X}{x}\,d\xi\right)$

$$g_1(t)=\frac{P_1(t)+P_1(t)}{2}\left(\alpha+\beta\log\int_{C_\xi}\frac{X}{x}\,d\xi\right),\quad P_1(t)=\int_{C_\xi}\frac{X}{x^2}\,d\xi \tag{71}$$

$$h(t)=\int_{C_\xi} X(\xi,t)\,d\xi$$

и под логарифмом понимается его главное значение.

при достаточно малом $t_0 = \delta$ удовлетворяют тем же условиям 1—4; с той лишь разницей, что функция $\Omega(|t|)$ заменяется на

$$\Omega(|t|) = D \int_0^t \Omega(|t|)\, d|t| \quad [2]). \tag{74}$$

Доказательству леммы (А) предпошлем несколько вспомогательных лемм.

Наиболее простые леммы приводятся без доказательства.

Лемма 1. При указанных в лемме А условиях

1) функции $h(t)$ и $h^*(t)$ голоморфны по t и удовлетворяют условиям вида:

$$\left| \frac{\partial^l h}{\partial t^l} \right| \leqslant D_0, \quad l = 0, 1, 2 \tag{75}$$

$$|h - h^*| \leqslant D_1 \Omega(|t|) \tag{76}$$

2) Функции $g(t)$ и $g^*(t)$ голоморфны по t и удовлетворяют условиям вида:

$$\left| \frac{\partial^l g}{\partial t^l} \right| \leqslant D_2 \quad l = 0, 1, 2 \tag{77}$$

$$|g - g^*| \leqslant D_3 \Omega(|t|) \tag{76}$$

3) функции $g_1(t)$ и $g_1^*(t)$ голоморфны по t и удовлетворяют условиям вида:

$$\left| \frac{\partial^l g_1}{\partial t^l} \right| \leqslant D_2' \quad l = 0, 1, 2 \tag{79}$$

$$|g_1 - g_1^*| \leqslant D_3' \Omega(|t|). \tag{80}$$

Лемма 2. Интегрируя неравенства (61) и (65) по кратчайшей из дуг окружности $|\xi| = r$, соединяющей точки ξ_1 и ξ_2, находим:

$$\left| \frac{\partial^{k+l} x}{\partial \xi^k \partial t^l} \right|_{\xi = \xi_1} - \frac{\partial^{k+l} x}{\partial \xi^k \partial t^l} \Bigg|_{\xi = \xi_2} \leqslant \frac{\pi}{2} B |\xi_1 - \xi_2|, \quad l = 0, 1, 2, \quad k = 0, 1 \tag{81}$$

$$\left| \frac{\partial^k x}{\partial \xi^k} \right|_{\xi = \xi_1} - \frac{\partial^k x}{\partial \xi^k} \Bigg|_{\xi = \xi_2} - \frac{\partial^k x^*}{\partial \xi^k} \Bigg|_{\xi = \xi_1} + \frac{\partial^k x^*}{\partial \xi^k} \Bigg|_{\xi = \xi_2} \leqslant \frac{\pi}{2} \Omega(|t|) |\xi_1 - \xi_2|. \tag{82}$$

Лемма 3. Обозначая

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^t dt \int_{C\tau_1} f(x, y, Y)\, d\tau_1 + \int_0^t f_1(g, g_1 x)\, dt$$

через a и

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^t dt \int_{C\tau_1} X \psi(x, y, Y)\, d\tau_1 - \int_0^t f_2\left(g, g_1, h, x, \frac{\partial x}{\partial \xi} X, \right) dt$$

[2]) Через D, D_1, D_2, d_1, d_2 и т. д. будем обозначать постоянные, зависящие только от $A, B, r, r_1, r_2, R, R_0, H, H_0, M, \mu, \alpha, \beta, m$ или от некоторых из них.

через c, будем иметь

$$1)\ |a| \leq D_4 \delta \tag{83}$$

$$|a(\xi_1, t) - a(\xi_2, t)| \leq D_5 \delta\, |\xi_1 - \xi_2|. \tag{84}$$

$$\left|\frac{\partial^k + a}{\partial t^l \partial \xi^k}\right| \leq D_6 \delta,\ k = 0, 1.2,\ l = 0, 1, 2 \tag{85}$$

$$2)\ \left|\frac{\partial^k c}{\partial t^l}\right| \leq D_7 \delta,\ k = 0, 1, 2 \tag{86}$$

$$|c(\xi_1, t) - c(\xi_2, t)| \leq D'_7 \delta\, |\xi_1 - \xi_2| \tag{86}$$

$$|c(\xi, t) - c^*(\xi, t)| \leq D_8 \int_0 \varphi(|t|)\, d\,|t| \tag{87}$$

Доказательство: 1) Из неравенства (72) следует

$$|a| \leq 2 M r \delta + M \delta = D_4 \delta, \tag{83}$$

а пользуясь неравенствами (61), (72), (77), (79), найдем

$$\left|\frac{\partial^{k+l} a}{\partial \xi^k \partial t^l}\right| \leq D_6 \delta,\ k = 0, 1, 2\ l = 0, 1, 2,\ k + l \neq 0. \tag{85}$$

Для доказательства условия (84) заметим, что при интегрировании от x_1 до x_2 по кратчайшему пути внутри кольца $r_1 \leq |x| \leq r_2$ имеем: $\int_{x_1}^{x_2} |dx| \leq \frac{\pi}{2} \left| x_1 - x_2 \right|$, и, следовательно,

$$|f(x(\xi_1, t), y, Y) - f(x(\xi_2, t), y, Y)| \leq \frac{\pi}{2} M\, |x(\xi_1, t) - x(\xi_2, t)|. \tag{88}$$

Применяя теперь неравенства (60), (72), (88), найдем:

$$|a(\xi_1, t) - a(\xi_2, t)| \leq \delta \pi r M B\, |\xi_1 - \xi_2| +$$

$$+ \delta \frac{\pi}{2} MB\, |\xi_1 - \xi_2| = D_5 \delta\, |\xi_1 - \xi_2| \tag{84}$$

2) Легко получим $|c| \leq 2 r R M \delta + M \delta = d'_7 \delta$.

Для $\left|\frac{dc}{dt}\right|$ имеем соотношение

$$\left|\frac{dc}{dt}\right| = \left|\frac{1}{\pi i} \int_0 dt \int_{c_{\tau_i}} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \psi + X \frac{\partial \psi}{dt}\right) d\eta + \int_0 \left|\frac{\partial f_2}{\partial t}\right| dt\right|$$

из которого, учитывая неравенства (61), (63), (72), (75), (77), (79), находим $\left|\frac{\partial c}{\partial t}\right| \leq d''_7 \delta$. Также найдем $\left|\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\right| \leq d'''_7 \delta$.

Из неравенств (60), (64), (72), (81) имеем

$$|c(\xi_1, t) - c(\xi_2, t)| \leq \{2rMH + \pi rRMB + \pi MB + MH\}\delta|\xi_1 - \xi_2| = D_7'\delta|\xi_1 - \xi_2|,$$

из неравенств (65), (66), (76), (78), (80)

$$|c(\xi, t) - c^*(\xi, t)| \ll D_8 \int_0^t \Omega(|t|)\, d|t|.$$

Лемма 4. При указанных в лемме A условиях

$$\left|\frac{\partial^k \tilde{x}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial^k \tilde{x}^*}{\partial \xi^k}\right| \leq D_9 \int_0^t \Omega(|t|)\, d|t|, \quad k = 0, 1, 2.$$

Доказательство. Принимая во внимание неравенства (65), (66), (72), найдем:

$$|f(x, y, Y,) - f(x^*, y^*, Y^*)| \leq M\left(\frac{\pi}{2}|x - x^*| + \frac{\pi}{2}|y - y^*| + |Y - Y^*|\right) \ll M(\pi + 1)\Omega(|t|), \tag{89}$$

а из неравенств (65), (78), (80) получим:

$$|f_1(g, g_1, x) - f^*_1(g^*, g^*_1, x^*)| \leq M\left(D_3 + D_3' + \frac{\pi B}{2}\right)\Omega(|t|)$$

и, следовательно,

$$\left|\tilde{x} - \tilde{x}^*\right| \leq D'_9 \int_0^t \Omega(|t|)\, d|t|. \tag{90}$$

Аналогично выводятся неравенства

$$\left|\frac{\partial^k \tilde{x}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial^k \tilde{x}^*}{\partial \xi^k}\right| \leq D_9'' \int_0^t \Omega(|t|)\, d|t|, \quad k = 1, 2,$$

которые вместе с неравенством (90) и доказывают лемму.

Перед доказательством последующих лемм сделаем несколько замечаний об обозначениях[1]). Если функция $f(\xi, t)$, определенная в K_{t_0}, удовлетворяет в K_{t_0} неравенству:

$$|f(\xi_1, t) - f(\xi_2, t)| \leq a(t)|\xi_1 - \xi_2|^\mu, \quad 0 < \mu < 1, \tag{91}$$

то будем говорить, что $f(\xi, t)$ удовлетворяет в K_{t_0} по ξ условию $H(\mu;\ a(t_1))$. Аналогично, если функция $\psi(\xi, \eta, t)$, определенная при $\xi \in C_\xi$, $\eta \in C_\eta$, $|t| < t_0$, удовлетворяет в этой области неравенству

$$|\psi(\xi_1, \eta_1, t) - \psi(\xi_2, \eta_2, t)| \leq a(t)(|\xi_1 - |\xi_2|^\mu + |\eta_1 - \eta_2|^\nu), \tag{92}$$

то будем говорить, что функция ψ удовлетворяет по ξ, η условию $H(\mu, \nu;\ a(t,))$. Эти обозначения будем применять и в случае, если $a(t) = \text{const}$.

[1]) Все обозначения вводятся так же, как в [3].

Лемма 5. Если $|\Phi(\xi, \eta, t)| \leq N_1$, $|\Psi(\xi, \eta, t)| = N_2$ и Φ, Ψ удовлетворяют соответственно условиям $H(1, \mu; a|t|)$, $H(1, \mu; b(t))$, то произведение $\Phi\Psi$ удовлетворяет условию $H(1, \mu; N_1 b(t) + N_2 a(t))$.

Лемма 6. Функции

$$v(\xi, \eta, t) = \frac{x(\eta, t) - x(\xi, t)}{\eta - \xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{93}$$

удовлетворяют условию

$$H\left(1, 1, \frac{\pi^2 B}{4}\right)$$

и

$$A \leq |v(\xi, \eta, t)| = B, \quad \left|\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\right| \leq \frac{\pi}{2} B, \quad k = 1, 2. \tag{94}$$

Доказательство. Из формулы

$$x(\eta, t) - x(\xi, t) = \int_{\xi}^{\eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta, \tag{95}$$

где за путь интегрирования взята кратчайшая из дуг окружности $|\xi| = r$, соединяющая точки ξ и η, следует:

$$x(\eta, t) - x(\xi, t) = (\eta - \xi) \int \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} du, \tag{96}$$

где $\zeta = u(\eta - \xi) + \xi$, $|u| < 1$ и длина пути интегрирования не превышает $\frac{\pi}{2}$.

Из формулы (96) имеем:

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k} = \int \frac{\partial^{k+1} x(\zeta, t)}{\partial \zeta \partial t^k} du, \quad k = 0, 1, 2. \tag{97}$$

Применяя лемму 2, найдем, что $\frac{\partial^k v}{\partial t^k}$ $(k = 0, 1, 2)$ удовлетворяет условию $H\left(1, 1, \frac{\pi^2 B}{4}\right)$. Что же касается неравенств (94), то они легко получаются из неравенств (60) и (81).

Лемма 7. Функция

$$v_1(\xi, \eta, t) = v(\xi, \eta, t) - v^*(\xi, \eta, t) = \frac{x(\eta, t) - x(\xi, t) - x^*(\eta, t) + x^*(\xi, t)}{\eta - \xi} \tag{98}$$

удовлетворяет условию $H\left(1, 1, \frac{\pi^2}{4} \Omega(|t|)\right)$ и

$$|v_1(\xi, \eta, t)| \leq \frac{\pi}{2} \Omega(t)^1). \tag{99}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 6.

1) (99) следует из (82)

Лемма 8. Функции

$$w(\xi, \eta, t) = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{100}$$

удовлетворяют соответственно условиям $H\left(1, 1, \frac{\pi^2 B}{4A^2}\right)$, $H(1, 1, D_{10})$, $H(1, 1, D_{11})$ и

$$|w| \leq \frac{1}{A}, \quad \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right| \leq \frac{\pi B}{2A^2}, \quad \left|\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right| \leq D_{12}^{1}). \tag{101}$$

Доказательство. Из (100), применяя лемму 7, имеем:

$$|w(\xi_1, \eta_1, t) - w(\xi_2, \eta_2, t)| \leq \frac{|v(\xi_1 \eta_1, t) - v(\xi_2, \eta_2, t)}{A^2}, \tag{102}$$

т. е. $w(\xi, \eta, t)$ удовлетворяет по ξ, η условию $H\left(1, 1; \frac{\pi^2 B}{4A^2}\right)$.

Используя леммы 5 и 6, найдем, что $\frac{\partial w}{\partial t}$ удовлетворяет условию $H\left(1, 1; \frac{\pi^3 B^2}{4A^2}\right) = H(1, 1; D_{10})$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ — условию $H(1, 1; D_{11})$.

Лемма 9. Функция

$$q(\xi, \eta, t) = \frac{\eta - \xi}{y - x} - \frac{\eta - \xi}{y^* - x^*} \tag{103}$$

удовлетворяет по ξ, η условию $H(1, 1; D_{13}\Omega(|t|))$ и

$$|q| \leq \frac{\pi}{2A^2}. \tag{104}$$

Доказательство. Записывая q в виде:

$$q(\xi, \eta, t) = \frac{\eta - \xi}{y - x} \cdot \frac{\eta - \xi}{y^* - x^*} \cdot \frac{(y^* - x^* - y + x)}{y - \xi} \tag{105}$$

и используя леммы 5, 7, 8, найдем, что $q(\xi, \eta, t)$ удовлетворяет условию $H_1, 1; D_{13}\Omega(|t|))$.

Лемма 10. Функция

$$\delta_1(\xi, \eta, t) = \frac{\eta - \xi}{y_1 - x_1} - \frac{\eta - \xi}{y - x} - h\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta - \xi}{y - x}\right), \tag{106}$$

где $x_1 = x(\xi, t + h)$, $y_1 = x(\eta, t + h)$, при достаточно малом h удовлетворяет условию $H(1, 1; D_{11}|h|)$ и

$$|\delta_1| \leq D_{12}|h|^2 \tag{107}$$

Доказательство. Можно представить δ_1 в виде:

$$\delta_1 = \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial w(\xi, \eta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial \tau}(\xi, \eta, t)\right) d\tau. \tag{108}$$

и, учитывая (101), получить $|\delta_1| \leq D_{12}|h|\,|\tau - t| \leq D_{12}|h|^2$.

---

[1]) (101) следует из неравенства (94).
[2]) (101) следует из неравенств (60) и (82).

Далее, легко убедиться, что функции x, $x^* = x_1$ удовлетворяют условиям (59), (60), (61) и (65) при $\Omega(|t| = B|h|$. Поэтому по леммам 9, 10 (при $\Omega(|t|) = B|h|$) функции.

$$\delta_1^{(1)} = \frac{\eta - \xi}{y_1 - x_1} - \frac{\eta - \xi}{y - x}, \quad \delta_1^{(2)} = -h \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta - \xi}{y - x}\right)$$

удовлетворяют соответственно условиям $H(1,1; BD_{13}|\eta|)$ и $H(1,1; D_{10}|h|)$ и, следовательно, функция δ_1 удовлетворяет условию $H(1,1; D_{14}|h|)$, где $D_{11} = BD_{13} + D_{10}$.

Лемма 11. Функции $\varphi(x,y,Y)$, $\psi(x,y,Y)$ [1]) удовлетворяют по ξ, η условию $H(1, \mu; D_{16})$.

Лемма 12. Функция

$$\Phi(\xi,\eta,t) = \varphi(x,y,Y) - \varphi(x^*,y^*,Y^*) \text{ [2]} \tag{109}$$

удовлетворяет по ξ, η условию $H(1, \mu; D_{17}\Omega(|t|)$

и

$$|\Phi(\xi,\eta,t)| \leqslant M(\pi + 1)\Omega(|t|) \text{ [3]}. \tag{89}$$

Лемма 13. Функция

$$\chi(\xi,\eta,t) = X\psi(x,y,Y) - X^*\psi(x^*,y^*,Y^*) \tag{110}$$

удовлетворяет по ξ условию $H(\mu; D_{18}\Omega(|t|)$ и

$$|\chi| \leqslant D_{19}\Omega(|t|) \text{ [4]} \tag{111}$$

Записав χ в виде

$$\chi = (X - X^*)\psi(x,y,Y) + X^*(\psi(x,y,Y) - \psi(x^*,y^*,Y^*)) \tag{112}$$

и, применив лемму 5, найдем, что каждое из слагаемых удовлетворяет соответственно условию $H(\mu; D'_{18}\Omega(|t|))$, $H(\mu; D''_{18}\Omega(|t|))$ и, следовательно, $\chi(\xi,\eta,t)$ удовлетворяет по ξ условию $H(\mu; D_{18}\Omega(|t|))$.

Лемма 14. Функция

$$Q = f_2\left(g, g_1, h, x, \frac{\partial x}{\partial \xi}, X\right) - f_2\left(g^*, g^*_1, h^*, x^*, \frac{\partial x^*}{\partial \xi}, X^*\right) \tag{113}$$

удовлетворяет по ξ условию $H(\mu; D_{20}\Omega(|t|))$ и

$$|Q| \leqslant D_{21}\Omega(|t|) \text{ [5]} \tag{114}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 12.

---

[1]) А также $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$

[2]) А также $\Phi_1(\xi,\eta,t) = \psi(x,y,Y) - \psi(x^*,y^*,Y^*)$

[3]) Доказательство этой леммы см. в [3], стр. 194—195.

[4]) (111) следует из неравенства $|\chi| \leqslant |x - x^*|\,|\psi| + |X^*|\,|\psi(x,y,Y) - \psi(x^*,y^*,Y^*)|$ и неравенств (62), (66), (89).

[5]) (114) следует из неравенства $|Q| \leqslant \left|\frac{\partial f_2}{\partial g}\right| |g - g^*| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial g_1}\right| |g_1 - g_1^*| +$

$+ \left|\frac{\partial f_2}{\partial h}\right| |h - h^*| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right| |x - x^*| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial x'}\right| \left|\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial x^*}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial X}\right| |X - X^*|\left(x' = \frac{\partial x}{\partial \xi}\right)$

леммы 1 и неравенств (65) и (66).

Лемма 15. Функции

$$\varphi_1(\xi,\eta,t)=\varphi(x,y,Y)\frac{\eta-\xi}{y-x},\quad \frac{\partial^k\varphi_1}{\partial t^k},\quad k=1,2 \tag{115}$$

удовлетворяют по ξ,η условию $H(1,\mu;D_{22})$ и

$$|\varphi_1|\leqslant\frac{\mu}{A},\quad \left|\frac{\partial^k\varphi_1}{\partial t^k}\right|\leqslant D_{23}. \tag{116}$$

Это — следствие лемм 8, 11, 5.

Лемма 16. Функция

$$\omega(\xi,\eta,t)=\varphi(x,y,Y)\frac{\eta-\xi}{y-x}-\varphi(x^*,y^*,Y^*)\frac{\eta-\xi}{y^*-x^*} \tag{117}$$

удовлетворяет по ξ,η условию $H(1,\mu;D_{24}\Omega(|t|))$ и $|\omega|\leqslant D_{25}\Omega(|t|)$. (118)

Эта лемма следует из лемм 8, 9, 11, 12, 5.

Лемма 17. Функция

$$\delta_2=\varphi(x_1,y_1,Y_1)-\varphi(x,y,Y)-h\frac{\partial\varphi(x,y,Y)}{\partial t}, \tag{119}$$

где $x_1=x(\xi,t+h)$, $y_1=x(\eta,t+h)$ и т. д., удовлетворяет при достаточно малом $|h|$ условию

$$H(1,\mu;D_{26}|h|)^1)\text{ и }|\delta_2|\leqslant D_{27}|h|^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\delta_2=\varphi(x_1,y_1,Y_1)-\varphi(x,y,Y)-h\frac{\partial\varphi(x,y,Y)}{\partial t}=$$

$$=\int_t^{t+h}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(x(\xi,\tau),x(\eta,\tau),X(\eta,\tau))-\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(x(\xi,t),x(\eta,t),X(\eta,t))\right]d\tau,$$

откуда следует $|\delta_2|\leqslant|h|^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\right|$ или $|\delta_2|\leqslant D_{27}|h|^2$, так как на основании неравенств (61), (63), (72) $\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\right|\leq D_{27}$.

Лемма 18. Функция

$$\delta_3=\varphi(x_1,y_1,Y_1)\frac{\eta-\xi}{y_1-x_1}-\varphi(x,y,Y)\frac{\eta-\xi}{y-x}-h(\eta-\xi)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi(x,y,Y)}{y-x}\right), \tag{120}$$

где $x_1=x(\xi,t+h)$ и т. д., удовлетворяет при достаточно малом $|h|$ условию $H(1,\mu;D_{28}|h|)$, и $|\delta_3|\leq D_{29}|h|^2$.

Доказательство. Записываем δ_3 в виде

$\delta_3=s_1+s_2+s_3$, где

$$s_1=\varphi(x_1,y_1,Y_1)\left[\frac{\eta-\xi}{y_1-x_1}-\frac{\eta-\xi}{y-x}-h\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta-\xi}{y-x}\right)\right]$$

$$s_2=\frac{\eta-\xi}{y-x}\left[\varphi(x_1,y_1,Y_1)-\varphi(x,y,Y)-h\frac{\partial\varphi(x,y,Y)}{\partial t}\right]$$

$$s_3=h\left[\varphi(x_1,y_1,Y_1)-\varphi(x,y,Y)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta-\xi}{y-x}\right).$$

---

1) Это — следствие лемм 11 и 12 при $\Omega(|t|)=B|h|$.

На основании лемм 5, 10 и 11 (при $\Omega(|t|)=B|h|$) функция s_1 удовлетворяет условию $H(1,\mu;D_{28}|h|)$ и $|s_1|\leq D'_{29}|h|^2$, по леммам 5, 7 и 8 функция s_2 удовлетворяет условию $H(1,\mu;D_{28}''|h|)$ и $|s_2|\leq D_{29}''|h|^2$ и, наконец, по леммам 5, 8, 11 функция s_3 удовлетворяет условию $H(1,\mu;D_{29}'''|h|)$ и $|s_3|\leq D_{29}'''|h|^2$, откуда и следует справедливость леммы.

Лемма 19. Если $\psi(\xi,\eta,t)$ удовлетворяет по ξ, η (при $\xi\subset c_\xi$, $\eta\subset c_\eta$) условию $H(1,\mu;\lambda(|t|))$, то (при $\xi\subset c_\xi$, $|t|<t_0$) интеграл

$$I(\xi,t)=\frac{1}{\pi i}\int_{c_\eta}\frac{\psi(\xi,\eta,t)d\eta}{\eta-\xi}, \tag{121}$$

существует в смысле главного значения и удовлетворяет по ξ условию $H(\mu;D_{30}\lambda(|t|))$. Если, кроме того,

$$|\psi(\xi,\eta,t)|\leq D_{31}\lambda(|t|), \tag{122}$$

то

$$|I(\xi,t)|\leq D_{32}\lambda(|t|)^{1}). \tag{123}$$

Лемма 20. Если $\psi(\xi,\eta,t)$ удовлетворяет по ξ,η условию $H(1,\mu;\lambda(|t|))$ и

$$|\psi(\xi,\eta,t)|\leq\varepsilon\lambda(|t|),\quad \varepsilon<\pi r, \tag{124}$$

то

$$|I(\xi,t)|\leq D_{33}\varepsilon^{\mu}\lambda(|t|). \tag{125}$$

Лемма доказывается путем разбиения интеграла $I(\xi,t)-\psi(\xi,\xi,t)$ на два интеграла — по дуге с центром в точке $\eta=\xi$ длины 2ε и по остальной части c_η — и оценки каждого из этих интегралов.

Лемма 21. Если функция

$$\delta(\xi,\eta,t,h)=\psi(\xi,\eta,t+h)-\psi(\xi,\eta,t)-h\psi_t'(\xi,\eta,t). \tag{126}$$

при достаточно малом $|h|$ удовлетворяет по ξ,η условию

$$H(1,\mu;D_{31}|h|)\ \text{и}\ |\delta|\leq|h|\varepsilon(h),\ \lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0, \tag{127}$$

то функция $I(\xi,t)$ (см. (121) голоморфна относительно t (при $\xi\subset C_\xi$, $|t|<t_0$).

Доказательство. Так как функция $\frac{\delta}{h}$ удовлетворяет по ξ,η условию $H(1,\mu;D_{31})$ и $|\delta|=\varepsilon(h)$, то к ней можно применить лемму 20, если положить $\lambda(|t|)=D_{34}$. Применяя лемму, находим

$$\left|\frac{1}{h}\int_{c_\eta}\frac{\delta\,d\eta}{\eta-\xi}\right|\leq D_{33}D_{34}[\varepsilon(h)]^{\mu},$$

откуда

$$\lim_{h\to0}\frac{I(\xi,t)-I(\xi,t+h)}{h}=\int_{c_\eta}\frac{\psi'(\xi,\eta,t)}{\eta-\xi}\,d\eta,$$

где интеграл, стоящий в правой части, существует в смысле главного значения (по лемме 19).

---

[1]) Доказательство этой теоремы аналогично доказательству, приведенному в [4], § 20.

Лемма B. При указанных в лемме A условиях

1) Функции

$$u(\xi,t)=-\frac{X}{\pi i}\int_{c_\tau}\frac{\varphi(X,y,Y)}{\nu-x}\,d\tau,\quad u^*(\xi,t)=-\frac{X^*}{\pi i}\int_{c_\tau}\frac{\varphi^*(x^*,y^*,Y^*)}{y^*-x^*} \tag{128}$$

голоморфны относительно t в области K_{t0} и удовлетворяют неравенствам вида:

$$|u|\le D_{35},\quad \left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|\le D'_{35},\quad k=1,2 \tag{129}$$

$$|u(\xi_1,t)-(\xi_2,t)|\le D_{36}|\xi_1-\xi_2|^\alpha \tag{130}$$

2) Функция

$$U=u(\xi,t)-u^*(\xi,t) \tag{131}$$

удовлетворяет неравенствам:

$$|U(\xi,t)|\le D_{37}\,\omega(|t|) \tag{132}$$

$$|U(\xi,t)-U(\xi_2,t)|\le D_{38}\omega(|t|)(|\xi,-\xi_2|)^\alpha. \tag{133}$$

Доказательство. Неравенства (129), (130) являются следствием лемм, 15, 19, 5, и неравенств (61), (62) и (63), неравенства (132) и (133) следуют из лемм 16, 19 и 5 и, наконец, голоморфность функции u и u^* вытекает из лемм 18 и 21.

Лемма C. При указанных в лемме A условиях:

$$|\tilde P|=\left|\int_{c_\xi}\frac{\tilde X}{\tilde x}\,d\xi\right|\le\frac{m}{2}\ \text{и}\ |\tilde P^*|\le\frac{m}{2} \tag{134}$$

Доказательство. Из предыдущих лемм легко устанавливаем оценку

$$\left|\int_{c_\xi}\frac{\tilde X}{\tilde x}\,d\xi-\int_{c_\xi}\frac{X_0}{\xi}\,d\xi\right|<D_{39}\delta. \tag{135}$$

Выберем теперь δ столь малым, чтобы $D_{39}\delta\le\frac{m}{2}$, тогда $|\tilde P|\le\frac{m}{2}$, что и требовалось доказать.

***

Теперь доказательство леммы A очевидно. Выполнение условий (59), (60), (61) для функций $\tilde x(\xi,t)$, $\tilde x^*(\xi,t)$ вытекает из леммы 3 и выполнение свойства (65) — из леммы 4. Выполнение условий (62), (63) и (64) для функций $\tilde X(\xi,t)$, $\tilde X^*(\xi,t)$ следует из леммы 3 и неравенств (129), (130) и, наконец, выполнение свойств (66), (67) — из лемм 13, 14 и B.

Из леммы C следует выполнение условия (68). Что же касается голоморфности относительно t функций $\tilde x(\xi,t)$, $\tilde x^*(\xi,t)$, а также их

производных по ξ до второго порядка включительно), $\tilde{X}^*(\xi,t)$, $\tilde{X}(\xi,t)$, то она следует из голоморфности относительно t функций $x(\xi,t)$, $x^*(\xi,t)$ (и их производных по ξ до второго порядка включительно), $X(\xi,t)$, $X^*(\xi,t)$, свойств функций f, φ, ψ, f_1, f_2, g, g_1, h и леммы B.

§ 2. Теорема существования решения системы (58).

Пусть $\varphi(x,y,Y)$, $\psi(x,y,Y)$, $f(x,y,Y)$, $f_1(g,g_1,x)$,

$f_2\left(g,g_1,h,x,\frac{\partial x}{\partial\xi},X\right)$ — голоморфны при

$r_1\leqslant|x|\leqslant r_2$, $r_1\leqslant|y|\leqslant r_2$, $|X|\leqslant R$, $|Y|\leqslant R(r_1<r<r_2)$ $|g|$, $|g_1|$, $|h|$, $\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|\leqslant d$ и $X_0(\xi)$ удовлетворяет на C_ξ условиям:

$$|X_0(\xi)|\leqslant R_0,\quad R_0<R \tag{136}$$

$$|X_0(\xi_1)-X_0(\xi_2)|\leqslant H_0|\xi_1-\xi_2|^\mu,\quad 0<\mu<1. \tag{137}$$

Тогда при достаточно малом $t_0>0$ система (58) имеет в K_{r_0} единственное правильное решение $x=x(\xi,t)$, $X=X(\xi,t)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(\xi,0)=\xi,\quad X(\xi,_0)=X_0(\xi). \tag{138}$$

Доказательство теоремы будем производить методом последовательных приближений.

Рассмотрим последовательность функций:

$$x_0(\xi,t)=\xi,\quad X_0(\xi,t)=X_0(\xi) \tag{139}$$

$$x_1(\xi,t)=\xi+\frac{1}{\pi i}\int_0^t dt\int_{C_{\tau_i}} f(\xi,\eta,X_0(\tau_i))\,d\eta+\int_0^t f_1(\xi,g_0,g_{10})\,dt \tag{140}$$

$$X_1(\xi,t)=X_0(\xi)+\frac{1}{\pi i}\int_0^t dt\int_{C_{\tau_i}} X_0(\xi)\left[\psi(\xi,\eta,X_0(\tau_i))+\frac{\varphi(\xi,\eta,x_0(\tau_i))}{\eta-\xi}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t f_2(g_0,g_{10},h_0,\xi,1,X_0(\xi))\,dt$$

. . . . . .

. . . . . .

$$x_{n+1}(\xi,t)=\xi+\frac{1}{\pi i}\int_0^t dt\int_{C_\eta} f(x_n,y_n,Y_n)\,d\eta+\int_0^t f_1(x_n,g_n,g_{1n})\,dt$$

$$X_{n+1}(\xi,t)=X_0(\xi)+\frac{1}{\pi i}\int_0^t dt\int_{C_\eta} X_n\left[\psi(x_n,y_n,Y_n)+\frac{\varphi(x_n,y_n,Y_n)}{y_n-x_n}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t f_2\left(g_n, g_{1n}, h_n, x_n, \frac{\partial x_n}{\partial \xi}, X_n\right) dt.$$

Используя лемму A, заключаем, что последовательности $X_n, x_n, \frac{\partial^k x_n}{\partial \xi^k}$ $(k=1,2)$ равномерно сходятся в области K_{t_0}[1]). Предельные функции $x(\xi,t)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\xi,t)$, $X(\xi,t)=\lim\limits_{h\to\infty} X_n(\xi,t)$ являются единственным правильным решением системы (58), удовлетворяющим начальным условиям (138)[1]).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Методы решения задачи

Наиболее естественным представляется разыскание решения задачи в виде рядов. На основании предыдущих выводов можно считать обоснованным разыскание решения задачи в виде ряда для случая, когда функция $\nu_0(w)=[f_0'(w)]^{-1}$ голоморфна в замкнутом круге $|w|\leq 1$.

Можно искать в виде ряда функцию $\nu(w,t)=\frac{\partial w}{\partial z}$

$$\nu(w,t)=\nu_0(w)+t\nu_1(w)+\ldots$$

Тогда для $\nu_n(w)$ имеют место рекуррентные соотношения (48—51). Этот метод был обоснован при доказательстве теоремы 3.

Можно разыскивать в виде ряда и непосредственно функцию $z(w,t)$

$$z(w,t)=z_0(w)+tz_1(w)+\ldots \tag{142}$$

На основании теоремы $3a$, при достаточно малом t_0 ряд (142) равномерно сходится в бицилиндре $D(1,t_0)$ и коэфициенты $z_n(w)$ являются функциями, голоморфными в $|w|<1$.

Подставляя ряд (142) в граничное уравнение (12′) и приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях уравнения, находим для определения функций $z_n(w)$ рекуррентные формулы:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z_1}{wz_0'}\right]=\frac{1}{|z_0'|^2}-\operatorname{Re}\left[\frac{\alpha_0}{wz_0'}\right], \tag{143}$$

$$n\operatorname{Re}\left[\frac{z_n}{wz_0'}\right]=-\frac{1}{|z_0'|^2}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{w}\left[\sum_{k=1}^{n-1}(kz_k+\alpha_{k-1})\bar{z}_{n-k}'+\alpha_{n-1}\bar{z}_0'\right]\right\},$$

где

$$\alpha_0=\frac{i\gamma}{p_2-p_1}\log\delta-\log z_0'(0)),$$

$$\alpha_k=-\frac{i\gamma}{p_2-p_1}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\log\sum_{p=0}^{k}z'_p(0)t_p\right)_{t=0} \qquad k=1,2,\ldots \tag{144}$$

[1]) Доказательство см. в [3], стр. 197—198.

Наконец, можно разыскивать правильное решение $x(\xi,t)$, $X(\xi,t)$, системы уравнений (42), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(\xi,0)=\xi, \quad X(\xi,0)=-\frac{\nu_0(\xi)}{2\pi i}.$$

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, который был обоснован в главе второй.

*
* *

Приведем в заключение два примера, для которых решение находилось в виде ряда:

1) Начальная область — круг $|z|<1$. Центр трубы находится в точке $z_0=0$. В этом случае

$$z_0(w)=w, \quad z_1(w)=w(1+\alpha_0 w),$$

$$z_2(w)=-\frac{1}{2}\,w\left[(1-2\alpha_0^2)+(2\alpha_0+\alpha)w-2\alpha_0^2 w^2\right], \tag{145}$$

где

$$\alpha=-\frac{i\gamma}{p_2-p_1}, \quad \alpha_0=\alpha\log\frac{\delta}{2}. \tag{146}$$

2) Начальная область—полуплоскость $\operatorname{Im} z<0$. Центр трубы находится в точке $z_0=-i$. Тогда

$$z_0(w)=i\,\frac{w-i}{w+i}, \quad z_1(w)=-\frac{1}{2}\left[w+\frac{(2i-\alpha_0)w}{w+i}\right],$$

$$z_2(w)=-\frac{1}{8}\left[\alpha_0 w^2-3w+\frac{2(-3i+3\alpha-\alpha_0^2 i+2\alpha\alpha_0 i)w}{w+i}\right]. \tag{147}$$

Здесь

$$\alpha=-\frac{i\gamma}{p_2-p_1}, \qquad \alpha_0=\alpha\log\frac{\delta}{2}. \tag{148}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Я. Полубаринова-Кочина. О неустановившихся движениях в теории фильтрации. Прикладная математика и механика. 1945, т. IX, № 1.
2. Л. А. Галин. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью Доклады Академии наук СССР. Т. XLVII. № 4.
3. П. П. Куфарев и Ю. П. Виноградов. Об одной задаче фильтрации. Прикл. математика и механика. 1948., т. XII, № 2.
4. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения.
5. Б. А. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОДОЛЬНОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО УДАРА СТЕРЖНЕЙ

С. Д. Мочалов

Исследованию продольного упруго-пластического удара стержней за последние годы был посвящен ряд работ. В 1945 году Х. А. Рахматулиным доказано существование волны разгрузки. В последующих исследованиях того же автора были рассмотрены вопросы о движении упруго-пластических волн вдоль стержня переменного предела упругости, о накоплении остаточных деформаций при многократных ударах, об ударе стержня по абсолютно жесткой плите и другие вопросы. После первых работ Рахматулина появляются исследования других авторов.

Г. С. Шапиро дал метод построения волны разгрузки при произвольной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и произвольной нагрузке на конце стержня. Ряд работ разных авторов посвящен частным задачам упруго-пластического удара стержней. Так В. С. Ленским рассмотрен удар стержня об абсолютно-жесткую преграду при линейном упрочнении. В 1942 году, в статье „К вопросу о напряжениях и усилиях при ударе" С. О. Доброгурским описан графический метод, который является удобным и эффективным при исследовании продольного упругого удара стержней.

В настоящей работе показывается, что этот метод исследования может быть применен и при решении ряда задач упруго-пластического удара, если принять, что зависимость между напряжениями и деформациями соударяющихся стержней описывается схемой линейного упрочнения.

§ 1. Примем в дальнейшем обозначения: смещение элемента $u(x,t)$, деформация $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$, модуль упругости E, модуль упрочнения E_1, абсолютное значение деформации, соответствующей пределу упругости $\pm \varepsilon_s$.

Напишем дифференциальные уравнения продольных колебаний стержня, а также зависимость между напряжением и деформацией для различных областей изменения деформации.

Имеем в области упругих деформаций:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\right) \tag{1.1}$$

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{1.2}$$

Для области пластических деформаций имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}\right) \tag{1.3}$$

$$\sigma = E_1\varepsilon - (E - E_1)\varepsilon_s. \tag{1.4}$$

В области разгрузки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a_0^2 \quad a_1^2) \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial x}. \tag{1.5}$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad (E \quad E_1)(\varepsilon_m + \varepsilon_x). \tag{1.6}$$

Здесь ε_m представляет деформацию, которую имел элемент в момент прохождения волны разгрузки.

Волны, движущиеся вдоль стержня в упругой области и в области разгрузки, изображаются в плоскости xot характеристическими прямыми: $x \pm a_0 t = \text{const}$.

Волны пластические изображаются прямыми $x \pm a_1 t = \text{const}$. Скорость распространения волн в упругой области будет a_0, а в зоне пластической a_1. Смещение $u\ (x; t)$ есть функция непрерывная, а ее производные $\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ при прохождении фронта волны испытывают разрыв; при этом, как известно, ε и v должны отвечать условию кинематической совместности.

Условие кинематической совместности формулируется следующим образом: если функция $u\ (x; t)$ при переходе через некоторую кривую $f\ (x; t) = 0$ остается непрерывной, а ее первые производные претерпевают разрыв, то скачки производных должны быть пропорциональны соответствующим частным производным от $f\ (x, t)$.

Пусть ε_1, v_1 – значение производных перед фронтом, а ε_2, v_2 за фронтом волны, движущейся вдоль характеристики

$$a_0 t \quad x = \text{const}.$$

Условие кинематической совместности дает:

$$\frac{v_2 \quad v_1}{\varepsilon_2 \quad \varepsilon_1} = \quad a$$

или

$$v_2 + a_0\ \varepsilon_2 = v_1 + a_0\ \varepsilon_1 \text{ вдоль } a_0 t \quad x = \text{const}. \tag{1.7}$$

В случае движения волны вдоль характеристики $a_0 t + x = \text{const}$ условие кинематической совместности имеет вид:

$$v_2 \quad a_0\ \varepsilon_2 = v_1 - a_0\ \varepsilon_1 \text{ на } a_0 t + x = \text{const}. \tag{1.8}$$

На фронте пластической волны совместность выражается соотношениями

$$v_2 + a_1\ \varepsilon_2 = v_1 + a_1\ \varepsilon_1 \quad \text{на} \quad a_1 t - x = \text{const} \tag{1.9}$$

$$v_1 - a_1\ \varepsilon_2 = v_1 - a_1\ \varepsilon_1 \quad \text{на} \quad a_1 t + x = \text{const}. \tag{1.10}$$

В случае продольных колебаний стержня условие кинематической совместности имеет простой механический смысл.

Пусть, например, вдоль стержня в положительном направлении движется упругая волна, фронт M которой (черт. 1) перемещается со скоростью a_0. В плоскости xot рассматриваемой волне соответствует прямая $a_0 t \quad x = \text{const}$.

Элемент $a\ b\ c\ d$, в момент t расположенный перед фронтом волны, по истечении времени dt окажется за фронтом $M_1\ N_1$ и займет положение $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$. Деформация этого элемента в момент $t + dt$ будет слагаться из деформации, которую он имел в момент t, и дополнительной деформации, возникающей в силу неравенства скоростей v_i

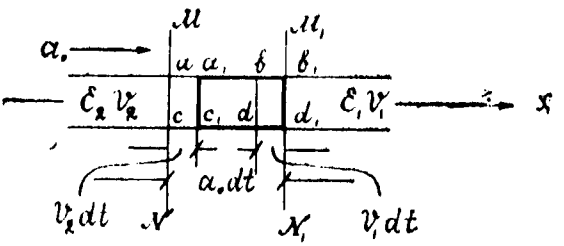
и v_2. Деформации ε_1 и ε_2 очень малы, поэтому можем считать, что деформация ε_2 за фронтом волны будет равна:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \frac{v_1 - v_2}{a_0} \text{ или } v_2 + a_0\varepsilon_2 = v_1 + a_0\varepsilon_1,$$

что совпадает с (1.7). Условие кинематической совместности, таким образом, выражает тот факт, что деформация элемента за фронтом волны равна деформации перед фронтом плюс разность скоростей элементов, деленная на скорость распространения волны. Соотношение такого вида справедливо на фронте любой волны.

Преобразуем соотношения (1.7) (1.10), заменив в них деформации через усилия.

На фронте упругой волны, движущейся в положительном направлении, на основании (1.7) имеем: $v_2 - v_1 = a_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$.



Черт. 1

Напряжение, возникающее в стержне перед фронтом волны, будет $\sigma_1 = E\varepsilon_1$, а за фронтом $\sigma_2 = E\varepsilon_2$.

Изменением площади S поперечного сечения стержня при прохождении волн пренебрегаем. Усилия, действующие в стержне с разных сторон фронта волны, будут:

$$F_1 = S\sigma_1 = SE\varepsilon_1, \qquad F_2 = S\sigma_2 = SE\varepsilon_2,$$

откуда:

$$\varepsilon_1 = \frac{F_1}{SE}, \quad \varepsilon_2 = \frac{F_2}{SE};$$

подставляя в (1.7), получим:

$$v_2 - v_1 = -\frac{a_0}{ES}(F_2 - F_1).$$

Таким образом, при движении волны вдоль характеристики положительного наклона усилия и скорости связаны соотношением:

$$v_2 - v_1 = -\frac{a_0}{ES}(F_2 - F_1) \text{ вдоль } a_0 t - x = \text{const}. \qquad (1.11)$$

Аналогично, если упругая волна движется в отрицательном направлении, на ее фронте имеет место соотношение:

$$v_2 - v_1 = \frac{a_0}{ES}(F_2 - F_1) \text{ вдоль } a_0 t + x = \text{const}. \qquad (1.12)$$

Рассмотрим теперь фронт пластической волны, движущейся в положительном направлении. Скорость ее движения равна a_1. При возникновении пластической волны в каком-нибудь сечении стержня, когда деформация элемента мгновенно из упругой переходит в пластическую, одновременно возникает упругая волна, которая несет предельную упругую деформацию $\varepsilon_1 = -\varepsilon_s$, и, предшествуя пластической волне, так как $a_0 > a_1$, движется со скоростью a_0. Таким об-

разом перед фронтом пластической волны всегда деформация элемента равна предельной упругой деформации. Перепишем (1.9) в виде:

$$v_2 - v_1 = -a_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

В силу (1.2) и (1.4) имеем:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 + (E - E_1)\varepsilon_s}{E_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \text{где} \quad \sigma_1 = -E\varepsilon_s.$$

Подставляя ε_1 и ε_2 в (1.9), получим:

$$v_2 - v_1 = -\frac{a_1}{E_1}(\sigma_2 - \sigma_1).$$

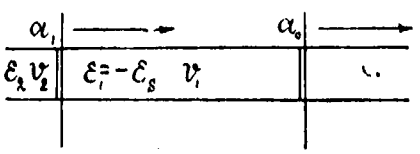
Выражая напряжения через усилия, будем иметь:

$$v_2 - v_1 = -\frac{a_1}{E_1 S}(F_2 - F_1) \text{ на } a_1 t - x = \text{const } (F_1 = -ES\varepsilon_s). \quad (1.13)$$

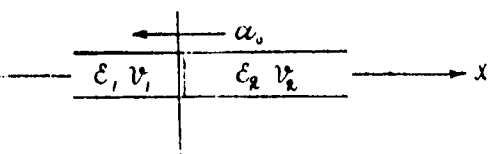
Для пластической волны, движущейся в отрицательном направлении, аналогично имеем:

$$v_2 - v_1 = \frac{a_1}{E_1 S}(F_2 - F_1) \text{ на } a_1 t + x = \text{const } (F_1 = -ES\varepsilon_s). \quad (1.14)$$

Пусть по части стержня, подвергшейся пластической деформации, пробегает в отрицательном направлении со скоростью a_0 волна разгрузки, возникшая в результате отражения от свободного конца



Черт. 2



Черт. 3

стержня. Перед фронтом этой волны (черт. 3) будут находиться элементы, испытывающие пластическую деформацию (ε_1), а за фронтом будет происходить разгрузка элементов. На основании (1.8) имеем:

$$v_2 - v_1 = a_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \text{ где по (1.6) и (1.4)}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} + \frac{E - E_1}{E}(\varepsilon_1 + \varepsilon_s), \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{E - E_1}{E_1}\varepsilon_s.$$

Выражая ε_2 через напряжения σ_1 и σ_2, имеем:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} + \frac{E - E_1}{E}\left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{E}{E_1}\varepsilon_s\right).$$

Подставляя ε_1 и ε_2 в (1.8), получаем:

$$v_2 - v_1 = a_0\left\{\frac{\sigma_2}{E} + \frac{E - E_1}{E}\left(\frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{E}{E_1}\varepsilon_s\right) - \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{E - E_1}{E_1}\varepsilon_s\right\}$$

или

$$v_2 - v_1 = \frac{a_0}{E}(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Заменяя напряжения через усилия, получаем на фронте волны разгрузки соотношение:

$$v_2 - v_1 = -\frac{a_0}{ES}(F_2 \quad F_1) \text{ на } a_0 t + x = \text{const.} \qquad (1.15)$$

Если волна разгрузки будет двигаться в положительном направлении и, следовательно, ей будет соответствовать характеристика положительного наклона $a_0 t \quad x = \text{const}$, то на фронте такой волны имеет место зависимость:

$$v_2 \quad v_1 = \quad -\frac{a_0}{ES}(F_2 \quad F_1) \text{ на } a_0 t \quad x = \text{const.} \qquad (1.16)$$

В части стержня, первоначально подвергшейся пластической деформации, а затем разгрузке, может возникнуть новая упругая волна.

Если ε_1 и v_1 — деформация и скорость перед фронтом такой волны, движущейся в положительном направлении, а ε_2 и v_2 — деформация и скорость за фронтом, то из (1,5) следует, что:

$$v_2 - v_1 = \quad a_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

На основании (1.6) ε_2 и ε_1 выражаются формулами:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} + \frac{E \quad E_1}{E}(\varepsilon_m + \varepsilon_s)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \frac{E \quad E_1}{E}(\varepsilon_m + \varepsilon_s),$$

где ε_m есть наибольшая деформация, испытанная элементом при прохождении пластической волны.

Подставляя ε_1 и ε_2 в (1.5) и заменяя σ_1 и σ_2 через усилия F_1 и F_2, приходим к соотношению:

$$v_2 - v_1 = -\frac{a_0}{ES}(F_2 - F_1) \text{ на характеристике } a_0 t - x = \text{const.} \qquad (1.17)$$

Если же упругая волна будет двигаться в отрицательном направлении по указанной выше области, то на фронте этой волны будем иметь:

$$v_2 - v_1 = \frac{a_0}{ES}(F_2 - F_1) \text{ на характеристике } a_0 t + x = \text{const.} \qquad (1.18)$$

Найденные соотношения (1.11—1.18) послужат основанием для геометрического исследования упруго-пластического удара.

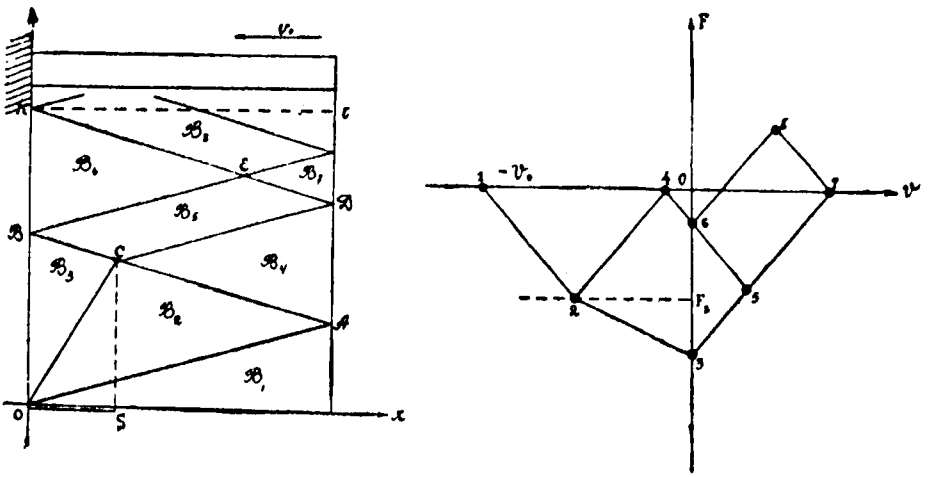
§ 2. Рассмотрим удар стержня по абсолютно жесткой преграде. Стержень длины l и площади сечения S, движущийся со скоростью v_0 по нормали к преграде, ударяется торцом. Принимаем скорость v_0 столь значительной, что в момент удара в стержне возникают пластические деформации. Нужно выяснить картину распределения по длине стержня и во времени скоростей элементов и усилий.

Из соотношений (1.11—1.18) видно, что, когда волне соответствует характеристика положительного наклона, скорость и усилие на фронте этой волны связаны линейным соотношением, которое в плоскости FOV изобразится прямой отрицательного наклона, и, наоборот, при движении волны в отрицательном направлении соответствующие ей

скорость и усилие связаны соотношением, изображаемым прямой положительного наклона.

С началом соударения с конца стержня, мгновенно возникнув, устремятся две волны—упругая и пластическая. Упругая волна будет, двигаться вдоль характеристики OA, а пластическая—вдоль OC (черт. 4).

В области B_1, ограниченной характеристикой OA, усилие равно нулю и скорость равна—v_0. Область B_1 изобразится в плоскости FOV



Черт. 4

точкой (1). Во всех точках области B_2 усилие равно $-F_s$ ($F_s = SE\varepsilon_s$), а вдоль OA имеем на основании (1.11)

$$v + v_0 = -\frac{a_0}{ES} F.$$

Точка (2) в плоскости FOV, изображающая состояние элементов в области B_2, отыскивается как пересечение прямой с угловым коэффициентом $-\frac{a_0}{ES}$, проходящей через точку (1), с прямой $F = -F_s$.

Вдоль OC на основании (1.13) имеем соотношение:

$$v - v_2 = \frac{a_1}{E_1 S}(F \quad F_2).$$

Из граничного условия имеем, что при $x = 0$ скорость $v = 0$; таким образом, точка (3), характеризующая состояние элементов в области B_3, отыскивается как пересечение прямой отрицательного наклона $-\frac{a_1}{E_1 S}$, проходящей через точку (2), с прямой $v = 0$.

Упругая волна, отразившись от свободного конца, будет двигаться вдоль характеристики AB до встречи с пластической волной в точке C.

В результате встречи к свободному концу пойдет или только упругая волна, или упругая, несущая предельную упругую деформацию, и волна пластическая. Этот вопрос остается невыясненным до соответствующих построений в плоскости FOV.

Точка (4), соответствующая области B_4, лежит на пересечении прямой положительного наклона $\frac{a_0}{ES}$, проходящей через точку (2), и оси $F=0$.

Из проделанных построений следует:

1. Области B_i плоскости xot (черт. 4) изображаются точками плоскости FOV.

2. Двум областям плоскости xot, разделенным характеристикой положительного наклона, соответствуют две точки плоскости FOV, лежащие на прямой отрицательного наклона; если же области разделены характеристикой отрицательного наклона, то точки, их изображающие, лежат на прямой положительного наклона. Точка (5), например, в рассматриваемой задаче отыскивается как пересечение прямой положительного наклона, проходящей через точку (3), и прямой отрицательного наклона $-\frac{a_0}{ES}$, проходящей через точку (4).

Если ордината точки (5) окажется меньше $-F_s$, то это будет означать, что в точке C возникнут и пойдут к свободному концу две волны: волна упругая, несущая предельную упругую деформацию, и волна пластическая. В этом случае точка (5), соответствующая области упругой волны, будет лежать на линии $F=F_s$, а точка, изображающая область вновь возникшей пластической волны, отыскивается обычным способом.

Дальнейшее построение в случае, приведенном на черт. 4, продолжается до получения в области, прилегающей к ударяющему торцу стержня, положительной силы F. Это будет указывать на прекращение соударения (точка K на черт. 4).

Построение картины движения волн в плоскости xot и отыскание скоростей и усилий в плоскости FOV должно вестись одновременно.

Длина зоны пластической деформации, а также время соударения τ определяются в плоскости xot.

Зная наибольшее усилие в пластической зоне, равное ординате точки (3), можно вычислить величину остаточных деформаций.

Отыскание координат точек (1)—(8) геометрическим построением можно заменить последовательным совместным решением уравнений прямых:

$$B_1B_2 \qquad v_2+v_0=-\frac{a_0}{ES}F_2$$

$$B_2B_3 \qquad -v_2=-\frac{a_1}{E_1S}(F_3-F_2)$$

$$B_2B_4 \qquad v_4-v_2=-\frac{a_0}{ES}F_2$$

$$B_4B_5 \qquad v_5-v_4=-\frac{a_0}{ES}F_5$$

$$B_3B_4 \qquad v_5-v_3=\frac{a_0}{ES}(F_5-F_3).$$

.....

В результате решения получим выражения для скоростей и деформаций, найденные В. С. Ленским.

Рассмотрим теперь удар стержня о вязкую преграду.

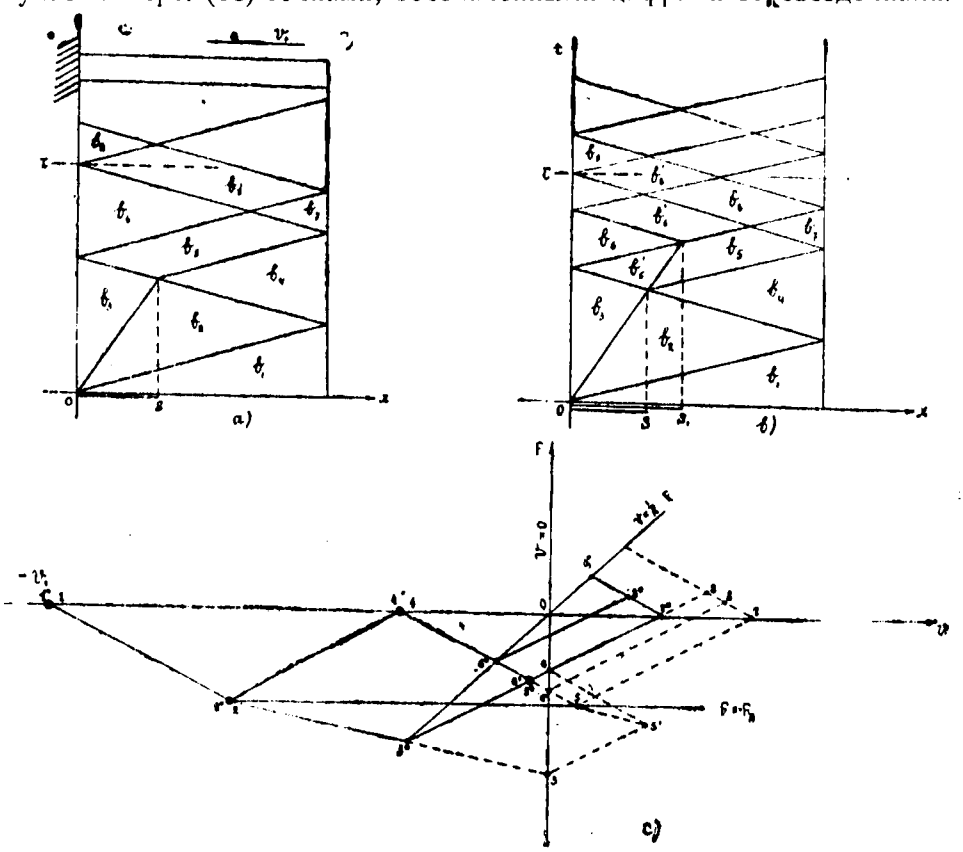
Пусть сила сопротивления преграды пропорциональна скорости ударяющего торца стержня:

$$F = Kv \text{ или } v = \frac{1}{K} F.$$

Здесь K — коэффициент пропорциональности. Значение $K = \infty$ соответствует абсолютно твердой преграде.

Графическое решение задачи проводится подобно предыдущему и приведено на черт. 5.

Картина движения волн в стержне при ударе о вязкую преграду показана на черт. (5а), а распределение усилий и скоростей в этом случае на черт. (5с) точками, обозначенными цифрами со звездочками.



Черт. 5

Для сравнения рассмотрен удар того же стержня, двигавшегося с той же начальной скоростью v_0, о преграду абсолютно-жесткую.

При ударе о вязкую преграду граничное условие при $x=0$ изображалось в плоскости FOV прямой: $v = \frac{1}{K} F$, а при ударе о жесткую преграду прямой $v = 0$.

Схема движения волн при ударе о жесткую преграду дана на черт. (5в), а усилия и скорость определяются координатами точек, обозначенных на черт. 5с цифрами без звездочек.

Точки эти в основном оказались смещенными в сторону положительных скоростей.

Если допустить, что вязкая преграда не препятствует обратному движению торца стержня, то время соударения τ в обоих случаях в данном примере будет одинаковым.

В рассмотренной задаче при ударе о вязкую преграду зона пластических деформаций OS оказалась меньше зоны пластических деформаций OS_1, возникающей при ударе о жесткую преграду.

Остаточные деформации на участке OS в первом случае всегда будут меньше, чем во втором, так как модуль ординаты точки (3*) всегда меньше модуля ординаты точки (3).

Рассмотрим соударение двух стержней.

Два стержня длины l_1 и l_2 и площади сечения S, сделанные из одного материала, движутся навстречу друг другу со скоростями, модули которых есть W_1 и W_2.

Движение волн вдоль стержней и распределение усилий и скоростей представлены на черт. 6.

Для того, чтобы в рассматриваемых соударяющихся стержнях возникла пластическая деформация, скорости их, как следует из черт. 6в, должны отвечать неравенству:

$$W_1 + W_2 > 2 F_s \operatorname{tg} \gamma,$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_0}{ES}, \quad F_s = ES\varepsilon_s.$$

Отсюда следует, что

$$W_1 + W_2 > 2a_0 \varepsilon_s.$$

Время соударения для рассмотренного примера будет $\tau = \frac{2l_1}{a_0}$.

Стержни расходятся вибрируя.

Графический метод позволяет следить за движением волн в стержнях и после окончания соударения.

В рассматриваемой задаче в момент времени, непосредственно следующий за окончанием соударения, правый торец первого стержня приобретает отрицательную скорость, равную абсциссе точки C_{13}, а левый торец второго стержня отойдет с положительной скоростью, определяемой абсциссой точки P_{15}.

Длины зон остаточных деформаций в стержнях оказались различными, а величины остаточных деформаций равными.

В правом, более коротком, стержне длина зоны будет равна

$$OS = \frac{2l_2' a_1}{a_0 + a_1}$$

и определяется из уравнений:

$$a_1 t_2 = OS$$

$$a_0 t_1 + OS = 2 l_2.$$

Длина пластической зоны левого стержня находится как абсцисса точки пересечения прямых OB и AB. Решая систему:

$$a_1 t_1 = OS_1$$

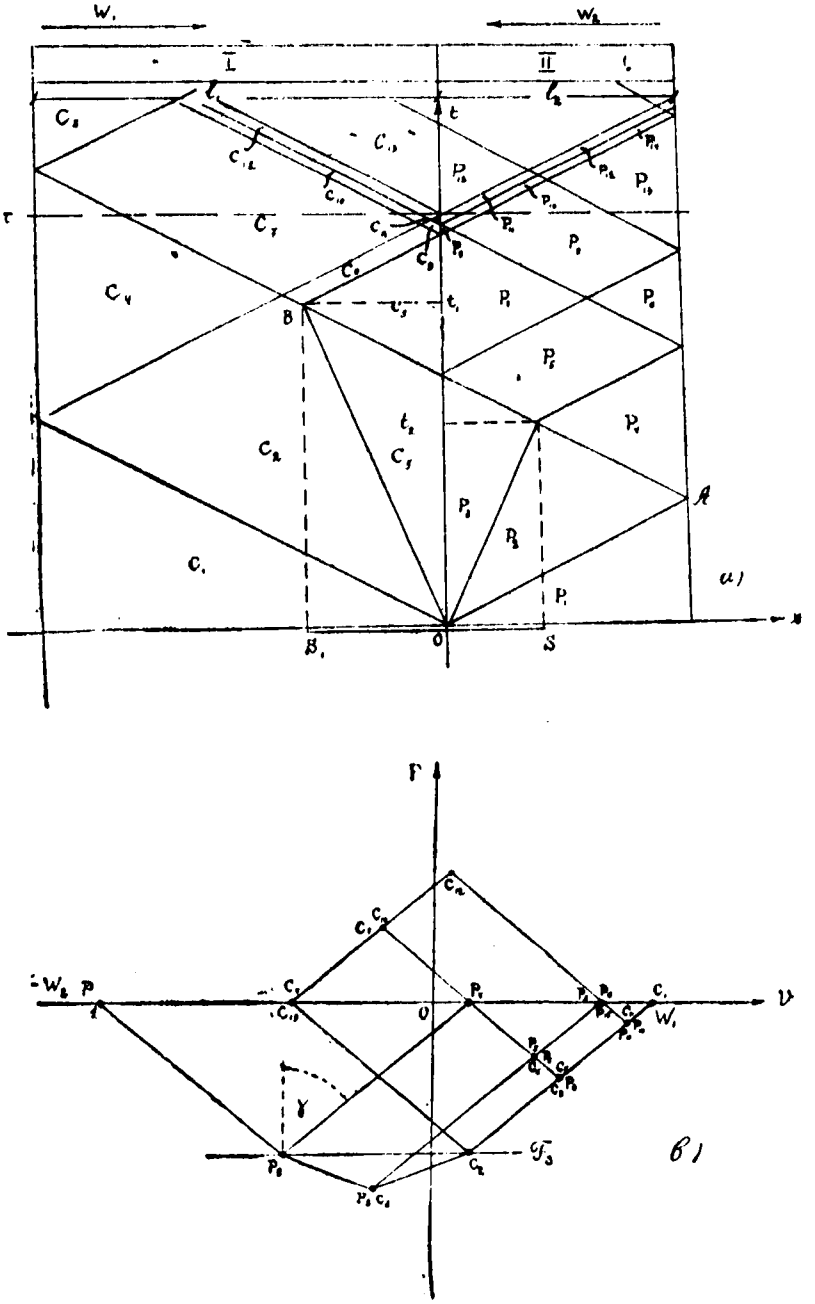
$$a_0 t_1 - OS_1 = 2 l_2$$

находим:

$$OS = \frac{2 l_2 a_1}{a_0 - a_1}.$$

Области распространения пластических деформаций в обоих стержнях оказались таким образом зависящими от длины короткого стержня.

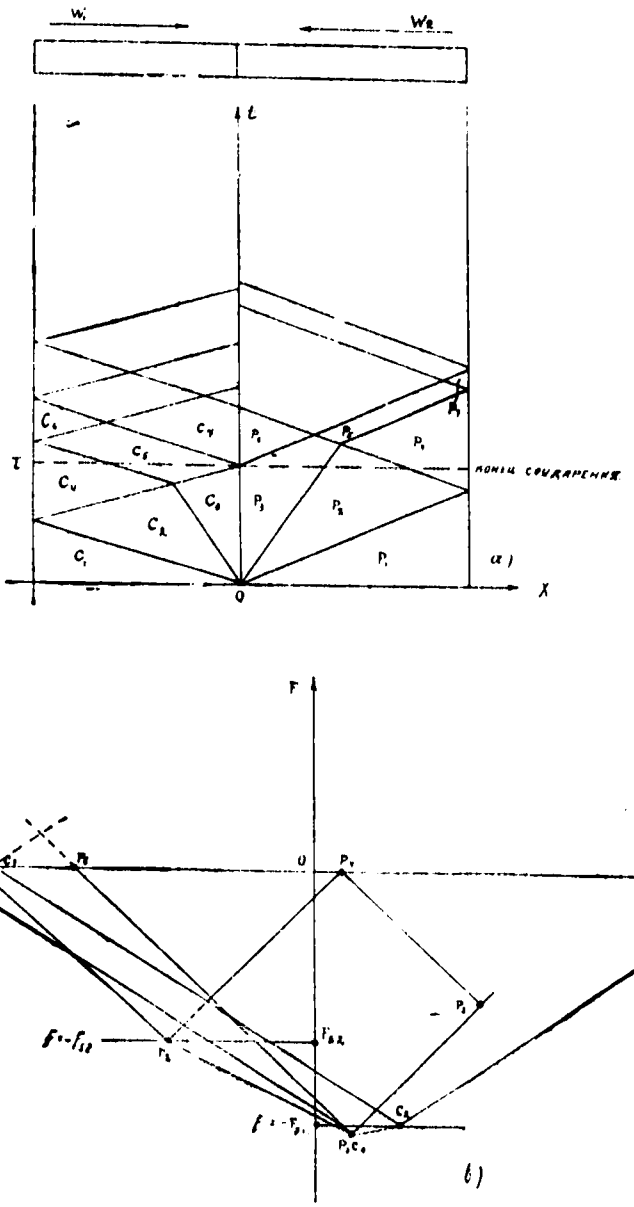
Это заключение будет справедливым, если l_1 достаточно велико $\left(l_1 > \frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} l_2\right)$ и волна, отраженная от свободного конца короткого стержня, догонит пластическую волну в длинном стержне раньше,



Черт. 6

чем с ней встретится волна, отраженная от свободного конца этого стержня, а относительная скорость стержней не превосходит некоторого предела.

Рассмотрим соударение двух стержней из различных материалов. Пусть первый стержень имеет длину l_1, площадь сечения S_1, модуль упругости E_{01}, модуль упрочнения E_{11}, усилие, соответствующее пределу упругости $-F_{s1}$ и скорость $W_1 > 0$.



Черт. 7

Соответствующие величины для второго стержня обозначим: l_2, S_2, E_{02}, E_{12}, $-F_{s2}$ и скорость $v_2 = -W_2$ $(W_2 > 0)$.

Построение схем движения волн и распределения скоростей и усилий (черт. 7) в настоящем примере тем отличается от построений предыдущей задачи, что в плоскости *xot* наклоны характеристик первого стержня отличны от наклона характеристик второго стержня, точно так же, как и наклоны прямых в плоскости FOV, соответствующих

первому стержню (прямые c—c), будут отличны от наклонов прямых, соответствующих второму стержню (прямые p-p).

Принцип построения схем остается тем же.

В рассматриваемом примере точка P_3C_3 плоскости FOV, черт. 7в, оказалась ниже прямых $F=-F_{s2}$ и $F=-F_{s1}$; это указывает на возникновение с началом соударения волны пластических деформаций в обоих стержнях. Если точка P_3 C_3 окажется расположенной между прямыми, пластическая деформация возникает только во втором стержне, и, наконец, при расположении P_3C_3 над прямой $F=-F_{s2}$ удар стержней будет упругим.

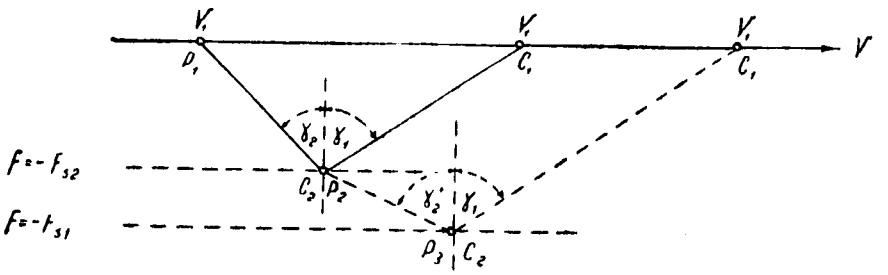
Выясним, какому условию должны удовлетворять скорости V_1 и V_2 для того, чтобы в стержнях возникли пластические деформации.

Принимаем, как и на чертеже 7, что $F_{s1}>F_{s2}$.

Рассмотрим черт. 8. Из чертежа имеем:

$$\operatorname{tg}\gamma_1=\frac{a_{01}}{E_{01}S_1},\quad \operatorname{tg}\gamma_2=\frac{a_{02}}{E_{02}S_2},\quad \operatorname{tg}\gamma_2'=\frac{a_{12}}{E_{12}S_2}.$$

Второй стержень достигает предельной упругой деформации, если точки C_2 и P_2 совпадут на линии $F=-F_{s2}$ (чертежи 7 и 8).



Черт. 8

Относительная скорость стержней в этом случае будет равна (черт. 8).

$$v_1-v_2=F_{s2}\,(\operatorname{tg}\gamma_2'+\operatorname{tg}\gamma_1).$$

Подставляя $\operatorname{tg}\gamma_2'$ и $\operatorname{tg}\gamma_1$, имеем:

$$v_1-v_2=a_{02}\varepsilon_s+\frac{F_{s2}}{E_{01}S_1}a_{01}$$

или

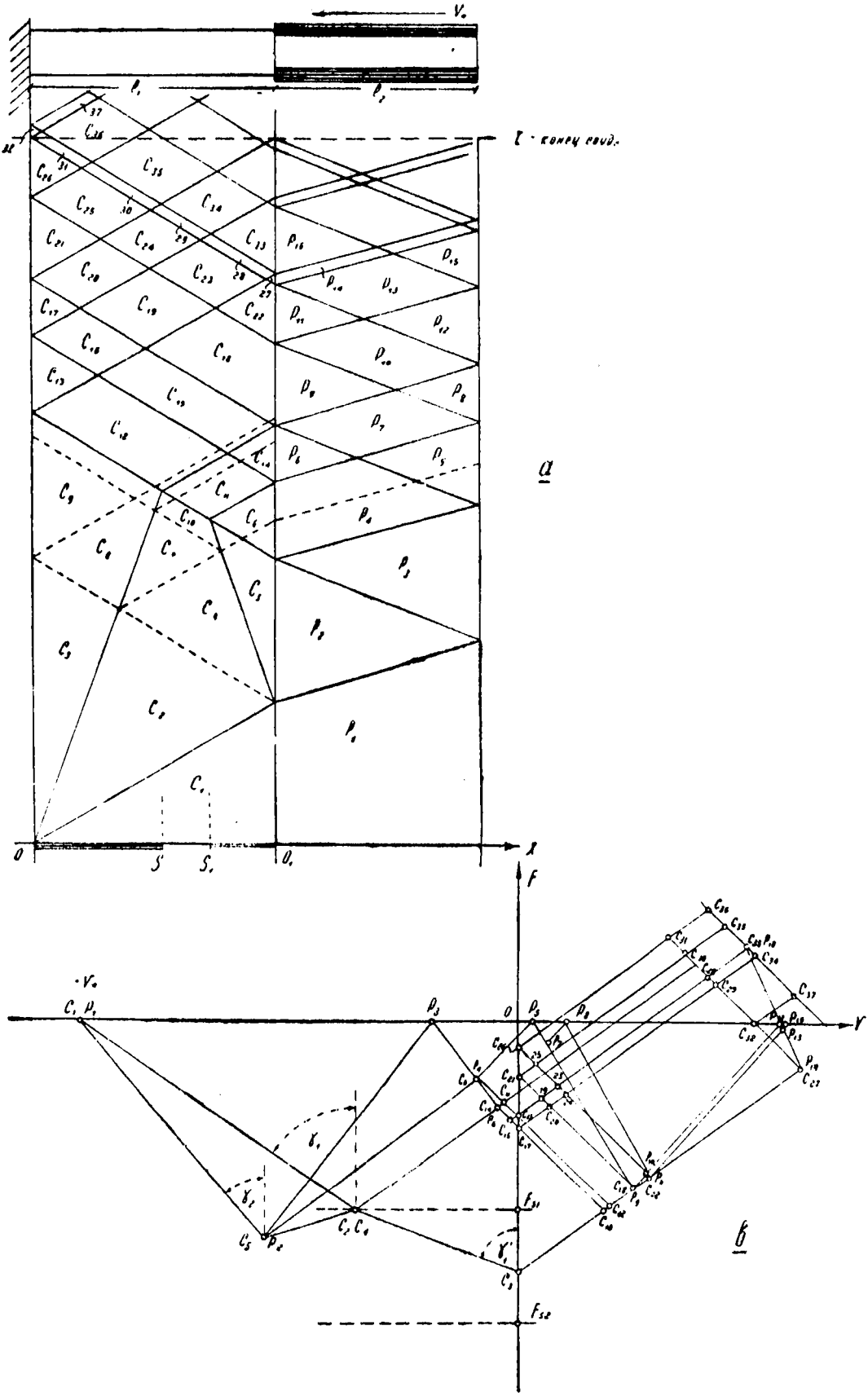
$$v_1-v_2=a_{02}\varepsilon_{s2}+\frac{F_{s2}}{F_{s1}}a_{01}\varepsilon_{s1}.$$

Отсюда следует, что удар стержней будет упругим, если скорости v_1 и v_2 удовлетворяют неравенству:

$$v_1-v_2<a_{02}\varepsilon_s+\frac{F_{s2}}{F_{s1}}a_{01}\varepsilon_{s1}.$$

В первом стержне возникает предельная упругая деформация, если относительная скорость v_1-v_2 будет такова, что точка P_3C_3 совпадает с точкой C_2 на линии $F=-F_{s1}$; тогда относительная скорость определится из уравнения:

$$v_1-v_2=F_{s1}\operatorname{tg}\gamma_1+F_{s2}\operatorname{tg}\gamma_2+(F_{s1}-F_{s2})\operatorname{tg}\gamma_2',$$



Черт. 9

подставляя $tg\,\gamma_1$, $tg\,\gamma_2$ и $tg\,\gamma'_2$, имеем:

$$v_1 - v_2 = a_{02}\,\varepsilon_{s2} + a_{01}\,\varepsilon_{s1} + (F_{s1} - F_{s2})\,\frac{a_{12}}{E_{12}S_2}.$$

Найденные соотношения позволяют сделать следующие заключения (для случая $F_{s1} > F_{s2}$):

1. Если относительная скорость удовлетворяет неравенству:

$$v_1 - v_2 < a_{02}\,\varepsilon_{s2} + \frac{F_{s2}}{F_{s1}}\,a_{01}\,\varepsilon_{s1},$$

то удар стержней будет упругим.

2. Если же относительная скорость ограничена неравенствами:

$$a_{02}\,\varepsilon_{s2} + \frac{F_{s2}}{F_{s1}}\,a_{01}\,\varepsilon_{s1} < v_1 - v_2 < a_{02}\,\varepsilon_{s2} + a_{01}\,\varepsilon_{s1} + (F_{s1} - F_{s2})\,\frac{a_{12}}{E_{12}S_2},$$

то во втором стержне возникает пластическая деформация и упругая деформация в первом стержне.

3. Когда относительная скорость велика и выполняется неравенство

$$v_1 - v_2 > a_{02}\,\varepsilon_{s2} + a_{01}\,\varepsilon_{s1} + (F_{s1} - F_{s2})\,\frac{a_{12}}{E_{12}S_2},$$

то в обоих стержнях возникает пластическая деформация.

Если сечения стержней подобраны так, что $F_{s1} = F_{s2}$, т. е., площади сечений удовлетворяют соотношению:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{E_{02}\,\varepsilon_{s2}}{E_{01}\,\varepsilon_{s1}},$$

то пластические деформации в обоих стержнях возникают одновременно при выполнении условия:

$$v_1 - v_2 > a_{02}\,\varepsilon_{s2} + a_{01}\,\varepsilon_{s1}.$$

При рассмотрении картины распределения скоростей и усилий обращает на себя внимание то обстоятельство, что хотя первый стержень имел до удара скорость W_1, большую скорости W_2, однако по окончании удара скорость всех его элементов оказалась близкой к скорости $-W_2$ и даже имеются элементы в области C_6, скорость которых в отрицательном направлении превосходит скорость W_2. Таким образом первый стержень в общем воспринял скорость второго стержня. В то же время второй стержень оказался гораздо менее восприимчивым к начальной скорости первого. В момент окончания соударения элементы второго стержня, прилегающие к ударяющему торцу, имели даже отрицательную скорость (точка P_6), которая немногим больше начальной скорости стержня $-W_2$.

Объясняется это тем, что первый стержень обладает большой упругостью (твердостью), остаточные деформации, возникшие в нем, очень малы, и он по существу испытал почти упругий удар.

Второй же стержень подвергся большой пластической деформации, и из энергии, сообщенной ему первым стержнем, лишь часть обратилась в энергию кинетическую, а другая часть ушла на образование остаточных деформаций.

Рассмотрим удар составного стержня об абсолютно-жесткую преграду.

Стержень, представленный на чертеже 9, спаян из двух цилиндров различных длин, сечений и материалов.

Как в предыдущем примере, для первого цилиндра, обращенного к преграде, обозначим длину его l_1, площадь сечения S_1, модуль упругости E_{01}, модуль упрочнения E_{s1}, усилие, соответствующее пределу упругости F_{s1}. Соответствующие величины для второго стержня будут: l_2, S_2, E_{02}, E_{12}, F_{s2}.

Составной стержень движется по нормали к преграде с начальной скоростью V_0. При построении плана движения волн и схемы усилий и скоростей приняты следующие граничные условия:

1. На преграде скорость элементов стержня равна нулю.
2. На свободном торце второго стержня усилие равно нулю.
3. В месте соединения стержней скорости и усилия равны.

Как видно из черт. 9, области C_3, C_8, C_9 плоскости *xot* оказались областью одной волны, которая в плоскости *FOV* изображается точкой C_3. Точно так же областям C_2, C_4, C_7, C_{10} плоскости *xot* соответствует точка C_2 плоскости *FOV*.

Построения диаграмм доведены до конца соударения. В рассмотренном примере время соударения τ, как видно из черт. 9-а, будет равно:

$$\tau = 6\frac{l_2}{a_{02}} + 2\frac{l_1}{a_{01}}.$$

Изменение давления стержня на преграду характеризуется точками C_3, C_{13}, C_{17}, C_{21}, C_{26}, лежащими на оси F. Давление, как видим, в общем убывает, хотя не всегда давление, возникшее позже, меньше всех предыдущих. Так, например, в области C_{17} давление больше, чем в предыдущий промежуток времени в области C_{13}.

Давление между стержнями и скорость сечения спайки даются точками, обозначенными двумя буквами *c-p*. К концу соударения это сечение приобретает значительную положительную скорость, и давление между стержнями делается небольшим, заменяясь в последующем движении усилием растяжения.

Пластической деформации подверглись оба конца первого стержня, причем бо́льшую испытал торец, обращенный к преграде.

Длины зон пластических деформаций могут быть взяты с чертежа или вычислены как абсциссы точек пересечения соответствующих характеристик.

Для рассмотренного примера длины зон пластических деформаций определяются равенствами:

$$OS = \frac{a_{01}}{a_{02}} \cdot \frac{2a_{11}l_2}{a_{11}+a_{01}},$$

$$O_1S_1 = \frac{a_{01}}{a_{02}} \cdot \frac{2a_{11}l_2}{a_{01}-a_{11}}.$$

Если при прочих равных условиях длину второго стержня сделать больше и такой, чтобы удовлетворялось соотношение:

$$OS + O_1S_1 = \frac{a_{01}}{a_{02}} 2a_{11}l_2\left(\frac{1}{a_{01}+a_{11}} + \frac{1}{a_{02}-a_{11}}\right) > l_1$$

или

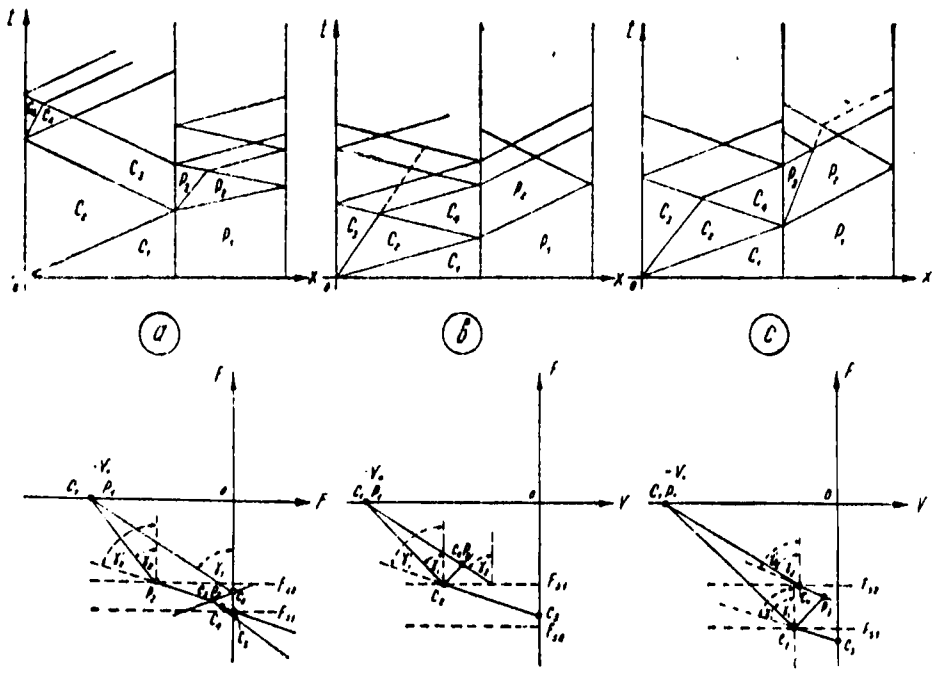
$$l_2 > \frac{a_{02}(a_{01}^2 - a_{11}^2)}{4a_{01}^2 a_{11}} l_1,$$

то первый стержень весь подвергнется пластической деформации, так как пластические волны, идущие с обоих концов первого стержня,

встретятся в этом случае раньше, чем их достигнет волна, отраженная от свободного конца второго стержня.

Возникновение пластических зон в составном стержне может быть весьма различным в зависимости от данных, характеризующих составляющие цилиндры. Если, например, второй стержень по своим упругим свойствам близок первому стержню так, что составной цилиндр будет почти однородным, то, естественно, пластическая деформация возникает лишь с конца первого стержня, обращенного к преграде.

Некоторые случаи возможного возникновения пластических зон в период времени, непосредственно следующий за началом соударения, показаны на черт. 10, где каждой верхней картине движения волн соответствует нижний чертеж распределения скоростей и усилий.



$$tg\,\gamma_1 = \frac{a_{01}}{E_1 S_1}, \quad tg\,\gamma_1 = \frac{a_{11}}{E_1 S_1}; \qquad tg\,\gamma_1 = \frac{a_{01}}{E_{01} S_1}, \quad tg\,\gamma_1 = \frac{a_{11}}{E_{11} S_1}.$$

Черт. 10

На рис. 10а представлен случай, когда $F_{s1} > F_{s2}$ и $\operatorname{tg}\gamma_1 > \operatorname{tg}\gamma_2$. Пластическая деформация во втором стержне возникла со стороны, прилегающей к первому цилиндру, через промежуток времени $\frac{l_1}{a_{01}}$ после начала соударения. Конец первого стержня, ударяющий о преграду, начал испытывать пластическую деформацию через время $\tau = \frac{2l_1}{a_{01}}$ после начала соударения, когда первая волна, возникшая при ударе в левом стержне, отраженная от места спайки стержней, вернулась к преграде.

На чертеже 10в имеем: $F_{s1} < F_{s2}$ и $\operatorname{tg}\gamma_1 < \operatorname{tg}\gamma_2$. Конец первого стержня, ударяющий о преграду, испытывает пластическую деформа-

цию с началом соударения. Во втором стержне движутся волны упругие.

На чертеже 10с дано начало построения схем для случая, когда $F_{s_1} > F_{s_2}$ и $\operatorname{tg}\gamma_1 < \operatorname{tg}\gamma_2$. Пластическая деформация в левом конце первого стержня возникает с началом соударения, а в левом конце второго стержня через промежуток времени $\frac{l_1}{a_{01}}$ после начала соударения.

Кроме указанных случаев, не исключена возможность появления пластических деформаций в составном стержне по истечении некоторого промежутка времени после начала соударения.

Исследование графическим методом продольного упруго-пластического удара стержней при линейном упрочнении может быть проведено во всех случаях, когда граничные и начальные условия таковы, что в стержнях образуются волны, каждая из которых несет постоянную скорость элементов и постоянную деформацию. Во всех рассмотренных выше случаях это имело место.

К такому же типу задач относится и задача об ударе упругим стержнем по стержню упруго-пластическому, опертому одним концом на абсолютно-жесткую преграду (черт. 11).

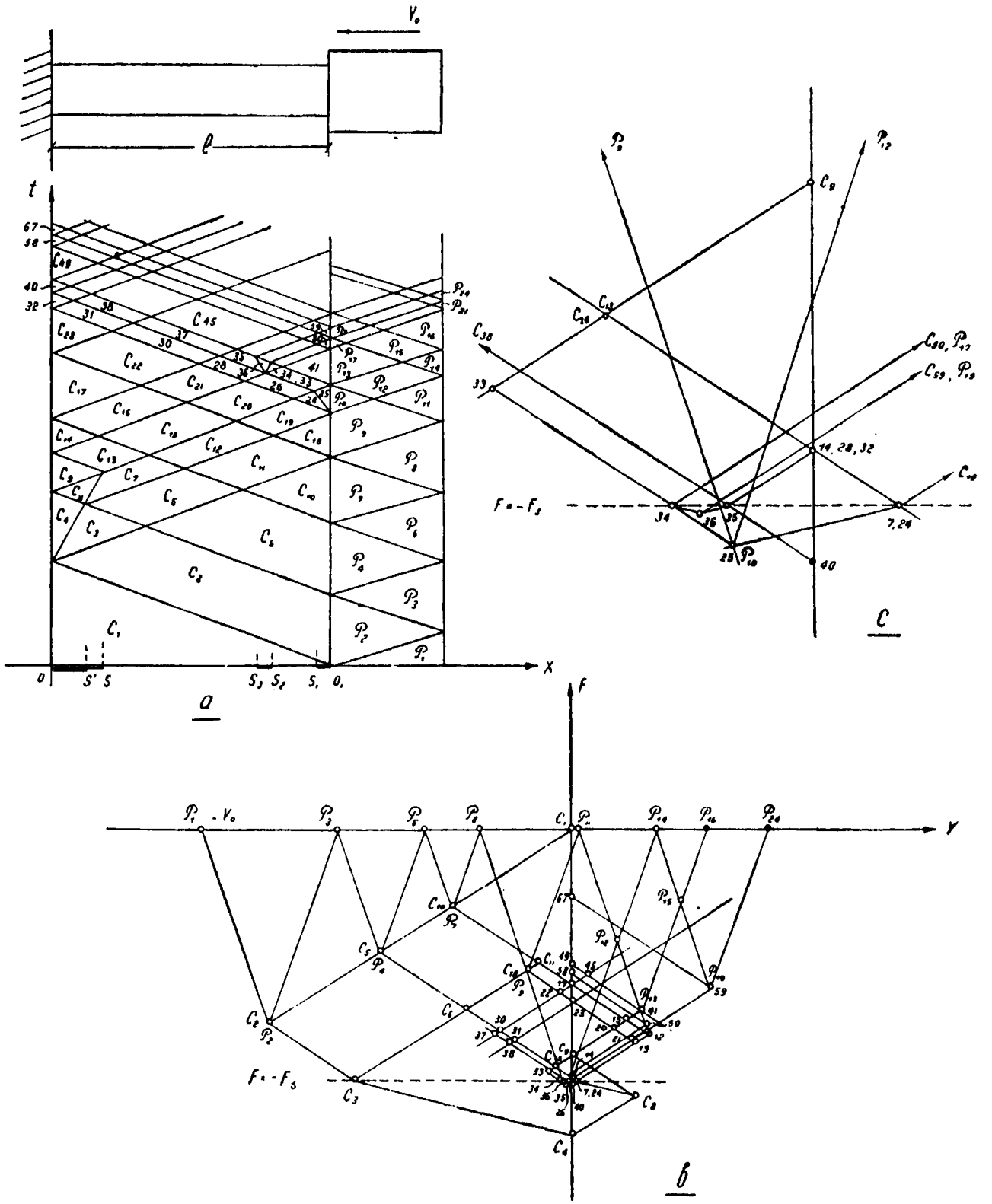
Построение схем на чертеже 11 доведено до момента, когда элементы ударяющего стержня приобрели в процессе отражения значительные положительные скорости, и давление на преграду со стороны стержня, подвергшегося удару, стало близким к нулю. Поэтому появление пластических деформаций в дальнейшем не будет иметь места.

Давление в зонах C_1, C_9, C_{11} и т. д. с течением времени в общем убывает, хотя некоторые усилия, возникающие позднее, значительно превосходят ряд давлений, возникавших ранее. Так, в области C_{10} усилие более, чем в полтора раза превосходит давление, возникшее в области C_{17}.

Наибольшее давление возникает в области C_1 через промежуток времени $\frac{l_1}{a_{01}}$ после начала соударения и сохраняется до прихода волны, отраженной от свободного конца ударяющего тела (черт. 11а).

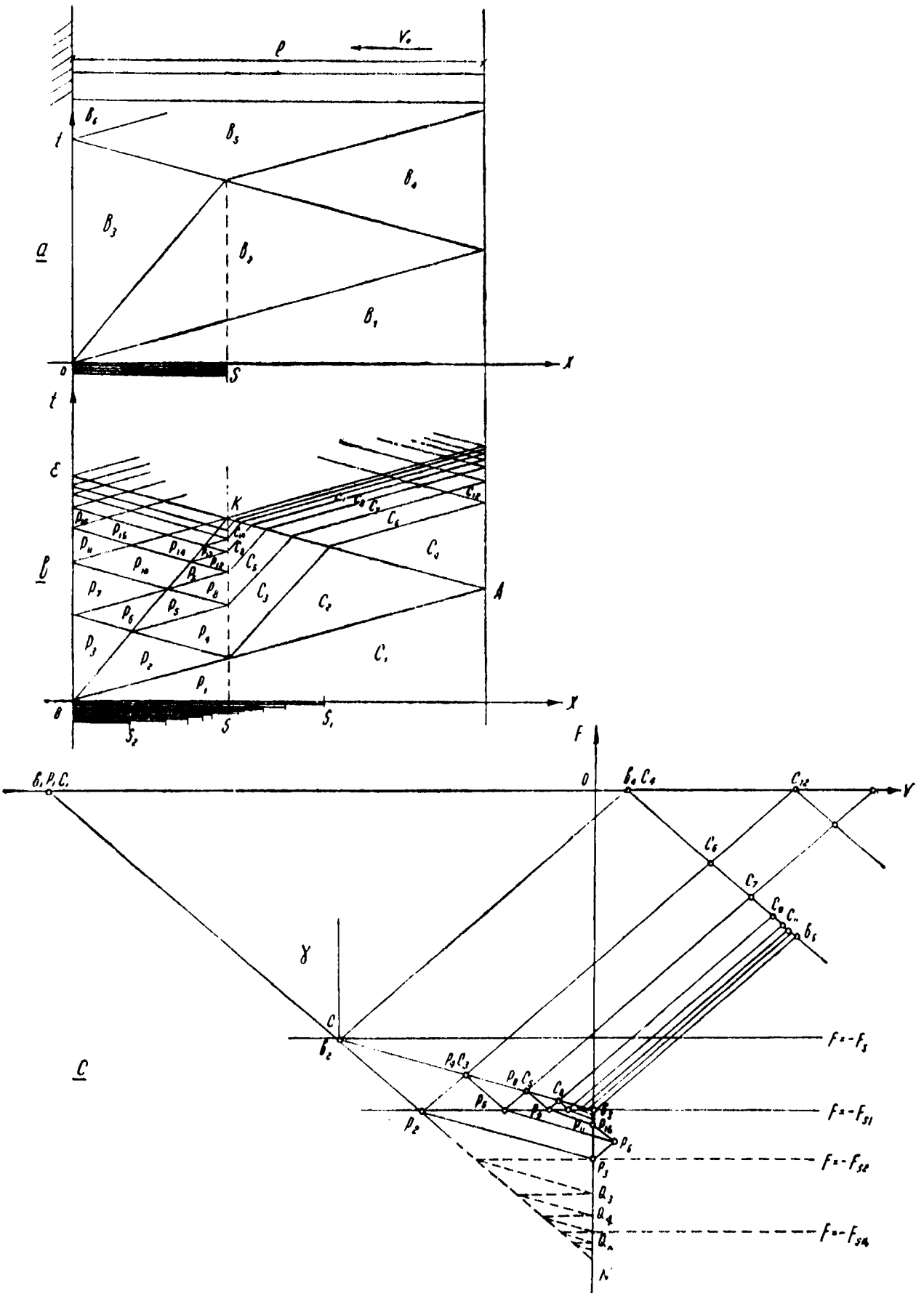
Скорость и усилие в месте соприкосновения стержней в процессе удара характеризуется точками C_2P_2, C_5P_4, и так далее. Как видно, эта скорость с течением времени монотонно возрастает.

Давление между стержнями, достигнув мгновенно с началом соударения величины, определяемой ординатой точки C_2P_2, затем монотонно убывает до момента $t = \frac{2l_1}{a_{01}}$, когда к правому торцу первого стержня приходит волна, отраженная от преграды. В этот момент сила взаимодействия между стержнями резко возрастает и в прилегающей к правому торцу части первого стержня возникает пластическая деформация (область 25). Такой резкий скачок давления объясняется тем, что вдоль волны, отраженной от преграды, в областях C_2, C_{12}, C_{19} элементы сильно сжаты, почти до предела упругости, и при подходе к правому концу стержня волна сообщает элементам положительную скорость (точка C_{19}), а элементы ударяющего тела, прилегающие к его левому концу, имеют к тому моменту скорость отрицательную (точка P_9). Вследствие этого за фронтом волны, возникшей в области 24—25, деформация элементов первого стержня выходит за предел упругих деформаций.



Примечание: На чертеже 11 с дана схема построения точек: P_{10} C_{25} C_{34}, C_{83}, C_{85}, C_{40} в укрупненном масштабе.

Черт. 11


ρ
V₀
t
B₆
B₅
B₄
B₃
B₂
B₁
a
0
S
X
t
ε
K
C₁₂
C₆
C₅
C₄
C₃
C₂
C₁
A
b
S₂
S
S₁
X
F
B₀ P₀ C₀
0
B₀ C₀
C₁₂
V
C₆
C₇
C₈ C₉
B₆
γ
C
b₂
P₀ C₅
P₀ C₄
P₂
P₆
P₃
Q₃
Q₄
Q₅
Λ
f₂ - F₅
f₂ - F₅₁
f₂ - F₅₂
f₂ - F₅₄
c

Черт. 12

В области же (36) пластическая деформация возникла в результате того, что волна, за фронтом которой элементы были сжаты почти до предела упругости (область 33) и имели отрицательную скорость, встретилась с волной области 28, которая сообщала элементам скорость равную нулю, а деформацию, равную предельной упругой деформации.

Как видно, в отличие от рассмотренных ранее случаев, в стержне, подвергнувшемся удару, возникли три отдельных зоны пластических деформаций OS, O_1S_1, S_1S_8.

Наибольшей пластической деформации подвергся конец стержня, прилегающий к преграде; там образовалась зона пластических деформаций, состоящая из двух участков. Остаточные деформации на участке OS' будут больше, чем на участке $S'S$.

При небольшом увеличении скорости v_0 ударяющего тела зоны пластических деформаций распространятся на весь стержень.

Если ударяющий стержень более упругий (твердый), чем рассмотренный на черт. 11, то волны по нему в прямом и обратном направлении будут двигаться быстрее. Отражаясь от свободного конца и часто следуя в ударяющем теле друг за другом, волны, достигая места соприкосновения стержней, будут вызывать в первом стержне все новые и новые волны. Чем тверже ударяющий стержень, тем чаще друг за другом следуют волны по первому стержню. При ударе телом абсолютно-твердым волны по первому стержню будут непрерывно следовать одна за другой, и в каждом сечении стержня скорость и деформация элемента будут все время меняться.

Из сказанного следует, что при рассмотрении удара по стержню абсолютно-твердым телом можно найти приближенное графическое решение, заменив твердое тело достаточно упругим стержнем.

Графическим методом могут быть решены и другие задачи, в частности задача, рассмотренная Х. А. Рахматулиным, о полубесконечном стержне, на конце которого давление, мгновенно достигнув максимального значения, оставалось в течение некоторого времени постоянным, а затем мгновенно падает до нуля.

В качестве последнего примера рассмотрим задачу о повторном ударе стержня об абсолютно-жесткую преграду. Стержень длины l, первоначально подвергнутый со скоростью v_0 удару о преграду так, что в нем возникла пластическая деформация на участке OS (черт. 12[а]), ударяется тем же концом вторично со скоростью v_0.

При исследовании второго удара стержень рассматривается как составной цилиндр, участок OS которого имеет бо́льший предел упругости.

В плоскости FOV (черт. 12[с]) точки b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 относятся к первому удару стержня о преграду.

Усилие, соответствующее новому пределу упругости на участке OS, изображается ординатой точки b_3 и равно $F=-F_{s1}$.

Областям вида P_2, P_5, P_9....., плоскости xot, усилия в которых равны предельному упругому усилию, в плоскости FOV соответствуют точки P_2, P_5, P_9....., лежащие на прямой $F=-F_{s1}$.

Как видно из черт. 12[с], всякая волна, приходящая в сечение S из левой части стержня до прихода волны, отраженной от свободного конца, вызывает в части стержня правее S пластические волны (области C_3, C_5, C_8, C_{10}....).

В плоскости FOV этим волнам соответствуют точки P_4C_3, P_3C_5,....., лежащие на прямой c_2b_3. Чем позднее возникла такая пластическая волна, тем ближе соответствующая ей точка на прямой c_2b_3 расположена к точке b_3.

Первой волне, отраженной от свободного конца стержня, соответствует характеристика AE. В результате встреч этой волны с пластическими волнами будут возникать и двигаться к правому торцу упругие волны (области C_6, C_7, C_9, C_{11}....), которым в плоскости FOV соответствуют точки (C_6, C_7, C_9, C_{11},....) расположенные на прямой c_4b_5. По мере приближения волны, отраженной от свободного конца, к сечению S, чаще будут возникать и следовать вправо друг за другом упругие волны, а им соответствующие точки на прямой c_4b_5 будут приближаться к точке b_5. В момент, когда отраженная волна достигнет сечения S, вправо пойдет упругая волна, которой соответствует характеристика KD, а скорость и деформация, несомые этой волной, равны координатам точки b_5. Таким образом, элементы, расположенные правее сечения S, приобретут значительные положительные скорости, и возникновение в дальнейшем новых пластических деформаций не будет иметь места.

В рассматриваемом примере при втором ударе зона пластических деформаций удлинилась на величину SS_1 (черт. 12в); остаточные деформации возрастают к ударяющему торцу стержня и наибольшее значение имеют на участке OS_2.

Если стержень подвергнуть многократным ударам, то после n-го удара усилие на торце стержня, соответствующее новому пределу упругости, равно ординате точки Q_n (черт. 12с). При дальнейшем увеличении n точка Q_n будет стремиться к точке N.

Таким образом, как видно из чертежа, при бесконечном числе ударов предел усилия F_{sn} на торце стержня будет равен:

$$\lim_{n\to\infty} F_{sn} = ON = V_0 \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{sn} = \frac{V_0}{a_0} ES,$$

откуда предельная упругая деформация торца стержня представится формулой:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{sn} = \frac{\lim F_{sn}}{ES} = \frac{V_0}{a_0}.$$

Этот результат был получен Х. А. Рахматулиным.

Аналогично можно рассмотреть случай повторного соударения, когда первый и второй удары стержня о преграду производятся противоположными концами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. А. Рахматулин. О распространении волны разгрузки. Прикладная математика и механика, т. IX, в. 1, 1945.

2. Х. А. Рахматулин, Г. С. Шапиро. О распространении плоских, упруго-пластических волн. П. М. М. т. XII, в. 4, 1948.

3. С. О. Доброгурский. К вопросу о напряжениях и усилиях при ударе. А. Н. СССР. Институт металловедения. Вопросы расчета и конструирования деталей машин. 1942.

4. В. С. Ленский. Об упруго-пластическом ударе стержня о жесткую преграду. П. М. М, т. XIII, в. I, 1949.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ПЕРЕМЕЩЕНИИ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

П. П. Куфарев, П. П. Астафьев и К. А. Болецкий

§ 1. Постановка задачи. Граничные условия. В работе рассматриваются некоторые задачи о перемещении контура нефтеносности. Решение этих задач, предлагаемое здесь, основывается на существовании и свойствах мероморфных решений задачи фильтрации нефти. При этом скважины идеализированно рассматриваются как стоки.

Пусть нефть заполняет в начальный момент некоторую область $G(0)$ (плоскости z), в которой находятся в точках z_k скважины мощности $2\pi q_k(t)$ $(k=1,2,\ldots n)$. С течением времени область $G(t)$, занятая нефтью, изменяется. В постановке задачи, данной Л. С. Лейбензоном [1], на границе $\Gamma(t)$ области $G(t)$, занятой нефтью, давление считается постоянным: $p=p_0$. Давление по закону Дарси связано с комплексным потенциалом течения $\chi(z,t)$ формулой

$$p=\frac{\mu}{\varkappa}\chi,$$

где $\varkappa$ — коэффициент проницаемости грунта, μ — вязкость нефти. Таким образом, для $\chi(z,t)$ известно граничное условие:

$$\operatorname{Re}\chi(z,t)=p_0\frac{\varkappa}{\mu} \quad \text{на} \quad \Gamma(t). \tag{1.1}$$

Но оно задано на неизвестной переменной границе. Для сведения задачи к граничной задаче для известной постоянной области применяется предложенный П. Я. Полубариновой-Кочиной [2] способ конформного отображения области $G(t)$ на какую-либо простейшую область, например, на круг, полуплоскость, полосу. Так как во всех случаях дальнейшие рассуждения аналогичны, то мы приведем здесь вывод граничных условий лишь для случая отображения на полуплоскость.

Обозначим функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} w<0$ на $G(t)$, через $z(w,t)$, и положим $\chi(z(w,t),t)=f(w,t)$[1]).

Для $f(w)$ имеем из (1.1) граничное условие $\operatorname{Re} f=\varkappa\mu^{-1}p_0$ или, дифференцируя по w,

$$\operatorname{Re} f_w=0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} w=0. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\overline{b_k}(t)$ образы скважин z_k в полуплоскости $\operatorname{Im} w<0$. В точках $\overline{b_k}(t)$ $f(w)$ должна иметь логарифмические полюсы с вычетом $-q_k(t)$. Если для определенности предположить, что $z_w(w)$ ограничена в окрестности ∞ — и, то из ограниченности ско-

[1]) В дальнейшем для краткости аргумент t часто не указывается.

рости жидкости $v = f_w \bar{z}_w^{-1}$ следует, что $f_w(w)$ также ограничена в окрестности ∞ — и. Отсюда и из (1.2) следует, что

$$f = -\sum_{k=1}^{n} q_k(t) \log \frac{w - \bar{b}_k}{w - b_k}. \tag{1.3}$$

Далее, умножим скорость

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial l}{\partial z}$$

на $\bar{z}_w$, возьмем мнимую часть и положим затем $\operatorname{Im} w = 0$.

Получим:

$$\operatorname{Im} z_t \bar{z}_w = -m \operatorname{Im} f_w$$

или, по (1.2)

$$P(w) = z_t \bar{z}_w - \bar{z}_t z_w = -2mf_w. \tag{1.4}$$

Задача сводится, таким образом, к определению однолистной в $\operatorname{Im} w < 0$ функции, удовлетворяющей граничному условию (1.4)[1].

§ 2. Мероморфные решения. Предположим теперь, что $z(w)$ — мероморфная функция от w и имеет только простые полюсы в конечном или счетном множестве точек $a_s(t)$. Для определенности остановимся на случае конечного числа полюсов a_s $(s = 1,2,...m)$. Эти полюсы расположены в $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, так как $z(w)$ голоморфна в $\operatorname{Im} w < 0$. Рассмотрим лишь случай когда $\operatorname{Im} a_s > 0$. Случай $\operatorname{Im} a_s \geqslant 0$ исследуется аналогично.

Функции $z_w(w)$, $z_t(w)$ имеют в точках a_s полюсы кратности $\leqslant 2$. Следовательно, функции $\bar{z}_t(w)$, $\bar{z}_w(w)$ имеют полюсы кратности $\leqslant 2$ в точках $\bar{a}_s$, в нижней полуплоскости. Так как z_t, z_w — мероморфные функции, то, по принципу единственности, равенство (1.4) будет иметь место не только на прямой $\operatorname{Im} w = 0$, но и во всей плоскости w. Из этого равенства и из того, что f_w имеет простые полюсы в точках b_k, $\bar{b}_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, следует, что точки $\bar{b}_k$ входят в множество точек $\bar{a}_s$. Не уменьшая общности, можно принять, что множества $\{\bar{a}_s\}$ и $\{\bar{b}_k\}$ совпадают, ибо, если какие-либо точки $\bar{a}_s$ не входят в множество $\{\bar{b}_s\}$, то можно их включить в $\{\bar{b}_s\}$, полагая при этом соответствующие мощности $2\pi q_s$ равными нулю (фиктивные скважины).

Итак, положим $m = n$, $a_k = b_k$.

Из (1.4) и (1.3) следует, что должно быть

$$\operatorname*{Res}_{w=\bar{b}_k} P(w) = 2m\, q_k(t), \quad \operatorname*{Res}_{w=b_k} P(w) = -2mq_k. \tag{2.1}$$

Так как

$$\overline{P(w,t)} = -P(\bar{w},t), \tag{2.2}$$

[1]) Существование и единственность решения задачи для случая одной скважины были доказаны в [3]. Доказательство, данное в [3], может быть распространено на общий случай произвольного числа скважин Детальное построение этого доказательства, вероятно, все же следует провести, но здесь мы этим вопросом не занимаемся.

то эти соотношения эквивалентны, и достаточно удовлетворить лишь первому из них. Полагая, что главная часть в разложении $z(w)$ в ряд Лорана в окрестности b_k имеет вид:

$$z = \frac{A_k(t)}{w - b_k(t)} + \ldots. \tag{2.3}$$

имеем:

$$\operatorname*{Res}_{w=\overline{b_k}} P(w,t) = \operatorname*{Res}_{w=\overline{b_k}} (z_t \overline{z_w} - \overline{z_t} z_w) =$$

$$= \operatorname*{Res}_{w=\overline{b_k}} \left\{ z_t \left(- \frac{\overline{A_k}}{(w-\overline{b_k})^2} \right) - z_w \left(- \frac{\overline{A'_k}}{w - \overline{b_k}} + \frac{\overline{A_k}\,\overline{b'_k}}{(w-\overline{b_k})^2} \right) \right\} =$$

$$= -\overline{A_k} z_{tw}(\overline{b_k}, t) - \overline{A'_k} z_w(\overline{b_k}, t) - \overline{A_k}\,\overline{b_k'} z_{ww}(\overline{b_k}, t) =$$

$$= -\frac{d}{dt}[\overline{A_k} z_w(\overline{b_k}, t)]. \tag{2.4}$$

Следовательно, должно выполняться соотношение:

$$\overline{A_k} z_w(\overline{b_k}(t), t) = -2m \int_0^t q_k(t)\, dt + \overline{A_k}(0) z_w(\overline{b_k}(0), 0). \tag{2.5}$$

Далее, из условия неподвижности скважин имеем:

$$z(b_k(t), t) = z_k. \tag{2.6}$$

Наконец, наложим на $P(w)$ еще одно условие

$$\lim_{w \to \infty} [P(w) + 2m f_w] = 0. \tag{2.7}$$

Покажем, что если условия (25), (26), (27) выполняются, то функция $z(w)$ удовлетворяет граничному условию (14).

Действительно, из (2.3) и (2.6) имеем

$$\lim_{w \to \overline{b_k}} P(w)(w - \overline{b_k})^2 = z_t(\overline{b_k}, t) \lim_{w \to \overline{b_k}} \overline{z_w}(w,t)(w - \overline{b_k})^2 +$$

$$- z_w(\overline{b_k}, t) \lim_{w \to \overline{b_k}} \overline{z_t}(w,t)(w - \overline{b_k})^2 = -\overline{A_k} z_t(\overline{b_k}, t) +$$

$$- \overline{A_k}\,\overline{b_k'} z_w(\overline{b_k}, t) = -\overline{A_k} \frac{d}{dt} z(\overline{b_k}, t) = 0$$

и аналогично

$$\lim_{w \to b_k} P(w)(w - b_k)^2 = 0.$$

Отсюда и из (2.5), (2.1) следует что $P(w) + 2m f_w$ — целая функция. Но в таком случае из (2.7) заключаем, что эта функция тождественно равна нулю, и, тем более, граничное условие (1.4) удовлетворяется.

§ 3. Полуплоскость с конечным числом скважин. В частности, если $z(w,t)$ — рациональная функция и имеет на ∞ — и простой полюс, причем

$$\lim_{w \to \infty} (z - w) = 0,$$

то, как легко проверить, условие (2.7) удовлетворяется[1]).

[1]) Условие (2.7) удовлетворяется также если $\lim_{w \to \infty} \frac{z}{w} = \beta(t)$, $\lim_{w \to \infty} (z - \beta w) = \alpha(t)$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — вещественные функции.

Итак, функции:

$$f=-\sum_{k=1}^{n} q_k(t)\log\frac{w-\overline{b_k}}{w-b_k} \tag{3.1}$$

$$z=w+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{w-b_k} \tag{3.2}$$

дают частное решение задачи, если функции $A_k(t)$, $b_k(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\overline{A_k}\,z_w(\overline{b_k},t)=\overline{A_k}-A_k\sum_{s=1}^{n}\frac{A_s}{(\overline{b_k}-b_s)^2}=2m\int_0^t q_k(t)\,dt+$$

$$+\overline{A_k}(0)\,z_w(b_k(0)), \tag{3.3}$$

$$z(\overline{b_k},t)=\overline{b_k}+\sum_{s=1}^{n}\frac{A_s}{\overline{b_k}-b_s}=z_s. \tag{3.4}$$

Отсюда легко получить решение задачи о перемещении контура нефтеносности в случае, когда в начальный момент нефть заполняет полуплоскость (и в ней в точках z_k расположены скважины мощности $2\pi q_k$.) Действительно, для этого достаточно подчинить еще функции $A_k(t)$, $b_k(t)$ начальным условиям:

$$A_k(0)=0 \qquad b_k(0)=\overline{z}_k. \tag{3.5}$$

При этом $z(w,0)=w$ и $G(0)$ совпадает с полуплоскостью $\operatorname{Im} z<0$.

§ 4. Полуплоскость с цепочкой скважин. Выполняя предельный переход $n\to\infty$ в формулах § 3, можно получить решение задачи для различных случаев бесконечного множества скважин в полуплоскости. Впрочем, решение таких задач можно находить и непосредственно на основании соображений § 2. Для примера рассмотрим следующую задачу; пусть в начальный момент нефть заполняет полуплоскость, и в ней находится цепочка скважин одинаковой мощности $2\pi q(t)$ в точках $z_k=a_0+kl$, $a_0=-h_0 i$, $h_0>0$, $l>0$.

Покажем, что решение задачи определяется формулами:

$$f=-q(t)\log\frac{\sin\frac{\pi}{l}(w-a(t))}{\sin\frac{\pi}{l}(w+a(t))} \tag{4.1}$$

$$z=w+D(t)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(w+a(t)), \tag{4.2}$$

где вещественная функция $D(t)$ и чисто мнимая функция $a(t)$ определяются как решения уравнений:

$$\frac{l}{\pi}D z_w(a,t)=\frac{l}{\pi}D\left(1-D\frac{\pi}{l}\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{l}a\right)=2m\int_0^t q(t)\,dt \tag{4.3}$$

$$z(a,t)=a+D\operatorname{ctg}\frac{2\pi a}{l}=a_0 \tag{4.4}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$D(0)=0,\ a(0)=a_0=-h_0 i. \tag{4.5}$$

То, что периодическая функция $f(w)$ с ограниченной в окрестности ∞—и при больших $|\mathrm{Im}\, w|$ производной, имеющая логарифмические полюсы в точках a_0+kl и удовлетворяющая граничному условию (1.4), выражается формулой (4.1)—хорошо известно.

Мероморфная функция (4.2) имеет в точках $-a+kl$ простые полюсы. В силу квазипериодичности $z(w)$ уравнения (4.4), (4.3) эквивалентны условиям (2.5), (2.6). Следовательно, при выполнении условий (4.3), (4.4) функция $P-2mf_w=Q$ будет целой. Но Q — периодическая фучкция с периодом l. Имеет место следующее предложение: целая периодическая функция $Q(w)$ с периодом l, стремящаяся к нулю при $w\to\infty$ в полосе $0\leqslant \mathrm{Re}\, w\leqslant l$, тождественно равна нулю [1]). Поэтому остается показать, что

$$\lim_{w\to\infty} Q=0 \quad (0\leqslant \mathrm{Re}\, w\leqslant l).$$

Но так как при таких предельных переходах

$$\lim \operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(w+a)=\mp i,\ \lim \operatorname{cosec}\frac{\pi}{l}(w+a)=0 \text{ при } \mathrm{Im}\, w\to\pm\infty,$$

то из (4.1), (4.2) легко находим

$$\lim z_t=\lim \bar{z}_t(w)=\mp D'i,\quad \lim z_w(w)=\lim \bar{z}_w(w)=0$$

$$\lim f_w(w)=O,$$

а следовательно, $\lim Q=0$, что и требовалось доказать [2]).

§ 5. Внешность эллипса с конечным числом скважин. Пользуясь частными решениями указанного вида, можно также решить задачу о перемещении контура нефтеносности для случая когда в начальный момент нефть заполняет внешность эллипса $z=a\cos\Theta+ib\sin\Theta$ и в ней в точках z_k находятся скважины мощности $2\pi q_k(t)$ [3]).

В этом случае удобнее отображать область $G(t)$ не на полуплоскость, а на внешность круга $|w|>1$. Граничные условия при таком отображении имеют вид (см. [4]).

$$\mathrm{Im}\, w f_w=0. \tag{5.1}$$

$$P=\frac{1}{w_t'}z_t(w)\bar{z}_w\left(\frac{1}{w}\right)+w\bar{z}_t\left(\frac{1}{w}\right)z_w(w)=2mf_w(w). \tag{5.2}$$

---

[1]) Для доказательства этого предложения замечаем, что преобразование $\xi=exp\left(\frac{2\pi l}{l}w\right)$ отображает конечную плоскость w на плоскость ξ с выколотыми точками $\xi=0,\xi=\infty$, причем эквивалентные точки $w+kl$ переходят в одну точку ξ, и при $w\to\infty$ в полосе $0\leqslant \mathrm{Re}\, w\leqslant l$ ξ произвольным образом стремится к нулю или ∞—и. Поэтому $Q\left(\frac{l}{2\pi i}\log\xi\right)$ однозначна и голоморфна в области $0<|\xi|<\infty$ и стремится к нулю при $\xi\to 0$ и $\xi\to\infty$. Отсюда следует, что $Q\equiv 0$.

[2]) При непосредственной проверке того, что функции (4.1) (4.2) удовлетворяют граничному условию (1.4), следует, между прочим, воспользоваться тождеством:

$$\mathrm{ctg}\lambda(w-a)\,\mathrm{ctg}\lambda(w+a)=\mathrm{ctg}2\lambda a\,[\mathrm{ctg}\lambda(w-a)-\mathrm{ctg}\lambda(w+a)]-1.$$

[3]) Эта задача была указана нам Л. А. Галиным:

Так же. как выше, доказывается, что функции

$$f=-\sum_{k=1}^{n} q_k \log \frac{w-\frac{1}{\bar{a}_k}}{1-\frac{w}{a_k}},\quad |a_k|<1,\ a_k\neq 0 \tag{5.3}$$

$$z=\beta(t)\,w+\alpha(t)+\frac{\gamma(t)}{w}+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k(t)}{w-a_k(t)} \tag{5.4}$$

удовлетворяют граничные условия (5.1), (5.2), если функции $A_k(t)$, $a_k(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ являются решением уравнений (ср. [4]):

$$-\frac{\bar{A}_k}{\bar{a}_k^2}\,z_w\left(\frac{1}{\bar{a}_k},t\right)=\frac{\bar{A}_k}{\bar{a}_k^2}\left[\beta-\sum_{s=1}^{n}\frac{A_s}{\left(\frac{1}{\bar{a}_k}-a_s\right)^2}-\gamma\bar{a}_k^2\right]=$$

$$=2m\int_0^t q_k(t)\,dt+\frac{\bar{A}_k(0)}{\bar{a}_k^2(0)}\,z_w\left(\frac{1}{\bar{a}_k(0)},t\right)$$

$$z\left(\frac{1}{\bar{a}_k},t\right)=\alpha+\beta\,\bar{a}_k^{-1}+\gamma a_k-\sum_{s=1}^{n}\frac{A_s\bar{a}_k}{1-\bar{a}_k a_s}=z_k$$

$$c_2=\frac{\bar{\gamma}(t)}{\beta(t)}=\frac{\bar{\gamma}(0)}{\beta(0)}$$

$$c_1=\alpha-\sum_{s=1}^{n}\frac{A_s}{a_s}-\frac{\gamma}{\beta}\,\bar{\alpha}=\alpha(0)-\sum_{s=1}^{n}\frac{A_s(0)}{a_s(0)}-\frac{\gamma(0)}{\beta(0)}\,\bar{\alpha}(0)$$

$$c_0=\gamma\bar{\gamma}-\beta\bar{\beta}+\gamma\sum_{s=1}^{n}A_s+\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{A_s}{\bar{a}_s}=c_0(0).$$

Последние три уравнения получаются из условия:

$$\lim_{w\to\infty}[P(w)-2m\,w f_w(w)]=0^1).$$

В частности, эти формулы дают решение поставленной задачи, если еще подчинить функции A_k, a_k, α,β,γ начальным условиям:

$$A_k(0)=0,\ \beta(0)=\frac{a+b}{2},\quad \gamma(0)=\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{a+b}{2}\,\bar{a}_k^{-1}(0)+\frac{a-b}{2}\,a_k(0)=z_k.$$

---

[1]) Можно показать, что разложение функции $P-2mwf_w$ в ряд Лорана в окрестности ∞ —и имеет вид:

$$P-2mwf_w=\beta\gamma(\log c_2)'\,w^2+\beta c_1' w-c_0'+0\left(\frac{1}{w}\right).$$

§ 6. Отображение на полосу. Способ построения мероморфных решений, указанный выше, применим также в случае, когда $z=z(u,t)$ отображает на область $G(t)$, занятую нефтью, полосу $\operatorname{Re} u|<\frac{\omega_1}{2}$.

Предположим, как и ранее, что в области $G(t)$ имеется n скважин z_k мощности $2\pi q_k (k=1.2 .n)$, и обозначим через $a_k(t)$ образы скважин z_k в полосе $\operatorname{Re} u|<\frac{\omega_1}{2}$.

Граничное условие для комплексного потенциала течения имеет вид:

$$\operatorname{Im} f_u = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} u = \pm \frac{\omega_1}{2}.$$

Функция с ограниченной в полосе на ∞ — и производной, удовлетворяющая этому условию и имеющая логарифмические полюсы с вычетами $-2\pi q_k(t)$ в точках $a_k(t)$, равна

$$f = \sum q_k \log \frac{\sin \frac{\pi}{2\omega_1}(u-a_k)}{\sin \frac{\pi}{2\omega_1}(u-\omega_1+a_k)}.$$

Граничное условие для $z(u,t)$ можно записать в виде (см. [5])

$$P(u,t) \equiv z_t(u)\,\bar{z}_u(\omega_1-u)+\bar{z}_t(\omega_1-u)\,z_u(u)=2mf_u$$

на прямой $\operatorname{Re} u=\frac{\omega_1}{2}$,

$$Q(u,t) \equiv z_t(u)\,\bar{z}_u(-\omega_1-u)+\bar{z}_t(-\omega_1-u)\,z_u(u)=2mf_u$$

на прямой $\operatorname{Re} u=-\frac{\omega_1}{2}$.

Если $z(u)$ — мероморфная функция с простыми полюсами в точках $b_s(t)$ (и, следовательно, $z_t(u), z_u(u)$ имеют в этих точках полюсы кратности $\leqslant 2$), то $P(u)$, $Q(u)$ также мероморфны. Поэтому из того, что $P-2mf_u=0$ при $\operatorname{Re} u=\frac{\omega_1}{2}$, следует, что $P(u)-2mf_u\equiv 0$. Аналогично $Q-2mf_u\equiv 0$.

Если выражения (6.3), (6.4) для $P(u)$ и $Q(u)$ не совпадают, то соотношения $P-2mf_u\equiv 0$, $Q-2mf_u\equiv 0$ дают два уравнения для функции $z(u)$, которые вообще говоря, несовместны. Поэтому естественно рассматривать, как основной, случай, когда выражения для P и Q тождественны. Это выполняется в случае, если $z_t(u)$ и $z_u(u)$ имеют $2\omega_1$ периодом, откуда заключаем, что $P(u)$ также периодическая функция с периодом $2\omega_1$, а $z(u)$—квазипериодическая, причем приращение функции $z(u,t)$ при изменении аргумента u на $2\omega_1$ постоянно (так как полный дифференциал $dz=z_t dt+z_u du$ периодическая функция u).

$$z(u+2\omega_1)-z(u)=2\Omega_1.$$

Далее, из (6.3) видно, что $P(u)$ имеет полюсы кратности $\leqslant 2$ в точках $b_s(t)$, $\omega_1-\bar{b}_s(t)$, и, в силу периодичности, также в точках b_s+

$+2m\omega_1$, $\omega_1-\overline{b_s}+m\omega_1$. Можно принять, что точки ω_1-b_s находятся в $|\mathrm{Re}\,u|<\frac{\omega_1}{2}$[1]). Тогда остальные полюсы лежат вне этой полосы. Так как $f_u(u)$ имеет в полосе $|\mathrm{Re}\,u|<\frac{\omega_1}{2}$ полюсы a_k, то равенство $P-2mf_u=0$ возможно лишь в случае, когда множество точек a_k входит в множество точек $\omega_1-\overline{b_s}$, и можно принять (см. §2), что эти множества совпадают: $a_k=\omega_1-\overline{b_k}$.

Итак, $z(u)$ имеет простые полюсы в точках $(2m+1)\omega_1-\overline{a_k}$. Обозначим:

$$\operatorname*{Res}_{u=(2m+1)\omega_1-\overline{a_k}} z(u,t)=\operatorname*{Res}_{u=\omega_1-\overline{a_k}} z(u,t)=A_k(t).$$

Так же, как в § 2, для определения $A_k(t)$ и $a_k(t)$ получаются уравнения:

$$z(a_k,t)=z_k \tag{6.7}$$

$$\overline{A}_k z_u(a_k,t)=2m\int_0^t q_k(t)dt+\overline{A_k}(0)z_u(a_k(0),0). \tag{6.8}$$

При условиях (6.7), (6.8) функция $P-2mf_u$ будет целою периодической функцией (с периодом $2\omega_1$). Если еще выполняется условие:

$$\lim(P-2mf_u)=0,\quad \text{при } u\to\infty,\ |\mathrm{Re}\,u|\leqslant\omega_1,$$

то по теореме, приведенной в § 4, $P-2mf_u=0$. Итак, при условиях (6.7), (6.8), (6.9) $z(u)$ будет удовлетворять граничным условиям (6.3), (6.4).

§ 7 Полоса с конечным числом скважин[2]). Выводы § 6 дают возможность решить задачу для случая, когда нефть, внутри которой в точках z_k находятся скважины мощности $2\pi q_k$ $(k=1,2,\ldots n)$, заполняет в начальный момент полосу $|\mathrm{Re}\,z|<\frac{\omega_1}{2}$.

Покажем, что решение задачи определяется формулами[3]):

$$f=-\sum_{k=1}^{n} q_k \log\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega_1}(u-a_k)}{\sin\frac{\pi}{2\omega_1}(u-\omega_1+\overline{a}_k)} \tag{7.1}$$

$$z=u+\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2\omega_1}A_k.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\omega_1}(u-\omega_1+\overline{a}_k), \tag{7.2}$$

где $A_k(t)$, $a_k(t)$ — решение уравнений:

$$z(a_k(t),\ t)=a_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2\omega_1}A_s\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\omega_1}(a_k+\overline{a}_s-\omega_1)=z_k \tag{7.3}$$

---

[1]) Мы опять ограничиваемся рассмотрением случая, когда $P(u)$ не имеет полюсов на граничных прямых $\mathrm{Re}\,u=\pm\frac{\omega_1}{2}$.

[2]) Задачи параграфов 7 и 8 указаны нам П. Я. Полубариновой-Кочиной.

[3]) Для упрощения формул мы не требуем выполнения условий $z(0,t)=0$, $z(0,t)>0$.

$$\bar{A}_k z_u(a_k(t), t) = \bar{A}_k\left\{1 - \sum_{l}^{n} \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2\omega_1}(a_k + \bar{a}_s - \omega_1,)\right\} =$$

$$= 2m \int_0^t q_k(t)\, dt, \tag{7.4}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$A_k(0) = 0, \qquad a_k(0) = z_k. \tag{7.5}$$

Для доказательства надо только установить, что выполняется условие (6.9). Для этого заметим, что при $\operatorname{Jm} u \to \pm\infty$ в полосе $|\operatorname{Re} u| \leq \frac{\omega_1}{2}$

$$\lim z_u(u) = \lim \bar{z}_u(\omega_1 - u) = 1, \ \lim z_t(u) =$$

$$= \mp \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \sum_{k=1}^{n} A_k', \lim \bar{z}_t(\omega_1 - u) = \pm \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \sum_{k=1}^{n} \bar{A}'_k.$$

Отсюда находим

$$\lim (P(u) - 2mf_u) = \pm \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{A}_k - \sum_{k=1}^{n} A_k\right)'.$$

Но это выражение равно нулю, так как $\sum_{k=1}^{n} A_k$ вещественна в силу уравнений (7.4), в чем можно убедиться, суммируя соотношения (7.4).

§ 8 Полоса с тремя цепочками скважин. Располагая скважины в цепочки и выполняя в формулах § 8 предельный переход $n \to \infty$ или непосредственно на основании соображений § 6, можно получить решение задачи для случая, когда нефть заполняет в начальный момент полосу $|\operatorname{Re} u| < \frac{\omega_1}{2}$ и в ней расположены параллельно мнимой оси бесконечные цепочки. Для примера остановимся только на случае трех бесконечных цепочек: цепочки скважин одинаковой мощности $2\pi q_1(t)$ в точках $z_k = 2n\omega_2$ мнимой оси и двух симметрично расположенных цепочек скважин одинаковой мощности $2\pi q_2(t)$ в точках $z_k = \pm\alpha_0 + 2n\omega_2^0$, $\alpha_0 > 0$. Положим, что

$$z(0, t) = 0, \ z_u'(0, t) > 0. \tag{8.1}$$

Область $G(t)$, занятая нефтью, будет симметрична относительно вещественной и мнимой оси; поэтому

$$z(\bar{u}, t) = \overline{z(u, t)} \tag{8.2}$$

$$z(-\bar{u}, t) = -\overline{z(u, t)}. \tag{8.3}$$

Далее, при переносе на $2\omega_2^0$ область $G(t)$ не меняется. Отсюда легко заключить, что кроме постоянного вещественного квазипериода $2\omega_1$ $z(u,t)$ имеет еще мнимый квазипериод $2\omega_2(t)$

$$z(u + 2\omega_1) - z(u) = 2\omega_1 \tag{8.4}$$

$$z(u + 2\omega_2(t)) - z(u) = 2\omega_2^0. \tag{8.5}$$

По (8.2) $z(u)$ вещественно на вещественной оси, следовательно, точкам $z=0, \pm\alpha_0$ соответствуют в полосе $|\mathrm{Re}\,u|<\frac{\omega_1}{2}$ точки $u=0$, $\pm\alpha(t)$, $\alpha(0)=\alpha_0$ ($\alpha(t)$ вещественно). Затем из квазипериодичности $z(u)$ заключаем, что точкам $z=2m\overset{\circ}{\omega}_2, \pm\alpha_0+2m\omega_2^0 (m=0,\pm1+2..)$ соответствуют точки $u=2m\omega_2, \pm\alpha+2m\omega_2$.

После этого может быть определена функция $f(u)$, как имеющая логарифмические полюсы с вычетом $2\pi q_1(t)$ в точках $2m\omega_2(t)$ и с вычетом $2\pi q_2(t)$ в точках $\pm\alpha+2m\omega_2$. Кроме того

$$f_u(u+2\omega_2)=f_u(u),$$

так как скорость $\frac{f_u}{z_u}$ и z_u имеют $2\omega_2$ периодом. Из этих условий находим:

$$f=-q_1\log\frac{\sigma u}{\sigma(u-\omega_1)}e^{\tau_1 u}-q_2\log\frac{\sigma(u-\alpha)\sigma(u+\alpha)}{\sigma(u-\omega_1-\alpha)\sigma(u-\omega_1+\alpha)}e^{2\tau_1 u}, \quad (8.6)$$

где $\sigma u=\sigma(u,2\omega_1,2\omega_2)$ — квазиэллиптическая целая функция Вейерштрасса.

Далее, так же как в § 6 доказывается, что $z(u)$ имеет полюсы в точках ω_1+w_{mn}, $\omega_1\pm\alpha+w_{mn}$ ($w_{mn}=2m\omega_1+2n\omega_2$).

Из всех этих свойств функции $z(u)$ следует, что она должна иметь вид:

$$z=\beta u+A_1[\zeta(u-\omega_1)+\eta_1]+A_2[\zeta(u-\omega_1+\alpha)+\zeta(u-\omega_1-\alpha)+2\eta_1]^{1}), \quad (8.7)$$

где $\beta(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$ вещественны, $\eta_1=\zeta(\omega_1)$ и $\zeta u=\frac{d\log\sigma u}{du}$

Из (8.4) и (8.5) следует, что

$$\beta\omega_1+(A_1+2A_2)\eta_1=\overset{\circ}{\omega}_1,$$

$$\beta\omega_2+(A_1+2A_2)\eta_2=\overset{\circ}{\omega}_2 \quad (8.8)$$

и соотношения (6.7), (6.8) приводят к уравнениям:

$$z(\alpha,t)=\beta\alpha+A_1[\zeta(\alpha-\omega_1)+\eta_1]+A_2[\zeta(2\alpha-\omega_1)+\eta_1]=\alpha_0$$

$$A_1 z_u(0,t)=A_1\left\{\beta-A_1 p\omega_1-2A_2 p(\omega_1-\alpha)\right\}=2\int_0^t q_1(t)\,dt \quad (8.9)$$

$$A_2 z_u(\alpha,t)=A_2 z_u(-\alpha,t)=A_2\{\beta-A_1 p(\omega_1-\alpha)-A_2[p\omega_1+(\omega_1-2\alpha)]\}=$$

$$=2\int_0^t q_2(t)\,dt.$$

Функции $\beta(t)$, $A_1(t)$, $\alpha(t)$, $\omega_1(t)$, $A_2(t)$ определяются как решения уравнений (8.8), (8.9), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\beta(0)=1,\ A_1(0)=A_2(0)=0,\ \omega_2(0)=\omega_2^0,\ \alpha(0)=\alpha_0. \quad (8.10)$$

Докажем, что эти формулы действительно дают решение задачи. Для этого надо показать, что функция $P(u)-2mf_u(u)$, которая при условиях (8.8), (8.9) является целой, тождественно равна нулю.

---

[1]) Напомним, что мы разыскиваем решения среди мероморфных функций с простыми полюсами.

Дифференцируя соотношения (8.4), (8.5), находим:

$$z_u(u+2\omega_1)=z_u(u),\quad z_u(u+2\omega_2)=z_u(u)$$

$$z_t(u+2\omega_1)=z_t(u)$$

и

$$z_t(u+2\omega_2,t)+z_u(u+2\omega_2,t)\,2\omega_2'-z_t(u)=0,$$

откуда

$$z_t(u+2\omega_2)-z_t(u)=-2\omega_2' z_u(u).$$

На основании этих соотношений имеем:

$$P(u+2\omega_1)-P(u)=[z_t(u+2\omega_2)-z_t(u)]\bar{z}_u(\omega_1-u)+$$

$$+[\bar{z}_t(\omega_1-u-2\omega_2)-z_t(\omega_1-u)]\,z_u(u)=0$$

и аналогично

$$P(u+2\omega_1)=P(u),$$

то-есть, $P(u,t)$ — эллиптическая функция (с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$). f_u — также эллиптическая функция. Итак, целая функция $P-2mf_u$ является эллиптической, следовательно, равна константе;

$$P-2mf_u=C.$$

Чтобы доказать, что $C=0$, найдем значение функции в точке $u=0$.

Так как $z(u)$ нечетно, то ее разложение в ряд Тейлора в окрестности $u=0$ имеет вид:

$$z(u)=c_1u+c_2u^3+\ldots$$

По той же причине разложение $z(\omega_1-u)$ вблизи нуля

$$z(\omega_1-u)-\omega_1=-\frac{A_1}{u}+d_1u+\ldots$$

не содержит свободного члена.

Дифференцируя, находим разложения:

$$z_t(u)=c_1'u+c_3'u^3+\ldots,\quad z_u(u)=c_1+3c_3u^2+\ldots$$

$$\bar{z}_t(\omega_1-u)=-\frac{A_1'}{u}+d_1'u+\ldots\quad \bar{z}_u(\omega_1-u)=-\frac{A_1}{u^2}+\bar{d}_1+\ldots$$

$$P(u)=z_t(u)\bar{z}_u(\omega_1-u)+\bar{z}_t(\omega_1-u)z_u(u)=-\frac{c_1'A_1-A_1c_1'}{u}+\lambda u+\ldots$$

Далее, учитывая также нечетность функции $f_u(u)$, находим:

$$2mf_u=-\frac{2mq_1}{u}+\lambda_1u+\ldots$$

и наконец для $P-2mf_u$ получается разложение:

$$P-2mf_u=-\frac{c_1'A_1-A_1'c_1+2mq_1}{u}+\alpha_1u+\ldots$$

Но $P-2mf_u$ — целая функция, следовательно, окончательно имеем

$$C=P-2mf_u=\alpha_1(t)u+\ldots$$

Отсюда видно, что

$$P - 2mf_u \equiv [P(u) - mf_u(u)]_{u=0} = 0,$$

что и требовалось доказать [1]).

§ 9. При определенных достаточно общих условиях мероморфными решениями, рассмотренными в работе, можно аппроксимировать решение любой задачи о перемещении контура нефтеносности. На этом пути можно было бы свести (предельным переходом) задачу к интегральным уравнениям и исследовать вопрос о существовании решения другим способом, чем в [3].

Все решения, рассмотренные в работе, имеют физический смысл лишь до момента потери однолистности $z(w, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон С. О. Нефтепромысловая механика. 1934.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. ПММ 1945, т. IX.
3. Виноградов Ю. П., Куфарев П. П. ПММ. 1948, т. XII, № 2.
4. Куфарев П. П. ДАН 1950, т. LXXV, № 4.
5. Куфарев П. П. ДАН, 1950, т. LXXV, № 3.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

[1]) При непосредственной проверке выполнений граничного условия надо воспользоваться формулами теории эллиптических функций, приведенными в статье [5] и другими.

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА ПОЛЯ ПЛАСТИНКИ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПЕРЕМЕННОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ТОКОВ I

Г. А. Бюлер и В. В. Сивкова

ВВЕДЕНИЕ

Представляет большой интерес для решения задач дефектоскопии и электротехники изучение переменного поля соленоида на поверхности, внутри и вне металла. Но вычисление поля цилиндрического соленоида с металлическим сердечником несколько усложняется необходимостью вычисления несобственных интегралов, содержащих функции Бесселя. Для упрощения задачи мы рассмотрим случай „плоского соленоида", т. е. пластинки, находящейся между двумя системами линейных токов противоположного направления, и предельный случай, когда соленоид вырождается в металлическое полупространство с системой линейных токов над ним. Первый случай эквивалентен соленоиду с тонким стержнем внутри его, а второй—с очень толстым стержнем внутри.

В виду того, что разрешение всех вопросов потребовало бы огромной вычислительной работы, мы ограничимся вычислением значений вектор-потенциала A на поверхности металла, а рассмотрение всех остальных сторон явления оставим на будущее.

Зная аналитическое выражение вектор-потенциала, легко найти плотность индукционных токов (I) в металле, поток индукции через поперечное сечение пластинки (Φ), напряженность магнитного поля пластинки и т. д.

§ 1. Постановка и решение задачи

1. Вектор-потенциал поля пластинки в „плоском соленоиде"

Поместим на расстоянии h от поверхности пластинки, толщины 2δ, две системы параллельных проводников с переменным током противоположного направления (рис. 1). Расстояние между соседними проводниками пусть будет равным $2a$. Рассмотрим первоначально случай двух проводов, проходящих через точки: $(0; 0; h+\delta)$ и $(0; 0; -h-\delta)$. Предполагая, что металлическая пластинка находится в воздушной среде, будем иметь для вектор-потенциала уравнения:

$$\Delta \overline{A} = 0, \quad \text{для значений } z > \delta^1, \tag{1}$$

$$\Delta \overline{A} + k^2 A = 0, \quad \text{для значений } |z| < \delta, \tag{2}$$

где

$$k^2 = -8\pi^2 \sigma \mu' i, \quad \left(\mu' = \mu - i\,\frac{2\rho}{f}\right) \tag{3}$$

---

1) x, y, z — прямоугольные декартовы координаты.

σ — электропроводность пластинки,
μ' — комплексная магнитная проницаемость,
f — частота,
ρ — магнитная проводимость,
μ — магнитная проницаемость.

На границе двух смежных сред должны выполняться условия:

$$A_x = A_x^+, \frac{1}{\mu'}\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_x^+}{\partial z}, \text{ при } z = \delta, \tag{4}$$

$$A_x = A_x^-, \frac{1}{\mu'}\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_x^-}{\partial z}, \text{ при } z = -\delta,$$

где через A^+ обозначен вектор-потенциал над пластинкой, а через A^- — под пластинкой.

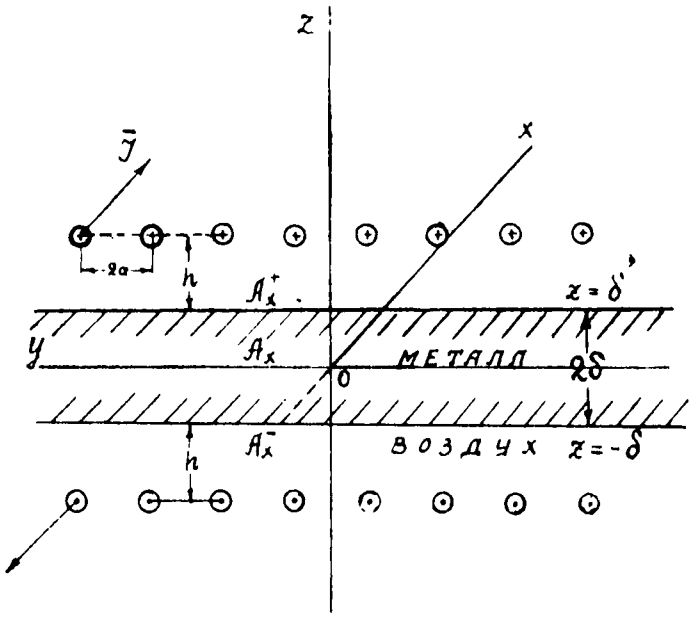


Рис. 1

Известно, что вектор-потенциал поля линейного тока $\pm I$, проходящего через точки $(0; 0; \pm h \pm \delta)$ параллельно оси OX, может быть представлен интегралом

$$A_x^0 = \pm 2I \int_0^\infty e^{-\sqrt{k_0^2+\lambda^2}\,|\delta+h\pm z|} \cos \lambda y \frac{d\lambda}{\sqrt{k_0^2+\lambda^2}}\,^{1}), \text{ (для } z>0 \text{ и } z<0), \tag{5}$$

а решения уравнений (1)—(2) можно искать в виде:

$$z > \delta \quad A_x^+ = \int_0^\infty A^+(\lambda) e^{-\lambda z} \cos \lambda y d\lambda + A_x^0$$

$$-\delta \leqslant z \leqslant \delta \quad A_x = \int_0^\infty [B(\lambda) e^{m'z} + C(\lambda) e^{-m'z}] \cos \lambda y d\lambda, \ (m' = \sqrt{\lambda^2 - k^2}) \tag{6}$$

$$z < -\delta \quad A_x^- = \int_0^\infty A^-(\lambda) e^{\lambda z} \cos \lambda y d\lambda + A_x^0.$$

[1]) В воздухе $k_0 \cong 0$.

Из граничных условий (4), при помощи интеграла Фурье, мы получим систему уравнений для определения величин $A^+(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ и $A^-(\lambda)$. В результате элементарных вычислений находим для вектор-потенциала следующие выражения:

$$z > h+\delta \quad A_x^+ = 4I\int_0^\infty \left[\frac{sh\lambda h}{\lambda} e^{-\lambda(z+\delta)} + \frac{\mu' shm'\delta e^{-\lambda(h-\delta+z)}}{m' ch\delta m' + \lambda\mu' sh\delta m'}\right]\cos\lambda y d\lambda$$

$$h+\delta > z \geqslant \delta \quad A_x^+ = 4I\int_0^\infty \left[\frac{sh(z-\delta)\lambda}{\lambda} e^{-\lambda h} + \frac{\mu' sh\delta m' e^{-\lambda(h-\delta+z)}}{m' ch\delta m' + \lambda\mu' sh\delta m'}\right]\cos\lambda y d\lambda \quad (7)$$

$$\delta \geqslant z \geqslant -\delta \quad A_x = 4I\int_0^\infty \frac{\mu' shzm' \cos\lambda y e^{-\lambda h}}{m' ch\delta m' + \lambda\mu' sh\delta m'} d\lambda$$

$$-\delta \geqslant z \geqslant -h-\delta \quad A_x^-(y;z) = -A_x^+(y;-z).$$

В случае $2n$ пар проводников, проходящих через точки:

$$(0;\pm a;h+\delta),\ (0;\pm 3a;h+\delta),\ldots,\ (0;\pm(2n-1)a;\ h\quad \delta),$$

с током I параллельным оси OX и, соответственно через точки:

$$(0;\pm a;-h-\delta),\ (0;\pm 3a;-h-\delta),\ldots,\ (0;\pm 2\ n-1);-h-\delta),$$

с током противоположного направления, мы будем иметь, по принципу суперпозиции, в выражениях (7) дополнительный множитель:

$$\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda} = 2\sum_{k=1}^{k=n}\cos(2k-1)a\lambda.$$

2. Пластинка в переменном поле системы параллельных линейных токов

Предположим, что на расстоянии h от поверхности пластинки, толщины равной δ (ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=-\delta$), находится система $2n$ линейных токов, параллельных оси OX (рис. 2).

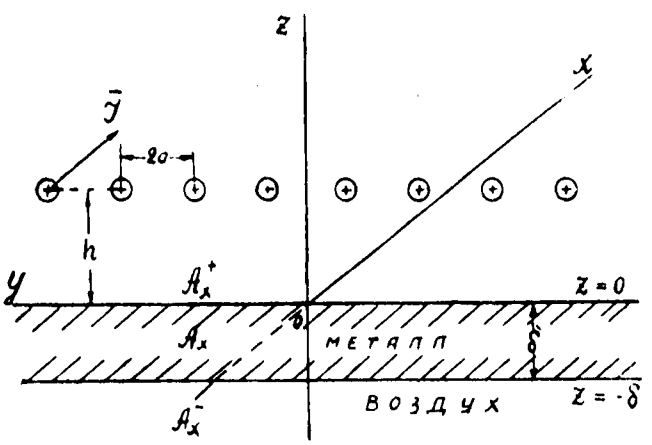


Рис. 2

В случае одного проводника с током I, проходящем через точку $(0; a; h)$, выражение для вектор-потенциала будем искать в виде:

$$z \geqslant 0 \quad A_x^+ = 2I \int_0^\infty \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda|h-z|} + f_2^+(\lambda)\, e^{-\lambda z} \right] \cos(y-a)\lambda\, d\lambda,$$

$$-\delta \leqslant z \leqslant 0 \quad A_x = 2I \int_0^\infty [f_1(\lambda) e^{m'z} + f_2(\lambda) e^{-m'z}] \cos(y-a)\lambda\, d\lambda, \qquad (9)$$

$$z \leqslant -\delta \quad A_x^- = 2I \int_0^\infty f(\lambda) e^{\lambda z} \cos(y-a)\lambda d\lambda.$$

Подчиняя (9) граничным условиям (4) найдем:

$$f_2^+(\lambda) = \frac{2}{\lambda\Delta}\left(\lambda^2 - \frac{m'^2}{\mu'^2}\right) e^{\lambda h}; \quad f_1(\lambda) = \frac{4m'}{\mu'\Delta} e^{-\lambda h + \delta h};$$

$$f_1(\lambda) = \frac{2}{\Delta}\left(\frac{m'}{\mu'} + \lambda\right) e^{-h\lambda + \delta m'}; \quad f_2(\lambda) = \frac{2}{\Delta}\left(\frac{m'}{\mu'} - \lambda\right) e^{-h\lambda - m'\delta};$$

$$\Delta = \left(\frac{m'}{\mu'} + \lambda\right)^2 e^{\delta m'} - \left(\frac{m'}{\mu'} - \lambda\right)^2 e^{-\delta m'}.$$

Пользуясь принципом суперпозиции, мы получим решение задачи для случая $2n$ линейных токов в следующем виде:

$$-\delta \leqslant z \leqslant 0 \quad A_x = 4I\mu' \int_0^\infty \frac{(m'+\lambda\mu')\, e^{m'(\delta+z)} + (m'-\lambda\mu')\, e^{-m'(\delta+z)}}{(m'+\lambda\mu')^2 e^{m'\delta} - (m'-\lambda\mu')^2 e^{-m'\delta}} \times$$

$$\times \frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda} e^{-\lambda h} \cos\lambda y\, d\lambda \qquad (11)$$

§ 2. Анализ решений и частные случаи

1. Выражение вектор-потенциала на поверхности металла

Для упрощения анализа выражения (7) сделаем параллельный перенос системы координат так, чтобы поверхность пластинки совпала с плоскостью $z = 0$.

Тогда мы будем иметь:

$$-2\delta \leqslant z \leqslant 0 \quad A_x^{2\delta} = 4I\mu' \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(z+\delta)\, m' \cos\lambda y}{m'\operatorname{ch}\delta m' + \lambda\mu' \operatorname{sh}\delta m'} \frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda} e^{-\lambda h} d\lambda. \qquad (12)$$

Для поверхности пластинки $z = 0$, получим выражение:

$$A_{x,0}^{2\delta} = 4I\mu' \int_0^\infty \frac{\cos\lambda y}{\lambda\mu' + m'\operatorname{cth}\delta m'} \frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda} e^{-\lambda h} d\lambda. \qquad (13)$$

В предельном случае, когда $\delta=\infty$ ($Re m'>0$), мы получаем выражение вектор-потенциала на поверхности металла, заполняющего полупространство $z<0$:

$$A^{\infty}_{x,0}=2I\mu'\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda y}{m+\lambda\mu'}\,\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}\,e^{-\lambda h}d\lambda. \qquad (14)$$

В случае одной системы токов (11) мы на поверхности пластинки $z=0$ будем иметь выражение:

$$A^{\delta}_{x,0}=4I\mu'\int_0^{\infty}\frac{(m'+\lambda\mu')\,e^{\delta m'}+(m'-\lambda\mu')\,e^{-\delta m'}}{(m'+\lambda\mu')^2\,e^{\delta m'}-(m'-\lambda\mu')^2\,e^{-\delta m'}}\,\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}\,e^{-\lambda h}\cos\lambda y d\lambda, \qquad (15)$$

а при $\delta\to\infty$ снова получим выражение (14).

2. Оценка влияния толщины пластинки

Представляет интерес оценить разность между значением вектор-потенциала A_x на поверхности пластинки конечной толщины и на поверхности полупространства, т. е. пластинки бесконечно толстой.

С этой целью мы из выражений (13) и (15) выделим, в качестве первого члена, выражение (14), а затем оценим отношение оставшегося члена к первому.

В случае „плоского соленоида" будем иметь:

$$A^{2\delta}_{x,0}=4I\mu'\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda y}{m'+\lambda\mu'}\,\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}\left[1-\frac{2\,\frac{m'}{m'+\lambda\mu'}\,e^{-2\delta m'}}{1+\frac{m'-\lambda\mu'}{m'+\lambda\mu'}\,e^{-\delta m'}}\right]e^{-\lambda h}d\lambda; \qquad (13)'$$

в случае системы токов над пластинкой:

$$A^{\delta}_{x,0}=4I\mu'\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda y}{m'+\lambda\mu'}\,\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}\left[1+\frac{\frac{2m'(m'-\lambda\mu')}{(m'+\lambda\mu')^2}\,e^{-2\delta m'}}{1-\left(\frac{m'-\lambda\mu'}{m'+\lambda\mu'}\right)^2 e^{-2\delta m'}}\right]e^{-\lambda h}d\lambda. \qquad (15)'$$

Легко показать, что при выполнении условия:

$$\mu f\ Re m'>2\rho\,\mathrm{Im}m',$$

которое на практике почти всегда выполняется, абсолютная величина остаточного члена в выражениях (13) и (15) не превосходит числа

$$d=\frac{2}{e^{2\delta \mathrm{Re}m'}-1}<\frac{2}{e^{4\pi\delta\sqrt{2\sigma f}\mathrm{Re}\sqrt{i\mu'}}-1}. \qquad (16)$$

Следовательно, вычисляя A_x по формуле (14) вместо (13) и (15), мы получим погрешность

$$(|A^{2\delta}_{x,0}|-|A^{\infty}_{x,0}|):|A^{\infty}_{x,0}|<d.$$

Заметим, что в случае одной системы токов та же самая погрешность будет при толщине пластинки равной δ.

3. Оценка поправки на гистерезис

Явление гистерезиса принято учитывать введением комплексной проницаемости

$$\mu' = \mu - i\frac{2\rho}{f}.$$

Но вычисление по формуле (14) значительно усложняется, если вместо вещественной величины μ брать комплексную μ'. Естественно поэтому оценить, как изменяется выражение (14) при замене μ' на μ.

Разлагая величину

$$\frac{\mu'}{\sqrt{\lambda^2 + ix^2\mu' + \lambda\mu'}}$$

в ряд по степеням $2\,i\rho/\mu f$, получаем:

$$\frac{\mu'}{m'+\lambda\mu'} = \frac{\mu}{m+\lambda\mu} - \frac{2\mu\lambda^2 + ix^2\mu^2}{2m(m+\lambda\mu)^2}\cdot\frac{2i\rho}{\mu f} + \ldots, \quad (m = \sqrt{\lambda^2 + 8\pi^2\sigma f i}).$$

Отношение второго члена разложения к первому не превосходит величины γ,

$$\gamma = \frac{\rho}{\mu f x^2}, \quad (x^2 = 8\pi^2\sigma f).$$

Принимая во внимание, что характеристики среды: σ, μ, ρ, определяются с точностью 2—5%, мы можем пренебрегать влиянием толщины пластинки (точнее, влиянием второй границы: $z = -2\,\delta$ в первом случае и $z = -\delta$ — во втором) если величина d меньше 1—2%. Также можно пренебречь и влиянием, гистерезиса, если величина γ меньше 1—2%, и вести вычисления для случая полупространства, т. е. пользоваться выражением:

$$A^{\infty}_{x,o} = 4I\mu\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda y e^{-\lambda h}}{\sqrt{\lambda^2 + 8\pi^2\sigma f i} + \lambda\mu}\cdot\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}\,d\lambda. \tag{18}$$

§ 3. Вычисление значений вектор-потенциала на поверхности проводника

1. Вычисление по методу численного интегрирования

Вычисление значений вектор-потенциала на поверхности немагнитного металла при достаточной толщине пластинки δ, практически не зависит от толщины и его можно производить по формуле:

$$A^{\infty}_{x,o} = 4I\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda y e^{-\lambda h}}{\sqrt{\lambda^2 + ix^2} + \lambda}\cdot\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}\,d\lambda, \quad (\mu = 1). \tag{19}$$

Вычисление интеграла можно производить двумя методами приближенного интегрирования:

а) численное интегрирование по конечному промежутку;

б) методом замены подинтегрального выражения приближенным, интегрируемым в элементарных функциях.

Для вычисления подинтегрального выражения его рационально представить в более простом виде, а именно в множителе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+ix^2}+\lambda}$$

выделить вещественную и мнимую часть

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+ix^2}+\lambda}=\begin{cases}\dfrac{xU-\lambda+ixV}{ix^2} & \text{при } \lambda<x,\\ \dfrac{u-1+iv}{ix^2} & \text{при } \lambda>x,\end{cases} \tag{20}$$

где

$$U+iV=\sqrt{\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2+i}\,;\quad u+iv=\sqrt{1+i\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2},$$

и величины U, V, u, v вычисляются по таблице [1]. Подинтегральное выражение (19) представляет собой колеблющуюся функцию с быстро убывающей амплитудой (при достаточно большом h), так что, представляя интеграл от 0 до ∞ в виде суммы интегралов:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda y}{\sqrt{\lambda^2+ix^2}+\lambda}\,\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}e^{-\lambda h}\,d\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\lambda k}^{\lambda k+1}\frac{\cos\lambda y}{\sqrt{\lambda^2+ix^2}+\lambda}\,\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}e^{-\lambda h}\,d\lambda,$$

где

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{2na},$$

мы получаем (до значения $\lambda=\pi/a$) знако-переменные члены a_k, абсолютная величина которых не превосходит величины

$$\frac{1}{\sin a\lambda_k\left|\sqrt{\lambda_k^2+ix^2}+\lambda_k\right|}e^{-\lambda_k h}>a_k.$$

Если, например, $h=4$ и $a=0{,}5$, т. е. расстояние между токами в четыре раза меньше расстояния до поверхности пластинки, то:

$$h\lambda_{\frac{n}{2}}=2\pi \text{ и } e^{-h\lambda_{\frac{n}{2}}}=0{,}0019,$$

и, следовательно,

$$|a_k|<\frac{0{,}0019}{\sin\frac{\pi}{4}\left|\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+ix^2}+\frac{\pi}{2}\right|}<0{,}002.$$

Таким образом, если вычислять интеграл в пределах от $\lambda=0$ до $\lambda=\lambda_k$, то погрешность вычисления за счет отбрасывания остальной части не будет превосходить по абсолютной величине $|a_k|$. Но фактически погрешность значительно меньше, так как оценка довольно грубая. На таблице 1 представлены результаты вычислений вектор-потенциала A_x на поверхности полупространства ($\delta=\infty$) и на поверхности пластинки толщиною $2\delta=1$. Для случая $\delta=\infty$ (выражение 19) вычисления производились в пределах от $\lambda=0{,}0$ до $\Lambda=1{,}58$, и $\Lambda=0{,}2$; мы видим, что разница не превосходит 1—2%. Вычисления для пластинки производились в пределах от $\lambda=0{,}0$ до $\Lambda=0{,}2$ по формуле Симпсона. В последнем столбце таблицы 1 дана погрешность, которую мы получаем, если вместо точной, но более сложной

Таблица 1

h	ν	Λ	Пластинка $2\delta = 1$			Полупространство $\delta = \infty$			Погрешность
			$\mathrm{Re}\,\frac{A^1_{x,0}}{I}$	$\mathrm{Im}\,\frac{A^1_{x,0}}{I}$	$\left\lvert\frac{A^1_{x,0}}{I}\right\rvert$	$\mathrm{Re}\,\frac{A^\infty_{x,0}}{I}$	$\mathrm{Im}\,\frac{A^\infty_{x,0}}{I}$	$\left\lvert\frac{A^\infty_{x,0}}{I}\right\rvert$	$\frac{\lvert A^1_{x,0}\rvert - \lvert A^\infty_{x,0}\rvert}{\lvert A^\infty_{x,0}\rvert}$
4	0	0,2	0,601	—0,555	0,818	0,518	—0,515	0,731	11,9%
		1,58				0,515	—0,512	0,727	
	20	0,2	0,602	—0,553	0,818	0,519	—0,515	0,731	11,9%
		1,58				0,516	—0,512	0,727	
8	0	0,2	0,561	—0,518	0,763	0,483	—0,480	0,681	12,0%
		1,58				0,484	—0,481	0,682	
	20	0,2	0,535	—0,503	0,740	0,468	—0,464	0,660	12,1%
		1,58				0,469	—0,465	0,661	

формулы (13) пользуемся формулой (19). Вычисления производились при значениях:

$$h=4,\ 2a=2,\ 2n=40,\ x=2\pi\sqrt{2\sigma f}=4.$$

При этих значениях

$$d=\frac{1}{e^{4\pi\sqrt{2\sigma f}}-1}\cong 13^{0}{}_{0},$$

что находится в хорошем соответствии с результатами вычислений, представленных в табл. 1.

2. Вычисление методом упрощения подинтегральной функции

Замечая, что графики функций $U(\xi)$, $V(\xi)$, $u(\xi)$ и $v(\xi)$ в пределах от $\xi=0$ до $\xi=1$ весьма незначительно отклоняются от прямых заменим дуги кривых хордами, стягивающими их.

Так как

$$\xi=\frac{\lambda}{x}\ \text{при}\ \lambda<x\ \text{и}\ \xi=\frac{x}{\lambda}\ \text{при}\ \lambda>x$$

и:

$$\text{при}\ \lambda=0\quad U(0)+iV(0)=\frac{i+1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{при}\ \lambda=x\quad U(1)+iV(1)=u(1)+iv(1)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},$$

$$\text{при}\ \lambda=\infty\quad u(0)+iv(0)=1,$$

то уравнения хорд будут иметь вид:

$$\frac{U-U(0)}{U(1)-U(0)}=\frac{\lambda}{x};\quad \frac{V-V(0)}{V(1)-V(0)}=\frac{\lambda}{x};$$

$$\frac{u-u(0)}{u(1)-u(0)}=\frac{x}{\lambda};\quad \frac{v-v(0)}{v(1)-v(0)}=\frac{x}{\lambda}$$

и, следовательно,

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(\sqrt{\sqrt{2}+1}-1)\frac{\lambda}{x}\right];\quad V=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(\sqrt{\sqrt{2}-1}-1)\frac{\lambda}{x}\right];$$

$$u=1+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-1\right);\quad v=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,\frac{x}{\lambda}. \tag{21}$$

В результате замены функций $u,\ldots, V$ их линейными приближениями задача сведется к вычислению интегралов:

$$A^{\infty}_{x,o}\cong\frac{4I}{ix^2}\left\{\int_{o}^{x}(\alpha+\beta\lambda)\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}e^{-\lambda h}\cos\lambda y d\lambda+\right.$$

$$\left.+\int_{x}^{\infty}\alpha_1\frac{\sin 2na\lambda}{\sin a\lambda}e^{-\lambda h}\cos\lambda y d\lambda\right\},$$

где

$$\alpha=\frac{1+i}{\sqrt{2}}x,\quad \alpha_1=\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\Big],$$

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{2}+1}-1-\sqrt{2}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}-i\right].$$

В результате интегрирования получаем:

$$A^{\infty}_{x,o}\cong\frac{4I}{ix^2}\left\{\frac{\alpha h-\beta}{2a^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}+2k-1\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)^2}\right]+\right.$$

$$+\frac{\beta h^2}{a^4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}+2k-1\right)^2\right]^2}+\frac{1}{\left[\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)^2\right]^2}\right]+$$

$$+\frac{\beta e^{-hx}}{2a^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos\left(\frac{y}{a}+2k-1\right)ax}{\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}+2k-1\right)^2}+\frac{\cos\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)ax}{\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)^2}\right]+ \tag{23}$$

$$-\frac{\beta h^2 e^{-hx}}{a^4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos\left(\frac{y}{a}+2k-1\right)ax-\frac{a}{h}\left(\frac{y}{a}+2k-1\right)\sin\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)ax}{\left[\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)^2\right]^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\cos\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)ax-\frac{a}{h}\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)\sin\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)ax}{\left[\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}-2k+1\right)^2\right]^2}\right]\right\}.$$

В том случае, когда величина hx достаточно велика, так что значение $exp\ (-hx)$ настолько мало, что последними двумя суммами можно пренебречь, вычисление выражения (23) становится особенно простым. Вычисление при помощи выражения (23) обладает еще и тем преимуществом, что для получения значений $A^{\infty}_{x,o}$ при различных значениях y/a, отличающихся на целое число, мы можем пользоваться вычисленными суммами, добавляя и отнимая только несколько новых членов, в то время как при численном интегрировании для каждого значения y приходится все вычисления проделывать полностью.

На таблице 2 мы можем видеть значения вещественной части, мнимой части и модуля отношения $A^{\infty}_{x,o}/I$, при тех же данных, что и на таблице 1. Сравнивая, замечаем, что разница не превышает 1—2%.

Рассмотренные нами методы применимы для вычисления и в случае не ферромагнитных металлов.

Таблица 2

Таблица значений вещественной, мнимой части и модуля отношения $A^{\infty}_{x,0}/I$ при: $h=4, n=20, a=1$.

У	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$\mathrm{Re}\,\frac{A^{\infty}_{x,0}}{I}$	0,5193	0,5188	0,5170	0,5135	0,5076	0,4972	0,4766	0,4253	0,2685
$\mathrm{Im}\,\frac{A^{\infty}_{x,0}}{I}$	−0,5182	−0,5178	−0,5157	−0,5122	−0,5062	−0,4954	−0,4744	−0,4222	−0,2685
$\left\lvert\frac{A^{\infty}_{x,0}}{I}\right\rvert$	0,7336	0,7330	0,7302	0,7253	0,7168	0,7019	0,6725	0,5993	0,3799

Заключение

Зная выражение для вектор-потенциала $A_x\ (y;z)$ из уравнений Максвелла,

$$\mathrm{rot}\,\bar{H}=4\pi\bar{I},\quad \mathrm{rot}\,\bar{E}=-i\omega\mu'\bar{H},$$

и зависимости

$$\mathrm{rot}\,A=B=\mu'\bar{H},$$

найдем составляющие напряженности магнитного поля:

$$H_y=\frac{1}{\mu'}\,\frac{\partial A_x(y;z)}{\partial z},\quad H_z=-\frac{1}{\mu'}\,\frac{\partial A_x(y;z)}{\partial y},$$

плотность индукционных токов в пластинке:

$$I_x=-i\frac{\omega}{\sigma}A_x(y,z),$$

и поток индукции через поперечное сечение

$$\Phi=\int_0^1 dx\int_{-\delta}^{+\delta}B_y dz=2A_x(y,\delta)=2A^{2\delta}_{x,o}.$$

Легко видеть, что значения $I_x\ (y;z)$ и Ф мы будем знать, если найдем значения $A_x(y;z)$ и $A^{2\delta}_{x,o}$, а значения H_y и H_z придется вычислять методами приближенного интегрирования, рассмотренными нами в настоящей заметке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций ст. 32, 1948.

Кафедра общей математики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ В ЦИЛИНДРЕ СЕКТОРНОГО СЕЧЕНИЯ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ПРОДОЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Г. А. Бюлер и И. Д. Суздальницкий

§ 1. Введение

Поместим однородный цилиндр с поперечным сечением:

$$O \leq \rho \leqslant R,\ O \leq \varphi \leqslant \frac{\pi}{n},\ (\rho \text{ и } \varphi \text{ полярные координаты}) \qquad (1)$$

в продольное переменное поле:

$$\overline{H} = \overline{H}_0 = \overline{U}_0 e^{i\omega t},\ (\omega = 2\pi f) \qquad (2)$$

и будем искать напряженность поля внутри цилиндра

$$\overline{H} = \overline{U} e^{i\omega t}. \qquad (3)$$

Поставленная задача была решена в работе Эфроса [1] в 1940 г., но решение получено в виде ряда по функциям, содержащим функции Бесселя и интегралы Френеля, так что использование решения для численных расчетов весьма затруднительно.

В нашей заметке [2] указывалось, что решение задачи можно получить по методу последовательных приближений в виде интегралов от функций Грина. Методом последовательных приближений удалось нам получить решение для цилиндра полукругового сечения [3], но в случае более сложного профиля мы встретились с большими вычислительными трудностями; эти трудности и навели на мысль искать решение в виде ряда, по степеням малого параметра, с коэффициентами, удовлетворяющими уравнению Пуассона и однородным граничным условиям.

§ 2. Решение задачи

Известно, что поставленная задача сводится к решению уравнения:

$$\Delta u + k^2 u = 0,\ (u = U_z) \qquad (4)$$

при граничном условии

$$u = u_0,\ (u_0 = U_{0z}) \qquad (5)$$

на границе C области поперечного сечения D.

Полагая

$$u - u_0 = V, \qquad (6)$$

приводим неоднородное граничное условие к однородному:

$$V = 0 \text{ на } C, \qquad (7)$$

где V удовлетворяет уравнению:

$$\Delta V + k^2 V = -k^2 u_0 . \tag{8}$$

Применим формулу Грина к функциям V и G:[1])

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} (V\Delta G - G\Delta V)\, ds = \int\limits_{C_\varepsilon} \left(V \frac{dG}{dn} - G \frac{dV}{dn} \right) ds ,$$

где D_ε есть область D с удаленным кругом, радиуса ε и центром в особой точке (ρ, φ), а C_ε контур этого круга. Вычисляя интеграл, находим при $\varepsilon \to 0$:

$$V(\rho, \varphi) = \frac{u_0 k^2}{2\pi} \iint\limits_D G(\rho, \varphi; r, \vartheta)\, r\, dr\, d\vartheta + \frac{k^2}{2\pi} \iint\limits_D G(\rho, \varphi; r, \vartheta)\, V(r, \vartheta)\, r\, dr\, d\vartheta .$$

Мы получили интегральное уравнение типа Фредгольма с симметричным ядром при значении параметра $\lambda = k^2/2\pi$. Так как k^2 число чисто мнимое или комплексное, то однородное уравнение не имеет решений и, следовательно, неоднородное уравнение имеет единственное решение.

Будем искать решение по методу последовательных приближений

$$V(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} V_n(\rho, \varphi) . \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнение (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k^2, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(\rho, \varphi) &= -u_0, \\ \Delta V_2(\rho, \varphi) &= -V_1(\rho, \varphi), \\ \Delta V_m(\rho, \varphi) &= -V_{m-1}(\rho, \varphi), \quad (m = 1, 2 \ldots), \end{aligned} \tag{10}$$

где каждая из функций $V_m(\rho, \varphi)$ должна удовлетворять условиям:

$$V_m(\rho, \varphi) = 0, \tag{11}$$

при:

$$\varphi = 0 \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{n}, (0 \leqslant \rho \leqslant R); \ \rho = 0, \ \rho = R, \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{n} \right) .$$

Будем искать решение уравнений (10) в виде ряда Фурье с неопределенными коэффициентами:

$$V_m(\rho, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} P_{m,s}(\rho) \sin(2s-1) n\varphi . \tag{12}$$

Неизвестные функции $P_{m,s}(\rho)$ найдем, если потребуем, чтобы удовлетворялось уравнение (10) и второе граничное условие (11), (первое условие выполняется в силу соответствующего выбора ряда (12)).

Подставляя в первое уравнение (10), которое можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varphi^2} = -u_0 \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(2s-1) n\varphi}{2s-1} ,$$

[1]) G функция Грина области D.

выражение (12), (при $m=1$) находим, что:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[P''_{1,s}(\rho) + \frac{1}{\rho} P'_{1,s}(\rho) - \frac{n^2(2s-1)^2}{\rho^2} P_{1,s}(\rho) + \right.$$

$$\left. + \frac{4u_0}{\pi(2s-1)} \right] \sin(2s-1)n\varphi = 0$$

и, следовательно, функция $P_{1,s}(\rho)$ должна удовлетворять уравнению:

$$\rho^2 P''_{1,s}(\rho) + \rho P'_{1,s}(\rho) - n^2(2s-1) P_{1,s}(\rho) = -\frac{4u_0}{\pi(2s-1)} \rho^2 . \qquad (13)$$

Уравнение (13) типа Эйлера и частное решение однородного уравнения нужно искать в виде:

$$P_{1,s}(\rho) = \rho^{\kappa}.$$

Если мы подчиним решение уравнения (13) граничным условиям:

$$P_{1,s}(0) = 0;\ P_{1,s}(R) = 0, \qquad (14)$$

то, очевидно, будут удовлетворены и условия (11). Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$P(\rho) = \alpha \rho^2\ ^{1})\ (\alpha \text{ — неопределенный коэффициент}).$$

В результате элементарных вычислений найдем:

$$P_{1,s}(\rho) = \frac{4}{\pi} \frac{u_0 R^2 \left\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)} \right\}}{(2s-1)\left[(2s-1)^2 n^2 - 4\right]} .$$

Таким образом, первое приближение имеет вид:

$$V_1(\rho,\varphi) = \frac{4}{\pi} u_0 R^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(2s-1)n\varphi}{(2s-1)\left[(2s-1)^2 n^2 - 4\right]} \left\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)} \right\}. \qquad (15)$$

Теперь мы можем таким же способом решить второе уравнение (10), затем третье и т. д., причем для всех функций $P_{m,s}(\rho)$ левая часть уравнения (13) будет одна и та же и только меняется правая часть, число же членов в правой части в каждом следующем уравнении увеличивается на единицу.

Так, например, частное решение неоднородного уравнения для $P_{m,\,s}(\rho)$ нужно будет искать в виде:

$$P(\rho) = \alpha_m^{(1)} \rho^{2m} + \alpha_m^{(2)} \rho^{(2s-1)n+2m-1} + \ldots\ldots + \alpha_m^{(m)} \rho^{(2s-1)n+2} ,$$

и находить обычным методом неопределенных коэффициентов.

Ограничиваясь первыми тремя приближениями, получаем следующее выражение для функции $u(\rho, \varphi)$:

$$u(\rho,\varphi) = u_0 + \frac{4}{\pi} u_0 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(2s-1)n\varphi}{(2s-1)\left[n^2(2s-1)^2 - 4\right]} \left\{ k^2 R^2 \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - \right. \right.$$

[1]) В случае $n=2$, $s=1$, выражение $\alpha\rho^2$ будет решением однородного уравнения и частное решение нужно искать в виде $\alpha\ \rho^2\ ln\ \rho$.

$$-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)}\Bigg]+k^4R^4\left[\frac{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)+2}}{4[n(2s-1)+1]}+\frac{\left(\frac{\rho}{R}\right)^4}{(2s-1)^2n^2-16}-\right.$$
$$-\left.\frac{[n(2s-1)-2][n(2s-1)+6]\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)}}{4[n^2(2s-1)^2-16]\,|n(2s-1)+1|}\right]+$$
$$+k^6R^6\left[\frac{\left(\frac{\rho}{R}\right)^6}{[n^2(2s-1)^2-16][n^2(2s-1)^2-36]}+\right.$$
$$+\frac{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)+4}}{32[n(2s-1)+1][n(2s-1)+2]}+$$
$$+\frac{[n(2s-1)-2][n(2s-1)+6]\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)+2}}{16[n(2s-1)+1]^2[n^2(2s-1)^2-16]}-$$
$$-\frac{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)}}{[n^2(2s-1)^2-16][n^2(2s-1)^2-36]}-$$
$$-\frac{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)}}{32[n(2s-1)+1][n(2s-1)+2]}-$$
$$\left.-\frac{[n(2s-1)-2][n(2s-1)+6]\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n(2s-1)}}{16[n(2s-1)+1]^2[n^2(2s-1)^2-16]}\right]+\ldots\Bigg\}.$$

Это решение не годится в случае $n=2m\,(2s-1)$, но решение легко получить, если искать частное решение неоднородного уравнения (13) для $P_{1s}(\rho)$ и для последующих приближений в виде:

$$P(\rho)=P_m(\ln\rho)\,\rho^\kappa,\ (P_m(x)\text{—многочлены степени } m).$$

В случае, когда поперечным сечением цилиндра является кольцевой сектор

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n},\quad R_1\leqslant\rho\leqslant R_2,$$

никаких существенных изменений не будет, только изменятся граничные условия (14), которые примут вид:

$$P_{m,s}(R_1)=0,\ P_{m,s}(R_2)=0,$$

и, в связи с этим, несколько усложнится вычисление последовательных приближений.

§ 3. Анализ решений и приложения

Заметим, что при достаточно больших s отрезок ряда (16) может быть записан в виде:

$$r_N=\sum_{s=N}^{N+p}\frac{\sin(2s-1)n\varphi}{n^2(2s-1)^2-4}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{k^2\rho^2}{2s-1}\right)^m\mu_m(\rho),\qquad(16)$$

где $\mu_m(\rho)\to 1$ при $s\to\infty$, причем $\mu_m(1)=0$.

Выбирая N настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\left| \mu_m(\rho) \right| < 1+\varepsilon, \quad \left| \frac{k^2\rho^2}{2N-1} \right| < 1,$$

будем иметь:

$$\left| \sum_{M=1}^{\infty} \left(\frac{k^2\rho^2}{2s-1} \right)^m \mu_m(\rho) \right| < (1+\varepsilon) \frac{|k^2\rho^2|}{2s-1-k^2\rho^2|}$$

и, следовательно,

$$\left| r_N \right| < \sum_{s=N}^{N+p} \frac{(1+\varepsilon)|k^2\rho^2|}{[n^2(2s-1)^2-4][2s-1-|k^2\rho^2|]} <$$

$$< \frac{p(1+\varepsilon)|k^2\rho^2|}{|(2N-1)n^2-4|[2N-1-|k^2\rho^2|]}.$$

Усиливая неравенства, получим:

$$\left| r_N \right| < \frac{p(1+\varepsilon)|k^2R^2|}{|(2N-1)^2n^2-4|[2N-1-|k^2R^2|]} < \eta, \text{ при } N > N_1 .$$

Таким образом, ряд (16) сходится абсолютно и равномерно в области:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant R .$$

Легко видеть, что ряд (15) вполне пригоден для численных расчетов, так как члены ряда быстро убывают при увеличении числа s, если только величина (k^2) не очень велика.

Умножая правую и левую часть выражения (15) на временной множитель $expi\,\omega t$, получим напряженность H магнитного поля в цилиндре.

Для экспериментальной проверки результатов численных расчетов рациональней найти поток индукции Φ через поперечное сечение цилиндра.

$$\Phi = \int_0^{\pi n} d\varphi \int_0^R \mu H_z \rho \, d\rho .$$

В результате элементарных вычислений получим для потока индукции следующее выражение:

$$\Phi = \Phi_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{16}{(2s-1)^2[n^2(2s-1)^2-4]} \left[k^2R^2 \frac{(2s-1)n-2}{4[n(2s-1)+1]} + \right. \right. \quad (17)$$

$$+ k^4R^4 \left(\frac{1}{4[n(2s-1)+1][n(2s-1)+4]} + \frac{1}{6|n^2(2s-1)^2-16|} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{[(2s-1)n-2][n(2s-1)+6]}{4[n^2(2s-1)^2-16][n(2s-1)+1][n(2s-1)+2]} \right) + \ldots \right] \Bigg\},$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi R^2}{2n} H_{0,z}$$

Замечаем, что ряд (17) еще быстрее сходится, чем ряд (15). Легко проверить, что в частном случае цилиндра полукругового сечения ($n=1$) мы получаем результаты, приведенные в работе [3] и найденные по методу последовательных приближений.

При $n=1/2$ мы будем иметь цилиндр кругового сечения с разрезом вдоль плоскости осевого сечения, до оси цилиндра. Результаты вычисления напряженности поля H и потока индукции Φ, произведенные по формулам Эфроса, приведены в заметке [4].

Но интегрирование напряженности поля по пеперечному сечению, для нахождения потока индукции, там выполнить не удалось и пришлось ограничиться численным интегрированием по формуле трапеций. Для вычисления $\overline{H}$, также пришлось преодолеть большие трудности при вычислении функций Бесселя и интегралов Френеля.

Вычисление же по формуле (17) очень просто приводит к результату:

$$\Phi=\Phi_0\,(1+0{,}060595\;k^2R^2+0{,}006490\;k^4R^4+0{,}003138\;R^6k^6+\ldots) \quad (18)$$

Заключение

1. Рассмотренный нами метод не требует знакомства со специальными функциями и по своей простоте доступен каждому инженеру и физику. Вычисление напряженности поля и потока индукции по данному нами решению в десятки раз меньше требует труда, чем по формулам Эфроса.

2. Легко заметить, что найденное решение может быть использовано для получения решения и некоторых других задач.

Так, например, отображая полуполосу

$$-\infty\leqslant x\leqslant 0,\qquad 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

на сектор

$$0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n}$$

при помощи функции

$$w=\ln z,\ (z=\rho e^{i\varphi},\ w=x+iy)$$

мы, очевидно, сумеем получить решение для полупластинки,

$$-\infty\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{n},\ -\infty\leqslant z\leqslant\infty,$$

в продольном поле $\overline{H}=\overline{H}_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Эфрос, ЖТФ т. X, в. 6, ст. 467, 1940.
2. Г. А. Бюлер, Труды СФТИ, вып. 26, 1949.
3. Г. А. Бюлер, В. Я. Михин, Труды СФТИ, вып. 30, 1951.
4. Г. А. Бюлер, Ученые Записки ТГУ, № 11, 1918.

Кафедра общей математики
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 17 1952

УЛУЧШЕНИЕ ОРБИТЫ МАЛОЙ ПЛАНЕТЫ (857) ГЛАЗЕНАПИЯ

В. И. Анжина

Улучшение орбиты малой планеты (857) Глазенапия было предпринято по предложению отдела малых планет Института теоретической астрономии Академии Наук СССР.

В данной работе содержатся результаты улучшения орбиты малой планеты (857) Глазенапия. За исходную систему элементов была принята система элементов, полученная Хираяма и Акияма.

Система элементов (857) Хираяма и Акияма

$M_0 = 172° 432$
$\omega = 237° 648$
$\Omega = 82° 766$
$i = 5° 309$

Эпоха 1941 год июнь 19 0^h (всемирное время).
Эклиптика и равноденствие 1950.0
$\varphi = 5°.090$
$\mu'' = 1094'' 816$
$a = 2.\,'9.0$

Для исправления элементов были использованы следующие наблюдения:

	Дата наблюдения	α	δ
1.	1926 год июнь 29 $21^h\,11^m\,27^s$ (всемирное время)	$16^h\,26^m\,14.^s91$ (1926.0)	$-21°\,35'\,45.''0$ (1926.0)
2.	1929 год май 11 $3^h\,14^m\,15^s$ (всемирное время)	$13^h\,58^m\,27.^s93$ (видимое)	$-5°\,01'\,08.''0$ (видимое)
3.	1935 год февраль 27 $21^h\,33^m\,16^s$ (всемирное время)	$10^h\,01^m\,59.^s15$ (1935.0)	$+20°\,55'\,45.''5$ (1935.0)
4.	1945 год март 19 $0^h\,44^m$ (всемирное время)	$12^h\,34^m\,12^s$ (1950.0)	$+6\,12'$ (1950.0)

Возмущения от Юпитера и Сатурна были получены при помощи специальных таблиц, вычисленных институтом теоретической астрономии АН СССР.

Представление наблюдений с элементами Хираяма и Акияма (с учетом возмущений) дало нижеследующие разности О—С („наблюдение" минус „вычисление")

Даты наблюдений	1926	1929	1935	1945
$\Delta\alpha$	$+1°93120$	$+1°33824$	$+0°83912$	$+0°16557$
$\Delta\delta$	$-0°45529$	$-0°51043$	$-0°25910$	$-0°09022$

Полученные разности были использованы для исправления элементов. Исправление элементов производилось по приближенному методу Штраке, то есть исправлялись четыре элемента M_0, φ, ω и μ.

Метод Штраке дал вполне удовлетворительный результат.

Поправки элементов: dM_0, $d\varphi$, $d\omega$ и $d\mu$ были получены из решения системы условных уравнений:

$$+2.0191\,dM_0 - 3.0668\,d\mu - 3.2183\,d\varphi + 1.8271\,d\omega = +1.8565$$
$$+1.7272 \quad -2.1215 \quad -3.4421 \quad +1.7732 \quad = +1.4217$$
$$+1.4226 \quad -0.9101 \quad -0.5703 \quad +1.6874 \quad = +0.8200$$
$$+1.5299 \quad +0.5818 \quad -2.2348 \quad +1.7326 \quad = +0.1866$$

В результате получены следующие поправки элементов:

$$dM_0 = +0°0092 \qquad d\omega = +0°2327$$
$$d\varphi = -0°0131 \qquad d\mu = -0''4469.$$

Таким образом после улучшения была получена новая система элементов:

Эпоха 1941 год июнь 19 0^h Т. И.

$M_0 = 172°441$
$\omega = 237°881$
$\varphi = 5°077$
$\mu = 1094''369$
$\Omega = 82°766$
$i = 5°309$
$a = 2.1900$

Эклиптика и равноденствие 1950.0

Долгота узла (Ω) и наклонность (i) не исправлялись, поэтому постоянные Гаусса, которые зависят от этих величин, не изменились:

$A = 172°73517$ $\quad \lg \sin a = 9.99^{8}1627$
$B = 85°08819$ $\quad \lg \sin b = 9.960703\,!$
$C = 71°14759$ $\quad \lg \sin c = 9.6202290.$

После этого с полученной системой элементов были опять представлены наблюдения 1926, 1929, 1935, 1945 годов, причем вычисления велись с учетом возмущений.

Полученные разности О—С („наблюденное" минус „вычисленное") имеют значения:

Даты наблюдений	1926 г.	1929 г.	1935 г.	1945 г.
$\Delta\alpha$	+0°07517	+0°05212	−0°00366	−0°00421
$\Delta\delta$	+0 00237	+0°03546	−0°01116	−0°01146

В результате проделанной работы достигнуто существенное улучшение элементов.

Для проверки было проделано еще одно представление наблюдения планеты 1946 г., которое не использовалось для вывода поправок элементов.

1946 г. октябрь 25 $18^h 40^m 48^s$ 0^h (всемирное время).

$\alpha\,1950.0 = 0^h 17^m 54.^s0$

$\delta\,1950.0 = -7°36'00''$

Представление дало:

со старыми элементами $\Delta\alpha = -0°16150$ $\Delta\delta = -0°02007$

с новыми элементами $\Delta\alpha = -0°07700$ $\Delta\delta = +0°01532$.

С полученной системой элементов и таблицей возмущений студентом 4 курса механико-математического факультета ТГУ Власовым была вычислена возмущенная эфемерида планеты на оппозицию 1952 г.

Приложение 1. Эфемерида малой планеты (857) Глазенапия на оппозицию 1952 г.

1952 год	α 1950.0		δ 1950.0		log r Вариации lg Δ
Май 28	$18^h 03.^m4$	$8.^m7$	$12.^m8$	313°	1951
Июнь 7	17 54.7		−22°51′	+34′	0.315
17	17 43.9	10.8	−23°25′	+34	−12.′5
27	17 32.7	11.2	−23 59	+31	$+0.^m9$
Июль 7	17 22.8	9.9	−24 30	+27	−13.′9
17	17 15.8	7.0	−24 57	+23	0.022
			−25 20		

Дата оппозиции 17 июля

Кафедра астрономии
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева

СОДЕРЖАНИЕ

Клементьев З. И.—К вопросу о свойствах вполне аддитивных функций . 3
Клементьев З. И.—О представлении регулярных операций, переводящих непрерывные функции в полупорядоченное пространство 6
Томилов Е. Д. и Лисс А. Ю.—Второе приближение для решения задачи об обтекании конуса сверхзвуковым потоком газа 11
Куфарев П. П. и Фалес А. Э.—Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей 25
Аравийская Е. Н.—Об интегральном представлении функции нескольких комплексных переменных 37
Канунов Н. Ф.—Об условиях разрешимости уравнения $A(x)X^2 + B(x)Y^2 + C(x), Z^2 = 0$ в полиномах 43
Анжина В. И.—Определение географической широты астрономической обсерватории им. Энгельгардта по способу Талькотта летом 1948 года 53
Фет А. И.—Фундаментальные группы пространств кривых на сфере 59
Фет А. И.—Обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке 64
Фет А. И.—Собственные значения обобщенной краевой задачи 66
Фет А. И.—Об интегральном представлении аналитических функций в полуплоскости 69
Виноградов Ю. П.—Об одной задаче фильтрации тяжелой жидкости со свободной поверхностью 83
Мочалов С. Д.—Графический метод исследования продольного упруго-пластического удара стержней 111
Куфарев П. П., Астафьев П. П. и Болецкий К. А.—Некоторые задачи о перемещении контура нефтеносности 129
Бюлер Г. А. и Сивкова В. В.—К вопросу о вычислении вектор-потенциала поля пластинки, помещенной в переменное поле системы линейных токов I 141
Бюлер Г. А. и Суздальницкий И. Д.—Эффективное решение задачи определения напряженности поля в цилиндре секторного сечения, находящемся в продольном переменном однородном поле 152
Анжина В. И.—Улучшение орбиты малой планеты (857) Глазенапия 159

КЗ03856 Подписано к печати V/1952 г. Бумага 70×108 1/16, 5,06 бум. л., 13,88 печ. л. Заказ 5601—1951 г. Тираж 500 экз. Цена 26 руб.

Томск, типогр. № 1 Полиграфиздата, Советская, 47.