МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

Первой Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 17–18 мая 2013 г.

*Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2013

значения $A > 0$. Из (4) можно взять его равным величине $\frac{2\sqrt{2pA}}{\sigma}$. В данной ситуации нам нужно оценить действие правила T_A, ET_A и риск $R_A = EL_{T_A}$, $A \to \infty$ [2].

Результаты численного моделирования

На практике была рассмотрена модель TAR(2) (порядок *p* положили равным двум) с параметрами $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0.5$, $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.1$, порогом $c = 0$, а также были построены оценки этих параметров двумя вышеперечисленными способами: последовательным с асимптотически линейным риском и МНК. Оценивание проводилось по 100 реализациям. Вначале были построены последовательные оценки параметров процесса и дисперсии шума. Параметр *A* задали равным 5500, начальные условия положили равными нулю. Затем строились оценки МНК, причем объем выборки для этих оценок выбирался равным среднему объему выборки для последовательной оценки. Исходя из результатов эксперимента, замечаем, что при большем объеме выборки оценки получаются точнее и ближе к реальным параметрам модели. Сравнивая среднеквадратические отклонения (СКО), которые рассчитываются по формулам $\text{СКО1} = \left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2$, $\text{СКО2} = \left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2$, $\text{СКО3} = \left(\hat{\mu}_1 - \mu_1\right)^2$, $\text{СКО4} = \left(\hat{\mu}_2 - \mu_2\right)^2$, можно сделать вывод, что при одном и том же объеме выборки качество последовательных оценок лучше, чем качество оценок, полученных по методу наименьших квадратов, так как чем меньше СКО, тем выше качество.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики / А. Н. Ширяев. — М. :ФАЗИС, 1998. — 512 с.
2. *Lee S.* Sequential point estimation of parameters in a threshold AR(1) model / Sangyeol Lee, T. N. Sriram // Stochastic processes and their Applications. — 1999. — №84. — P. 343–355.
3. *Petruccelli J. D.* A Threshold AR(1) Model / J. D. Petruccelli, S. W. Woolford // Applied Probability Trust. — 1984. — P. 270–286.
4. *Chen R.* On the ergodicity of TAR(1) processes / R. Chen, R.S. Tsay // The Annals of Applied Probability. — 1991. — Vol. 1, №4. — P. 613–634.
5. *Cline D. B. H.* Stability and the Lyapounov exponent of Threshold AR-ARCH models / D. B. H. Cline, Huay-min H. Pu // The Annals of Applied Probability. — 2004. — Vol. 14, №4. — P. 1920–1949.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В МНОГОМЕРНОЙ GARCH-МОДЕЛИ

А. О. Кудрявцева

Томский государственный университет
E-mail: yourxoblivion@gmail.com

В финансовой эконометрике и управлении прогнозирование зависимостей в параллельной динамике доходностей активов имеет большое значение. Например, цена актива зависит от ковариации различных активов в портфеле. Поэтому важно рассмотреть их взаимную динамику. В этом случае удобно пользоваться многомерными моделями волатильности. Волатильность — это статистический показатель, характеризующий изменчивость цены. Волатильность является важнейшим финансовым показателем в управлении финансовыми рисками, где представляет собой меру риска использования финансового инструмента за заданный промежуток времени. На нее влияют многие факторы: макроэкономическая ситуация в целом, темпы роста процентных ставок, политические события и многое другое.

Описание модели

Многомерная GARCH модель во многом аналогична одномерной. Предположим, что $u_t = \left(u_{1t}, \ldots, u_{kt}\right)^{\mathrm{T}}$ — *k*-мерный вектор, $Eu_t = 0$. Пусть F_{t-1} — информация, порождаемая наблюдаемым рядом до времени $t-1$. Тогда:

$$u_t = H_t^{1/2} \varepsilon_t ,$$

с учетом множества F_{t-1} [1]. H_t — условная ковариационная матрица для u_t, ε_t — *k*-мерный белый шум, $\varepsilon_t \sim \left(0, I_K\right)$. В многомерной GARCH модели условная ковариационная матрица для u_t имеет вид:

$$vech\left(H_t\right) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{q} \Gamma_j vech\left(u_{t-j} u_{t-j}^{\mathrm{T}}\right) + \ldots + \sum_{j=1}^{m} G_j vech\left(H_{t-j}\right).$$

Матричный оператор $vech()$ берет верхне-треугольную часть матрицы и складывает ее элементы в вектор-столбец, γ_0 — $\frac{1}{2} K\left(K+1\right)$-мерный вектор констант и Γ_j — $\left(\frac{1}{2} K\left(K+1\right) \cdot \frac{1}{2} K\left(K+1\right)\right)$-мерные матрицы коэффициентов. Эта модель получила название VECH — от названия матричного оператора $vech()$. Она была предложена Боллерслевом, Инглом и Вулдриджем в 1988 году.

Например, многомерное нормальное условное распределение может быть рассмотрено в виде: $\varepsilon_t \sim N\left(0, I_K\right)$, тогда $u_t \mid F_{t-1} \sim N\left(0, H_t\right)$.

Хотя такое распределение, возможно, не самое подходящее для многих финансовых временных рядов. Условные распределения процессов, представляющих финансовые временные ряды, чаще всего являются распределениями с тяжелыми хвостами, такими как t-распределение с малым количеством степеней свободы [4]. Двумерная модель записывается следующим образом:

$$vech\left(H_t\right) = \gamma_0 + \Gamma vech\left(u_{t-1} u_{t-1}^{\mathrm{T}}\right) + G vech\left(H_{t-1}\right),$$

где H_t — условная ковариационная матрица размером 2×2, u_t — вектор инноваций размера 2×1, γ_0 — вектор параметров размера 3×1, Γ и G — матрицы параметров размера 3×3. Модель всего имеет 21 параметр (3 у вектора γ_0, по 9 у матриц). Для двух активов в развернутом виде:

$$vech\begin{bmatrix} H_{11,t} & H_{12,t} \\ H_{21,t} & H_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11,t} \\ H_{12,t} \\ H_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \gamma_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 \\ u_{1,t-1}u_{2,t-1} \\ u_{2,t-1}^2 \end{bmatrix},$$
$$+\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11,t-1} \\ H_{12,t-1} \\ H_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

где уже применен оператор $vech()$ следующим образом:

$$vech(H_t) = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix}, \; vech\left(u_t u_t^{\mathrm{T}}\right) = vech\left(\begin{bmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,t} & u_{2,t} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u^2_{1,t} \\ u^2_{2,t} \\ u_{1,t}u_{2,t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно получить уравнения в явном виде:

$$h_{11,t} = \gamma_{10} + \gamma_{11}u^2_{1,t-1} + \gamma_{12}u^2_{2,t-1} + \gamma_{13}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + g_{11}h_{11,t-1} + g_{12}h_{22,t-1} + g_{13}h_{12,t-1},$$
$$h_{22,t} = \gamma_{20} + \gamma_{21}u^2_{1,t-1} + \gamma_{22}u^2_{2,t-1} + \gamma_{23}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + g_{21}h_{11,t-1} + g_{22}h_{22,t-1} + g_{23}h_{12,t-1},$$
$$h_{12,t} = \gamma_{30} + \gamma_{31}u^2_{1,t-1} + \gamma_{32}u^2_{2,t-1} + \gamma_{33}u_{1,t-1}u_{2,t-1} + g_{31}h_{11,t-1} + g_{32}h_{22,t-1} + g_{33}h_{12,t-1}.$$

Для остальных моделей получается аналогично.

Пространство параметров GARCH модели имеет большую размерность, поэтому его стоит ограничить, чтобы гарантировать единственность представления и получить подходящие свойства условных ковариаций. Чтобы уменьшить пространство параметров, была предложена диагональная модель VECH GARCH (или DVECH), где Γ_j, G_j являются диагональными матрицами. Она описывается выражением:

$$h_{ij,t} = \omega_{ij} + \alpha_{ij}u_{i,t-1}u_{j,t-1} + \beta_{ij}h_{ij,t-1}, \; i, j = 1, 2,$$

где ω_{ij}, α_{ij}, β_{ij} — параметры. Даже простая модель такого типа может создать хорошую динамику волатильности. Поэтому данная модель достаточно часто используется на практике из-за своей простоты. Но, несмотря на простую структуру, могут возникнуть проблемы. Одна из них заключается в том, что параметры должны быть такими, чтобы условные ковариационные матрицы H_t были положительно определены. Это свойство особенно важно для многих финансовых задач, например, для управления рисками. Проблему, связанную с положительной определенностью, можно избежать, используя BEKK-модель (Baba, Engle, Kraft, Kroner — 1990), для которой матрица H_t всегда положительно определена (двумерная модель):

$$H_t = \gamma_0{}^T\gamma_0 + \Gamma^T vech\left(u_{t-1}u_{t-1}^{\mathrm{T}}\right)\Gamma + G^T vech\left(H_{t-1}\right)G,$$

где γ_0 — верхне-треугольная матрица параметров, Γ и G — матрицы параметров размера 2×2. Несмотря на это, она имеет ряд недостатков, например, большое количество параметров, а также отсутствие их прямой интерпретации [3].

Оценивание параметров

Оценивание параметров моделей является важным этапом моделирования процессов и построения прогноза. Если $\varepsilon_t \sim N\left(0, I_K\right)$, тогда условное распределение u_t — гауссовское, тогда логарифмическая функция правдоподобия общей GARCH модели для величин $u_1, \ldots, u_T$ запишется в виде:

$$\ln l\left(\delta\right) = \sum_{t=1}^{T} \ln l_t\left(\delta\right),$$

где $\delta = vec\left(\gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_q, G_1, \ldots, G_m\right)$ — вектор неизвестных параметров,

$$\ln l_t\left(\delta\right) = -\frac{K}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln |H_t| - \frac{1}{2}u_t^{'} H_t^{-1} u_t \text{, } t = 1, \ldots, T \text{,}$$

где начальные значения H_t известны. Полученная функция максимизируется по параметрам, затем ищется решение. Следует отметить, что если используется логарифмическая функции правдоподобия, а истинное распределение ε_t не является нормальным (например, оно может быть распределением Стьюдента), то в результате полученные оценки будут квази-оценками максимального правдоподобия [4].

Прогнозирование

Обычно оптимальным прогнозом всегда является условное математическое ожидание. Поэтому, принимая во внимание этот факт, запишем формулу для рекурсивного прогноза в VECH GARCH модели:

$$E_{t-1}\left(H_{t+k}\right) = vech\left(\gamma_0\right) + \Gamma E_{t-1}\left[vech\left(u_{t+k-1}u_{t+k-1}^{\mathrm{T}}\right)\right] + GE_{t-1}\left[vech\left(H_{t+k-1}\right)\right],$$

где $E\left(H_t\right) = \left[I - \Gamma - G\right]^{-1} vech\left(\gamma_0\right)$.

Моделирование процесса и анализ данных

Были взяты данные по курсам валют в следующем виде: отношения EUR/USD и GBP/USD, то есть в этом случае базовой валютой является доллар США, котируемыми — евро и британский фунт. Поэтому можно сделать предположение, что при изменении базовой валюты они могут двигаться в одном направлении под ее воздействием. Исследуемый период для каждого актива — с февраля 2007 года по конец декабря 2012 года.

Оценивание параметров

Оценка параметров делается методом максимального правдоподобия. Для этого нужно получить функцию правдоподобия. В данном случае имеется система из двух уравнений. Начальные значения выбираются из предположения положительной определенности ковариационной матрицы.

BEKK модель

Берется диагональная двумерная BEKK модель, которая имеет 7 параметров. Начальные значения: $\gamma_{11} = 9.8e-08$, $\gamma_{12} = 6.3e-08$, $\gamma_{22} = 1.1e-07$, $\Gamma_{11} = 0.17932$, $\Gamma_{22} = 0.18831$, $G_{11} = 0.98264$, $G_{22} = 0.98020$. В результате применения данного метода получаются следующие результаты:

Параметр	Значение	Станд. ошибка	Вероятность
γ_{11}	$1.26e-07$	$3.67e-08$	0.0000
γ_{12}	$7.11e-08$	$2.23e-08$	0.0014
γ_{22}	$8.40e-08$	$3.25e-08$	0.0038
Γ_{11}	0.168033	0.008472	0.0000
Γ_{22}	0.176721	0.008237	0.0000
G_{11}	0.984213	0.001467	0.0000
G_{22}	0.982847	0.001767	0.0000

Как видно из таблицы, все параметры получились достоверными (из-за близости к нулю стандартной ошибки) и статистически значимыми, что свидетельствует о том, что с помощью метода максимального правдоподобия для двумерной GARCH модели можно получить хорошие оценки параметров.

DVECH модель

Данная модель имеет 9 параметров, доопределим их начальные значения: $\gamma_{11} = 9.8e-08$, $\gamma_{12} = 6.3e-08$, $\gamma_{22} = 1.1e-07$, $\Gamma_{11} = 0.03216$, $\Gamma_{12} = 0.03377$, $\Gamma_{22} = 0.03546$, $G_{11} = 0.96558$, $G_{12} = 0.96318$, $G_{22} = 0.96079$. Результаты следующие:

Параметр	Значение	Станд.ошибка	Вероятность
γ_{11}	$2.06e-07$	$4.61e-08$	0.0000
γ_{12}	$1.77e-07$	$3.84e-08$	0.0000
γ_{22}	$1.38e-07$	$3.67e-08$	0.0002
Γ_{11}	0.028201	0.003227	0.0000
Γ_{12}	0.023116	0.002786	0.0000
Γ_{22}	0.028413	0.003134	0.0000
G_{11}	0.965170	0.003402	0.0000
G_{12}	0.965542	0.003425	0.0000
G_{22}	0.965875	0.003864	0.0000

Применение данного метода к DVECH модели дает достоверные и статистически значимые оценки.

Анализ взаимодействия активов

Рассматривается диагональная BEKK модель. В результате оценивания получаются оценки вариаций активов, их ковариация и корреляция.

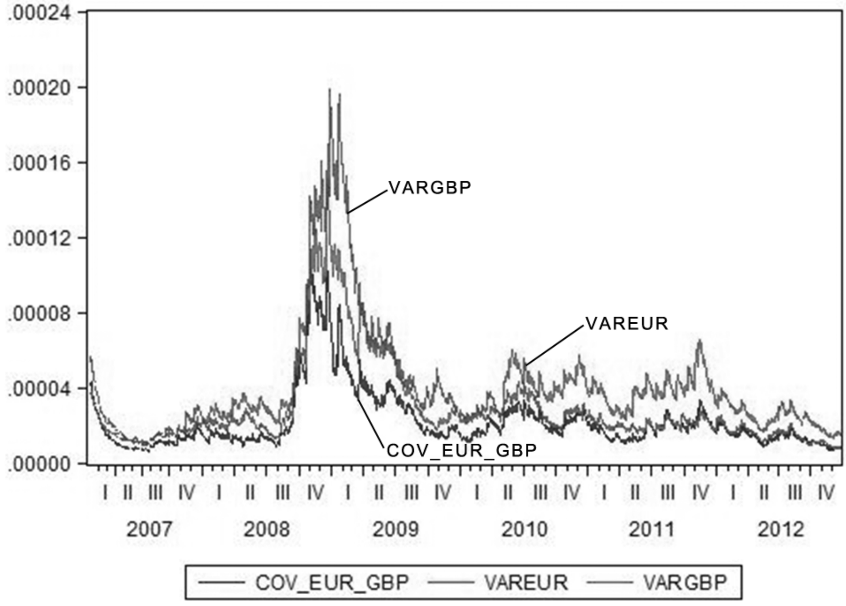

Рис. 1. Ковариация двух активов EUR/USD и GBP/USD, вариация EUR/USD, вариация GBP/USD

Значения ковариации близки к нулю и положительны, что свидетельствует о наличии прямой зависимости между активами, то есть при изменении одного актива другой актив тоже будет изменяться в том же направлении, то есть расти. Как видно из графика, экономический кризис 2008 года оказал влияние на данные активы: наблюдается резкий скачок ковариации, что свидетельствует об усилении прямой зависимости. По мере того, как происходило восстановление мировой экономической системы, показатель ковариации снизился до прежнего уровня, каким и оставался на протяжении всего исследуемого промежутка, лишь немного флуктуируя.

В показателях вариации наблюдаются случайные выбросы с середины 2008 по 2009 год. Затем показатели вариации стали снижаться. Лишь в начале 2010 года наблюдается увеличение вариации EUR/USD, который, флуктуируя, заметно снижается уже к началу 2012 года, в то время как вариация GBP/USD остается в течение этого периода на достаточно низком уровне. Из данных рассуждений можно сделать вывод: резкие изменения данных показателей происходят из-за кризисных экономических ситуаций. Данные ситуации легко описываются в рамках моделей типа GARCH.

Прогнозирование

Для прогнозирования используется рекуррентная формула, в которую подставляются полученные оценки ковариации и вариаций. В результате получается будущее значение ковариационной матрицы (на один шаг вперед), после чего делается вывод о применении данной модели для прогнозирования на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Annastiina Silvennoinen, Timo Terasvirta*. Multivariate GARCH models // Handbook of Financial Time Series. — 2009.

2. *Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.* Multivariate GARCH Models: A Survey. // Journal of Applied Econometrics. — 2006. — №21. — С. 79–109.

3. *Brooks C.* Introductory Econometrics for Finance. — New York:[Б.и.], 2008. — 674 с.

4. *Lutkepohl H.* New Introduction to Multiple Time Series Analyses. — Берлин:Springer, 2005. — 764 с.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ И РАСШИРЕНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ

И. Е. Паршевников

Томский государственный университет
E-mail: vanvan2@mail.ru

Периодически коррелированные данные часто встречаются в приложениях (Франсес [1]). Например, в исследовании загрязнений (Тиао [2]), например, в исследовании концентрации озона в городах, с периодом $d=4$, в задачах прогнозирование речного стока (МакЛеод [3]), в метеорологических исследованиях (Монин [4]), в геофизических задачах (Траутман [5]), в эконометрических временных рядах (Пагано [6]) и так далее. Их моделирование стационарными временными рядами не всегда позволяет получить требуемые результаты [2], следовательно, интересны периодически коррелированные процессы.

Взаимно-однозначное соответствие между скалярными периодически коррелированными процессами и многомерными стационарными (или MS) процессами было установлено Гладышевым [7]. Этот факт позволяет обобщить результаты доказанные и для тех, и для других. Мы рассматриваем многомерные стационарные процессы, имеющие спектральную плотность, представляющая собой эрмитову матрицу. Эту матрицу можно рассматривать как спектральную плотность для периодически коррелированного двойственного процесса, для которого в силу нестационарности она не определена.

В литературе оценку спектральной плотности мощности авторегрессионного процесса часто называют спектральным анализом на основе метода максимальной энтропии. Этот подход был введен Бергом [8]. Если конечная автокорреляционная последовательность полагается известной, то может быть поставлен вопрос о том, как определять оставшиеся неизвестные члены этой последовательности, для того, чтобы полная автокорреляционная последовательность была бы положительно-полуопределенной. Существует бесконечное число возможных экстраполяций, которые будут давать атвокорреляционную последовательность, отвечающую этому требованию. Берг показал, что эту экстраполяцию следует выполнять таким образом, чтобы максимизировать энтропию временного ряда, характеризуемого этой экстраполируемой автокорреляционной последовательностью. Получаемый при этом временной ряд будет наиболее случайным (в энтропийном смысле) из всех рядов, которым соответствует заданная автокорреляционная последовательность с временными сдвигами от 0 до n, где n — число известных членов автокорреляционной последовательности. Спектральная оценка, получаемая по этой экстраполируе-