ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014 Управление, вычислительная техника и информатика № 2 (27)

УДК 519.872

А.А. Назаров, Н.И. Яковлев

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 С ФАЗОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОВТОРНОГО ВРЕМЕНИ

Рассматривается однолинейная СМО с повторными вызовами. В систему поступает пуассоновский поток заявок, время обслуживания экспоненциальное. Заявка, приходящая из потока, занимает прибор для обслуживания, если он свободен. В противном случае заявка отправляется в источник повторных вызовов, в котором ожидает случайное время, распределенное по закону фазового типа. Для анализа системы используются метод асимптотического анализа в условиях растущего повторного времени и метод имитационного моделирования.
Ключевые слова: система с повторными вызовами; фазовое распределение.

В работе рассмотрена RQ-система (Retrial Queueing System) с фазовым распределением повторного времени.

Первая международная научная конференция по RQ-системам состоялась в Мадриде в 1998 г. К настоящему времени по этой тематике опубликованы сотни научных работ [1–13]. В монографии [3] список публикаций содержит более 700 наименований.

Актуальность этих исследований определяется фундаментальной ролью повторного обращения заявок к обслуживающему прибору в таких реальных обслуживающих системах, как классические телефонные системы [7, 8], колцентры [9], мобильные телефонные системы [10], локальные компьютерные сети, управляемые протоколами случайного множественного доступа [11], и другие коммуникационные системы [12, 13].

Исследование RQ-систем с неэкспоненциальным повторным временем мотивировано реальными компьютерными и телекоммуникационными сетями, в которых повторное время вряд ли экспоненциально.

Для RQ-системы M|M|1 классическую повторную схему мы обобщаем, полагая, что повторное время (время пребывания заявки в источнике повторных вызовов) имеет PH-распределение, или, как его еще называют, распределение фазового типа.

1. Математическая модель

В качестве математической модели RQ-системы рассмотрим марковскую однолинейную систему массового обслуживания. Имеется прибор, обслуживающий случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. На вход системы поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ. Заявка, прийдя из потока, осуществляет попытку захвата прибора. Если прибор свободен, то попытка считается удачной и заявка встает на обслуживание. Если же прибор занят, то заявка отправляется в источник повторных вызовов, где получает случайное время задержки, распределенное согласно PH-закону с параметрами (V,θ), по истечении которого она опять осуществляет попытку захвата прибора. Подробное описание распределения фазового типа см. в [4].

Пусть $i_n(t)$ – число заявок на n-й фазе PH-распределения, $n = 1,2,...,N$, а $k(t)$ – определяет состояние прибора как

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{если прибор свободен,}\\ 1, \text{если прибор занят.}\end{cases}$$

Обозначим

$$P\{k(t)=k, i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2, ..., i_N(t)=i_N\} = P_k(i_1, i_2, .., i_N, t) = P_k(i,t), k=0,1,$$

вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок на каждой из фаз PH-распределения, где $i=\{i_1, i_2, ... i_N\}$; Процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменений во времени состояний рассматриваемой системы M|M|1|PH является (N+1)-мерной цепью Маркова, в которой лишь одна компонента $k(t)$ принимает конечное число значений, а остальные N компонент имеют счетное множество значений.

Требуется найти распределение вероятностей значений процесса $\sum i_k$ – числа заявок в ИПВ. Этот процесс является немарковским, поэтому его исследование выполним методом введения дополнительных компонент, рассматривая (N+1)-мерную цепь Маркова $\{k(t), i(t)\}$, для стационарного распределения вероятностей $P_k(i,t) = P_k(i)$ которой запишем систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} -(\lambda + \sum\limits_{k=1}^{N} \theta_{k,0} i_k + \sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{\nu=1,\nu\neq k}^{N} \theta_{k,\nu} i_k) P_0(i) + \sum\limits_{k=1}^{N} (i_k+1) \sum\limits_{\nu=1,\nu\neq k}^{N} \theta_{k,\nu} P_0(i+e_k-e_\nu) + \mu P_1(i) = 0, \\ -\left[\lambda + \mu + \sum\limits_{k=1}^{N} i_k \sum\limits_{\nu=1,\nu\neq k}^{N} (\theta_{k,\nu} V + \theta_{k,\nu})\right] P_1(i) + \sum\limits_{k=1}^{N} (i+1)\theta_{k,0} P_0(i+e_k) + \\ + \lambda P_0(i) + \sum\limits_{k=1}^{N} (i_k+1) \sum\limits_{\nu=1,\nu\neq k}^{N} (\theta_{k,0} V_\nu + \theta_{k,\nu}) P_1(i+e_k-e_\nu) + \lambda \sum\limits_{k=1}^{N} V_k P_1(i-e_k) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2. Характеристическая функция распределения вероятностей состояний системы

Применяя систему уравнений Колмогорова (1), составим систему уравнений для определения частичных характеристических функций

$$H_k(u) = \sum_i P_k(i) \exp\{j \sum_{n=1}^{N} u_n i_n\}, k = \overline{0,1},$$

где u является вектором с компонентами $u_1, u_2, ..., u_N$, а $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Из (1) получим

$$\begin{cases} -\lambda H_0(u) + \mu H_1(u) + j\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\partial H_0}{\partial u_k}\theta_{k,0} + j\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\partial H_0}{\partial u_k} \sum\limits_{\nu=1,\nu\neq k}^{N} \theta_{k,\nu}(1-\exp(j(u_\nu - u_k))) = 0, \\ -\lambda H_1(u) - \mu H_1(u) + \lambda H_0(u) - j\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\partial H_0}{\partial u_k}\theta_{k,0} \exp(-ju_k) + \lambda H_1(u) \sum\limits_{k=1}^{N} V_k \exp(ju_k) + \\ + j\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\partial H_1}{\partial u_k} \sum\limits_{\nu=1,\nu\neq k}^{N} (\theta_{k,\nu} + \theta_{k,0} V_\nu)(1-\exp(j(u_\nu - u_k))) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения в скалярной форме записи в дальнейшем приводят к довольно громоздким выкладкам. Поэтому осуществим переход к матричной форме записи системы уравнений (2).

Для этого введем ряд обозначений:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & u_N \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial H_\nu(u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H_\nu(u)}{\partial u_1} & ... & \dfrac{\partial H_\nu(u)}{\partial u_N} \end{bmatrix},$$

$$\exp(jU) = \begin{bmatrix} \exp ju_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \exp ju_N \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 & ... & V_N \end{bmatrix}^T, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & ... & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Матрица θ – неполная матрица инфинитезимальных характеристик. Вектор $(-\theta E)$ имеет смысл интенсивностей обращений заявок к прибору с соответствующей фазы PH-распределения.

С учетом матричных обозначений перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} -\lambda H_0(u)+\mu H_1(u)-j\dfrac{\partial H_0(u)}{\partial u}\exp\{-jU\}\theta\exp(jU)E=0, \\ -\mu H_1(u)+\lambda H_0(u)+\lambda H_1(u)(V^T\exp\{jU\}-1)+j\dfrac{\partial H_0(u)}{\partial u}\exp\{-jU\}\theta E+ \\ +j\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}\exp\{-jU\}(\theta EV^T-\theta)\exp\{jU\}E=0. \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) служит основой для исследования рассматриваемой RQ-системы методом асимптотического анализа. В качестве предельного условия для использования этого метода выбрано условие неограниченно растущего повторного времени. Применение метода асимптотического анализа разбивается на две части – асимптотик первого и второго порядков. Результатом асимптотики первого порядка является вектор средних значений числа заявок в ИПВ на каждой фазе, а результатом асимптотики второго порядка – доказательство того факта, что асимптотическое распределение вероятностей является многомерным гауссовским, и выводится уравнение, определяющее его матрицу ковариаций.

3. Асимптотика первого порядка

В системе (3) умножим матрицу θ на $\dfrac{1}{T}$, где T – большой параметр, $T\to\infty$, осуществив тем самым условие растущего времени задержки в ИПВ. Обозначим далее $\dfrac{1}{T}=\varepsilon$ и выполним следующие замены:

$$W=\mathrm{diag}(w), u=\varepsilon w, H_k(u)=F_k(w,\varepsilon),\ k=\overline{0,1}.$$

С учетом этого перепишем систему уравнений (3) в условиях растущего повторного времени:

$$\begin{cases} -\lambda F_0(w,\varepsilon)+\mu F_1(w,\varepsilon)-j\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}\exp\{-j\varepsilon W\}\theta\exp(j\varepsilon W)E=0, \\ -\mu F_1(w,\varepsilon)+\lambda F_0(w,\varepsilon)+\lambda F_1(w,\varepsilon)(V^T\exp\{j\varepsilon W\}-1)+j\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}\exp\{-j\varepsilon W\}\theta E+ \\ +j\dfrac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}\exp\{-j\varepsilon W\}(\theta EV^T-\theta)\exp\{j\varepsilon W\}E=0. \end{cases} \quad (4)$$

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Предельные значения $F_k(w)$ решений $F_k(w,\varepsilon)$ системы уравнений (4) при $\varepsilon\to 0$ определяются как

$$F_k(w)=R_k\exp(jaw),$$

где $R_1=\dfrac{\lambda}{\mu},\ R_0+R_1=1$, а вектор средних значений числа заявок на каждой из фаз PH-распределения a определяется равенством

$$a=-\frac{\lambda R_1}{R_0}V^T\theta^{-1}. \quad (5)$$

Доказательство. В первом уравнении системы (4) осуществим предельный переход $\varepsilon\to 0$:

$$-\lambda F_0(w)+\mu F_1(w)-j\frac{\partial F_0(w)}{\partial w}\theta E=0.$$

Будем искать решение в виде

$$F_k(w)=R_k\Phi(w),$$

где R_0, R_1 – стационарное распределение вероятностей состояний прибора. Тогда получаем

$$-\lambda R_0+\mu R_1-jR_0\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w}\theta E\frac{1}{\Phi(w)}=0.$$

Полагая, что $\Phi(w)$ имеет вид

$$\Phi(w) = \exp\{jaw\},$$

получим следующее уравнение:

$$-\lambda R_0 + \mu R_1 + R_0 a\theta E = 0 .$$

Сложим теперь уравнения системы (4) и поделим сумму на ε:

$$\lambda F_1(w)\left[\frac{V^T e^{j\varepsilon W} E - 1}{\varepsilon}\right] + j\frac{\partial F_0(w)}{\partial w}\left[\frac{e^{-j\varepsilon W} - e^{-j\varepsilon W}\theta e^{j\varepsilon W}}{\varepsilon}\right]E + j\frac{\partial F_1(w)}{\partial w}e^{-j\varepsilon W}(\theta E V^T - \theta)e^{j\varepsilon W}E * \frac{1}{\varepsilon} = 0 .$$

Раскладывая экспоненты в ряд Тейлора до первой степени порядка малости ε, осуществив предельный переход $\varepsilon \to 0$, получим равенство

$$\left[\lambda R_1 V^T + R_0 a\theta - R_1 a(\theta E V^T - \theta)\right]WE = 0 ,$$

из которого следует, что вектор средних a удовлетворяет уравнению

$$\lambda R_1 V^T + R_0 a\theta - R_1 a(\theta E V^T - \theta) = 0 .$$

Функции $F_0(w), F_1(w)$ имеют смысл частичных характеристических функций распределения вероятностей числа заявок в ИПВ для свободного и занятого состояний прибора соответственно. Вместе с условием нормировки для вероятностей R_0, R_1 последнее уравнение однозначно определяет компоненты вектор-строки средних a, что и есть равенство (5).

Теорема доказана.

4. Асимптотика второго порядка

В системе (3) умножим матрицу θ на $\frac{1}{T}$, где T – большой параметр, $T \to \infty$. Теперь обозначим, в отличие от асимптотики первого порядка, $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$ и выполним следующие замены:

$$H_k(u) = H_k^{(2)}(u)\exp\{jau\}, k = \overline{0,1} .$$

Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} -\lambda H_0^{(2)}(u) + \mu H_1^{(2)}(u) - j\left[\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + jaH_0^{(2)}(u)\right]\exp\{-jU\}\theta\exp(jU)E = 0, \\ -\mu H_1^{(2)}(u) + \lambda H_0^{(2)}(u) + \lambda H_1^{(2)}(u)(V^T\exp\{jU\} - 1) + \\ +j\left[\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + jaH_0^{(2)}(u)\right]\exp\{-jU\}\theta E + j\left[\frac{\partial H_1^{(2)}(u)}{\partial u} + jaH_1^{(2)}(u)\right]\exp\{-jU\}(\theta E V^T - \theta)\exp\{jU\}E = 0. \end{cases}$$

Введя замены $u = \varepsilon w,\ H_k^{(2)}(u) = F_k(w,\varepsilon),\ k = \overline{0,1},$ и подставляя их в последнюю систему, получим

$$\begin{cases} -\lambda F_0(w,\varepsilon) + \frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial z} - j\left[\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}\varepsilon + jaF_0(w,\varepsilon)\right]\exp\{-j\varepsilon W\}\theta\exp(j\varepsilon W)E = 0, \\ -\mu F_1(w,\varepsilon) + \lambda F_0(w,\varepsilon) + \lambda F_1(w,\varepsilon)(V^T\exp\{j\varepsilon W\} - 1) + \\ +j\left[\frac{\partial F_0}{\partial w}\varepsilon + jaF_0(w,\varepsilon)\right]\exp\{-j\varepsilon W\}\theta E + j\left[\frac{\partial F_1}{\partial w}\varepsilon + jaF_1(w,\varepsilon)\right]\exp\{-j\varepsilon W\}(\theta E V^T - \theta)\exp\{j\varepsilon W\}E = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 2. Предельные значения $F_k(w)$ решений $F_k(w,\varepsilon)$ в системе уравнений (6) при $\varepsilon \to 0$ определяются как

$$F_k(w) = R_k \exp\left\{-\frac{1}{2}E^T WKWE\right\}.$$

При этом матрица ковариаций K является решением обратного матричного уравнения Ляпунова

$$KA + A^T K = -(B + B^{\mathrm{T}}), \tag{7}$$

где

$$A = \lambda(R_1\theta EV^T - \theta) - R_0^2\theta Ea\theta,$$
$$B = R_0^2\left[\mathrm{diag}(a)\theta - \mathrm{diag}(a\theta)\right]Ea\theta - \lambda\mathrm{diag}(a)(R_1\theta EV^T - \theta).$$

Доказательство. Проведем его в три этапа. При этом воспользуемся следующим разложением

$$F_k(w) = (R_k + j\varepsilon E^T W f_k)\exp\left\{-\frac{1}{2}E^T WKWE\right\}, k = \overline{0,1}. \tag{8}$$

Этап 1.

В первом из уравнений системы (6) разложим экспоненты в ряд Тейлора вплоть до первой степени порядка малости ε и, используя разложение (8), получим, группируя слагаемые при степенях ε:
при ε^0

$$-\lambda R_0 + \mu R_1 + R_0 a\theta E = 0,$$

при ε^1

$$-\lambda E^T W f_0 + \mu E^T W f_1 + R_0 E^T WK\theta E + aR_0(\theta W - W\theta)E + a\theta E(E^T Wf) = 0. \tag{9}$$

Этап 2.

Складывая уравнения системы (6), раскладывая экспоненты в ряд Тейлора вплоть до второй степени порядка малости ε, используя разложение и, группируя слагаемые при степенях ε, получим:
при ε^1:

$$\lambda R_1 V^T + R_0 a\theta - R_1 a(\theta EV^T - \theta) = 0,$$

при ε^2:

$$\begin{gathered}-\lambda R_1\frac{V^T W^W}{2}E - \lambda(E^T Wf_1)V^T WE - R_0 E^T WK\theta WE - aR_0\left(\frac{\theta W^2}{2} - W\theta W\right)E - a\theta E(E^T Wf_0)WE + \\ +R_1 E^T WK\theta E\theta WE - aR_1\left[W(\theta EV^T - \theta)W - \frac{(\theta EV^T - \theta)W^2}{2}\right]E + a(E^T Wf_1)(\theta EV^T - \theta)WE = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Этап 3.

Выражая из (9) $E^T Wf_1$ и подставляя в (10), группируя слагаемые, получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}-R_0 E^T WK\theta WE + R_0 aW\theta WE + R_1 EWK(\theta EV^T - \theta)WE - R_1 aW(\theta EV^T - \theta)W - \\ -\frac{R_0^2}{\lambda}\left[E^T WK\theta E + a(\theta W - W\theta)E\right]a\theta WE = 0.\end{gathered}$$

В последнем уравнении, переставляя сомножители требуемым образом, получим

$$E^T W\left[K\left\{\lambda(R_1\theta EV^T - \theta) - R_0^2\theta Ea\theta\right\} + R_0^2\left\{\mathrm{diag}(a)\theta - \mathrm{diag}(a\theta)\right\}Ea\theta - \lambda\mathrm{diag}(a)(R_1\theta EV^T - \theta)\right]WE = 0,$$

или, что то же самое

$$E^T W(KA + B)WE = 0. \tag{11}$$

Выражение (11) является некоторой квадратичной формой вида $x^{\mathrm{T}}Ax$. Для того чтобы она принимала нулевые значения для всех x, достаточно, чтобы матрица A являлась кососимметричной, т.е. $A^T + A = 0$.

Применимо к квадратичной форме выражения (11) это означает, что для того, чтобы она принимала нулевые значения для любых матриц W, достаточно, чтобы $KA+A^TK+B+B^T=0$. При этом решение $K = -BA^{\mathrm{T}}$ не является допустимым, так как в этом случае матрица K не является симметричной. Следовательно, матрица ковариаций K многомерного нормального распределения является решением обратного уравнения Ляпунова (7), которое можно свести к системе N^2 линейных алгебраических уравнений. Подробнее о методах решения подобных уравнений см. в [14].

5. Сравнение с имитационным подходом

Для рассматриваемой RQ-системы реализована имитационная модель. С ее помощью численно получено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов.

Определим исходные параметры системы следующим образом:

$$\lambda = 0,70,\ \mu = 1,\ V^T = [0,40\ \ 0,25\ \ 0,35],\ \theta = \varepsilon \begin{bmatrix} -0,30 & 0,10 & 0,10 \\ 0,10 & -0,20 & 0,05 \\ 0,15 & 0,15 & -0,60 \end{bmatrix},$$

при этом параметр $\varepsilon = \{0,2;\ 0,1;\ 0,05;\ 0,01\}$.

Для заданного набора параметров с помощью имитационной модели получены ряды распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Для сравнения с асимптотическими результатами, определяемыми формулами (5) и (7), установим критерий сравнения – расстояние Колмогорова

$$d = \max_{1 \le m < \infty} \left| \sum_{i=1}^{m} P(i) - \sum_{i=1}^{\mathrm{m}} G(i) \right|.$$

Здесь $P(i)$ есть ряд распределения вероятностей, полученный подстановкой целых значений в функцию плотности вероятности нормального распределения, которое получено путем суммирования всех компонент вектора многомерного нормального распределения, а $G(i)$ есть ряд распределения вероятностей, полученный с помощью имитационного моделирования.

На графиках (рис. 1–4) приведены гистограммы рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ, полученных асимптотически (сплошная линия) и имитационно (пунктирная линия) при значениях вышеуказанных параметров.

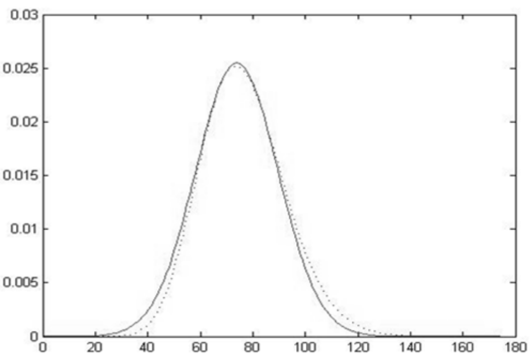

Рис. 1. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0,1$

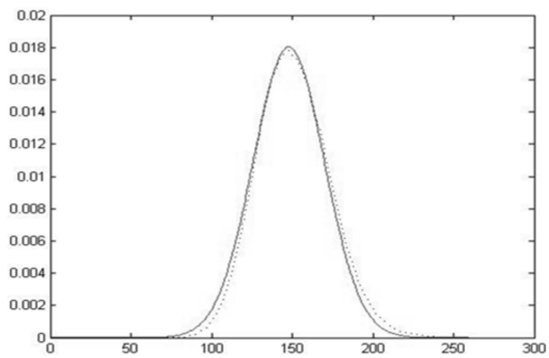

Рис. 2. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0,2$

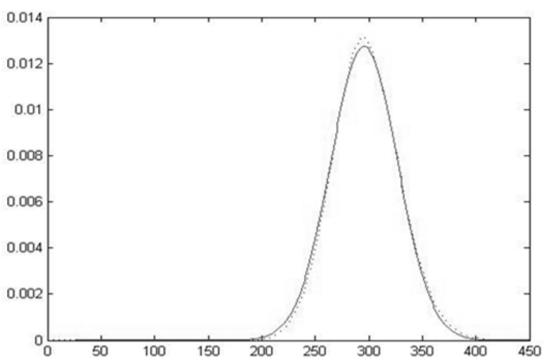

Рис. 3. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0,05$

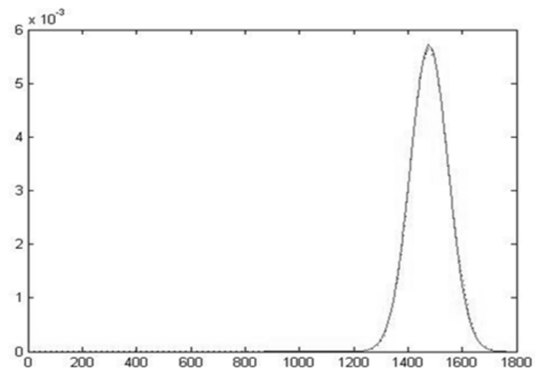

Рис. 4. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0,01$

Приведем таблицу расстояний Колмогорова для тех же параметров системы, которые соответствуют графикам на рис. 1–4.

Значения расстояний Колмогорова *d*

E	*d*
0,20	0,059
0,10	0,039
0,05	0,030
0,01	0,012

Данные таблицы указывают на то, что при уменьшении параметра ε расстояние между асимптотическим и имитационным распределениями вероятностей уменьшается. Полагая допустимым погрешность в 0,05, можно считать, что допустимо применение асимптотических результатов при значении ε менее 0,1.

Заключение

В работе показана возможность гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов и получены параметры для данного приближения. Построены графики асимптотического и имитационного распределений вероятностей состояний системы. Приведены табличные данные расстояния Колмогорова между имитационным и асимптотическим распределениями вероятностей в условии неограниченно растущего повторного времени. Сделан вывод о том, что при увеличении повторного времени расстояние между распределениями вероятностей сокращается. Установлена область применимости гауссовской аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания М. : Физматгиз, 1963.
2. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
3. *Jesus R. Artalejo, Antonio Gomez-Corral.* Retrial Queue Systems. A computational approach. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
4. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. М. : РУДН, 1995. С. 98–108.
5. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial oueues. Chapman & Hall, 1997.
6. *Yang T., Posner M.J.M., Templeton J.G.G., Li H.* An approximation methods for M/G/1 retrial queue with general retrial times // Europian Journal of Operational Research. 1994. V. 76. P. 552–562.
7. *Elldin A., Lind G.* Elementary telephone traffic theory. Ericson Public Telecommunications, 1967.
8. *Syski R.* Introduction to congestion theory in telephone systems. Amterdam : Elsevier Science Publisher, 1968.
9. *Stollez R.* Performance analysis and optimization of Inbound Call Centers. Berlin : Springer, 2003.
10. *Wesolowski K.* Mobile communication systems. N.Y. : John Wiley & Sons, 2002.
11. *Giambene G.* Queueing Theory and telecommunications: Networks and Applications. N.Y. : Springer, 2005.
12. *Hammond J.L., O`Reilly P.J.P.* Performance analysis of local computer networks. Massachusetts : Addison-Wesley, 1998.
13. *Bruneel H., Kim. B.G.* Discrete-Time models for communication systems including ATM. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1993.
14. *Параев Ю.И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1989.

Назаров Анатолий Андреевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: anazarov@fpmk.tsu.ru
Яковлев Никита Иванович. E-mail: yakovlev_steppy@mail.ru
Томский государственный университет
Поступила в редакцию 5 июля 2013 г.

Nazarov Anatoly.A., Yakovlev Nikoly.I. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
Investigation of retrial queue system M|M|1 with phase-type retrial times.
Keywords: retrial queue system; phase-type distribution.

Retrial queueing models are used as stochastic modeling tool of many computer and communication systems such as call-centers, mobile phone systems, local computer networks with multiple random access. Consider a single-server queueing system. The cus-

tomers form the Poisson input process with a rate λ. The customers` service times have an exponential distribution with a parameter μ. If a customer finds server engaged, one joins the retrial queue (or orbit) in order to seek service again after a random delay that has a phase-type distribution.

Let $i(t)$ be the vector with components which are equal to a number of customers in each phase of the phase-type retrial at instant t. The process $i(t)$ is a non-Markovian process. To extend $i(t)$ to a Markov process, we introduce new random variables. Let $k(t)$ be the indicator function of a server's state: $k(t) = 0$ if the server is vacant at moment t; $k(t) = 1$ if it is engaged at moment t. Therefore, the stochastic process $\{k(t), i(t)\}$ is the Markovian process defined on the state space $\{(k,i)\}$, where one in N+1 components is finite and other N components are countable. Our purpose is to find the probability distribution of states for non-Markovian process $\sum_{k=1}^{N} i_k(t)$.

We use the asymptotic analysis method that allows us to find the probability distribution of process states in a marginal condition when the retrial time grows unlimited. It is shown that in the condition of unlimited growth, the probability distribution can be approximated by the multidimensional Gaussian distribution. The first and second orders of the asymptotic method provide as result the mean vector and covariate matrix correspondingly.

To estimate the range of applicability of analytic results, we use simulations. Kolmogorov's distance as a comparison criteria of analytic and simulation results is used.

REFERENCES

1. Khinchin A.Ya. *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Papers about mathematical theory of Queueing]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1963. 235 p.
2. Nazarov A.A., Moiseeva S.P. *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Asymptotic analysis method on queueing theory]. Tomsk: NTL Publ., 2006.
3. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. *Retrial queue systems. A computational approach*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 332 p.
4. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: Russian University of Peoples' Friendship Publ., 1995, pp. 98-108.
5. Falin G.I., Templeton J.G.C. *Retrial queues*. Chapman &Hall, 1997. 328 p.
6. Yang T., Posner M.J.M., Templeton J.G.G., Li H. An approximation methods for M/G/1 retrial queue with general retrial times. *Europian Journal of Operational Research*, 1994, vol. 76, pp. 552-562. DOI: 10.1016/0377-2217(94)90286-0
7. Elldin A.,Lind G. *Elementary telephone traffic theory*. Ericson Public Telecommunications, 1967.
8. Syski R. *Introduction to congestion theory in telephone systems*. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1968. 642 p.
9. Stollez R. *Performance analysis and optimization of Inbound Call Centers*. Berlin: Springer, 2003. 219 p.
10. Wesolowski K. *Mobile communication systems*. New York: John Wiley & Sons, 2002. 449 p.
11. Giambene G. *Queueing theory and telecommunications: Networks and Applications*. New York: Springer, 2005. 585 p.
12. Hammond J.L., O'Reilly P.J.P. *Performance analysis of local computer networks*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998. 411 p.
13. Bruneel H, Kim. B.G. *Discrete-Time models for communication systems including ATM*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993. 200 p.
14. Paraev Yu.I. *Uravneniya Lyapunova i Rikkati* [Lyapunov and Riccati equations]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 1989.