МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФПМК
А.М. Горцев
25 мая 2014 г.

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Часть 1

Учебно-методическое пособие для студентов ФПМК

Томск
2014

РАССМОТРЕНО И ОДОБРЕНО методической комиссией факультета прикладной математики и кибернетики

Председатель комиссии
д-р физ.-мат. наук, профессор А.Г. Дмитренко

Методические пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении практических заданий курса «Теория случайных процессов». Предложены в большом количестве разнообразные задачи с разобранными решениями, а также задачи для самостоятельной работы по каждой теме. Приведены необходимые сведения из теории случайных процессов. Методическое пособие составлено так, чтобы студент смог выполнить задания, не обращаясь к дополнительной литературе.

Для студентов 3-го курса ФПМК, изучающих курс «Теория вероятностей и случайные процессы».

Составители:

О.Н. Галажинская, канд. физ.-мат. наук, доцент

С.П. Моисеева, канд. техн. наук, доцент

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Определение и описание случайных процессов

Теорией случайных процессов называется математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений в динамике их развития. Случайные процессы являются удобной математической моделью функций времени, значения которых случайные величины.

<u>*Например*</u>:

1. Число звонков, поступающих в единицу времени на телефонную станцию, являясь случайной величиной, зависит от времени суток.
2. Численность населения города меняется с течением времени случайным образом под влиянием различных факторов: рождаемость, смертность, миграция и т.д.
3. Расход электроэнергии в единицу времени – тоже функция времени со случайными значениями.
4. Координаты броуновской частицы меняются со временем и принимают случайные значения.
5. Курсы валют или акций меняются со временем и принимают случайные значения.
6. Выручка или прибыль организации случайная величина, изменяющаяся с течением времени.
7. Длина очереди в супермаркете – функция времени со случайными значениями.

Дадим математическое определение случайного процесса.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$.

Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ – это измеримая функция, отображающая это вероятностное пространство на борелевскую прямую $\{R, B\}$.

Рассмотрим теперь функцию, зависящую от двух аргументов $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega, t \in T$.

Определение. Функцию $\xi(\omega, t)$ называют ***случайным процессом***, если при $\forall t \in T$ она является измеримой функцией аргумента ω, то есть случайной величиной.

При фиксированном значении параметра t, функция $\xi_t(\omega)$ является случайной величиной, которую будем называть ***сечением случайного процесса в момент времени*** t.

Зафиксируем некоторое элементарное событие ω. Это означает, что опыт, в ходе которого случайный процесс протекает, уже произведен и произошло элементарное событие $\omega\in\Omega$. Случайный процесс уже не случаен, и зависимость его от t примет определенный вид: в результате получим неслучайную функцию времени – $\xi_\omega(t)$, которую будем называть ***реализацией случайного процесса***.

Совокупность всех реализаций случайного процесса называется ***ансамблем реализаций***.

Можно сказать, что случайный процесс – это однопараметрическое семейство случайных величин $\xi(\omega,t)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω, зависящих от значений параметра t.

Часто случайный процесс $\xi(\omega,t)$ обозначается как $\xi(t)$, где аргумент t имеет смысл времени.

Пример 1.1. Пусть случайный процесс задается формулой

$$\xi(t) = U\sin(t),$$

где U – случайная величина.

Найти сечения, соответствующие фиксированным значениям аргумента: а) $t_1 = \frac{\pi}{6}$; б) $t_1 = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Сечением случайного процесса является случайная величина, соответствующая фиксированному значению аргумента, т.е.

а) при $t_1 = \frac{\pi}{6}$ сечение $\xi_1(t) = U\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}U$;

б) при $t_2 = \frac{\pi}{2}$ сечение $\xi_2(t) = U\sin(\frac{\pi}{2}) = U$.

Пример 1.2. Случайный процесс задается формулой $\xi(t) = \left(t^2+1\right)U$, где U – случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу $(0,10)$.

Найти реализацию функции $\xi(t)$ в двух испытаниях, в которых величина U приняла следующие значения: а) $u_1 = 2$; б) $u_2 = 3,5$.

Решение. Реализацией является неслучайная функция, которая получается при фиксированном значении случайной величины, т.е.

а) при $u_1 = 2$ реализация $\xi_1(t) = 2\left(t^2 + 1\right)$;

б) при $u_1 = 3{,}5$ реализация $\xi_2(t) = 3{,}5\left(t^2 + 1\right)$.

Пример 1.3. Пусть случайный процесс $\xi = t \cdot U, t \in [0,1]$ где $U \sim R[0,1]$ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$. Описать множество сечений и реализаций случайного процесса $\xi(t)$.

Решение. При фиксированном t_0 сечение $\xi_t(\omega) = t_0 U(\omega)$ является случайной величиной, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0,t_0]$.

Реализации случайного процесса $\xi(t)$, то есть неслучайные функции $\xi\omega_0(t) = U(\omega_0)t$, являются прямыми линиями, выходящими из начала координат со случайным угловым коэффициентом (тангенсом угла наклона), равным $U(\omega_0)$.

Задачи по теме 1 для самостоятельного решения

1. Описать семейство реализаций элементарного случайного процесса $\xi(t) = e^{-t \cdot U}, t > 0$, где U – случайная величина, принимающая только положительные значения.

2. Описать семейство реализаций элементарного случайного процесса $Y(\omega, t) = X(\omega) e^{-\alpha t}$, где X – равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ случайная величина, а α и t – положительные параметры.

3. Описать семейство реализаций элементарного случайного процесса $X(t) = U \cos at + V \sin at$, где (U,V) – система случайных величин, a – неслучайная величина.

2. Законы распределения случайных процессов

Рассмотрим сечение $\xi(t_1)$ случайного процесса $\xi(t)$ в момент времени t_1. Функцию

$$F_\xi(x_1,t_1)=P\{\xi(t_1)<x_1\}$$

называют ***одномерной функцией распределения случайного процесса в момент времени*** t_1.

Если зафиксировать два значения моментов времени t_1 и t_2, то функция

$$F_\xi(x_1,t_1;x_2,t_2)=P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2\}$$

называется ***двумерной функцией распределения*** случайного процесса.

Для n сечений случайного процесса функция

$$F_\xi(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)=P\{\xi(t_1)<x_1,\ldots,\xi(t_n)<x_n\} \tag{1.1}$$

называется ***n-мерной функцией распределения*** случайного процесса.

Будем считать, что случайный процесс $\xi(t)$ задан, если задано семейство функций распределений (1.1) для $\forall n$.

Функция $F_\xi(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)$ должна удовлетворять очевидным соотношениям, которые называются ***условиями согласованности***:

$$F_\xi(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n)=F_\xi(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n,\infty,t_{n+1},\cdots,\infty,t_{n+p}), \tag{1.2}$$

$$F_\xi(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n)=F_\xi(x_{i_1},t_{i_1},\cdots,x_{i_n},t_{i_n}), \tag{1.3}$$

где $i_1, i_2,\ldots,i_n$ – любая перестановка индексов $1,2,\ldots n$ для $\forall n$. Теперь можно сформулировать ещё одно определение случайного процесса.

<u>Определение</u>. Случайным процессом $\xi(t)$, заданным на множестве $T\,(t\in T)$ называется семейство распределений (1.1), удовлетворяющих ***условиям согласованности*** (1.2) и (1.3).

Набор функций $F_\xi(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)$ для $n = 1,2,\ldots$ называют ***конечномерным распределением случайного процесса*** $\xi(t)$.

Если функция $F_\xi(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)$ допускает представление

$$F_\xi(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p_\xi(y_1,t_1,\ldots,y_n,t_n)dy_n\ldots dy_1$$

где $p_\xi(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)$ – некоторая измеримая неотрицательная функция такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y_1,t_1,\ldots,y_n,t_n)dy_n\ldots dy_1=1,$$

то $p_\xi(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)$ называется ***n*-мерной плотностью распределения случайного процесса** $\xi(t)$.

При этом ***условия согласованности*** примут вид

$$p_\xi(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y_1,t_1,\ldots,y_n,t_n,y_{n+1},t_{n+1},\ldots,y_{n+p},t_{n+p})dy_{n+p}\ldots dy_{n+1},$$

$$p_\xi(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n)=p_\xi(x_i,t_i,\ldots,x_{i_n},t_{i_n}).$$

Рассмотрим примеры на нахождение конечномерных функций распределения.

Пример 2.1. Пусть случайный процесс $\xi(t)=\varphi(t)V$, $t\in[0,1]$, где V – некоторая случайная величина, с функцией распределения $F_V(x)$, а $\varphi(t)>0$. Найти многомерную функцию распределения случайного процесса $\xi(t)$.

Решение. В соответствии с определением

$$F_\xi(x_1,t_1,\ldots,x_n,t_n)=P\{\xi(t_1)<x_1,\ldots,\xi(t_n)<x_n\}=P\{\varphi(t_1)V<x_1,\ldots,\varphi(t_n)V<x_n\}=$$

$$=P\left\{V<\frac{x_1}{\varphi(t_1)},\ldots,V<\frac{x_n}{\varphi(t_n)}\right\}=P\left\{V<\min_{i=1,2,\ldots,n}\frac{x_i}{\varphi(t_i)}\right\}=F_V\left(\min_{i=1,2,\ldots,n}\frac{x_i}{\varphi(t_i)}\right).$$

Если функция распределения $F_V(x)$ имеет плотность $p_V(x)$, то существует и одномерная плотность случайного процесса $\xi(t)$. Так как для $n=1$ имеем

$$F_\xi(x,t)=F_V\left(\frac{x}{\varphi(t)}\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\varphi(t)}p_V\left(\frac{z}{\varphi(t)}\right)dz,$$

то $p_\xi(x,t)=\dfrac{1}{\phi(t)}p_V\left(\dfrac{x}{\phi(t)}\right)$.

Пример 2.2. Пусть случайный процесс, определяется соотношением $\xi(t)=Ut+V$, где U и V – независимые случайные величины с функциями распределения $F_U(x)$, $F_V(y)$. Определить вид реализаций данного процесса и найти закон распределения.

Решение. Реализации этого случайного процесса представляют собой прямые линии со случайным наклоном и случайным начальным значением при $t=0$.

Одномерная функция распределения случайного процесса $\xi(t)$ при $t > 0$ имеет вид

$$F_\xi(x,t) = P\{\xi(t) < x\} = P\{Ut + V < x\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{Ut + V < x | V = y\} dF_V(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\{Ut + y < x\} dF_V(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{U < \frac{x-y}{t}\right\} dF_V(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_U\left(\frac{x-y}{t}\right) dF_V(y) \cdot$$

Если же $t = 0$, то $F_\xi(x,t) = F_V(x)$.

Для n-мерной функции распределения, аналогично предыдущему примеру, получаем вид

$$F_\xi(x_1,t_1,...,x_n,t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1,...,\xi(t_n) < x_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_U\left(\min_{i=1,2,...,n} \frac{x_i - y}{t_i}\right) dF_V(y) \cdot$$

Характеристическая функция конечномерного распределения вероятностей случайного процесса определяется также как для многомерных случайных величин

$$g_\xi(u_1,t_1,...,u_n,t_n) = M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k)u_k\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right\} p_\xi(x_1,t_1,...,x_n,t_n) dx_1...dx_n.$$

При решении многих задач приходится иметь дело с несколькими случайными процессами. Для задания, например, двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяется $(n+m)$-мерная функция распределения:

$$F_{\xi\eta}(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n,y_1,t_1',\cdots,y_m,t_m') =$$
$$= P\{\xi(t_1) < x_1,\cdots,\xi(t_n) < x_n, \eta(t_1') < y_1,\cdots,\eta(t_m') < y_m\}$$

Эта функция распределения в общем случае не обладает свойством симметрии относительно всех перестановок аргументов.

Пример 2.3. Пусть случайный процесс $\xi(t) = \varphi(t)V$, $t\in[0,1]$, где V – гауссовская случайная величина с параметрами a и σ^2, $\varphi(t)$ – неслучайная функция. Найти характеристическую функцию случайного процесса $\xi(t)$.

Решение. Пусть $\eta = \sum_{k=1}^{n} u_k \xi(t_k)$, тогда в силу $\xi(t_k) = \varphi(t_k)V$, получаем

$\eta = V\sum_{k=1}^{nk} u_k \varphi(t_k)$, поэтому η – гауссовская случайная величина с математическим ожиданием и дисперсией:

$$M\{\eta\} = a\sum_{k=1}^{k} u_k\varphi(t_k) = m_\eta \quad D\{\eta\} = \sigma^2\left[\sum_{k=1}^{n} u_k\varphi(t_k)\right]^2 = D_\eta \cdot$$

Учитывая, что для случайной величины η характеристическая функция имеет вид

$$g_\eta(u) = M\left\{e^{iu\eta}\right\} = \exp\left\{ium_\eta - u^2\frac{D_\eta}{2}\right\},$$

получаем выражение для характеристической функции $\xi(t)$:

$$g_\xi(u_1,t_1,\cdots,u_n,t_n) = M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)u_k\right)\right\} = M\left\{e^{i\eta}\right\} = g_\eta(1) = \exp\left\{im_\eta - \frac{1}{2}D_\eta\right\} \cdot$$

Задачи по теме 2 для самостоятельного решения

1. Пусть случайный процесс $X(\omega,t)$ задан на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$, где: $\Omega = \{1,2\}$, F – множество всех подмножеств множества Ω, P приписывает вероятности, равные 1/2, множествам $\{1\}$ и $\{2\}$. Пусть множество значений параметра t есть отрезок [0,1] и $X(\omega,t) = \omega t$. Найти реализации случайного процесса $X(\omega,t)$ и его семейство конечномерных распределений.

2. Пусть случайный процесс $X(\omega,t)$ определен на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$, где $\Omega = \{0,1\}$, P – мера Лебега. Пусть $t\in(0,1)$ и $X(\omega,t) = 1$ при $t \le \omega$, $X(\omega,t) = 0$ при $t > \omega$. Найти реализации случайного процесса $X(\omega,t)$ и его семейство конечномерных распределений.

3. Пусть U – случайная величина, заданная функцией распределения $F_U(x)$, $t > 0$. Найти семейство конечномерных распределений случайного процесса $\xi(t) = U+t$.

4. Пусть X и Y – случайные величины такие, что Y имеет симметричное относительно нуля распределение, $P(Y = 0) = 0$. Найти вероятность того, что реализации случайного процесса $\xi(t) = X+t(Y+t)$ при $t \ge 0$ возрастают.

5. Случайный процесс представляет собой $\xi(t) = V$, где V – непрерывная случайная величина с плотностью $p_v(x)$. Найти одномерную и двумерную плотности распределения процесса.

6. Поток покупателей является простейшим Пуассоновским с параметром λ, это значит, что вероятность того, что за время τ появится ровно k покупателей, определяется формулой Пуассона $P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}$.

Процесс $\xi(t)$ представляет собой число покупателей пришедших от 0 до t (например, совпадает с началом рабочего дня). Найти одномерный закон распределения этого процесса.

7. Случайный процесс задан соотношением $\xi(t) = X+\alpha t$, $t > 0$, где X – случайная величина с непрерывной функцией распределения, а $\alpha > 0$ – детерминированная постоянная. Пусть $D\subset[0,\infty)$ – некоторое конечное или счетное подмножество. Найти вероятности событий:

а) $P\{\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t\in D\}$;

б) $P\{\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t\in[0,1]\}$.

8. Случайный процесс задан в виде $\xi(t) = Vt^2$, где V – непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Найти многомерную плотность распределения случайного процесса $\xi(t)$.

9. Случайный процесс $\xi(t)$ представляет собой аддитивную смесь некоррелированных между собой сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$. Известно, что сигнал есть детерминированная функция $s(t) = A\cos(Bt+\varphi)$, а помеха $n(t)$ – гауссовский белый шум с дисперсией σ^2. Записать одномерный закон распределения этого процесса.

3. Основные характеристики случайных процессов

Конечномерные распределения дают полное и исчерпывающее описание случайного процесса. Однако существует большое число задач, для решения которых оказывается достаточным использование основных характеристик случайного процесса, которые в более краткой и сжатой форме, отражают основные свойства случайного процесса. Такими характеристиками являются моменты первых двух порядков. В отличие от случайных величин, для которых моменты являются числами и поэтому их называют *числовыми характеристиками*, моменты случайной функции являются неслучайными функциями (их называют *характеристиками случайной функции* (*процесса*)).

Определение*. *Математическим ожиданием случайного процесса или его ***средним значением*** называется неслучайная функция m_ξ(t), $t \in T$, определяемая соотношением

$$m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x,t) \cdot$$

Значение этой функции при любом t равно математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса. Математическое ожидание, есть «средняя» функция, вокруг которой происходит разброс реализаций случайного процесса.

Свойства математического ожидания случайного процесса

1. Математическое ожидание неслучайной функции $\varphi(t)$ равно самой неслучайной функции $M\left[\varphi(t)\right] = \varphi(t)$.

2. Неслучайный множитель $\varphi(t)$ можно выносить за знак математического ожидания $M\left[\varphi(t)\xi(t)\right] = \varphi(t) M\left[\xi(t)\right] = \varphi(t) m_\xi(t)$.

3. Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M\left[\xi_1(t) + \xi_2(t)\right] = M\left[\xi_1(t)\right] + M\left[\xi_2(t)\right].$$

4. Математическое ожидание суммы случайной и неслучайной функций равно сумме математического ожидания случайной $\xi(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$:

$$M\left[\xi(t) + \varphi(t)\right] = M\left[\xi(t)\right] + \varphi(t).$$

Пример 3.1. Найти математическое ожидание случайного процесса $\xi(t) = U\cos(t)$, где U – случайная величина, математическое ожидание которой $M(U) = 2$.

Решение. Множитель $\cos(t)$ неслучайная функция, которую, используя свойство 2 можно вынести за знак математического ожидания: $M\left[\xi(t)\right] = M\left[U\cos(t)\right] = \cos(t)M(U) = 2\cos(t).$;

<u>Определение</u>. Дисперсией случайного процесса $\xi(t)$ называется неслучайная неотрицательная функция $D_\xi(t)$, которая при любом значении аргумента t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса:

$$D_\xi(t) = M\left\{\left(\xi(t) - m_\xi(t)\right)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_\xi(t)\right)^2 dF(x,t).$$

Дисперсия характеризует разброс реализаций относительно средней траектории $m_\xi(t)$.

Свойства дисперсии случайного процесса

1. Дисперсия неслучайной функции равна нулю $D\left[\varphi(t)\right] = 0.$;

2. Дисперсия суммы случайной функции $\xi(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$ равна дисперсии случайной функции $D\left[\xi(t) + \varphi(t)\right] = D_\xi(t).$

3. Дисперсия произведения случайной функции $\xi(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию случайной функции $D\left[\varphi(t)\cdot\xi(t)\right] = \varphi^2(t)D_\xi(t).$

Пример 3.2. Найти дисперсию случайного процесса $\xi(t) = U\sin(t)$, где U – случайная величина, математическое ожидание которой $D(U) = 6.$

Решение. Множитель $\sin(t)$ неслучайная функция, которую, используя свойство 3 можно вынести за знак дисперсии: $D\left[\xi(t)\right] = D\left[U\sin(t)\right] = \sin^2(t)D(U) = 6\sin^2(t).$

Пример 3.3. Пусть случайный процесс, определяется соотношением $\xi(t) = (U+V)/t$, где U и V – независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение $N(0;1/2)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $\xi(t)$ и вероятность $P\{|\xi(t)| < 3/t\}$ для произвольного $t > 0$.

Решение. В силу того, что U и V гауссовские и независимые,

$$M\{\xi(t)\} = M\left\{\frac{U+V}{t}\right\} = \frac{1}{t}M\{U\} + \frac{1}{t}M\{V\} = 0,$$

$$D\{\xi(t)\} = D\left\{\frac{U+V}{t}\right\} = \frac{1}{t^2}D\{U\} + \frac{1}{t^2}D\{V\} = \frac{1}{t^2}.$$

Так как сумма гауссовских случайных величин ($U+V$) имеет гауссовское распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, то

$$F_\xi(x,t) = P\{\xi(t) < x\} = P\left\{\frac{U+V}{t} < x\right\} = P\{U+V < xt\} = \Phi(xt),$$

где $\Phi(z)$ – функция Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \exp\{-u^2\}du \cdot$$

Тогда искомая вероятность определяется следующим образом

$$P\left\{|\xi(t)| < \frac{3}{t}\right\} = F_\xi(\frac{3}{t},t) - F_\xi(-\frac{3}{t},t) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.997 \cdot$$

<u>Определение</u>. Среднеквадратическим или ***стандартным отклонением случайного процесса*** $\xi(\omega,t)$ называют неслучайную функцию $\sigma(t) = \sqrt{D_\xi(t)}$.

Размерность функции $\sigma_\xi(t)$ равна размерности случайного процесса $\xi(t)$. Значения реализаций случайного процесса при каждом t отклоняются от математического ожидания $m_\xi(t)$ на величину порядка $\sigma_\xi(t)$.

Центрированный случайный процесс

Центрированным случайным процессом $\overset{\circ}{\xi}(t)$ называется процесс, который получится, если из случайного процесса $\xi(t)$ вычесть его математическое ожидание:

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t).$$

Свойства центрированного случайного процесса

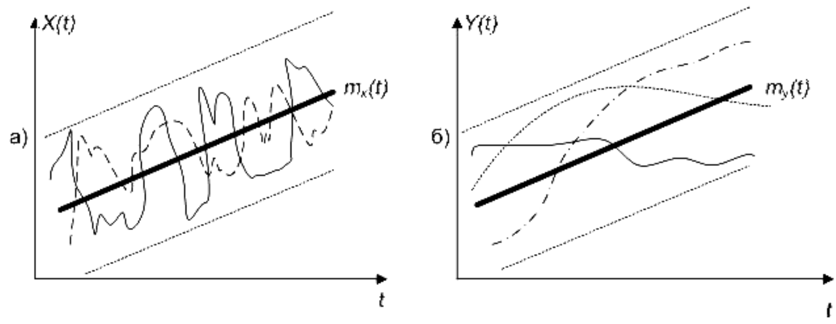
1. Прибавление к случайной функции $\xi(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет ее центрированной функции: если $\xi_1(t) = \xi_2(t) + \varphi(t)$, то $\overset{\circ}{\xi_2}(t) = \overset{\circ}{\xi_1}(t)$.

2. При умножении случайной функции $\xi(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее центрированная функция умножается на этот же множитель: если $\xi_1(t) = \xi_2(t) \cdot \varphi(t)$, то $\overset{\circ}{\xi_2}(t) = \overset{\circ}{\xi_1}(t) \cdot \varphi(t)$.

3. Математическое ожидание центрированного случайного процесса тождественно равно нулю: $M\left[\overset{\circ}{\xi_2}(t)\right] = M\left[\xi(t) - m_\xi(t)\right] \equiv 0.$

Реализации центрированного случайного процесса $\overset{\circ}{\xi}(t)$ представляют собой отклонения случайного процесса $\xi(t)$ от его математического ожидания. Значения отклонений могут иметь как положительные, так и отрицательные значения, а в среднем равны нулю. Как указывалось выше, дисперсия представляет собой неслучайную функцию, характеризующую степень разброса реализаций случайного процесса около его математического ожидания, т.е. степень разброса реализаций центрированного случайного процесса $\overset{\circ}{\xi}(t)$.

Математическое ожидание и дисперсия – важные, но недостаточные характеристики для описания основных свойств случайных процессов. В этом можно убедиться, обратившись к рисунку.



На рисунке изображены реализации двух случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$, математические ожидания и дисперсии которых равны, но внутренняя структура процессов совершенно различна. Первый процесс $X(t)$ имеет более «нервный» характер, $Y(t)$ – изменяется более «плавно». Но это не отражает ни математическое ожидание, ни дисперсия. Для описания динамики изменения случайных процессов вводится специальная характеристика – *корреляционная* (другой встречающийся термин *автокорреляционная*) функция. Она характеризует степень сходства между сечениями процесса $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

<u>Определение</u>. Функцией корреляции случайного процесса $\xi(t)$ называется математическое ожидание произведения сечений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2.

$$R_\xi(t_1,t_2)=M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2dF(x_1,t_1,x_2,t_2)\cdot$$

Она определяется двумерной функцией распределения $F(x_1,t_1;x_2,t_2)$ и в общем случае зависит от двух аргументов – t_1 и t_2. Эту функцию $R_\xi(t_1,t_2)$ называют также ***функцией автокорреляции***.

Очевидно, что для процесса $Y(t)$, изображенного на рисунке (*б*) выше, зависимость между сечениями случайного процесса будет более тесной, чем для $X(t)$, для которого эта зависимость затухает очень быстро по мере увеличения расстояния между сечениями. Для $Y(t)$ характерна большая предсказуемость реализаций. Можно с большой вероятностью утверждать, что если реализация процесса $Y(t)$ была в какой-то момент времени t больше его математического ожидания $m_Y(t)$, то и ее продолжение будет лежать выше кривой $m_Y(t)$. Между сечениями процесса $Y(t)$: $Y(t_1)$ и $Y(t_2)$ практически нет вероятностной зависимости при достаточном удалении сечений.

Функцией ковариации (***ковариационной функцией***) случайного процесса $\xi(t)$ называется математическое ожидание произведения центрированных сечений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2.

$$K_\xi(t_1,t_2)=\mathrm{cov}(\xi(\mathrm{t}_1),\xi(t_2))=M\{(\xi(t_1)-m_\xi(t_1))(\xi(t_2)-m_\xi(t_2))\}.$$

$K_\xi(t_1,t_2)$ характеризует не только степень линейной зависимости между двумя сечениями, но и разброс этих сечений относительно математического ожидания $m_\xi(t)$.

Нетрудно показать, что

$$K_\xi(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) - m_\xi(t_1)m_\xi(t_2)\,.$$

При $t_1 = t_2 = t$ функция ковариации совпадает с дисперсией $D_\xi(t)$ случайного процесса $K_\xi(t,t) = D_\xi(t) = \sigma_\xi^{\,2}(t)$.

Величину

$$r_\xi(t_1,t_2) = \frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)} = \frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)K_\xi(t_2,t_2)}}$$

называют ***коэффициентом корреляции случайного процесса*** или нормированной функцией ковариации. В общем случае коэффициент корреляции является мерой линейной зависимости двух сечений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ случайного процесса, то есть он показывает с какой точностью одна из случайных величин $\xi(t_1)$ может быть линейно выражена через другую $\xi(t_2)$.

Для двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ вводится понятие взаимной функции корреляции или функции ***кросс-корреляции***

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2) = M\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}\,.$$

Она характеризует степень сходства сечения одного случайного процесса с различными сечениями другого случайного процесса.

Взаимной функцией ковариации двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называется неслучайная функция $K_{\xi\eta}(t_1,t_2) = M\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\,\overset{\circ}{\eta}(t_2)\right\}$.

Некоррелированными называют два случайных процесса, взаимная ковариационная функция которых тождественно равна нулю. ***Коррелированными*** в противоположном случае.

Совместная корреляционная функция двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяется как матричная функция

$$\begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(t_1,t_2) & R_{\xi\eta}(t_1,t_2) \\ R_{\eta\xi}(t_1,t_2) & R_{\eta\eta}(t_1,t_2) \end{bmatrix},$$

все элементы которой определены выше.

Пример 3.4. Пусть задан случайный процесс $\xi(t) = U \cdot t$, $t \in T$, где U – некоторая случайная величина, с математическим ожиданием $m_U = 4$ и дисперсией $D_U = 10$. Найти дисперсию $D_\xi(t)$ и функцию ковариации случайного процесса $K_\xi(t_1,t_2)$.

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$m_\xi(t) = M\left[\xi(t)\right] = M\left[U\cdot t\right] = t\cdot M(U) = 4t.$$

Найдем центрированную функцию:

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t) = U\cdot t - 4t = (U-4)\cdot t.$$

Откуда $\overset{\circ}{\xi}(t_1) = (U-4)\cdot t_1, \overset{\circ}{\xi}(t_2) = (U-4)\cdot t_2.$

Находим функцию ковариации

$$K_\xi(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right] = M\left[(U-4)t_1(U-4)t_2\right] =$$

$$= t_1\cdot t_2 M\left[(U-4)^2\right] = t_1\cdot t_2 D_U = 10t_1\cdot t_2.$$

Можем найти дисперсию, для чего положим $t_1 = t_2 = t$:

$$K_\xi(t,t) = D_\xi(t) = 10t^2.$$

Пример 3.5. Пусть случайный процесс $\xi(t) = \varphi(t)V$, $t\in T$, где V – некоторая случайная величина, с математическим ожиданием m_V и дисперсией D_V, а $\varphi(t)$ – неслучайная функция. Найти математическое ожидание $m_\xi(t)$, дисперсию $D_\xi(t)$ и функцию корреляции случайного процесса $R_\xi(t_1,t_2)$.

Решение. Согласно определениям имеем:

$$m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = M\{\varphi(t)V\} = \varphi(t)M\{V\} = m_V\varphi(t),$$

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = M\{V\varphi(t_1)V\varphi(t_2)\} = \varphi(t_1)\varphi(t_2)M\{V^2\} = \varphi(t_1)\varphi(t_2)\left(D_V + m_V{}^2\right),$$

$$K_\xi(t_1,t_2) = M\{(\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))\} = R_\xi(t_1,t_2) - m_\xi(t_1)m_\xi(t_2) =$$

$$= \varphi(t_1)\varphi(t_2)\left(D_V + m_V{}^2\right) - m_V{}^2\varphi(t_1)\varphi(t_2) = D_V\varphi(t_1)\varphi(t_2),$$

$$D_\xi(t) = K_\xi(t,t) = D_V\varphi^2(t).$$

Пример 3.6. Найти нормированную функцию ковариации случайного процесса $\xi(t)$ по его известной функции ковариации случайного процесса $K_\xi(t_1,t_2) = 5\cos(t_2 - t_1)$.

Решение. Искомая нормированная ковариационная функция будет иметь вид:

$$r_\xi(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)}=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)K_\xi(t_2,t_2)}}=$$

$$=\frac{5\cos(t_2-t_1)}{\sqrt{5\cos(t_1-t_1)5\cos(t_2-t_2)}}=\cos(t_2-t_1)$$

Свойства функции корреляции

Рассмотрим основные свойства функции корреляции $R_\xi(t_1,t_2)$ случайного процесса $\xi(t)$.

1. Функция корреляции является симметрической функцией своих аргументов, т.е. при перестановке аргументов корреляционная функция не изменяется $R(t_1,t_2)=R(t_2,t_1)$, для стационарных процессов функция корреляции – чётная функция $R(\tau)=R(t_2-t_1)=R(t_1-t_2)=R(-\tau)$.

2. Для корреляционной функции выполняется неравенство:

$$\left|R(t_1,t_2)\right|\le\sqrt{R(t_1,t_1)R(t_2,t_2)}\ .$$

Для стационарных случайных процессов это неравенство означает, что в нуле функция корреляции достигает наибольшего значения.

3. Если случайный процесс задан соотношением $\xi(t)=\varphi(t)\cdot\eta(t)$, где $\varphi(t)$ – неслучайная функция, $\eta(t)$ – случайный процесс, то

$$R_\xi(t_1,t_2)=\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot R_\eta(t_1,t_2).$$

4. Если случайный процесс задан соотношением $\zeta(t)=\xi(t)+\eta(t)$, т.е. является суммой двух случайных процессов, тогда его корреляционная функция равна сумме корреляционных функций слагаемых $R_\xi(t_1,t_2);R_\eta(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функции $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$, которая прибавляется дважды с разным порядком следования аргументов:

$$R_\zeta(t_1,t_2)=R_\xi(t_1,t_2)+R_\eta(t_1,t_2)+R_{\xi\eta}(t_1,t_2)+R_{\eta\xi}(t_1,t_2)\ .$$

5. Если случайный процесс задан соотношением $\zeta(t)=\varphi(t)\xi(t)+\psi(t)\eta(t)$, то

$$R_\zeta(t_1,t_2)=\varphi(t_1)\varphi(t_2)R_\xi(t_1,t_2)+\psi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdot R_\eta(t_1,t_2)+$$
$$+\varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdot R_{\xi\eta}(t_1,t_2)+\varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdot R_{\eta\xi}(t_1,t_2)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – неслучайные функции.

6. Если для стационарного случайного процесса при $\tau \to \infty$ случайные величины $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau)$ стохастически независимы, то

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} M\left\{\xi(t)\xi(t+\tau)\right\} = M\xi(t)M\xi(t+\tau) = m_\xi^2 = R(\infty)\cdot$$

Тогда среднее значение процесса можно выразить через его функцию корреляции $m_\xi = \sqrt{R(\infty)}$.

Далее, используя определение дисперсии процесса, запишем

$$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0) - m_\xi^2 = R_\xi(0) - R_\xi(\infty)\,.$$

Таким образом, среднее значение и дисперсию стационарного случайного процесса можно найти, если известна его функция корреляции.

7. Функция корреляции случайного процесса является положительно определённой, то есть для $\forall n$ произвольных действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, выполняется неравенство

$$\sum_{j,k} R_\xi(t_j, t_k)\lambda_j\lambda_k = M\left\{\sum_{j,k} \xi(t_j)\xi(t_k)\lambda_j\lambda_k\right\} = M\left\{\sum_k \xi(t_k)\lambda_k\right\}^2 \ge 0\,\cdot$$

8. Корреляционная функция суммы случайных процессов равна сумме корреляционных функций слагаемых плюс сумма всех взаимных корреляционных функций этих слагаемых.

Это означает, что для $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)$

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sum_i R_{\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i\ne j} R_{\xi_i\xi_j}(t_1, t_2)\,\cdot$$

Для некоррелированных слагаемых с нулевыми средними значениями имеем

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sum_i R_{\xi_i}(t_1, t_2)\,\cdot$$

Свойства функции ковариации

1. При перестановке аргументов ковариационная функция не изменяется (свойство симметрии) $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t_2, t_1)$.

2. Прибавление к случайному процессу $\xi(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет его ковариационной функции:

если $\xi_2(t) = \xi_1(t) + \varphi(t)$, то $K_{\xi_2}(t_1, t_2) = K_{\xi_1}(t_1, t_2)$.

3. При умножении случайной функции $\xi(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее ковариационная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$:

если $\xi_2(t)=\xi_1(t)\cdot\varphi(t)$, то $K_{\xi_2}(t_1,t_2)=K_{\xi_1}(t_1,t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2)$.

4. Абсолютное значение ковариационной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений:

$$\left|K_\xi(t_1,t_2)\right|\le\sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}.$$

5. Функция ковариации случайного процесса является положительно определённой,

$$\iint\limits_{(B)(B)} a(t_1)a(t_2)K_\xi(t_1,t_2)\,dt_1dt_2\ge 0,$$

где $a\left(t\right)$ – произвольная функция аргумента *t*, *B* – произвольное подмножество множества *T*, на котором определен случайный процесс $\xi(t)$.

Пример 3.7. Пусть случайный процесс $\xi(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i\,\varphi_i\,(t),\ t\in T$, где Y_i – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями m_i и дисперсиями D_i, а $\varphi_i(t)$ – заданные на *T* детерминированные функции. Найти $m_\xi(t)$, $D_\xi(t)$ *и* $R_\xi(t,s)$.

Решение. Согласно определениям имеем

$$m_\xi(t)=M\{\xi(t)\}=M\left\{\sum_{i=1}^{n}Y_i\,\varphi_i\,(t)\right\}=\sum_{i=1}^{n}M\{Y_i\}\varphi_i\,(t)=\sum_{i=1}^{n}m_i\varphi_i\,(t),$$

$$R_\xi(t_1,t_2)=M\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=M\left\{\sum_{i=1}^{n}Y_i\,\varphi_i\,(t_1)\sum_{i=1}^{n}Y_i\,\varphi_i\,(t_2)\right\}=M\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\,Y_i\,\varphi_i\,(t_1)\varphi_i\,(t_2)\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}M\{Y_iY_j\}\varphi_i\,(t_1)\varphi_i\,(t_2)=\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}\sum_{i=1}^{n}M\{Y_i\}M\{Y_i\}\varphi_i\,(t_1)\varphi_i\,(t_2)+\sum_{i=1}^{n}M\{Y_i^{\,2}\}\varphi_i\,(t_1)\varphi_i\,(t_2)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}m_im_j\,\varphi_i\,(t_1)\varphi_i\,(t_2)+\sum_{i=1}^{n}\left(D_i+m_i^{\,2}\right)\varphi_i\,(t_1)\varphi_i\,(t_2),$$

$$K_\xi(t_1,t_2)=R_\xi(t_1,t_2)-m_\xi(t_1)m_\xi(t_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_im_j\,\varphi_i\,(t_1)\varphi_i\,(t_2)+\sum_{i=1}^{n}\left(D_i+m_i^{\,2}\right)\varphi_i\,(t_1)\varphi_i\,(t_2)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}m_i\varphi_i\,(t_1)\sum_{i=1}^{n}m_i\varphi_i\,(t_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}D_i\varphi_i\,(t_2)\varphi_j\,(t_2),$$

$$D_\xi(t)=K_\xi(t,t)=\sum_{i=1}^{n}D_i\varphi_i^{\,2}\,(t_2).$$

Задачи по теме 3 для самостоятельного решения

1. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса

$$\xi(t) = U\sin 3t;$$

где U – случайная величина, $m_U = 10, D_U = 0,2$.

2. Найти нормированную взаимную ковариационную функцию случайных процессов

$$\xi(t) = Ut \text{ и } \eta(t) = U(t+1);$$

где U – случайная величина, $D_U = 10$.

3. Известны математические ожидания $m_\xi(t) = 2t+1, m_\eta(t) = t-1$ и ковариационные функции $K_\xi(t_1,t_2) = t_1 \cdot t_2, K_\eta(t_1,t_2) = e^{-4(t_2-t_1)^2}$ некоррелированных случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию случайного процесса $\varsigma(t) = \xi(t) + \eta(t)$.

4. Найти математическое ожидание $m_\xi(t)$, ковариационную функцию $K_\xi(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\xi(t)$ случайного процесса $\xi(t) = U\sin t + V\cos t$, где U, V – некоррелированные случайные величины, $m_U = 1, m_V = 8, D_U = D_V = 4$.

5. Заданы случайные функции $\xi(t) = U\cos t + V\sin t$, $\eta(t) = U\cos 3t + V\sin 3t$, где U, V – некоррелированные случайные величины, $m_U = 0, m_V = 0, D_U = D_V = 5$. Найти нормированную взаимную ковариационную функцию.

6. Найти математическое ожидание $m_\xi(t)$, ковариационную функцию $K_\xi(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\xi(t)$ случайного процесса

$$\xi(t) = Usht - 3e^{-3t}V + t^2,$$

где U, V – некоррелированные случайные величины, $U \sim R(-3;3), V \sim (1;2)$.

7. Найти ковариационную функцию $K_\varsigma(t_1,t_2)$ и дисперсию $D_\varsigma(t)$, если $\xi(t), \eta(t)$ – некоррелированные случайные процессы,

$\varsigma(t) = t^2\xi(t) - \eta(t)\sin 2t + \cos 2t$, и даны ковариационные функции $K_\xi(t_1,t_2) = 1 + \cos(t_2 - t_1); K_\eta(t_1,t_2) = \exp\left(-|t_2 - t_1|\right)$.

8. $\xi(t), \eta(t)$ – центрированные случайные процессы; $K_\xi(t_1,t_2) = 4\sin t_1 \sin t_2; K_\eta(t_1,t_2) = 81\sin t_1 \sin t_2; K_{\xi,\eta}(t_1,t_2) = 18\sin t_1 \sin t_2.$ Найти математическое ожидание $m_\varsigma(t)$, ковариационную функцию $K_\varsigma(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\varsigma(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\varsigma(t_1,t_2)$ случайного процесса $\varsigma(t) = \sin 4t + e^{-2t}\xi(t) + e^{-t}\eta(t)$.

4. Стационарные случайные процессы

Важным классом случайных процессов являются стационарные случайные процессы, т.е. процессы, которые не изменяют свои характеристики с течением времени. Они имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения. К таким процессам относятся: колебания самолета при «автопилоте», колебания напряжения в электрической цепи и т.д.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***стационарным в узком смысле или строго стационарным***, если его конечномерная функция распределения инвариантна относительно сдвига всех моментов времени t_i, i=1,2,…n на одну и ту же величину τ.

$$F_\xi(x_1, t_1, \cdots, x_n, t_n) = F_\xi(x_1, t_1 + \tau, \cdots, x_n, t_n + \tau),$$

$$p_\xi(x_1, t_1, \cdots, x_n, t_n) = p_\xi(x_1, t_1 + \tau, \cdots, x_n, t_n + \tau), \forall\tau,\ n = 1, 2, \cdots.$$

Другими словами, статистические (вероятностные) свойства стационарного случайного процесса не зависят от начала наблюдения. Для стационарного процесса $\xi(\omega, t)$ смещение начала момента отсчета времени не меняет его функцию распределения.

При n = 1, из условия стационарности следует

$$p(x, t) = p(x, t + \tau).$$

Полагая $t = -\tau$, получим

$$p(x, t) = p(x),$$

то есть одномерное распределение стационарного случайного процесса не зависит от времени. А одномерное распределение определяет среднее значение и дисперсию случайного процесса, следовательно, для строго стационарного случайного процесса среднее и дисперсия не зависят от времени

$$m_\xi(t) = m_\xi = \text{const},$$

$$D_\xi(t) = \sigma^2 = \text{const}.$$

При $n = 2$, из условия стационарности, получим равенство:

$$p(x_1, t_1, x_2, t_2) = p(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau),$$

полагая в котором $\tau = -t$, запишем

$$p(x_1, t_1, x_2, t_2) = p(x_1, x_2, t_2 - t_1),$$

то есть двумерное распределение зависит лишь от разности моментов времени, следовательно, функция корреляции стационарного случайного процесса зависит только от одного аргумента

$$R_\xi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = R_\xi(t_2 - t_1)\cdot$$

Случайный процесс называется ***стационарным в широком смысле***, если его среднее значение и дисперсия не зависят от времени, а функция корреляции зависит лишь от разности моментов времени. Т.е. выполняются свойства:

1. $m_\xi(t) = M\left[\xi(t)\right] = M\left[\xi(0)\right] = const$.

2. $D_\xi\left(t\right) = const$.

3. $R_\xi\left(t_1, t_2\right) = R_\xi\left(t_2 - t_1\right) = R\left(\tau\right)$, т.е. $R_\xi\left(t_1, t_2\right)$ зависит от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

4. $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t_2 - t_1) = K(\tau)$, т.е. $K_\xi(t_1, t_2)$ зависит от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

5. $D_{\xi(t)} = K_\xi(t, t) = K_\xi(t - t) = K_\xi(0)$.

Свойства ковариационной функции стационарного случайного процесса

1. Ковариационная функция стационарного случайного процесса есть четная функция: $K_\xi\left(\tau\right) = K_\xi\left(-\tau\right)$.

2. Абсолютное значение ковариационной функции стационарного случайного процесса не превышает ее значения в начале координат: $\left|K_\xi\left(\tau\right)\right| \le K_\xi\left(0\right)$.

Нормированной ковариационной функцией стационарного случайного процесса называют неслучайную функцию аргумента, определяемую по формуле:

$$r_\xi(\tau) = \frac{K_\xi(\tau)}{K_\xi(0)}\cdot$$

Свойства нормированной ковариационной функции стационарного случайного процесса

1. Абсолютное значение нормированной ковариационная функции стационарного случайного процесса не превышает единицы: $|r_\xi(\tau)| = \left|\frac{K_\xi(\tau)}{K_\xi(0)}\right| \le \frac{K_\xi(0)}{K_\xi(0)} = 1.$

2. При $\tau = 0$ нормированная ковариационная функция равна единице: $r_\xi(\tau) = \frac{K_\xi(0)}{K_\xi(0)} = 1.$

Стационарно связанными называют две случайные функции $\xi(t), \eta(t),$ если их взаимная ковариационная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\xi\eta}(t_2 - t_1) = K_{\xi\eta}(\tau).$$

Взаимная ковариационная функция стационарно связанных случайных процессов обладает следующим свойством: $K_{\xi\eta}(\tau) = K_{\xi\eta}(-\tau)$.

Теорема 1. Ковариационная функция производной $\xi'(t)$ дифференцируемого стационарного случайного процесса $\xi(t)$ равна второй производной от ее ковариационной функции, взятой со знаком минус: $K_{\xi'}(\tau) = -K''_\xi(\tau)$.

Теорема 2. Взаимная ковариационная функция дифференцируемого стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и ее производной $\xi'(t)$ равна первой производной от ковариационной функции $K_\xi\left(\tau\right)$, взятой со своим (противоположным) знаком, если индекс ξ' стоит на втором (первом) по порядку месте: $K_{\xi\xi'}(\tau) = K'_\xi(\tau)$ $\left(K_{\xi'\xi}(\tau) = -K'_\xi(\tau)\right)$.

Т.к. взаимная ковариационная функция $K_{\xi\xi'}(\tau)$ зависти только от τ, то стационарный случайный процесс и его производная стационарно связаны.

Теорема 3. Ковариационная функция интеграла $\eta(t)=\int\limits_0^t \xi(s)ds$ от стационарного случайного процесса $\xi(t)$, вычисляется по формуле:

$$K_\eta(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)K_\xi(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)K_\xi(\tau)d\tau+\int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)K_\xi(\tau)d\tau .$$

Следствие. Дисперсия интеграла $\eta(t)=\int\limits_0^t \xi(s)ds$ от стационарного случайного процесса $\xi(t)$, вычисляется по формуле: $D_\eta(t)=2\int\limits_0^t (t-\tau)K_\xi(\tau)d\tau$.

Пример 4.1. Пусть задан случайный процесс $\xi(t)=\cos(t+\varphi)$, где φ – случайная величина, $\varphi\sim R(0,2\pi)$. Доказать, что $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс.

Решение. Математическое ожидание процесса

$$m_\xi=M(\cos(t+\varphi))=M(\cos t\cos\varphi-\sin t\sin\varphi)=$$
$$=M(\cos t\cos\varphi)-M(\sin t\sin\varphi)=\cos t\cdot M(\cos\varphi)-\sin t\cdot M(\sin\varphi).$$

Найдем $M(\cos\varphi)$ и $M(\sin\varphi)$, так как $\varphi\sim R(0,2\pi)$, то функция плотности для равномерно распределенной случайной величины: $p_\xi(x)=\dfrac{1}{2\pi}$, при $x\in[0,2\pi]$, тогда $M(\cos\varphi)=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{1}{2\pi}\cos\varphi d\varphi=0$ и $M(\sin\varphi)=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{1}{2\pi}\sin\varphi d\varphi=0$, откуда следует, что $m_\xi(t)=0$.

Найдем ковариационную функцию:

$$K_\xi(t_1,t_2)=\mathrm{cov}(\xi(t_1),\xi(t_2))=M\{(\xi(t_1)-m_\xi(t_1))(\xi(t_2)-m_\xi(t_2))\}$$
$$\xi(t_1)-m_\xi(t_1)=\xi(t_1),\ \text{и}\ \xi(t_2)-m_\xi(t_2)=\xi(t_2).$$

То,

$$M\{(\xi(t_1)-m_\xi(t_1))(\xi(t_2)-m_\xi(t_2))\}=M\{\cos(t_1+\varphi)\cdot\cos(t_2+\varphi)\}.$$

Используя известные тригонометрические формулы получаем:

$$M\{\cos(t_1+\varphi)\cdot\cos(t_2+\varphi)\}=M\left\{\frac{\cos(t_2-t_1)+\cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}.$$

В силу того, что

$$M\left\{\frac{\cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}=0.$$

Окончательно имеем:

$$K_\xi(t_1,t_2)=M\left\{\frac{\cos(t_2-t_1)}{2}\right\}.$$

Таким образом, получили, что математическое ожидание случайного процесса постоянно $m_\xi(t)=0$ при всех значениях аргумента, а ковариационная функция зависит только от разности аргументов. Окончательно, $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс.

Пример 4.2. Задана ковариационная функция $K_\xi(\tau)=\frac{1}{2}\cos\tau$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти нормированную ковариационную функцию.

Решение. Используя определение нормированной ковариационной функции стационарного случайного процесса, найдем

$$r_\xi(\tau)=\frac{K_\xi(\tau)}{K_\xi(0)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\tau}{\frac{1}{2}\cos 0}=\cos\tau.$$

Пример 4.3. Заданы два стационарных случайных процесса $\xi(t)=\cos(t+\varphi),\eta(t)=\sin(t+\varphi),$ где φ – случайная величина, $\varphi\sim R(0,2\pi)$. Доказать, что $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – стационарно связаны.

Решение. В примере 1 было показано, что $m_\xi(t)=0$, аналогично можно показать и для $\eta(t)$: $m_\eta(t)=0$. Центрированные случайные процессы, для $\xi(t)$ и $\eta(t)$:

$$\overset{\circ}{\xi}(t)=\cos(t+\varphi),\overset{\circ}{\eta}(t)=\sin(t+\varphi).$$

Взаимная ковариационная функция:

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\eta}(t_2)\right\}=M\left\{\cos(t_1+\varphi)\cdot\sin(t_2+\varphi)\right\}=$$

$$=M\left\{\frac{\sin(t_2-t_1)+\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}.$$

Найдем значение

$$M\left\{\frac{\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\} = M\left\{\frac{\sin(t_2+t_1)\cos 2\varphi+\cos(t_2+t_1)\sin 2\varphi}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\sin(t_2+t_1)}{2} M\cos 2\varphi + \frac{\cos(t_2+t_1)}{2} M\sin 2\varphi;$$

$$M\left(\cos 2\varphi\right) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi}\cos 2\varphi d2\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos 2\varphi d2\varphi = 0;$$

$$M\left(\sin 2\varphi\right) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi}\sin 2\varphi d2\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2\varphi d2\varphi = 0.$$

Окончательно получаем: $M\left\{\frac{\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\} = 0$.

Тогда $K_{\xi\eta}(t_1,t_2) = M\left\{\frac{\sin(t_2-t_1)}{2}\right\} = \frac{\sin(t_2-t_1)}{2}$, т.е. взаимная ковариационная функция зависит только от разности аргументов, следовательно, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – стационарно связаны.

Пример 4.4. Пусть задана ковариационная функция $K_\xi(\tau) = 2e^{-0,5\tau^2}$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти ковариационную функцию и дисперсию производной $\xi'(t)$.

Решение. Согласно теореме 1 $K_{\xi'}(\tau) = -K''_\xi(\tau)$, продифференцируем дважды данную ковариационную функцию: $K_{\xi'}(\tau) = -K''_\xi(\tau) =$ $= -\left(2e^{-0,5\tau^2}\right)'' = 2e^{-0,5\tau^2}\left(1-\tau^2\right)$, откуда дисперсия $D_{\xi'}(\tau=0) = K_{\xi'}(0) = 2$.

Пример 4.5. Задана ковариационная функция $K_\xi(\tau) = e^{-|\tau|}\left(1+|\tau|\right)$, стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти взаимную ковариационную функцию $K_{\xi\xi'}(\tau)$ случайного процесса $\xi(t)$ и его производной.

Решение. Используем формулу $K_{\xi\xi'}(\tau) = K'_\xi(\tau)$.

1. Пусть $\tau \geq 0$, тогда $|\tau| \geq \tau$ и $K_{\xi}(\tau) = e^{-\tau}(1+\tau)$, $K_{\xi}^{'}(\tau) = -\tau e^{-\tau}$, окончательно имеем при $\tau \geq 0$: $K_{\xi\xi'}(\tau) = -\tau e^{-\tau}$.

2. Пусть $\tau < 0$, тогда $|\tau| = -\tau$ и $K_{\xi}(\tau) = e^{\tau}(1-\tau)$, $K_{\xi}^{'}(\tau) = -\tau e^{\tau}$, окончательно имеем при $\tau < 0$: $K_{\xi\xi'}(\tau) = -\tau e^{\tau}$.

Пример 4.6. Задана ковариационная функция $K_{\xi}(\tau) = \dfrac{1}{1+\tau^2}$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти дисперсию интеграла $\eta(t) = \int\limits_0^t \xi(s)ds$.

Решение. По следствию из теоремы 3 дисперсия интеграла $\eta(t) = \int\limits_0^t \xi(s)ds$ от стационарного случайного процесса $\xi(t)$, вычисляется по формуле: $D_{\eta}(t) = 2\int\limits_0^t (t-\tau)K_{\xi}(\tau)d\tau$.

$$D_{\eta}(t) = 2\int\limits_0^t (t-\tau)\frac{1}{1+\tau^2}d\tau = 2t\int\limits_0^t \frac{1}{1+\tau^2}d\tau - \int\limits_0^t \frac{2\tau}{1+\tau^2}d\tau = 2t\operatorname{arctg}t - \int\limits_0^t \frac{d\left(\tau^2+1\right)}{1+\tau^2} =$$
$$= 2t\operatorname{arctg}t - \ln\left(t^2+1\right).$$

Очевидно, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, но для гауссовских процессов (которые будут рассмотрены ниже) верно и обратное утверждение.

Эргодические случайные процессы

Большинство стационарных случайных процессов обладают важным для практики эргодическим свойством. Суть которого в том, что по одной, достаточно длинной, отдельной реализации можно судить о всех свойствах процесса также как по любому количеству реализаций. Другими словами отдельные характеристики стационарного случайного процесса, могут быть определены как соответствующие средние по времени для одной реализации достаточно большой продолжительности. Таким образом для стационарных случайных процессов кроме средних статистических характеристик вводятся ещё характеристики, средние по времени.

Выберем k-ю реализацию – $\xi^{(k)}(t)$ случайного процесса и будем наблюдать её в течение времени $2T$. Рассмотрим среднее по времени значение этой реализации

$$\left\langle \xi^{(k)} \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)dt = \widetilde{m}_{\xi} \cdot$$

Здесь символ $\langle\ \rangle$ обозначает усреднение по времени, в отличие от символа математического ожидания M – усреднения по распределению, или статистического усреднения. Это ***среднее по времени*** можно рассматривать как постоянную составляющую случайного процесса $\xi(t)$. Аналогично можно определить ***усреднённую по времени функцию корреляции для стационарного процесса***

$$\widetilde{R}_{\xi}(\tau) = \left\langle \xi^{(k)}(t)\xi^{(k)}(t+\tau) \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\xi^{(k)}(t+\tau)dt \cdot$$

Заметим, что не для любого стационарного случайного процесса, приведённые средние по времени характеристики имеют конечные значения. Но даже если такие характеристики существуют, то они могут быть различны для разных реализаций случайного процесса. Исключение составляют эргодические процессы, для которых эти характеристики одинаковы для всех реализаций и, кроме того, совпадают с соответствующими статистическими средними.

Определение. Случайный процесс будем называть ***эргодическим***, если любая его статистическая характеристика, равна соответствующей характеристике, полученной усреднением по времени одной единственной реализации.

Из эквивалентности двух способов усреднения эргодического случайного процесса по распределению и по времени следует, что нет необходимости изучать свойства всего ансамбля реализаций, но достаточно одной реализации для определения всех характеристик рассматриваемого процесса.

Необходимыми и достаточными условиями эргодичности случайного процесса являются: ***строгая стационарность*** и, так называемая, ***метрическая транзитивность***, состоящая в том, что любая часть ансамбля реализаций случайного процесса, вероятностная мера которого отлична от 0 или 1, уже не является строго стационарным случайным процессом.

Рассмотрим пример строго стационарного, но неэргодического процесса. Пусть $\xi(t) = \eta(t)+\zeta$, где $\eta(t)$ – эргодический случайный процесс, а ζ – некоторая случайная величина. Очевидно, процесс $\xi(t)$ является строго стационарным, но его средние по времени характеристики различны для различных реализаций, поэтому такой случайный процесс будет неэргодическим.

Итак, если случайный процесс эргодический, то любая его реализация определяет свойства всего ансамбля и поэтому результат усреднения по времени, выполненный по одной реализации, совпадает с соответствующей статистической характеристикой процесса, то есть

$$m_\xi(t) = \widetilde{m}_\xi\,,\ R_\xi(\tau) = \widetilde{R}_\xi(\tau)\,.$$

Можно ввести и другие средние по времени характеристики эргодического процесса. Так, среднее время пребывания процесса ниже уровня x совпадает с вероятностью того, что значения случайного процесса в любой момент времени меньше, чем x, то есть

$$\widetilde{F}(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C\left(x - \xi^{(k)}(t)\right)dt = P\{\xi(t) < x\}\,,$$

здесь $C(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

Одномерная характеристическая функция определяется как среднее по времени значение процесса $\exp\{i\xi^{(k)}(t)u\}$, то есть в виде

$$\widetilde{g}_\xi(u) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp\left\{i\xi^{(k)}(t)u\right\}dt\,.$$

Основное преимущество средних по времени характеристик состоит в том, что для их вычисления требуется наблюдение за одной единственной реализацией, чем чаще всего и располагает исследователь.

Задачи по теме 4 для самостоятельного решения

1. Задана случайный процесс $X(t) = \cos\left(t + \varphi\right)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $\left(0, 2\pi\right)$. Доказать, что $X(t)$ – стационарный процесс.

2. Является ли стационарным случайный процесс $X(t) = U\sin t + V\cos t$, где U, V – некоррелированные случайные величины $m_U = m_V = 0, D_U = D_V = D$.

3. Известна ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ стационарного процесса $\xi(t)$. Доказать, что если $\eta(t) = a \cdot \xi(t)$, то $K_\eta(\tau) = a^2 K_\xi(\tau)$.

4. Заданы два стационарных случайных процесса $X(t) = \cos\left(t + \varphi\right), Y(t) = \sin\left(t + \varphi\right)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $\left(0, 2\pi\right)$. Доказать, что эти функции стационарно связаны.

5. Доказать, что случайный процесс

$$X(t) = (U+2)\cos 7t - V\sin 7t, U \sim N\left(-2, \sqrt{3}\right), V \sim R\left(-3, 3\right)$$

стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания и ковариационной функции.

6. Дана ковариационная функция $K_\xi(\tau) = \exp\left(-3|\tau|\right)\left(1+\sin 3|\tau|\right)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти ковариационную функцию, дисперсию производной $\xi'(t)$, взаимную ковариационную функцию $k_{\xi\xi'}(\tau)$.

7. Дана ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти ковариационную функцию $K_\eta(t_1, t_2)$, дисперсию $D_\eta(t)$ случайного процесса $\eta(t) = \int\limits_0^t \xi(s)ds$, взаимную ковариационную функцию $k_{\xi\eta}\left(t_1, t_2\right)$ (в случае б) – лишь при $0 \le t_2 \le t_1$.
а) $k_\xi\left(\tau\right) = 72/\left(1+9\tau^2\right)$; б) $k_\xi\left(\tau\right) = e^{-\tau}$.

5. Спектральная плотность

Информацию о случайном процессе, которую дают корреляционная и ковариационная функции, можно получить и через так называемую ***спектральную плотность*** $S_\xi(\omega)$, которая широко используется для стационарных случайных процессов.

Пусть $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс, $R_\xi(\tau)$ его корреляционная функция, интегрируемая абсолютно на интервале $(-\infty;+\infty)$, тогда преобразование Фурье:

$$S_\xi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$$

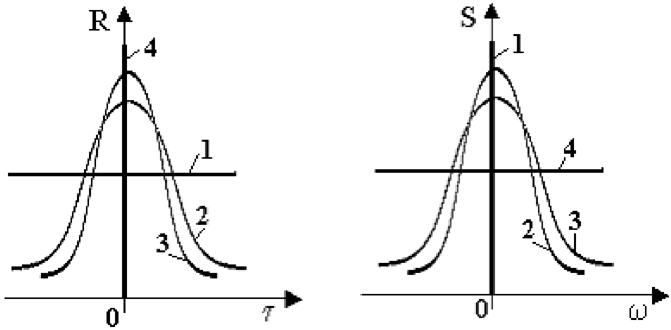
называется ***спектральной плотностью*** случайного процесса $\xi(t)$. Чтобы определить корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ по известной спектральной плотности $S_\xi(\omega)$ используется обратное преобразование Фурье:

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega.$$

Спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ – это частотная функция, характеризующая спектральный (частотный) состав процесса, и представляет собой частотную характеристику для средних значений квадратов амплитуд гармоник, на которые может быть разложен случайный процесс. По своему физическому смыслу спектральная плотность есть величина, которая пропорциональна средней мощности процесса в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$.

Или иначе: спектральная плотность описывает мощность случайного процесса, приходящуюся, на заданный интервал частот, поэтому часто эту функцию называют ***спектральной плотностью мощности*** случайного процесса.

На нижеследующих рисунках графики спектральных плотностей и корреляционных функций для различных случайных процессов:



Линии 4 соответствуют чисто случайному процессу, когда связь между последующими значениями $\xi(t)$ совсем отсутствует. Такой случайный процесс называется ***белым шумом***, т.е. при $\tau \neq 0$, $R_\xi(\tau) = 0$, а $S_\xi(\omega) = const$.

Свойства спектральной плотности

1. $S_\xi(\omega) = S_\xi(-\omega)$ – четность спектральной плотности.

2. $S_\xi(\omega) \geq 0$ – неотрицательность.

3. Если положить в выражении $R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega$;

$\tau = 0$, то получим: $R_\xi(0) = D_\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega$.

Пример 5.1. Корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$ задана в виде $R_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha|\tau|}$, где $|\tau| = \begin{cases} \tau, \tau \geq 0 \\ -\tau, \tau < 0 \end{cases}$. Определить спектральную плотность соответствующего случайного процесса.

Решение. Спектральная плотность определяется по формуле:

$$S_\psi(w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-iw\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_\xi e^{-\alpha|\tau|} e^{-iw\tau} d\tau .$$

Исходя из условий задачи, представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$S_\xi(w)=\frac{D_\xi}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha\tau-iw\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau-iw\tau}d\tau\right].$$

Вычислим

$$S_\xi(w)=\frac{D_\xi}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\alpha-iw)}e^{\alpha\tau-iw\tau}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{D_\xi}{2\pi}\cdot\frac{1}{(-\alpha-iw)}e^{-\alpha\tau-iw\tau}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{D_\xi}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{(\alpha-iw)}-\cdot\frac{1}{(-\alpha-iw)}\right]=$$

$$=\frac{D_\xi}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{(\alpha-iw)}+\cdot\frac{1}{(\alpha+iw)}\right]=\frac{D_\xi\alpha}{\pi(\alpha^2+w^2)}.$$

Задачи по теме 5 для самостоятельного решения

1. $k_\xi(\tau)$ – ковариационная функция стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти его спектральную плотность.

а) $k_\xi(\tau)=64\frac{\sin^2 4\tau}{\tau^2}$; б) $k_\xi(\tau)=12\exp\left(-4|\tau|\right)\left(1+4|\tau|\right)$.

2. Найти ковариационную функцию стационарного случайного процесса $\xi(t)$, если его спектральная плотность $S_\xi(w)$:

а) $S_\xi(w)=\begin{cases}1-\frac{\omega^2}{16}, & \text{при}\,|\omega|\le 4\\ 0 & ,\ \text{при}\,|\omega|>4\end{cases}$;

b) $S_\xi(w)=\frac{10}{\pi}\left(\frac{1}{4+(3-\omega)^2}+\frac{1}{4+(3+\omega)^2}\right)$.

6. Сходимость, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов

Понятие сходимости является базовым не только в математическом анализе, но и в стохастическом (вероятностном) анализе. *Стохастический* анализ – это раздел математики, в котором случайные функции изучают методами математического анализа. Теория стохастического анализа объединяет теорию пределов, дифференциального и интегрального исчисления и их непосредственное приложение.

В теории случайных процессов рассматривают различные виды сходимости и вследствие этого различные виды непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости. Наиболее удобно и просто ввести все эти понятия для процессов, удовлетворяющих условию $M\left\{\xi^2(t)\right\} < \infty$, так называемых процессов второго порядка, или гильбертовых процессов. Физически условие $M\left\{\xi^2(t)\right\} < \infty$ означает, что процесс имеет конечную мощность, что выполнимо для всех реальных процессов.

В теории вероятностей были рассмотрены следующие виды сходимости:

1. По вероятности: если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\lim\limits_{k\to\infty} P\left[\left|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)\right| > \varepsilon\right] = 0$.

2. В среднем квадратичном: если $\lim\limits_{k\to\infty} M\left[\left(\xi_k(\omega) - \xi(\omega)\right)^2\right] = 0$.

3. Почти наверное: если $P\left\{\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k(\omega) = \xi(\omega)\right\} = 1$.

4. По распределению (слабая сходимость): если $\lim\limits_{k\to\infty} F_{\xi_k} = F_\xi(x)$ во всех точках непрерывности функции распределения $F_\xi(x)$.

Мы будем использовать только сходимость в смысле среднего квадратичного, потому что оно является наиболее приемлемым с точки зрения приложений.

Сформулируем сходимость в среднем квадратичном для случайных процессов.

Определение 1. Последовательность $\xi_s(t)$ сходится к $\xi(t)$ в среднем квадратичном при $s \to s_0$, если $\lim\limits_{s\to s_0} M\left[\left(\xi_s(t) - \xi(t)\right)^2\right] = 0$.

Обозначение $\xi_s(t) \underset{s\to s_0}{\overset{\text{ср.кв.}}{\to}} \xi(t)$; или $\underset{s\to s_0}{\mathrm{l.i.m}}\, \xi_s(t) = \xi(t)$.

Непрерывность случайных процессов

Определение 2. Случайный процесс второго порядка $\xi(\omega, t)$, $t \in T$ (т.е. $M\left|\xi(\omega, t)\right|^2 < \infty$) называется ***непрерывным*** в точке $t = t_0$, если существует предел:

$$\lim_{t\to t_0} M\left[\left|\xi(\omega, t) - \xi(\omega, t_0)\right|^2\right] = 0,$$

т.е. случайный процесс сходится в точке $t = t_0$ к случайной величине $\eta(\omega) = \xi(\omega, t_0)$.

Определение 3. Говорят, что скалярный случайный процесс второго порядка $\xi(\omega, \mathrm{t})$, $t \in T$ ***непрерывен*** на *T*, если он непрерывен в каждой точке $t \in T$.

Пример 6.1. Покажем, что пуассоновский случайный процесс непрерывен.

Покажем его непрерывность в некоторой точке $t = t_0 \in T$.

$$M\left[\left|\xi(\omega,t) - \xi(\omega,t_0)\right|^2\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P\left[\left|\xi(\omega,t) - \xi(\omega,t_0)\right| = k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{[\lambda(t-t_0)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-t_0)} =$$

$$= \lambda(t-t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\left[\lambda(t-t_0)\right]^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Для дальнейшего упрощения полученного выражения найдем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\left[\lambda(t-t_0)\right]^{k-1}}{(k-1)!}$. Для этого проинтегрируем его почленно

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = xe^x .$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{d}{dx}(xe^x) = xe^x + e^x = e^x(x+1) \cdot$$

Таким образом,

$$M\left[\left|\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)\right|^2\right]=\lambda(t-t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}=$$
$$=\lambda(t-t_0)\left[\lambda(t-t_0)+1\right]\xrightarrow[t\to t_0]{}0,$$

и, согласно определению 1, пуассоновский процесс непрерывен в любой точке множества T и, следовательно, согласно определению 2, непрерывен на T.

Дифференцируемость случайного процесса

Определение 4. Случайный процесс второго порядка $\xi(\omega,t)$ $t\in T$ называется ***дифференцируемым в среднеквадратичном*** в точке $t=t_0$, если существует такая случайная величина $\xi^{'}(\omega,t_0)$, для которой

$$\lim_{t\to t_0}M\left[\left|\frac{\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)}{t-t_0}-\xi^{'}(\omega,t_0)\right|^2\right]=0\cdot \qquad (3.7)$$

При этом случайная величина $\xi^{'}(\omega,t)$ называется его *производной* в этой точке.

Производной случайного процесса в точке t_0 называют среднеквадратичный предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\Delta t=t-t_0$ при $\Delta t\to 0$:

$$\xi^{'}(\omega,t)=\lim_{t\to t_0}\frac{\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)}{t-t_0}\cdot$$

Определение 5. Если случайный процесс второго порядка $\xi(\omega,t)$ $t\in T$ является дифференцируемым в каждой точке открытого множества $T_0\subset T$, то его называют ***дифференцируемым*** на множестве T_0.

Теорема 1 (***необходимое и достаточное условие дифференцируемости случайного процесса***). Для того, чтобы скалярный случайный процесс второго порядка $\xi(\omega,t)$ $t\in T$ был дифференцируемым в точке $t_0\in T$, а для случайной величины $\xi^{'}(\omega,t_0)$ существовало математическое ожидание и дисперсия, необходимо и достаточно, чтобы функция $m_\xi(t)$ была дифференцируема в этой точке и существовала вторая обобщенная смешанная производная от ковариационная функции $K_\xi(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2 = t_0$.

Следствие. Для дифференцируемого на множестве Т случайного процесса второго порядка $\xi(\omega, t)$ $t \in T$ с математическим ожиданием $m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$ определен случайный процесс $\xi'(\omega, t)$ $t \in T$, и при этом, если случайный процесс $\eta(\omega, t) = \xi'(\omega, t)$ есть процесс второго порядка, то

1) $m_\eta(t) = \dfrac{d}{dt} m_\xi(t)$;

2) $K_\eta(t_1, t_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_\xi(t_1, t_2)$.

Если к тому же $\xi(\omega, t)$ еще и стационарный процесс, то

1) $m_\eta(t) = 0$;

2) $K_\eta(t_1, t_2) = -K_\xi'(\tau)$.

Пример 6.2. Зная математическое ожидание $m_\xi(t) = t^2 + t$ случайного процесса $\xi(t)$, найти математическое ожидание ее производной $m_{\xi'}(t) = m_\eta(t)$.

Решение. Искомое математическое ожидание $m_{\xi'}(t) = m_\eta(t) = m_\xi'(t) = \left(t^2 + t\right)' = 2t + 1 \cdot$

Пример 6.3. Случайный процесс определяется формулой $\eta(t) = \xi(t) \cdot e^{-t}, t > 0, \xi(t) \sim N(3,1)$.

Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса $\eta'(t) = \dfrac{d\eta(t)}{dt}$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайного процесса $\eta(t)$: $m_\eta(t) = M(\xi \cdot e^{-t}) = e^{-t} \cdot M\xi$; но так как $\xi(t) \sim N(3,1)$, то получаем $m_\eta(t) = 3 \cdot e^{-t}$; найдем математическое ожидание $m_{\eta'}(t)$:
$m_{\eta'}(t) = M\left(\eta'(t)\right) = \left(M\left(\eta(t)\right)\right)' = \left(3e^{-t}\right)' = -3e^{-t}$.

Найдем ковариационную функцию случайного процесса $\eta(t)$:

$$K_\eta(t_1, t_2) = M\left(\left(\xi \cdot e^{-t_1} - 3 \cdot e^{-t_1}\right) \cdot \left(\xi \cdot e^{-t_2} - 3 \cdot e^{-t_2}\right)\right) = M\xi^2 \cdot e^{-t_1}e^{-t_2} - 6\xi \cdot e^{-t_1}e^{-t_2} +$$
$$+9e^{-t_1}e^{-t_2} = M\left(e^{-t_1}e^{-t_2} \cdot (\xi-3)^2\right) = M\left((\xi-3)^2\right)e^{-t_1}e^{-t_2}.$$

Так как из условия $M\left((\xi-3)^2\right) = D\xi = 1$; то окончательно имеем $K_\eta\left(t_1, t_2\right) = M\left((\xi-3)^2\right)e^{-t_1}e^{-t_2} = e^{-(t_1+t_2)}$.

Найдем ковариационную функцию случайного процесса $\eta'(t) = \dfrac{d\eta(t)}{dt}$; $\dfrac{\partial K_\eta(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \dfrac{\partial\left(e^{-(t_1+t_2)}\right)}{\partial t_1 \partial t_2} = e^{-(t_1+t_2)}$.

Пример 6.4. Зная ковариационную функцию $K_x(t_1, t_2) = 2t_1 \cdot t_2 + t_1^2 \cdot t_2^2$ случайного процесса $X(t)$, найти ковариационную функцию ее производной $K_{x'}(t_1, t_2)$.

Решение. Найдем частную производную от заданной ковариационную функции по t_1:

$$\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial\left(2t_1 \cdot t_2 + t_1^2 \cdot t_2^2\right)}{\partial t_1} = 2t_2 + 2t_1 \cdot t_2^2;$$

найдем частную производную от полученного результата по t_2:

$$\frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial\left(2t_2 + 2t_1 \cdot t_2^2\right)}{\partial t_2} = 2 + 4t_1 \cdot t_2 \cdot$$

Таким образом, искомая ковариационную функция $K_{x'}(t_1,t_2)=2+4t_1\cdot t_2$.

Пример 6.5. Задан случайный процесс $X(t)=\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t)+\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t),$ где α, β – независимые случайные величины, числовые характеристики, которых $m_\alpha, m_\beta, \sigma^2=\sigma_\alpha^2=\sigma_\beta^2$. Доказать, что это дифференцируемый процесс.

Решение. Найдем математическое ожидание процесса, используя свойства математического ожидания:

$$m_X(t)=M\left(\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t)+\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t)\right)=M\left(\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t)\right)+M\left(\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t)\right)=$$
$$=m_\alpha\cos(\varphi\cdot t)+m_\beta\sin(\varphi\cdot t);$$

$$K_X(t_1,t_2)=M[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))=M\left(X(t_1)X(t_2)\right)-$$
$$-m_X(t_1)M\left(X(t_2)\right)-m_X(t_2)M\left(X(t_1)\right)+m_X(t_1)m_X(t_2)=$$
$$=M\left(X(t_1)X(t_2)\right)-m_X(t_1)m_X(t_2);$$

Откуда

$$M\left(X(t_1)X(t_2)\right)-m_X(t_1)m_X(t_2)=M[(\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t_1)+\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t_1)(\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t_2)+$$
$$+\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t_2)]-m_X(t_1)m_X(t_2)=M\alpha^2\cdot\cos(\varphi\cdot t_1)\cos(\varphi\cdot t_2)+$$
$$+M\alpha\cdot M\beta\sin(\varphi\cdot(t_1+t_2))+M\beta^2\cdot\sin(\varphi\cdot t_1)\sin(\varphi\cdot t_2)-$$
$$-m_\alpha^2\cos(\varphi\cdot t_1)\cos(\varphi\cdot t_2)-m_\alpha m_\beta\left(\cos(\varphi t_1)\sin(\varphi t_2)+\sin(\varphi t_1)\cos(\varphi t_2)\right)-$$
$$-\left(2e^{-0,5\tau^2}\right)''=2e^{-0,5\tau^2}\left(1-\tau^2\right)-\left(2e^{-0,5\tau^2}\right)''=2e^{-0,5\tau^2}\left(1-\tau^2\right)m_\beta^2\sin(\varphi\cdot t_1)\sin(\varphi\cdot t_2)=$$
$$=\left\{т.к.\ M\alpha^2=\sigma^2+m_\alpha^2; M\beta^2=\sigma^2+m_\beta^2\right\}=\sigma^2\cos(\varphi\cdot(t_1-t_2));$$

Таким образом получили

$$m_X(t)=m_\alpha\cos(\varphi\cdot t)+m_\beta\sin(\varphi\cdot t);\ \ K_X(t_1,t_2)=\sigma^2\cos(\varphi\cdot(t_1-t_2));$$

откуда

$$m_X'(t)=\frac{dm_X}{dt}=\varphi\cdot[m_\alpha\cos(\varphi\cdot t)-m_\beta\sin(\varphi\cdot t)];$$

$$\frac{\partial^2K_X}{\partial t_1\partial t_2}=\sigma^2\varphi^2\cos\varphi(t_2-t_1)\Big|_{t_1=t_2=t_0}=\sigma^2\varphi^2$$

И согласно теореме о необходимом и достаточном условии дифференцируемости случайного процесса: случайный процесс $X(t) = \alpha \cdot \cos(\varphi \cdot t) + \beta \cdot \sin(\varphi \cdot t)$ – дифференцируем.

Интегрируемость случайного процесса

Понятие интеграла от случайной процесса будем также рассматривать в среднеквадратическом смысле. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ определен на $T \subseteq R^1$. На отрезке $[a,b] \subseteq T$ построим некоторое разбиение $a = t_0 \le t_1 \le .... \le t_{n-1} \le t_n = b$, а на каждом из промежутков этого разбиения выберем произвольную точку $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i), i = 1,...,n$.

Определение 6. Если при $n \to \infty$ и $\max\limits_{i=1,...,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$ существует предел в среднеквадратическом $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{c.k} \eta$, не зависящий от способа разбиения $\{t_i\}$ и выбора точек $\{\tau_i\}$, то случайный процесс $\xi(t)$ называется интегрируемым в среднеквадратическом, а случайная величина η называется ее среднеквадратическим интегралом по $[a,b]$ и обозначается $\eta = \int\limits_a^b \xi(t)dt$.

Теорема 2. Для существования среднеквадратического интеграла $\eta = \int\limits_a^b \xi(t)dt$ необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие интегралы Римана:

$$I_1 = \int\limits_a^b m_\xi(t)dt \text{; и } I_2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_\xi(t,\tau)dtd\tau,$$

где $m_\xi(t) = M\{\xi(t)\}$ $K_\xi(t,\tau) = \mathrm{cov}\big(\xi(\mathrm{t}), \xi(\tau)\big)$.

Теорема 3. Если случайный процесс $\xi(t)$ интегрируем на *T*, то $M\eta = M\left(\int\limits_a^b \xi(t)dt\right) = \int\limits_a^b m_\xi(t)dt$, $\mathrm{cov}\left(\int\limits_a^b \xi(t)dt, \xi(\tau)\right) = \int\limits_a^b K_\xi(t,\tau)dt, \tau \in T$;

$\mathrm{cov}\left\{\int\limits_a^b \xi(t)dt, \int\limits_c^d \xi(\tau)d\tau\right\} = \int\limits_a^b \int\limits_c^d K_\xi(t,\tau)dtd\tau, [c,d] \subseteq T$; $D\left\{\int\limits_c^d \xi(t)dt\right\} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_\xi(t,\tau)dtd\tau$.

Пример 6.6. Зная математическое ожидание $m_\xi(t)=2t+1$ случайного процесса $\xi(t)$, найти математическое ожидание интеграла $\eta(t)=\int_0^t \xi(s)ds$.

Решение. $M\eta(t)=\int_0^t m_\xi(s)ds=\int_0^t (2s+1)ds=t^2+t$.

Пример 6.7. Зная математическое ожидание $m_\xi(t)=3e^{-t}$ случайного процесса $\xi(t)$ и ковариационную функцию $K_\xi(t_1,t_2)=e^{-t_1-t_2}$, найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t)=\int_0^t \xi(s)ds$.

Решение. Найдем математическое ожидание процесса $\eta(t)$:

$$M\eta(t)=\int_0^t m_\xi(s)ds=\int_0^t 3e^{-s}ds=-3e^{-s}\Big|_0^t=3-3e^{-t}.$$

Если $\eta(t)=\int_0^t \xi(s)ds$, то $K_\eta(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_\xi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$, т.е. корреляционная функция интеграла от случайного процесса равна двойному интегралу от корреляционной функции случайного процесса:

$$K_\eta(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\tau_1-\tau_2}d\tau_1 d\tau_2=\int_0^{t_1} e^{-\tau_1}d\tau_1\int_0^{t_2} e^{-\tau_2}d\tau_2=$$

$$=\left(1-e^{-t_2}\right)\int_0^{t_1} e^{-\tau_1}d\tau_1=\left(1-e^{-t_2}\right)\cdot\left(1-e^{-t_1}\right).$$

Задачи по теме 6 для самостоятельного решения

1. Задано математическое ожидание $m_X(t)=t^3+2t+1$ случайного процесса $X(t)$. Найти математическое ожидание ее производной.

2. Задано математическое ожидание $m_X(t)=t^2+4$ случайного процесса $X(t)$. Найти математическое ожидание случайного процесса $Y(t)=t\cdot X'(t)+t^2$.

3. Задана ковариационная функция $K_\xi(t_1,t_2)=5e^{-(t_2-t_1)^2}$ случайного процесса $X(t)$. Найти ковариационную функцию ее производной.

4. Зная математическое ожидание $m_X(t)=3t^2+1$ случайного процесса $X(t)$, найти математическое ожидание интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$.

5. Задан случайный процесс $X(t)=Ue^{\alpha t}\cos\beta t$, где U – случайная величина, $m_U(t)=5$. Найти математическое ожидание интеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$.

6. $\xi(t)=ch2t-Ush2t$, случайная величина $U\sim E\big(0;4\big),\eta(t)=\xi'(t)$. Найти математическое ожидание $m_\eta(t)$, ковариационную функцию $K_\eta(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\eta(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\eta(t_1,t_2)$ случайного процесса $\eta(t)$, не дифференцируя $\xi(t)$. Найти взаимную ковариационную функцию $K_{\xi,\eta}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную ковариационную функцию $r_{\xi,\eta}(t_1,t_2)$.

7. Дан случайный процесс $\xi(t)=(t^2+1)U, U\sim N(-3,5),\eta(t)=\int\limits_0^t\xi(s)ds$. Найти математическое ожидание $m_\eta(t)$, ковариационную функцию $K_\eta(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\eta(t)$, взаимные ковариационные функции $K_{\xi,\eta}(t_1,t_2);K_{\eta,\xi}(t_1,t_2)$ не интегрируя $\xi(t)$.

8. Дан случайный процесс $\xi(t)=\dfrac{U}{(t^2+4)}, U\sim P(2),\eta(t)=\int\limits_0^t\xi(s)ds$. Найти ковариационную функцию $K_\varsigma(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\varsigma(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\varsigma(t_1,t_2)$ случайного процесса $\varsigma(t)=\xi(t)+\eta(t)$, не интегрируя $\xi(t)$.

7. Основные классы случайных процессов

Гауссовские случайные процессы

Важную роль во многих прикладных задачах играют гауссовские случайные процессы, которые возникают в результате сложения большого числа независимых или слабозависимых случайных процессов примерно одинаковой мощности. В этом случае, с увеличением числа слагаемых сумма сходится к гауссовскому случайному процессу независимо от того, как распределены отдельные слагаемые.

Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$ – n-мерный случайный вектор, и $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)^T \in R^n$.

Характеристическая функция $\vec{\xi}$ определяется как

$$g_n(\vec{\nu}) = Me^{i(\vec{\nu}, \vec{\xi})} = Me^{i(\nu_1\xi_1 + \ldots + \nu_n\xi_n)},$$

где $(\vec{\nu}, \vec{\xi})$ – скалярное произведение векторов.

Напомним, что n-мерный случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$ имеет нормальное распределение, если его характеристическая функция имеет вид

$$g_n(\vec{\nu}) = \exp\left\{ i\,(\vec{m}, \vec{v}) - \frac{1}{2}\vec{v}^T K\,\vec{v} \right\} = \exp\left\{ i\sum_{k=1}^{n} m_k\,v_k - \frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n} K_{jk}\,v_j v_k \right\},$$

где $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$, $\vec{m}^T = (M\xi_1, M\xi_2, \cdots, M\xi_n)$, $K = (K_{jk})$ – ковариационная матрица случайного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$:

$$K_{jk} = M\left((\xi_j - m_j)(\xi_k - m_k) \right) = M\left(\overset{\circ}{\xi}_j\,\overset{\circ}{\xi}_k \right),\ j,k = \overline{1,n}\ .$$

Определение. Действительный случайный процесс $\xi(\omega, t)\,(t \in T)$ называется ***гауссовским*** или ***нормальным***, если все его конечномерные законы распределения являются нормальными, т.е. характеристическая функция совместного распределения вероятностей случайных величин $\xi(\omega,t_1),\xi(\omega,t_2),\ldots,\xi(\omega,t_n)\quad \forall\, t_i\in T\left(i=\overline{1,n}\right)$ имеет вид

$$g_n\left(v_1,v_2,\ldots,v_n;t_1,t_2,\ldots,t_n\right)=\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}m_\xi\left(t_k\right)v_k-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}K\left(t_k,t_l\right)v_kv_l\right\}.$$

Характеристическая функция полностью определяет распределение совокупности случайных величин, и с ее помощью может быть задано полное семейство конечномерных распределений.

Пример 7.1. Пусть $n=1$. Тогда

$$g_1(v)=M\left[e^{i\xi v}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixv}p_1(x)\,dx,$$

где $p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$ – плотность одномерного нормального распределения. Плотность $p_1(x)$ находится по формуле обращения

$$p_1\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixv}g_1\left(v\right)dv.$$

Покажем, что

$$g_1(v)=e^{imv-\frac{1}{2}\sigma^2v^2}.$$

Имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixv}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx\overset{x-m=y}{=}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(y+m)v}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{e^{imv}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyv-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}dy=$$

$$=\frac{e^{imv}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-i\sigma^2v\right)^2}e^{-\frac{\sigma^2v^2}{2}}dy\overset{z=y-i\sigma^2v}{=}\frac{e^{imv}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\sigma^2v^2}{2}}\int_{-\infty-i\sigma^2v}^{+\infty-i\sigma^2v}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=$$

$$=e^{imv-\frac{1}{2}\sigma^2v^2}.$$

Для случайного процесса вводят последовательность характеристических функций

$$g_1(v_1;t_1)=M\left[e^{i\xi(\omega,t_1)v_1}\right],$$
$$g_2(v_1,v_2;t_1,t_2)=M\left[e^{i\{\xi(\omega,t_1)v_1+\xi(\omega,t_2)v_2\}}\right],$$
$$g_3(v_1,v_2,v_3;t_1,t_2,t_3)=M\left[e^{i\sum_{j=1}^{3}\xi(\omega,t_j)v_j}\right],$$
$$\vdots$$

Гауссовские процессы обладают рядом хороших свойств:

1. Гауссовский случайный процесс исчерпывающим образом определяется двумя моментными функциями: математическим ожиданием $m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $K_\xi(t)$.

2. Для гауссовских случайных процессов понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают. По определению, случайный процесс является стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание не зависит от времени, а ковариационная функция зависит лишь от абсолютных значений интервалов между рассматриваемыми моментами времени. Одновременно он будет стационарным в узком смысле, т.к. многомерные плотности вероятности и характеристические функции не будут изменяться при сдвиге всей группы точек вдоль оси времени на произвольную постоянную величину.

Процессы с независимыми приращениями

Определение. Векторный случайный процесс называется ***процессом с независимыми приращениями***, если для любых сечений $t_1 < t_2 < ... < t_n$ для последовательности случайных величин

$$\xi(t_1),\xi(t_2)-\xi(t_1),\xi(t_3)-\xi(t_2),....,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1}),$$

выполняются следующие условия:

$$\operatorname{cov}\{\xi(t_1),\xi(t_2)-\xi(t_1)\}=0;\ \operatorname{cov}\{\xi(t_2)-\xi(t_1),\xi(t_3)-\xi(t_2)\}=0;\ \ldots;$$
$$\operatorname{cov}\{\xi(t_{n-2})-\xi(t_{n-1}),\xi(t_{n-1})-\xi(t_n)\}=0;\ldots$$

и конечномерное распределение имеет вид:

$$p(t_1,x_1,t_2,x_2,...,t_n,x_n)=p(t_n,x_n|t_{n-1},x_{n-1})\cdot....\cdot p(t_2,x_2|t_1,x_1)\cdot p(t_1,x_1).$$

Рассмотрим основные свойства процессов с независимыми приращениями:

1. Процессы с независимыми приращениями полностью описываются одномерными и двумерными законами распределения, т.е. для задания такого процесса достаточно знать только $p(t,x)$, $p(t_1,x_1,t_2,x_2)$ или $F_t(x)$, $F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)$.

2. Ковариационная функция такого процесса обладает следующим свойством:

$$K_\xi(t_1,t_2) = K_\xi(t_1),$$

где $K_\xi(t_1)$ – это матрица ковариаций сечения t_1.

Для скалярного случайного процесса $K_\xi(t_1)$ – это дисперсия случайной величины в данном сечении, а для векторного процесса – это матрица ковариаций данного сечения.

Винеровский процесс (частный случай процесса с независимыми приращениями)

Определение. Случайный процесс $\xi(\omega,t)\,(t\in T)$ называется ***выходящим из нуля винеровским процессом с параметром*** $\sigma>0$, если выполняются три условия:

1. $\xi(\omega,0)=0$.

2. $\forall\, n>1$ и $\{t_k\}:\ t_k\in T,\ k=\overline{1,n}:\ 0\le t_1<t_2<\ldots<t_n$ случайные величины $\xi(\omega,t_1)$, $\left[\xi(\omega,t_2)-\xi(\omega,t_1)\right],\ldots,\left[\xi(\omega,t_n)-\xi(\omega,t_{n-1})\right]$ являются независимыми.

3. Для $\forall\, 0\le t_{i-1}<t_i$: случайная величина $\xi(\omega,t_i)-\xi(\omega,t_{i-1})$ распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D[\Delta\xi]=(t_i-t_{i-1})\,\sigma^2$ (σ называется коэффициентом диффузии).

Таким образом, винеровский случайный процесс является одновременно и процессом с независимыми приращениями, и гауссовым случайным процессом. Если $\sigma=1$, то винеровский процесс называется ***стандартным***.

Некоторые полезные ***свойства винеровского процесса***

Винеровский процесс инвариантен относительно некоторых преобразований фазовой и временной шкал. Так, если $w(\omega, t)$ – винеровский случайный процесс, то для $\forall\, \sigma > 0$ и $s \geq 0$ случайные процессы

$$X(\omega, t) = \sigma w\left(\omega, \frac{t}{\sigma^2}\right),$$

$$X(\omega, t) = t\, w\left(\omega, \frac{1}{t}\right),$$

$$X(\omega, t) = w(\omega, t + s) - w(\omega, s)$$

также являются винеровскими.

Пуассоновский процесс (частный случай процесса с независимыми приращениями)

Определение. Пуассоновским процессом с параметром $\lambda > 0$ называется скалярный случайный процесс $\xi(\omega, t)$, $t \in R_+$, обладающий следующими свойствами:

1. $\xi(\omega, 0) = 0$.

2. $\forall\, n > 1,\ \ t_k \in T,\ k = \overline{1,n}:\ t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайные величины $\xi(\omega, t_1)$, $\left[\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1)\right], \ldots, \left[\xi(\omega, t_n) - \xi(\omega, t_{n-1})\right]$ являются независимыми.

3. $\forall\, t_1, t_2 \in T:\ 0 \leq t_1 < t_2$ случайная величина $\left[\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1)\right]$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda(t_2 - t_1)$

$$P\left[\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1) = k\right] = \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

Задачи для самостоятельного решения по всем темам

1. Случайный процесс $\xi(t)$ принимает два значения +1 и –1. Число перемен знаков за время τ подчиняется распределению Пуассона с параметром μ. В начальный момент времени оба значения равновероятны. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции этого процесса и определить является ли этот процесс стационарным.

2. Случайный процесс $\xi(t)$ состоит из горизонтальных отрезков единичной длины, ординаты которых независимые случайные величины с плотностью $p(x)=\dfrac{|x|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}e^{-|x|}$. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, по крайней мере, в широком смысле.

3. U и V независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $S(t) = U+Vt$. Является ли этот процесс стационарным?

4. Случайный процесс задан в виде $\xi(t) = U\cos at+V\sin at$, где a – неслучайная величина, U и V – некоррелированные случайные величины, равномерно распределенные в интервале [–1,1] и [–2,2] соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции данного процесса. Является ли данный процесс стационарным?

5. Найти функцию ковариации процесса виде $\eta(\mathrm{t}) = \xi(t)\cos(Bt+\phi)$, где B – неслучайная величина, $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с математическим ожиданием m и функцией ковариации $\mathrm{K}(\tau)$, ϕ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,2\pi]$, $\xi(t)$ и ϕ независимые. Является ли этот процесс стационарным?

6. Найти функцию взаимной ковариации процесса и его второй производной, если процесс $\xi(t)$ имеет математическое ожидание равное αt и функцию ковариации $\mathrm{K}_{\xi}(t,s) = e^{-(t+s)}$.

7. Пусть $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ – независимые случайные процессы с корреляционными функциями $R_1(t,s)$ и $R_2(t,s)$, соответственно. Найти корреляционную функцию процесса $\xi(t) = \eta_1(t)\eta_2(t)$.

8. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции случайного процесса $\eta(\mathrm{t}) = X\cos(t+Y)$, где X имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, Y – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,2\pi]$.

9. Пусть η – нормальная случайная величина с функцией распределения $\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. Найти двумерное распределение случайного процесса $\xi(t) = \eta+t$, где $t \in \mathbf{R}$.

10. U и V – независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметрами λ_1 и λ_2, соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $S(t) = U+Vt$. Является ли этот процесс стационарным?

11. Случайный процесс $S(t) = Ue^{-\alpha t}+Ve^{-\beta t}$, где U и V – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожидание, α и β неслучайные величины. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, по крайней мере, в широком смысле.

12. Случайный процесс $S(t) = t+Ue^{-\alpha t}+Ve^{-\beta t}$, где U и V – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожидание и дисперсиями $D_1 = D_2 = 2$, α и β неслучайные величины. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, в широком смысле.

13. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $[0,2\pi]$. Для случайного процесса $\eta(t) = \xi t+a$, где a – неслучайная величина, найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции. Является ли этот процесс стационарным?

14. Случайный процесс задан в виде $\xi(t) = Vt^2$, где V – непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами а и σ^2. Найти вероятностные характеристики процесса $\xi(t)$ (математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции). Проверить является ли этот процесс стационарным в широком смысле?

15. Доказать строгую стационарность процесса $\xi(t) = \alpha\cos(\beta t+\varphi)$, где α,β – неслучайные величины, φ – случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0,2\pi]$.

16. Случайный процесс представляет собой $\xi(t) = V$, где V– непрерывная случайная величина с плотностью $p_V(x)$. Найти вероятностные характеристики процесса $\xi(t)$ (математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции). Является ли этот процесс стационарным?

17. Поток покупателей является простейшим Пуассоновским с параметром λ, это значит, что вероятность того, что за время τ появится ровно k покупателей определяется формулой Пуассона:

$$P_k(\tau)=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}.$$

Процесс $\xi(t)$ представляет собой число покупателей пришедших от 0 до t (например, совпадает с началом рабочего дня). Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. ***Указание***. При вычислении функции корреляции воспользоваться тем, что при $s>t$ $\xi(s)=\xi(t)+\Delta\xi$, где $\Delta\xi$ – число событий наступивших за время от t до s.

18. Пусть ξ – случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2. Найти функцию корреляции случайного процесса $\eta(t)=\xi^2 t+b$, где b – вещественное число, $t>0$.

19. Имеется пуассоновский поток случайных событий с интенсивностью λ. Случайный процесс $\xi(t)$ образуется следующим образом: в момент времени i-го события ($i=1,2\ldots$) процесс принимает случайное значение V_i и сохраняет его до появления следующего события в потоке. В начальный момент времени $\xi(0)=V_0$. Случайные величины V_0, $V_1,\ldots$ – независимы и одинаково распределены с плотностью $p_V(x)$. Найти основные характеристики процесса.

20. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)=\sum_{i=1}^{n} Y_i\, q_i(t)$, где $q_1(t),q_2(t),\ldots,q_n(t)$ – неслучайные функции, Y_1, Y_2, …, Y_n – некоррелированные случайные величины математическими ожиданиями m_1, m_2, …, m_n и дисперсиями d_1, d_2, …, d_n соответственно.

21. Пусть $R(t,s)$ – корреляционная функция некоторого случайного процесса, $Q(z)$ – полином с положительными коэффициентами. Доказать, что функция $R(t,s)=Q(R(t,s))$ является корреляционной функцией некоторого случайного процесса.

22. Пусть $X\sim N(m,\sigma)$, b – вещественное число. Найти функцию корреляции СП случайного процесса $Y(t)=Xt+b$, $t>0$.

23. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t)=U+Vt$, где U и V – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$, $t\ \geq\ 0$. Вычислить вероятность P(A) случайного события

$$\mathrm{A}=\left\{0<X(1)<\frac{1}{2}\right\}\cap\left\{\frac{1}{2}<X(2)<\frac{3}{4}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}<X(1)<1\right\}\cap\left\{\frac{1}{4}<X(2)<\frac{3}{4}\right\}.$$

24. Пусть X и Y – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения –1 и +1 с вероятностями 1/2. Исследовать на стационарность случайный процесс $\xi(t)=X\cos\lambda t+Y\sin\lambda t$, $t\geq 0$.

25. Пусть $X(t)$, $t \geq 0$ – пуассоновский случайный процесс с параметром λ. Доказать, что случайный процесс $Y(t) = X(t+1) - X(t)$, $t \geq 1$ является стационарным в широком смысле.

26. Является ли стационарной последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин?

27. Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T, X – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, T]$. Исследовать случайный процесс $Y(t) = \varphi(t+X)$ на стационарность.

28. Доказать, что сумма независимых стационарных случайных процессов является стационарным случайным процессом.

29. Найти функцию ковариации процесса $\xi(t) = X\cos(t+Y)$, где X, Y независимы, X имеет нормальное распределение $N(0;1)$, а Y имеет равномерное распределение на $[-\pi;\pi]$.

30. Пусть $X(t)$ – стационарный случайный процесс, Y – случайная величина. Является ли случайный процесс $Z(t) = X(t)+Y$ стационарным?

31. Показать, что функция $R(t) = \sigma^2 e^{-a|t|} \cos \beta t$, где a, β, σ – некоторые положительные постоянные, может быть функцией корреляции непрерывного в среднем квадратическом и стационарного в широком смысле случайного процесса. Определить спектральную плотность, соответствующую такой функции корреляции.

32. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t) = b \sin(\omega t + \varphi)$, где b, ω – известные числа, φ – случайная величина с плотностью распределения вероятностей $f(x)$, $t \geq 0$. Исследовать случайный процесс $X(t)$ на стационарность и на эргодичность в следующих случаях:

а) $f(x) = \cos x$ при $x \in [0, \pi/2]$;

б) $f(x) = 1/2\pi$ при $x \in [0,2\pi]$, $f(x) = 0$ при $x \notin [0, 2\pi]$.

33. Случайный процесс $\xi(t)$ задан четырьмя равновероятными реализациями:

$$\xi_{\omega_1}(t) = 1\,;\ \xi_{\omega_2}(t) = -2\,;\ \xi_{\omega_3}(t) = \sin \pi t\,;\ \xi_{\omega_4}(t) = \cos \pi t\,.$$

Найти вероятностные характеристики процесса $\xi(t)$ (математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции). Является ли этот процесс стационарным, по крайней мере в широком смысле?

Литература

1. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М. : Наука, 1969. 512 с.
2. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы : учеб. для вузов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 448 с.
3. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. М. : КомКнига, 2005. 400 с.
4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М. : Наука, 1969. 448 с.
5. *Матальцкий М.А.* Элементы теории случайных процессов : учеб. пособие. Гродно : ГрГУ, 2004. 326 с.
6. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 320 с.
7. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов : учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
8. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания : учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2004.
9. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М. : Сов. радио, 1971.
10. *Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. 2 курс 7-е изд. М. : Айрис-пресс, 2009. 592 с.

Приложение

Некоторые распределения случайных величин

1. Распределение Бернулли. Случайная величина ξ – число наступлений некоторого события в одном испытании. $P(\xi=1)=p,\ P(\xi=0)=q$, $M\xi=p, D\xi=pq$, характеристическая функция $g_\xi(u)=q+pe^{iu}$.

2. Биномиальное распределение. Случайная величина ξ – число наступлений некоторого события в ***n*** независимых испытаниях. $P(\xi=m)=C_n^m p^m q^{n-m};\ m=0,1,..,n$, p – вероятность успеха в одном испытании, q – вероятность неудачи. $M\xi=np,\ D\xi=npq$, характеристическая функция $g_\xi(u)=\left(q+pe^{iu}\right)^n$.

3. Геометрическое распределение. В схеме Бернулли ξ – число испытаний до первого наступления события. $P(\xi=m)=pq^{m-1};\ m=1,2,..;\ q=1-p$, $M\xi=\dfrac{1}{p}, D\xi=\dfrac{q}{p^2}$; характеристическая функция $g_\xi(u)=\dfrac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}$.

4. Распределение Пуассона. Случайная величина ξ – число событий, наступивших в пуассоновском потоке, $P(\xi=m)=\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!};\ m=0,1,2,..;\ M\xi=D\xi=\lambda$, характеристическая функция $g_\xi(u)=e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)}$.

5. Равномерное распределение на конечном множестве. Случайная величина ξ – принимает любое из значений некоторого интервала с одинаковыми вероятностями:

$$P\{\xi=k\}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & a\le k\le b\\ 0, & else\end{cases};\ M\xi=\frac{a+b}{2};\ D\xi=\frac{n^2-1}{12};$$

характеристическая функция $g_\xi(u)=\dfrac{e^{iau}-e^{i(b+1)u}}{n(1-e^{iu})}$.

6. Экспоненциальное распределение. Плотность вероятности случайной величины с таким распределением: $p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$; $\lambda>0, M\xi=\dfrac{1}{\lambda}, D\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}$; характеристическая функция $g_\xi(u)=\dfrac{\lambda}{\lambda-iu}$.

7. Непрерывное равномерное распределение. Распределение с плотностью вероятностей:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0, & , else\end{cases}; M\xi=\frac{a+b}{2}, D\xi=\frac{(b-a)^2}{12},$$

характеристическая функция $g_\xi(u)=\dfrac{e^{ibu}-e^{iau}}{iu(b-a)}$.

8. Распределение Коши. Распределение с плотностью вероятностей: $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-a)^2}$; $\lambda, a>0,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

Данное распределение не имеет конечных математического ожидания и дисперсии, характеристическая функция

$$g_\xi(u)=e^{iau-\lambda|u|}.$$

9. Нормальное распределение. Распределение с плотностью вероятностей:

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma \text{ и } \mu \text{ параметры распределения,}$$

$$x\in(-\infty,+\infty),\ M\xi=\mu, D\xi=\sigma^2,$$

характеристическая функция $g_\xi(u)=e^{iau-\frac{\sigma^2u^2}{2}}$.

10. Распределение Лапласа. Распределение с плотностью вероятностей: $p_\xi(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|}$, $M\xi = 0$, $D\xi = 2$, характеристическая функция $g_\xi(u) = \frac{1}{1+u^2}$.

11. Гамма распределение. Распределение интервала времени, необходимого для появления ***k*** событий в пуассоновском потоке интенсивности λ, имеет плотность вероятностей:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}; \lambda, \alpha > 0; M\xi = \frac{p}{\lambda}, D\xi = \frac{p}{\lambda^2},$$

характеристическая функция $g_\xi(u) = \left(1 - \frac{iu}{\lambda}\right)^{-p}$.

Корректор – А.В. Воробьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 414 от «9» июня 2014 г. Тираж 100 экз.