

УДК 519.6

ОЦЕНКА ЭКСПОНЕНТА НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ С ПОМОЩЬЮ
ЧИСЕЛ ФРОБЕНИУСА ДЛЯ ТРЁХ АРГУМЕНТОВ

В. М. Фомичев

*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Россия***E-mail:** fomichev@nm.ru

Выведена формула чисел Фробениуса для трёх аргументов и с их помощью получена оценка экспонента сильносвязного n -вершинного орграфа при $n > 2$, в котором имеются три дуги вида (i, r) , (r, j) , (i, j) , где $i, r, j \in \{1, \dots, n\}$. Показано, что во многих случаях данная оценка экспонента существенно лучше уже известных оценок.

Ключевые слова: число Фробениуса, порождённая множеством чисел аддитивная полугруппа, экспонент графа.

Введение

Основные обозначения:

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $a \mid b$ и $a \nmid b$ — « a делит b » и « a не делит b » соответственно, $a, b \in \mathbb{N}$;
- $d = (\theta, \lambda)$ — наибольший общий делитель натуральных чисел θ, λ ;
- $\langle \theta, \lambda, \dots \rangle$ — аддитивная полугруппа, порождённая числами $\theta, \lambda, \dots$;
- если $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$, то $bA = \{ba_1, \dots, ba_k\}$, $b \pm A = \{b \pm a_1, \dots, b \pm a_k\}$;
- $C(\theta, \lambda, \dots) = d\mathbb{N} \setminus \langle \theta, \lambda, \dots \rangle$, $z = \max C(\theta, \lambda)$;
- $\langle \theta, \lambda \rangle$ — подмножество полугруппы $\langle \theta, \lambda \rangle$, состоящее из чисел, меньших z ;
- $g(\theta, \lambda, \dots)$ — число Фробениуса для аргументов $\theta, \lambda, \dots$.

Пусть $1 < \theta < \lambda < l$ и числа θ, λ, l взаимно простые.

Функция Фробениуса $g(\theta, \lambda, l)$ для трёх аргументов определена как $\max C(\theta, \lambda, l)$, то есть как наибольшее натуральное число, не представимое в виде линейной комбинации чисел θ, λ, l с неотрицательными целыми коэффициентами:

$$g(\theta, \lambda, l) = \max\{t \in \mathbb{N} : t \neq c_1\theta + c_2\lambda + c_3l\}.$$

Задача определения $g(\theta, \lambda, l)$ известна как диофантова проблема Фробениуса для трёх аргументов, задача определения множества $C(\theta, \lambda, l)$ — как расширенная проблема Фробениуса для трёх аргументов. Обзор основных результатов по проблеме Фробениуса для различного числа аргументов можно найти в [1]. Здесь отметим лишь те факты, которые наиболее важны для изложения результатов данной работы.

Для двух взаимно простых чисел θ, λ получение формулы числа Фробениуса, равного $\max C(\theta, \lambda)$, и описание множества $C(\theta, \lambda)$ относится ещё к 1884 г. [2]:

$$g(\theta, \lambda) = \theta\lambda - \theta - \lambda, \tag{1}$$

$$C(\theta, \lambda) = \{g(\theta, \lambda) - \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}\}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что

$$|\overline{\langle \theta, \lambda \rangle}| = |C(\theta, \lambda)| = (\theta - 1)(\lambda - 1)/2 = (g(\theta, \lambda) + 1)/2. \quad (3)$$

Если $d > 1$, то из (1) следует, что число $z = \max C(\theta, \lambda)$ определено формулой

$$z = \theta\lambda/d - \theta - \lambda. \quad (4)$$

Формула числа Фробениуса от трёх и более аргументов известна лишь для частных случаев. В [3] доказано, что не существует конечного числа полиномов, позволяющих выразить через них в общем случае число Фробениуса $g(\theta, \lambda, l)$ от трёх аргументов с помощью разбиения области определения.

Более продуктивным стал алгоритмический подход к определению числа Фробениуса $g(a_1, \dots, a_k)$ от k аргументов. Построены алгоритмы при $k = 3$ (О. Rodseth, J. Davison и др. [1]); при $k > 3$ [4, 5] оценка сложности алгоритма определения $g(a_1, \dots, a_k)$ снижена до величины порядка $O(ka_1)$ операций. Эта оценка улучшена [6] до величины $O(l + ha_1)$, где l и h — характеристики множества $\{a_1, \dots, a_k\}$, принимающие для различных множеств аргументов значения от 2 до $\min(a_1, k)$.

В данной работе выведена формула числа $g(\theta, \lambda, l)$, использующая арифметические и теоретико-множественные операции во множестве натуральных чисел. Приведены примеры вычисления $g(\theta, \lambda, l)$ по полученной формуле. Число Фробениуса $g(\theta, \lambda, l)$ использовано для оценки экспонентов весьма широкого класса орграфов. Полученная оценка существенно улучшает известные оценки для рассмотренного класса орграфов.

1. Формула числа Фробениуса для трёх аргументов

Обозначим $K(\theta, \lambda, l)$ множество натуральных чисел k , таких, что $kdl \in C(\theta, \lambda)$, $S(l)$ — подмножество множества $C(\theta, \lambda)$:

$$S(l) = \bigcup_{k \in K(\theta, \lambda, l)} \{(kdl + b) \in C(\theta, \lambda) : b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}\}.$$

Утверждение 1.

- а) Если $a \in \mathbb{N}$ и $d \mid a$, то $l \mid a$, если и только если $dl \mid a$;
- б) $S(l) = C(\theta, \lambda) \cap \langle \theta, \lambda, l \rangle$;
- в) $C(\theta, \lambda) \setminus S(l) \neq \emptyset$;
- г) $S(l) = \emptyset$, если и только если $K(\theta, \lambda, l) = \emptyset$.

Доказательство.

а) По условию $d = (\theta, \lambda)$ и числа θ, λ, l взаимно простые, тогда $(l, d) = 1$, отсюда следует требуемое утверждение.

б) Пусть $a \in C(\theta, \lambda) \cap \langle \theta, \lambda, l \rangle$. Тогда $a = nl + b$, где $b \in \langle \theta, \lambda \rangle$, при этом $n \in \mathbb{N}$, иначе при $n = 0$ имеем противоречие: $a \in \langle \theta, \lambda \rangle$.

Ввиду $a \in C(\theta, \lambda)$ имеем $a - b = nl \in C(\theta, \lambda)$, иначе приходим к противоречию: $a \in \langle \theta, \lambda \rangle$.

Заметим, что $d \mid nl$ и $l \mid nl$, тогда по утверждению 1а верно $dl \mid nl$. Отсюда $nl = kdl$ при натуральном k , где $k \in K(\theta, \lambda, l)$, так как $nl \in C(\theta, \lambda)$. Тогда $a = kdl + b \in S(l)$. Следовательно, $C(\theta, \lambda) \cap \langle \theta, \lambda, l \rangle \subseteq S(l)$.

Обратно, пусть $a \in S(l)$, тогда $a = kdl + b$ при некотором $k \in K(\theta, \lambda, l)$, где $ndl \in C(\theta, \lambda)$ и $b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$. По определению $S(l) \subseteq C(\theta, \lambda)$, поэтому получаем $a \in C(\theta, \lambda) \cap \langle \theta, \lambda, l \rangle$. Значит, выполнено и обратное включение $S(l) \subseteq C(\theta, \lambda) \cap \langle \theta, \lambda, l \rangle$.

в) Для любого $b \in \{1, \dots, \theta - 1\}$ выполнено $b \notin \langle \theta, \lambda \rangle$ и $b \notin \langle \theta, \lambda, l \rangle$, тогда $b \in C(\theta, \lambda)$ и $b \notin S(l)$. Следовательно, $C(\theta, \lambda) \setminus S(l) \neq \emptyset$.

г) Следует из определения множества $S(l)$. ■

Уточним строение множества $S(l)$. Определим на множестве $\mathbb{N}_0^2$ всех пар целых неотрицательных чисел отношение частичного порядка: $(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2)$, если и только если $n_1 \leq n_2$ и $m_1 \leq m_2$, при этом если $n_1 < n_2$ или $m_1 < m_2$, то пишется $(n_1, m_1) < (n_2, m_2)$. Множество $\mathbb{N}_0^2$ — решётка относительно частичного порядка $\leq$. Нулём решетки $\mathbb{N}_0^2$ является пара $(0, 0)$. Через $I(n, m)$ обозначим идеал решетки $\mathbb{N}_0^2$:

$$I(n, m) = \{(n', m') \in \mathbb{N}_0^2 : (n', m') \leq (n, m)\}.$$

На решётке $\mathbb{N}_0^2$ определена операция сложения $(n, m) + (n', m') = (n + n', m + m')$, относительно которой множество $\mathbb{N}_0^2$ образует полугруппу. (Заметим, что эта операция отличается от операции сложения в решётке, определяемой как $a + b = \sup\{a, b\}$.)

Лемма 1. Любое число $b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации чисел θ и λ с целыми неотрицательными коэффициентами.

Доказательство. Пусть имеются два различных представления

$$b = n\theta + m\lambda = n'\theta + m'\lambda.$$

Все коэффициенты положительные, поэтому пары (n, m) и (n', m') несравнимы. Пусть $0 \leq n < n'$ и $0 \leq m' < m$. Тогда $(n' - n)\theta = (m - m')\lambda$. Так как числа θ/d и λ/d взаимно простые, последнее равенство выполнено только если $n' - n = k\lambda/d$ и $m - m' = k\theta/d$ при некотором натуральном k . Отсюда $m \geq k\theta/d$ и $b \geq n\theta + k\theta\lambda/d \geq \theta\lambda/d$, то есть в соответствии с (4) $b > z$, что противоречит условию $b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$. ■

Лемма 1 устанавливает биекцию f между множеством $\overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$ и подмножеством решетки $\mathbb{N}_0^2$: если $b = n\theta + m\lambda$, то $f(b) = (n, m)$. В этом случае определим идеал $I(b) = I(n, m)$.

Заметим, что полугрупповая операция на множестве $\overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$ согласована с операцией сложения в $\mathbb{N}_0^2$, то есть если $a, b, (a + b) \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$, то $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

Лемма 2. Если $a, b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$, то $a - b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$, если и только если $f(b) \leq f(a)$.

Доказательство. Пусть $f(a) = (n, m)$, $f(b) = (n', m')$. Если $(n', m') \leq (n, m)$, то $f(a - b) = (n - n', m - m')$, то есть $a - b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$.

Обратно, если $a - b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$, то $f(a - b) = (n'', m'')$, где $n'', m'' \geq 0$. Тогда $a = b + (a - b)$, следовательно, $(n', m') \leq (n, m)$, то есть $f(b) \leq f(a)$. ■

Утверждение 2. $S(l) = \bigcup_{k \in K(\theta, \lambda, l)} (kdl + I(g(\theta, \lambda) - kdl))$.

Доказательство. Обозначим

$$b_k = g(\theta, \lambda) - kdl, \tag{5}$$

где $k \in K(\theta, \lambda, l)$. В силу равенств (2), (3) при $k \in K(\theta, \lambda, l)$ выполнено $b_k \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$, тогда $kdl + b_k = g(\theta, \lambda) \in S(l)$. Возьмём $b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$; если $f(b) \leq f(b_k)$ и $kdl + b \in C(\theta, \lambda)$, то $kdl + b \in S(l)$. Тогда $(kdl + I(b_k)) \subseteq S(l)$. В силу произвольности $k \in K(\theta, \lambda, l)$ получаем $\bigcup_{k \in K(\theta, \lambda, l)} (kdl + I(b_k)) \subseteq S(l)$.

Обратно, если $a \in S(l)$, то по определению $a = kdl + b$, где $a, kdl \in C(\theta, \lambda)$ и $b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$. Тогда $b = a - kdl$. Вычитая это равенство из (5), получаем $b_k - b = g(\theta, \lambda) - a$. В силу

равенств (2), (3) имеем $(g(\theta, \lambda) - a) \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$, следовательно, $b_k - b \in \overline{\langle \theta, \lambda \rangle}$. Отсюда $f(b) \leq f(b_k)$ в соответствии с леммой 2, то есть $b \in I(b_k)$ и $a \in (kdl + I(b_k))$. Таким образом, верно и обратное включение $S(l) \subseteq \bigcup_{k \in K(\theta, \lambda, l)} (kdl + I(b_k))$. ■

Теорема 1. $g(\theta, \lambda, l) = \max C(\theta, \lambda) \setminus S(l) + (d - 1)l$.

Доказательство. Пусть $d = 1$. По определению $C(\theta, \lambda, l) = \mathbb{N} \setminus \langle \theta, \lambda, l \rangle$. При $d = 1$ имеет место включение $C(\theta, \lambda, l) \subseteq C(\theta, \lambda)$, поэтому

$$C(\theta, \lambda, l) = C(\theta, \lambda) \setminus \langle \theta, \lambda, l \rangle = C(\theta, \lambda) \setminus (C(\theta, \lambda) \cap \langle \theta, \lambda, l \rangle).$$

Отсюда в соответствии с утверждением 1б получим $C(\theta, \lambda, l) = C(\theta, \lambda) \setminus S(l)$. Следовательно, $g(\theta, \lambda, l) = \max C(\theta, \lambda, l) = \max C(\theta, \lambda) \setminus S(l)$, то есть при $d = 1$ теорема верна.

Пусть $d > 1$. Из разбиения $\mathbb{N}_0 = \bigcup_{r=0}^{d-1} (r + d\mathbb{N}_0)$, где $r + d\mathbb{N}_0$ — множество всех чисел из $\mathbb{N}_0$, сравнимых с r по модулю d , $r = 0, \dots, d - 1$, следует разбиение

$$C(\theta, \lambda, l) = \bigcup_{r=0}^{d-1} (r + d\mathbb{N}_0) \cap C(\theta, \lambda, l).$$

Отсюда получаем

$$\max C(\theta, \lambda, l) = \max \{z_0, \dots, z_{d-1}\}, \quad (6)$$

где $z_r = \max((r + d\mathbb{N}_0) \cap C(\theta, \lambda, l))$, $r = 0, \dots, d - 1$.

Используем очевидное разбиение $d\mathbb{N}_0 = \langle \theta, \lambda \rangle \cup S(l) \cup (C(\theta, \lambda) \setminus S(l))$.

Любое число a из $C(\theta, \lambda, l)$ имеет вид $a = nl + b$, где n — натуральное, b кратно d и $b \notin \langle \theta, \lambda, l \rangle$. Тогда $b \notin \langle \theta, \lambda \rangle \cup S(l)$, иначе имеем противоречие: $a \in \langle \theta, \lambda, l \rangle$. Следовательно, $b \in C(\theta, \lambda) \setminus S(l)$ и при $r = 0, \dots, d - 1$

$$z_r = \max((r + d\mathbb{N}_0) \cap (C(\theta, \lambda) \setminus S(l))).$$

Число $a \in (r + d\mathbb{N}_0) \cap (C(\theta, \lambda) \setminus S(l))$, если и только если $nl \equiv r \pmod{d}$, $r = 0, \dots, d - 1$. Следовательно, $z_r = nl + \beta$, где $nl \equiv r \pmod{d}$ и $\beta = \max C(\theta, \lambda) \setminus S(l)$. Покажем, что n — наименьшее натуральное, при котором $nl \equiv r \pmod{d}$. Заметим, что в силу взаимной простоты чисел d и l при любом $r = 0, \dots, d - 1$ такое наименьшее $n \in \{0, \dots, d - 1\}$. Действительно, при $n \geq d$ разделим n на d с остатком: $n = dq + \delta$, где $q > 0$, $\delta < d$. Тогда

$$z_r = (qdl + \beta) + \delta l,$$

где число $(qdl + \beta)$ больше β и кратно d . Значит, $(qdl + \beta) \in \langle \theta, \lambda \rangle \cup S(l)$, следовательно, $(qdl + \beta) \in \langle \theta, \lambda, l \rangle$. Отсюда получаем противоречие: $z_r \in \langle \theta, \lambda, l \rangle$. Тогда в соответствии с (6)

$$\max C(\theta, \lambda, l) = \max C(\theta, \lambda) \setminus S(l) + \max \{0, l, \dots, (d - 1)l\} = \max C(\theta, \lambda) \setminus S(l) + (d - 1)l.$$

Теорема доказана. ■

Замечание. Из теоремы 1 и равенства (4) следует оценка числа $g(\theta, \lambda, l)$ (частный случай оценки Брауэра [7]):

$$g(\theta, \lambda, l) \leq \theta\lambda/d - \theta - \lambda + (d - 1)l. \quad (7)$$

Пример 1. Определим $g(7, 11, 12)$. Вычисляем: $d = 1$, $z = 7 \cdot 11 - 7 - 11 = 59$, тогда $|\langle 7, 11 \rangle| = |C(7, 11)| = 6 \cdot 10/2 = 30$.

Выпишем в табл. 1 множество чисел $a \in \overline{\langle 7, 11 \rangle}$ с соответствующими парами $f(a) \in \mathbb{N}_0^2$ и множество чисел $(z - a) \in C(7, 11)$. Получаем, что множество чисел из $C(7, 11)$, кратных 12, есть $\{12, 24, 48\}$. Тогда $K(7, 11, 12) = \{1, 2, 4\}$. В соответствии с утверждением 2 надо определить идеалы $I(59 - 12) = I(47)$, $I(59 - 24) = I(35)$, $I(59 - 48) = I(11)$.

Т а б л и ц а 1

$a/f(a)$	$z - a$	$a/f(a)$	$z - a$	$a/f(a)$	$z - a$	$a/f(a)$	$z - a$	$a/f(a)$	$z - a$	$a/f(a)$	$z - a$
56/(8,0)	3										
49/(7,0)	10										
42/(6,0)	17	53/(6,1)	6								
35/(5,0)	24	46/(5,1)	13	57/(5,2)	2						
28/(4,0)	31	39/(4,1)	20	50/(4,2)	9						
21/(3,0)	38	32/(3,1)	27	43/(3,2)	16	54/(3,3)	5				
14/(2,0)	45	25/(2,1)	34	36/(2,2)	23	47/(2,3)	12	58/(2,4)	1		
7/(1,0)	52	18/(1,1)	41	29/(1,2)	30	40/(1,3)	19	51/(1,4)	8		
0/(0,0)	59	11/(0,1)	48	22/(0,2)	37	33/(0,3)	26	44/(0,4)	15	55/(0,5)	4

Из табл. 1 имеем: $f(47) = (2, 3)$, $f(35) = (5, 0)$, $f(11) = (0, 1)$. Зададим идеалы в табл. 2 (три части табл. 1).

Т а б л и ц а 2

Идеал $I(47)$				Идеал $I(35)$	Идеал $I(11)$
				35/(5,0)	
				28/(4,0)	
				21/(3,0)	
14/(2,0)	25/(2,1)	36/(2,2)	47/(2,3)	14/(2,0)	
7/(1,0)	18/(1,1)	29/(1,2)	40/(1,3)	7/(1,0)	11/(0,1)
0/(0,0)	11/(0,1)	22/(0,2)	33/(0,3)	0/(0,0)	0/(0,0)

Из табл. 2 в соответствии с утверждением 2 получаем

$$\begin{aligned} S(12) &= (12 + I(47)) \cup (24 + I(47)) \cup (48 + I(11)) = \\ &= \{26, 19, 12, 37, 30, 23, 48, 41, 34, 59, 52, 45, 38, 31, 24\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из табл. 1 получаем окончательно

$$g(7, 11, 12) = \max(C(7, 11) \setminus S(12)) = \max\{17, 10, 27, 20, 13, 6, 16, 9, 2, 5, 15, 8, 1, 4\} = 27.$$

Пример 2. Определим $g(8, 38, 41)$. Вычисляем: $d = 2$, $z = 2(4 \cdot 19 - 4 - 19) = 106$, тогда $|\langle 8, 38 \rangle| = |C(8, 38)| = 3 \cdot 18/2 = 27$.

Выпишем в табл. 3 множество чисел $a \in \overline{\langle 8, 38 \rangle}$ с соответствующими парами $f(a) \in \mathbb{N}_0^2$ и множество чисел $(z - a) \in C(8, 38)$. Получаем, что во множестве $C(8, 38)$ лишь число 82 кратно 82, тогда $K(8, 38, 41) = \{1\}$. В соответствии с утверждением 2 определяем идеал $I(106 - 82) = I(24)$.

Из табл. 3 также имеем: $f(24) = (3, 0)$; $I(24) = \{24, 16, 8, 0\}$; $S(41) = 82 + I(24) = \{82, 90, 98, 106\}$. Отсюда и из табл. 3 получаем окончательно

$$g(8, 38, 41) = \max(C(8, 38) \setminus S(41)) + 41 = 74 + 41 = 115.$$

Т а б л и ц а 3

$a/f(a)$	$z - a$	$a/f(a)$	$z - a$	$a/f(a)$	$z - a$
104/(13,0)	2				
96/(12,0)	10				
88/(11,0)	18				
80/(10,0)	26				
72/(9,0)	34				
64/(8,0)	42	102/(8,1)	4		
56/(7,0)	50	94/(7,1)	12		
48/(6,0)	58	86/(6,1)	20		
40/(5,0)	66	78/(5,1)	28		
32/(4,0)	74	70/(4,1)	36		
24/(3,0)	82	62/(3,1)	44	100/(3,2)	6
16/(2,0)	90	54/(2,1)	52	92/(2,2)	14
8/(1,0)	98	46/(1,1)	60	84/(1,2)	22
0/(0,0)	106	38/(0,1)	68	76/(0,2)	30

Заметим, что описание формулы числа Фробениуса для четырёх аргументов несколько сложнее, чем для трёх. Один из факторов усложнения — отсутствие жёсткой связи между множествами $\langle \theta, \lambda, l \rangle$ и $C(\theta, \lambda, l)$, подобной той, что задана для множеств $\langle \theta, \lambda \rangle$ и $C(\theta, \lambda)$ равенством (2).

2. Оценка экспонентов ориентированных графов

Используем формулу числа $g(\theta, \lambda, l)$ для оценки экспонентов некоторых графов.

Граф Γ с матрицей смежности вершин M называется примитивным, если $M^\gamma > 0$ при некотором натуральном γ . Наименьшее такое число γ называют экспонентом (показателем примитивности) графа Γ (обозначается $\exp \Gamma$).

Универсальный критерий примитивности графа Γ [8, с. 226] следующий: если $C_1, \dots, C_k$ суть все простые циклы графа Γ длин $l_1, \dots, l_k$ соответственно, то сильносвязный орграф (связный граф) Γ примитивный, если и только если $(l_1, \dots, l_k) = 1$.

Универсальная и частные оценки экспонентов n -вершинных графов систематизированы и даны в [9]. Рассмотрим новые классы примитивных орграфов и графов и получим оценку их экспонентов.

В n -вершинном орграфе (графе) Γ при $n > 1$ всякие три дуги (ребра) вида (i, r) , (r, j) и (i, j) , $i, r, j \in \{1, \dots, n\}$, назовём транзитивной тройкой дуг (рёбер). Заметим, что всякая петля в орграфе (графе) является такой тройкой. Длину пути w в Γ , измеряемую числом дуг (рёбер), составляющих путь, обозначим $l(w)$. В частности, петля в Γ есть путь длины 1. Пустой путь (путь длины 0, который не содержит дуг (рёбер) и может относиться к любой вершине орграфа) обозначим $w_\emptyset$.

Для последовательности $w_1, \dots, w_m$ из $m > 1$ непустых путей определён путь w с помощью операции конкатенации, если конечная вершина предыдущего пути совпадает с начальной вершиной следующего пути (операция конкатенации обозначена символом $\cdot$), записывается $w = w_1 \cdot \dots \cdot w_m$. Если $w = w_1 \cdot \dots \cdot w_m$, то $l(w) = l(w_1) + \dots + l(w_m)$.

Теорема 2. Если при $n > 2$ в сильносвязном n -вершинном орграфе Γ имеются транзитивная тройка дуг (i, r) , (r, j) , (i, j) и простой путь w из j в i длины $t - 1$, где $t > 1$, то орграф Γ примитивный и выполнены оценки:

- если $i = j$, или $r = i$, или $r = j$, то $\exp \Gamma \leq 2n - 2$;
- если i, j, r — три различные вершины и путь w не проходит через вершину r , то $\exp \Gamma \leq (t - 1)^2 + 2n - 2$;

- в) если i, j, r — три различные вершины и путь w проходит через вершину r , которая делит путь w на пути длины $\tau - 1$ и $t - \tau$, где $0 < t - \tau < \tau < t$, то

$$\exp \Gamma \leq g(t - \tau + 1, \tau, t) + 2(n - t + \tau) - 1,$$

где g — число Фробениуса от трёх аргументов.

Доказательство.

а) Если $i = j$, или $r = i$, или $r = j$, то в Γ имеется петля, и оргграф Γ примитивный. Тогда в соответствии с [8, с. 397] $\exp \Gamma \leq 2n - 2$.

б) Если i, j, r суть три различные вершины, $n > 2$ и путь w не проходит через вершину r , то $t \leq n - 1$ и в Γ имеются циклы z_1 и z_2 , где $z_1 = w \cdot (i, r) \cdot (r, j)$, $z_2 = w \cdot (i, j)$. Отсюда $l(z_1) = t + 1$, $l(z_2) = t$, следовательно, $(l(z_1), l(z_2)) = 1$ и в соответствии с универсальным критерием оргграф Γ является примитивным. Цикл z_2 — часть цикла z_1 , отсюда в соответствии с оценкой [10, теорема 1б] $\exp \Gamma \leq (t - 1)^2 + 2n - 2$.

в) Если i, j, r суть три различные вершины, $n > 2$ и путь w проходит через вершину r , то $t \leq n$ и выполнено равенство $w = w_1 \cdot w_2$, где w_1 есть простой путь из j в r и w_2 — простой путь из r в i . Тогда в Γ имеются циклы z_0, z_1 и z_2 , где $z_0 = w \cdot (i, j)$, $z_1 = w_1 \cdot (r, j)$, $z_2 = (i, r) \cdot w_2$. В соответствии с условиями $l(z_0) = t$, $l(z_1) = \tau$, $l(z_2) = t - \tau + 1$.

Пусть $(l(z_0), l(z_1), l(z_2)) = \delta$. Тогда δ делит $l(z_1) + l(z_2)$, то есть δ делит $t + 1$. Вместе с тем δ делит $l(z_0)$, где $l(z_0) = t$. Следовательно, $\delta = 1$ и граф Γ примитивный.

Для получения оценки $\exp \Gamma$ воспользуемся утверждением 3б из [10].

При обходе какого-либо цикла z' выделим его вершину ε как начальную, цикл в этом случае обозначим $z'(\varepsilon)$. Для целого неотрицательного q через $qz'(\varepsilon)$ обозначим цикл, составленный из q -кратно пройденного цикла $z'(\varepsilon)$, где $0z'(\varepsilon) = w_\emptyset$.

Пусть множество W состоит из всех вершин пути w и V — из остальных вершин оргграфа Γ , в частности, не исключено $V = \emptyset$. Пусть α, β — любые вершины оргграфа Γ и $u(\alpha, \beta)$ — путь из α в β вида

$$u(\alpha, \beta) = u(\alpha, r) \cdot z(r) \cdot u(r, \beta), \quad (8)$$

где $u(\alpha, r)$ — кратчайший путь из α в r ; $u(r, \beta)$ — кратчайший путь из r в β ; $z(r)$ — цикл, проходящий только через вершины множества W . Так как вершина r является общей для циклов z_0, z_1 и z_2 , то цикл $z(r)$ может быть представлен в виде

$$z(r) = q_0 z_0(r) \cdot q_1 z_1(r) \cdot q_2 z_2(r), \quad (9)$$

где q_0, q_1, q_2 — целые неотрицательные числа.

Оценим длину пути $u(\alpha, \beta)$. Используем представления

$$u(\alpha, \beta) = u(\alpha, \varepsilon) \cdot u(\varepsilon, r), u(r, \beta) = u(r, \xi) \cdot u(\xi, \beta), \quad (10)$$

где $u(\alpha, \varepsilon)$ — кратчайший путь из вершины α до ближайшей вершины ε из множества W ; $u(\xi, \beta)$ — кратчайший путь в β из ближайшей вершины ξ множества W ; $u(\varepsilon, r)$ и $u(r, \xi)$ — пути наименьшей длины соответственно из ε в r и из r в ξ , проходящие только через вершины множества W . Заметим, что при $\alpha \in W$ путь $u(\alpha, \varepsilon)$ пустой, при $\beta \in W$ путь $u(\xi, \beta)$ пустой.

Учитывая, что $|W| = t$, где по условию $t \leq n$, из определения данных путей получаем $l(u(\alpha, \varepsilon)) \leq n - t$, $l(u(\xi, \beta)) \leq n - t$, $l(u(\varepsilon, r)) < \max\{l(z_1), l(z_2)\} = \tau$, $l(u(r, \xi)) < \max\{l(z_1), l(z_2)\} = \tau$. Отсюда и из (10) следует

$$l(u(\alpha, r)) \leq n - t + \tau - 1, \quad l(u(r, \beta)) \leq n - t + \tau - 1. \quad (11)$$

В соответствии с определением числа Фробениуса и равенством (9) коэффициенты q_0, q_1, q_2 можно выбрать так, чтобы длина пути $z(r)$ равнялась любому числу, превосходящему число Фробениуса $g(t - \tau + 1, \tau, t)$. Следовательно, из (8) и (11) получаем, что подбором коэффициентов q_0, q_1, q_2 можно добиться, чтобы для любых вершин α, β длина пути $u(\alpha, \beta)$ принимала любое значение, большее или равное $g(t - \tau + 1, \tau, t) + 2(n - t + \tau) - 1$. По следствию 1 теоремы 2 [11] это равносильно положительности матрицы A^s при любом $s \geq g(t - \tau + 1, \tau, t) + 2(n - t + \tau) - 1$, где A — матрица смежности вершин графа Γ . Требуемая оценка экспонента выполнена. ■

Следствие. Если выполнены условия теоремы 2в и $(t + 1, \tau) = d$, то

$$\exp \Gamma \leq (t - \tau + 1)\tau/d + (d - 4)t + 2n + 2\tau - 2.$$

Доказательство. Заметим, что $(t + 1, \tau) = (t - \tau + 1, \tau) = d$. С учётом этого требуемая оценка получается из теоремы 2в с использованием оценки (7). ■

Пример 3. Пусть для примитивного орграфа Γ со 100 вершинами выполнены условия теоремы 2в, где $t = 62$, $\tau = 36$. Тогда $t - \tau + 1 = 27$, требуется определить $g(27, 36, 62)$.

Вычисляем: $d = (27, 36) = 9$, $z = 9 \cdot 5 = 45$, тогда $|\overline{\langle 27, 36 \rangle}| = |C(27, 36)| = 6/2 = 3$.

Поскольку $\overline{\langle 27, 36 \rangle} = \{0, 27, 36\}$, $C(27, 36) = \{9, 18, 45\}$, получаем $S(62) = \emptyset$ и $\max C(27, 36) = 45$. В соответствии с теоремой 1 $g(27, 36, 62) = 45 + 8 \cdot 62 = 541$. Отсюда по теореме 2в $\exp \Gamma \leq 541 + 2 \cdot 74 - 1 = 688$.

Пример 4. Пусть для примитивного орграфа Γ со 100 вершинами выполнены условия теоремы 2в, где $t = 59$, $\tau = 52$. Тогда $t - \tau + 1 = 8$, требуется определить $g(8, 52, 59)$.

Вычисляем: $d = (8, 52) = 4$, $z = 4 \cdot 11 = 44$, тогда $|\overline{\langle 8, 52 \rangle}| = |C(8, 52)| = 12/2 = 6$.

Имеем $\overline{\langle 8, 52 \rangle} = \{0, 8, 16, 24, 32, 40\}$, $C(8, 52) = \{4, 12, 20, 28, 36, 44\}$. Множество чисел из $C(8, 52)$, кратных 236, пусто, значит, пусто множество $S(236)$. Тогда по теореме 1

$$g(8, 52, 59) = \max C(8, 52) + 3 \cdot 59 = 44 + 177 = 221.$$

Отсюда по теореме 2в $\exp \Gamma \leq 221 + 2 \cdot 93 - 1 = 406$.

Точное сравнение полученной оценки с известными оценками затруднено наличием в ней слагаемого в виде числа Фробениуса, которое во многих случаях вносит основной вклад в величину оценки. Рассмотрим числовые примеры.

Для примитивного 100-вершинного орграфа из примера 3 оценки следующие:

- универсальная оценка Виландта [12] — 9802;
- оценка, данная в [8, с. 227], — 2746 (длина кратчайшего цикла 27);
- оценка теоремы 1б [10] — 1758 (длины циклов 27 и 62);
- оценка примера 3 — 688.

Для примитивного 100-вершинного орграфа из примера 4 оценки следующие:

- универсальная оценка Виландта [12] — 9802;
- оценка, данная в [8, с. 227], — 884 (длина кратчайшего цикла 8);
- оценка теоремы 1б [10] — 597 (длины циклов 8 и 59);
- оценка примера 4 — 406.

Анализ числовых примеров позволяет считать, что полученная оценка, как правило, значительно точнее других известных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alfonsin J. R.* The Diophantine Frobenius Problem. Oxford University Press, 2005.
2. *Sylvester J. J.* Problem 7382 // Mathematical Questions from the Educational Times. 1884. V. 37. P. 26.
3. *Curtis F.* On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup // Math. Scand. 1990. No. 67. P. 190–192.
4. *Heap B. R. and Lynn M. S.* On a linear Diophantine problem of Frobenius: an improved algorithm // Numer. Math. 1965. No 7. P. 226–231.
5. *Bocker S. and Liptak Z.* The “money changing problem” revisited: computing the Frobenius number in time $O(ka_1)$. Technical Report No. 2004-2, Univ. of Bielefeld, Technical Faculty, 2004.
6. *Фомичев В. М.* Эквивалентные по Фробениусу примитивные множества чисел // Прикладная дискретная математика. 2014. № 1(23). С. 20–26.
7. *Brauer A.* On a problem of partitions // Am. J. Math. 1942. No. 64. P. 299–312.
8. *Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000. 448 с.
9. *Козос К. Г., Фомичев В. М.* Положительные свойства неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4(18). С. 116–121.
10. *Фомичев В. М.* Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). С. 101–112.
11. *Берж К.* Теория графов и её применение. М.: ИЛ, 1962. 320 с.
12. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. N. 52. S. 642–648.