ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
кафедра общей математики

«Утверждаю»
Декан ММФ
В.Н. Берцун
«27» марта 2014 г.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 2012 года

Томск
2014

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики
Зав. кафедрой доцент Е. Н. Путятина

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией ММФ
Протокол № 3 от 20 марта 2014 г.
Председатель методической комиссии О.П. Федорова.

В данной работе представлены задачи с решениями олимпиад по математике, которые прошли в Томском государственном университете в 2013 году. Ряд задач являются авторскими. Многие задачи взяты из сборника избранных задач из журнала «American mathematical monthly» под редакцией В.М. Алексеева, а также из сборника «Избранные олимпиадные задачи» Н.Б. Васильева, А.П. Савина и А.А. Егорова.

Предложенные задания могут быть использованы для подготовки к олимпиаде по математике студентов дневной формы обучения РФФ, ФТФ, ФФ, ГГФ, МФУ, БПФ, ФсФ, ПФ, ЮИ, ИФ.

СОСТАВИТЕЛИ:
доцент Галанова Н.Ю.
ст. пр. Кошельский Ю.К.,
доцент Лазарева Е.Г.,
доцент Путятина Е.Н.,
доцент Тимошенко Е.А.,
доцент Устинова И.Г.

Содержание

1. Олимпиада по математике – 2012. Задачи для естественных факультетов ..……...4
2. Олимпиада по математике – 2012. Задачи для первого курса. Физические факультеты……..5
3. Олимпиада по математике – 2012. Задачи для старших курсов. Физические факультеты……..6
4. Решения задач олимпиады по математике (естественные факультеты)……..7
5. Решения задач олимпиады по математике (физические факультеты, I курс)……11
6. Решения задач олимпиады по математике (физические факультеты, старшие курсы)……15
7. Межвузовская олимпиада по математике – 2012. Задачи для первого курса…….22
8. Межвузовская олимпиада по математике – 2012. Задачи для старших курсов…….....23
9. Решения задач олимпиады по математике (первый курс)……. 24
10. Решения задач олимпиады по математике (старшие курсы)…..28
11. Литература……....35

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ – 2012

Задачи для естественных факультетов

1. Найти площадь плоской фигуры, состоящей из точек (x, y), координаты которых удовлетворяют условию $\left(x^2+y^2-x-y\right)\left(x^2+y^2-1\right)\le 0$.

2. Исследовать функцию $\Phi(x)=\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ на экстремум и найти точки перегиба. Вычислить значения функции в найденных точках.

3. Исследовать функцию на чётность-нечётность: $f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$.

4. Не пользуясь калькулятором, установить, какое из чисел больше: 61^{29} или 257^{22}.

5. Является ли число 3^8+4^{13} простым?

6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+2)}$.

7. Даны кривые $y=x^2$ и $x=y^2$. Найти углы между этими кривыми в точках их пересечения.

I курс (физические факультеты)

1. Чему равен диаметр наибольшего круга, который можно поместить внутрь фигуры, ограниченной параболами $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$?

2. Решить уравнение $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$.

3. Пусть даны числа a, b. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $a\cos x + b\sin x$.

4. Последовательность чисел x_n определяется следующими формулами:

$x_1 = a, x_2 = b, \quad x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. Исследовать функцию $\Phi(x) = \int\limits_0^x e^{t^2}(t+2)dt$ на экстремум и на перегиб.

6. Найти интеграл $\int \dfrac{1 - \operatorname{th}^2 x}{\left(\operatorname{th}^2 x + 1\right)^{3/2}} dx$.

7. Решить уравнение $\sqrt[4]{3x - 27x^2} + 3\sqrt{9x^2 - 2x + 1} = 2\sqrt{2}$.

Старшие курсы (физические факультеты)

1. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что производная $f'(x)$ определена и непрерывна в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ и при любом $x\in\mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x)+f'(x)\operatorname{arctg}x=0$. Доказать, что $f(x)=0$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\left|x^2+x+y\right|+\left|x\right|=10$.

3. Назовём движение в положительном направлении оси *Ox* движением вправо, в положительном направлении оси *Oy* — движением вверх, в отрицательном направлении оси *Ox* — движением влево, в отрицательном направлении оси *Oy* — движением вниз. Материальная точка начинает движение на плоскости, выходя из начала координат.

На первом этапе она делает шаги длиной $1,\pi,\frac{\pi^2}{2!},\frac{\pi^3}{3!}$ соответственно вправо, вверх, влево и вниз, на втором этапе — шаги длиной $\frac{\pi^4}{4!},\frac{\pi^5}{5!},\frac{\pi^6}{6!},\frac{\pi^7}{7!}$ в тех же направлениях соответственно. Процесс продолжается до бесконечности. Найти координаты предельного положения материальной точки.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, если известно, что $x_1^2+y_1^2+z_1^2\le 4,\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\le 9$.

5. Решить задачу Коши: $\left(1+x^2\right)y''+2y+4xy'=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

6. Вычислить $\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

7. Рассматриваются всевозможные отрезки длины 10, один конец которых принадлежит прямой $3x-4y=0$, а другой — прямой $3x+4y=0$. Какое уравнение имеет кривая, на которой лежат середины всех таких отрезков?

Решения задач олимпиады по математике (естественные факультеты)

1. Найти площадь плоской фигуры, состоящей из точек (x, y), координаты которых удовлетворяют условию $\left(x^2+y^2-x-y\right)\left(x^2+y^2-1\right)\le 0$.

Решение. Неравенство выполнено в двух случаях:

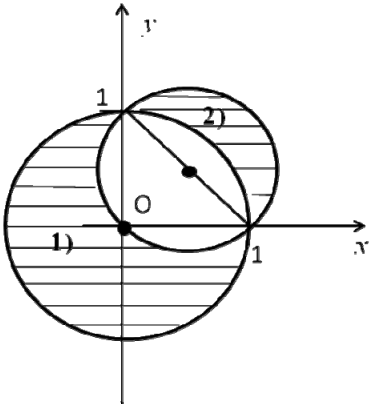
1) $x^2+y^2-x-y\ge 0$, $x^2+y^2-1\le 0$;

2) $x^2+y^2-x-y\le 0$, $x^2+y^2-1\ge 0$.

Заметим, что $x^2+y^2-x-y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, поэтому неравенство $x^2+y^2-x-y\le 0$ превращается в $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$, что даёт круг с центром в точке $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Неравенство $x^2+y^2-1\le 0$, очевидно, описывает круг с центром в точке $(0,0)$ радиуса 1.

Поэтому множество точек, удовлетворяющих условию $\left(x^2+y^2-x-y\right)\left(x^2+y^2-1\right)\le 0$, распадается на две части в соответствии с рассмотренными случаями:



Площадь заштрихованных частей (искомая) может быть выражена следующим образом:
$S_{иск} = S_1 + S_2 - 2(S_2/2 + (S_1/4 - 1/2))$, где S_1 – площадь большего круга, S_2 – площадь меньшего круга. Таким образом, $S_{иск} = \pi + \pi/2 - 2(\pi/4 + (\pi/4 - 1/2)) = \pi/2 + 1$.
Ответ: $\pi/2 + 1$.

2. Исследовать функцию $\Phi(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ на экстремум и найти точки перегиба. Вычислить значения функции в найденных точках.

Решение. $\Phi'(x) = (x-1)(x-2)^2$, откуда с учетом достаточного условия экстремума получаем, что $x = 1$ является точкой минимума; $\Phi(1) = -\frac{17}{12}$.
$\Phi''(x) = (x-2)(3x-4)$; учитывая достаточное условие перегиба, заключаем, что $x = 2, \quad x = \frac{4}{3}$ являются точками перегиба. При этом $\Phi(2) = -\frac{4}{3}$, $\Phi\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{112}{81}$.

3. Исследовать функцию на чётность-нечётность:
$f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$.

Решение:

$$f(-x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\ln\left(\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}\right)=-\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)=-f(x).$$

Следовательно, функция нечётна.

4. Не пользуясь калькулятором, установить, какое из чисел больше: 61^{29} или 257^{22}.

Решение. $61^{29}<64^{29}=\left(2^6\right)^{29}=2^{174}$; $257^{22}>256^{22}=\left(2^8\right)^{22}=2^{176}$.

Следовательно, $61^{29}<257^{22}$.

5. Является ли число 3^8+4^{13} простым?

Решение: $3^8+4^{13}=\left(3^4\right)^2+2^2\cdot\left(4^6\right)^2+2\cdot3^4\cdot2\cdot4^6-2\cdot3^4\cdot2\cdot4^6=$

$=\left(3^4+2\cdot4^6\right)^2-2\cdot3^4\cdot2\cdot4^6=\left(3^4+2\cdot4^6+2\cdot3^2\cdot4^3\right)\cdot$

$\cdot\left(3^4+2\cdot4^6-2\cdot3^2\cdot4^3\right)$.

Таким образом, данное число является составным.

6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$.

Решение. Так как $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right),$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{4}$.

7. Даны кривые $y=x^2$ и $x=y^2$. Найти углы между этими кривыми в точках их пересечения.

Решение. Кривые пересекаются в точках $(0,0)$ и $(1,1)$.

Угол между двумя кривыми в некоторой точке определяется как угол между касательными к кривым в данной точке.

Уравнение касательной к кривой $y=f_1(x)=x^2$ в точке (x_0,y_0) имеет вид

$y=y_0+f_1'(x_0)(x-x_0)=y_0+2x_0(x-x_0)$, для второй кривой $y=f_2(x)=\sqrt{x}$ касательной в точке (x_0,y_0) является

$$y=y_0+f_2'(x_0)(x-x_0)=y_0+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0).$$

Тогда в точке $(1,1)$ имеем две прямые $y=2x-1$ и $y=\frac{x+1}{2}$, угол между ними равен

$$\varphi=\operatorname{arctg}f_1'(1)-\operatorname{arctg}f_2'(1)=\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

В точке $(0,0)$ касательными являются $y=0$ и $x=0$, угол между ними составляет $\frac{\pi}{2}=90^o$.

Решения задач олимпиады по математике (физические факультеты, I курс)

1. Чему равен диаметр наибольшего круга, который можно поместить внутрь фигуры, ограниченной параболами $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$?

Решение.
Введём обозначение $f(x) = 1 - x^2$. Если точка лежит на границе исходной фигуры и имеет абсциссу x, то она удалена от начала координат на расстояние

$$\sqrt{x^2 + (\pm f(x))^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} = \sqrt{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это означает, что круг с центром в начале координат и радиусом $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ лежит внутри фигуры. Заметим, что в точках с абсциссами $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ он соприкасается с границей фигуры, т.е. при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ выполнено $\sqrt{r^2 - x^2} = f(x)$.

Докажем, что найденное нами значение радиуса является максимальным. Рассмотрим произвольный круг, находящийся внутри заданной фигуры; пусть R — это радиус круга, а точка (A, B) — его центр. В силу симметрии можно считать, что $A \geq 0$ и $B \geq 0$. Верхняя граница круга имеет уравнение $y(x) = B + \sqrt{R^2 - (x - A)^2}$.
Допустим, что $R > r$. Тогда

$$y\left(A + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = B + \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} > \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq f\left(A + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Это значит, что точка $\left(A+\frac{1}{\sqrt{2}}, y\left(A+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ лежит на границе круга, но выше исходной фигуры — противоречие. Итак, найденное значение радиуса r является максимальным.

Ответ: наибольший диаметр равен $\sqrt{3}$**.**

2. Решить уравнение $\sin^5 x+\cos^5 x=1$.

Решение.

Очевидно, что x лежит в первой четверти (иначе 1 в сумме не получится). Рассмотрим функцию $y=\cos^5 x+\sin^5 x$; $y'=5\sin x\cos x\left(\sin^3 x-\cos^3 x\right)$.

Критические точки: $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{4}$, $x_3=\frac{\pi}{2}$.

Точка минимума – $x_2=\frac{\pi}{4}$; $y\left(x_2\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$, точки максимума – $x_1=0$ и $x_3=\frac{\pi}{2}$; $y\left(x_1\right)=1$, $y\left(x_3\right)=1$. В силу периодичности $y\left(x\right)$ имеем в итоге $x=2\pi n$ или $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

3. Пусть даны числа a,b. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $a\cos x+b\sin x$.

Решение.

Заметим, что выражение $a\cos x+b\sin x$ можно представить как скалярное произведение двумерных векторов $\overline{AB}\ (a,b)$ и $\overline{CD}\ \ (\cos x,\sin x)$. Посчитаем это скалярное произведение по-другому:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|\cos\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}\cos\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\overline{AB},\overline{CD}\right).$$

Так как вектор $\overline{CD}$ $(\cos x, \sin x)$ – это произвольный вектор единичной длины (x – произвольное число), то он может иметь с фиксированным вектором $\overline{AB}$ (a,b) произвольный угол и $\cos\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)$ принимает все значения от –1 до 1. Значит, минимальное значение выражения $a\cos x + b\sin x$ есть ($-\sqrt{a^2+b^2}$), а максимальное равно $\sqrt{a^2+b^2}$.

4. Последовательность чисел x_n определяется следующими формулами:

$x_1 = a,\ x_2 = b,\ \ x_n = \dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решение.

Имеем $x_k - x_{k-1} = \dfrac{x_{k-1}+x_{k-2}}{2} - x_{k-1} = -\dfrac{x_{k-1}-x_{k-2}}{2}$. Подставляя полученное выражение в очевидное равенство $x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})$, получим геометрическую прогрессию (начиная со второго слагаемого), сумма которой равна

$$x_n = a + (b-a) - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4} - \ldots + (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}} = a + (b-a)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= a + \frac{2}{3}(b-a) + \frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a+2b}{3}$.

5. Исследовать функцию $\Phi(x)=\int\limits_0^x e^{t^2}(t+2)dt$ на экстремум и на перегиб.

Решение.

$\Phi'(x)=e^{x^2}(x+2)$, откуда с учетом достаточного условия экстремума получаем, что $x=-2$ является точкой минимума. Далее, $\Phi''(x)=e^{x^2}(2x^2+4x+1)$; учитывая достаточное условие перегиба, заключаем, что $x_{1,2}=-1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ являются точками перегиба.

6. Найти интеграл $\int\frac{1-\operatorname{th}^2 x}{\left(\operatorname{th}^2 x+1\right)^{3/2}}dx$.

Решение. Используя тождество $1-\operatorname{th}^2 x\equiv\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, получим

$$\int\frac{1-\operatorname{th}^2 x}{\left(\operatorname{th}^2 x+1\right)^{3/2}}dx=\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\left(\operatorname{th}^2 x+1\right)^{3/2}}=\int\frac{d\left(\operatorname{th} x\right)}{\left(\operatorname{th}^2 x+1\right)^{3/2}}=\int\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^{3/2}},$$

где $z=\operatorname{th} x$.

Далее, $\int\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^{3/2}}=\int\frac{dz}{|z|^3\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{3/2}}=-\frac{1}{2}\operatorname{sgn} z\cdot\int\frac{d\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{3/2}}=$

$$=\frac{\operatorname{sgn} z}{2}\cdot 2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}+C=\frac{\operatorname{th}x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}}+C.$$

7. Решить уравнение $\sqrt[4]{3x-27x^2}+3\sqrt{9x^2-2x+1}=2\sqrt{2}$.

Решение.

ОДЗ: $3x(1-9x)\geq 0$, т.е. $x\in\left[0,\frac{1}{9}\right]$. Исследуем на этом отрезке функцию $y_2(x)=3\sqrt{9x^2-2x+1}$. Она убывает на отрезке $\left[0,\frac{1}{9}\right]$ $\left(y_2'(x)=\frac{3(9x-1)}{\sqrt{9x^2-2x+1}}\right)$ и поэтому имеет наименьшее значение в точке $x=\frac{1}{9}$; $y_2\left(\frac{1}{9}\right)=\sqrt{8}$.

Тогда $\sqrt[4]{3x-27x^2}+3\sqrt{9x^2-2x+1}\geq 0+y_2\left(\frac{1}{9}\right)=\sqrt{8}$.

Ясно, что равенство может достигаться лишь при $x=\frac{1}{9}$; проверка показывает, что это значение подходит.

Решения задач олимпиады по математике (физические факультеты, старшие курсы)

1. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что производная $f'(x)$ определена и непрерывна в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ и при любом $x\in\mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x)+f'(x)\operatorname{arctg}x=0$. Докажите, что $f(x)=0$.

Решение.

Подставляя в уравнение $x=0$, находим $f(0)=0$. Предположим, что для некоторого $t>0$ выполнено $f(t)>0$. Обозначим через X множество всех вещественных чисел x таких, что $x<t$ и $f(x)=0$. Оно непусто (поскольку содержит точку 0) и ограничено сверху (точкой t). Следовательно, у него существует конечный супремум $a=\sup X$. Функция f непрерывна,

поэтому $a \in X$. На промежутке $(a, t]$ функция f положительна (если бы для некоторого $x \in (a, t]$ было $f(x) < 0$, то нашлась бы точка $d \in (x, t)$ такая, что $f(d) = 0$). Поэтому имеем

$\int_a^t f'(x)dx = f(t) - f(a) = f(t) > 0$. Но при всех $x \in (a, t]$

выполнено $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{\operatorname{arctg} x} < 0$, т.е. указанный интеграл должен быть отрицательным — противоречие.

Точно так же показывается, что для $t > 0$ невозможна ситуация $f(t) < 0$. Следовательно, $f(t) = 0$ для всех $t > 0$.

Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что равенство $f(t) = 0$ справедливо также при всех $t < 0$. Следовательно, $f(x) = 0$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\left|x^2 + x + y\right| + \left|x\right| = 10$.

Решение.

Определим на плоскости (x, y) линии смены знака под модулем:

$C_1: \quad x^2 + x + y = 0 \;\Rightarrow\; y = -x^2 - x = -x(x+1)$;

$C_2: \quad x = 0$.

Этими линиями разбивается на 4 части: $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$.

1) $(x, y) \in D_1$: $x^2 + x + y + x = 10 \;\Rightarrow$

$y = -x^2 - 2x + 10 = -(x+1)^2 + 11$.

В рассматриваемой области парабола пересекается с границами в следующих точках:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 10, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_1(0,10);$$

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 10, \\ y = -x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \quad A_2(10,-110).$$

2) $(x,y) \in D_2$: $x^2 + x + y - x = 10 \;\Rightarrow\; y = -x^2 + 10$.

В области D_2 парабола $y = -x^2 + 10$ пересекается с границей в следующих точках:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 10, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_1(0,10);$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 10, \\ y = -x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \quad A_3(-10,-90).$$

3) $(x,y) \in D_3$: $-x^2 - x - y - x = 10 \;\Rightarrow$

$y = -x^2 - 2x - 10 = -(x+1)^2 - 9$.

В области D_3 парабола $y = -(x+1)^2 - 9$ пересекается с границей в следующих точках:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x - 10, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_4(0,-10);$$

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x - 10, \\ y = -x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \quad A_3(-10,-90).$$

4) $(x,y) \in D_4$: $-x^2 - x - y + x = 10 \;\Rightarrow\; y = -x^2 - 10$.

В области D_4 парабола $y = -x^2 - 10$ пересекается с границей в следующих точках:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 10, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_4(0,-10);$$

$$\begin{cases} y = -x^2 - 10, \\ y = -x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \quad A_2(10,-110).$$

Площадь полученной фигуры равна

$$S=\int_{-10}^{0}\left(-x^2+10-\left(-x^2-2x-10\right)\right)dx+\int_{0}^{10}\left(-x^2-2x+10-\left(-x^2-10\right)\right)dx=$$

$$=\int_{-10}^{0}\left(2x+20\right)dx+\int_{0}^{10}\left(-2x+20\right)dx=\left(20x+x^2\right)\Big|_{-10}^{0}+\left(20x-x^2\right)\Big|_{0}^{10}=200\ .$$

3. Назовём движение в положительном направлении оси *Ox* движением вправо, в положительном направлении оси *Oy* — движением вверх, в отрицательном направлении оси *Ox* — движением влево, в отрицательном направлении оси *Oy* — движением вниз. Материальная точка начинает движение на плоскости, выходя из начала координат.
На первом этапе она делает шаги длиной $1,\pi,\frac{\pi^2}{2!},\frac{\pi^3}{3!}$ соответственно вправо, вверх, влево и вниз, на втором этапе — шаги длиной $\frac{\pi^4}{4!},\frac{\pi^5}{5!},\frac{\pi^6}{6!},\frac{\pi^7}{7!}$ в тех же направлениях соответственно. Процесс продолжается до бесконечности. Найти координаты предельного положения материальной точки.

Решение.

По формуле Эйлера $e^{i\pi}=-1$. Так как $e^{i\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{4n+3}\frac{(i\pi)^k}{k!}$, то

$$-1+i\cdot 0=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+i\pi-\frac{\pi^2}{2!}-i\frac{\pi^3}{3!}\right)+\left(\frac{\pi^4}{4!}+i\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^6}{6!}-i\frac{\pi^7}{7!}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(i^{4n}\frac{\pi^{4n}}{(4n)!}+i^{4n+1}\frac{\pi^{4n+1}}{(4n+1)!}+i^{4n+2}\frac{\pi^{4n+2}}{(4n+2)!}+i^{4n+3}\frac{\pi^{4n+3}}{(4n+3)!}\right)\right).$$

Поэтому предельным положением материальной точки будет (–1,0).

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, если известно, что $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \le 4,\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \le 9$.

Решение.
На основании неравенства Коши – Буняковского имеем $u^2 = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$. Тогда по условию $u^2 \le 4 \cdot 9 = 36$. Отсюда $-6 \le u \le 6.$ Так как в неравенстве Коши – Буняковского равенство достигается (например, $u = 6$ при $x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, z_1 = 2, z_2 = 3$), то наименьшее значение – $u = -6$, а наибольшее значение – $u = 6$.

5. Решить задачу Коши: $\left(1 + x^2\right)y'' + 2y + 4xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение.
Легко видеть, что $x^2y'' + 2y + 4xy' = \left(x^2y\right)''$, поэтому уравнение можно представить в виде $\left(\left(1 + x^2\right)y\right)'' = 0$, откуда сразу получаем первый интеграл $\left(\left(1 + x^2\right)y\right)' = C_1$. Из начального условия $y'(0) = 0$ находим $C_1 = 0$. Тогда $\left(\left(1 + x^2\right)y\right)' = 0$. Интегрируя, получаем $y = \dfrac{C}{1 + x^2}$, где $C = 1$ (что следует из условия $y(0) = 1$).

6. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}dx$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = tgt \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)d\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+t)}{\cos t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin(\frac{\pi}{4}+t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt \ .$$

Учитывая, что $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{4} - y \\ dt = -dy \end{array} \right| =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{4}-y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin(\frac{\pi}{4}+y)dy$$, получаем

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 \ .$$

7. Рассматриваются всевозможные отрезки длины 10, один конец которых принадлежит прямой $3x-4y=0$, а другой – прямой $3x+4y=0$. Какое уравнение имеет кривая, на которой лежат середины всех таких отрезков?

Решение.

Зафиксируем точку *M*, лежащую на прямой $3x-4y=0$; её координаты имеют вид $(4t, 3t)$, где *t* — некоторое вещественное число. Если отрезок *MN* удовлетворяет условиям задачи, то координаты точки *N* служат решением системы

$$\begin{cases} (x-4t)^2 + (y-3t)^2 = 100; \\ 3x+4y=0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения *x* и подставляя полученное выражение в первое уравнение, после

преобразований приходим к равенству
$25y^2 + 42ty + 225t^2 - 900 = 0$. Решая это квадратное уравнение относительно *y*, получим

$$y_N = \frac{-21t \pm 6\sqrt{625 - 144t^2}}{25} \text{ и, значит, } x_N = \frac{28t \mp 8\sqrt{625 - 144t^2}}{25}.$$

Тогда для координат *x*, *y* середины отрезка *MN* имеем

$$x = (x_M + x_N)/2 = \frac{64t \mp 4\sqrt{625 - 144t^2}}{25} \text{ и}$$

$$y = (y_M + y_N)/2 = \frac{27t \pm 3\sqrt{625 - 144t^2}}{25}.$$

Отсюда следует $3x + 4y = \frac{192t + 108t}{25} = 12t$ и
$(25y - 27t)^2 = 9(625 - 144t^2)$. Выразив из первого из полученных условий *t* и подставив найденное значение во второе уравнение, придём к равенству
$(9x)^2 + (16y)^2 = 60^2$, которое уже нетрудно привести к каноническому виду уравнения эллипса.

Ответ: эллипс $\frac{9x^2}{400} + \frac{16y^2}{225} = 1$.

МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ – 2012

I курс

1. Существуют ли матрицы A и B размера 3×3 такие, что $\det(A+B) > |\det(A)| + |\det(B)|$? (Через $\det(A)$ обозначен определитель матрицы A).

2. Верно ли, что число $n^2(n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)(n^4+n^2+1)$ делится на 35 при каждом натуральном n? Ответ обоснуйте.

3. Найдите все основания логарифма, при которых существуют числа, равные своему логарифму.

4. Равносторонние треугольники со сторонами 1, 3, 5, … выстроены в ряд так, что их основания расположены на одной прямой и вплотную примыкают друг к другу. Докажите, что все вершины треугольников, противолежащие основаниям, лежат на некоторой параболе.

5. Решите уравнение $\left(x^2+2x-7\right)^2+2\left(x^2+2x-7\right)-7=x$.

6. Найдите непрерывную на $(-\infty,+\infty)$ функцию $f(x)$ такую, что $f(2x)=f(x)\cos x$.

7. Докажите, что если m — положительное целое число, то $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\varphi}{\sin\varphi}d\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Старшие курсы

1. Найдите все наборы вещественных чисел a, b, c, d, которые удовлетворяют равенству

$$(ad-bc)\cdot\begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2012 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$F(x,y,z)=\dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$, если $x>0, y>0, z>0.$

(Известно, что среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, т.е. $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$).

3. Решите уравнение

$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}-x\right)^2-5\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)+4x+8=0$ **.**

4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_k}$, где x_k — корни уравнения $1+x\left|\sin\pi x\right|=0$.

5. Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6; для второго 0,5; для третьего 0,4. В результате произведенных выстрелов в мишени образовалось две пробоины. Найдите вероятность того, что попали второй и третий стрелки.

6. Решите уравнение $x^2y^3+y+\left(x^3y^2-x\right)y'=0$.

7. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}2012x\,dx}{x\left(1+x^2\right)}$.

Решения задач олимпиады по математике (I курс)

1. Существуют ли матрицы A и B размера 3×3 такие, что $\det(A+B) > |\det(A)| + |\det(B)|$? (Через $\det(A)$ обозначен определитель матрицы A).

Решение. Нетрудно подобрать пример, для которого требуемое неравенство будет выполнено; например, можно взять $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Верно ли, что число $n^2(n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)(n^4+n^2+1)$ делится на 35 при каждом натуральном n ? Ответ обоснуйте.

Решение. Запишем $n^2(n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)(n^4+n^2+1) = n^2(n^4-1)(n^6-1) =$ $= (n^5-n)(n^7-n)$. Методом математической индукции можно доказать, что n^5-n делится на 5, n^7-n делится на 7 и, значит, $(n^5-n)(n^7-n)$ делится на 35 при каждом натуральном n . (Делимость соответствующих выражений на 5 и 7 можно установить также перебором различных остатков от деления числа n на 5 и 7.)

3. Найдите все основания логарифма, при которых существуют числа, равные своему логарифму.

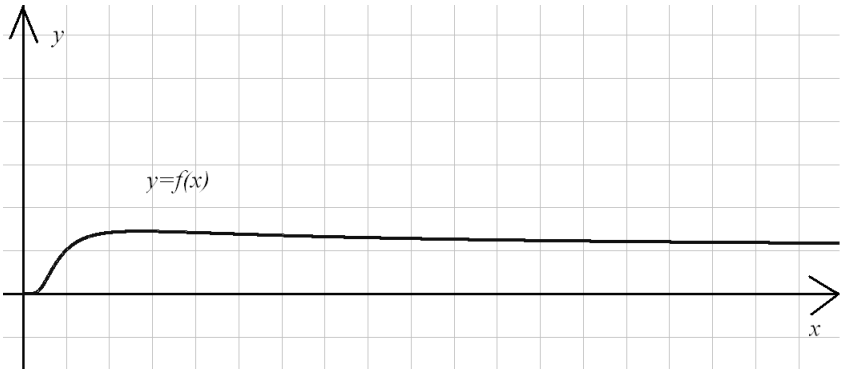
Решение. Должно выполняться равенство $x = \log_a x$, то есть $a^x = x, a = x^{1/x}$. Выясним, какие значения может принимать функция $f(x) = x^{1/x}$ при $x > 0$:

$$f'(x)=\left(x^{1/x}\right)'=\left(e^{\ln x/x}\right)'=e^{\ln x/x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right).$$

Равенство $f'(x)=0$ справедливо при $\ln x=1$, т.е. имеется одна критическая точка: $x_0=e$. Знаки производной: при $x\in(0,e)$ $f'(x)>0$, при $x\in(e,+\infty)$ $f'(x)<0$. Значит, в точке $x_0=e$ функция $f(x)=x^{1/x}$ имеет максимум $f(e)=e^{1/e}$. Это значение является наибольшим значением функции $f(x)$ при положительных x, так как

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}e^{\ln x/x}=e^{-\infty}=0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln x/x}=e^0=1,$$

т.е. эскиз графика имеет следующий вид:



Таким образом, множество значений функции $f(x)=x^{1/x}$ есть $\left(0,e^{1/e}\right]$. Именно при таких основаниях логарифма (т.е. $a\in\left(0,e^{1/e}\right],a\neq1$) существует число, равное своему логарифму.

Ответ: $a\in\left(0,e^{1/e}\right],a\neq1$.

4. Равносторонние треугольники со сторонами 1, 3, 5, … выстроены в ряд так, что их основания расположены на

одной прямой и вплотную примыкают друг к другу. Докажите, что все вершины треугольников, противолежащие основаниям, лежат на некоторой параболе.

Решение. Введем на плоскости прямоугольную систему координат, выбрав за ось *Ox* прямую, на которой расположены основания равносторонних треугольников, а ось *Oy* направим так, чтобы она проходила через вершину первого треугольника, противолежащую основанию. Вершина *n*-го треугольника, противолежащая основанию, будет находиться в точке с координатами $x = n(n-1),\ y = \frac{\sqrt{3}(2n-1)}{2}$. Исключая n, найдём соотношение между координатами вершин. Оно имеет вид $y^2 = 3(x + 1/4)$, а это уравнение параболы.

5. Решите уравнение $\left(x^2+2x-7\right)^2+2\left(x^2+2x-7\right)-7=x$.

Решение. Данное уравнение есть уравнение вида

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x, \qquad (*)$$

где $f\left(x\right)=x^2+2x-7$. Если x_0 есть корень уравнения $f\left(x\right)=x$, то есть $f\left(x_0\right)=x_0$, то x_0 является и корнем уравнения $(*)$.

Решаем уравнение $f\left(x\right)=x$: $x^2+2x-7=x \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

$\Rightarrow x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$. Таким образом, многочлен

$\left(x^2+2x-7\right)^2+2\left(x^2+2x-7\right)-7-x=$

$=x^4+4x^2+49+4x^3-14x^2-28x+2x^2+4x-14-7-x=$

$= x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 25x + 28$ делится без остатка на

$$\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{29}{4}=$$

$= x^2 + x - 7$. После деления получаем

$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 25x + 28 = \left(x^2 + x - 7\right)\left(x^2 + 3x - 4\right)$. Последние два корня находятся из уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$: $x_3 = -4$; $x_4 = 1$.

6. Найдите непрерывную на $(-\infty, +\infty)$ функцию $f(x)$ такую, что

$$f(2x) = f(x)\cos x. \qquad (*)$$

Решение. Пусть $f(0) = C$. Согласно условию $(*)$ имеем

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = f\left(\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = \ldots = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n} =$$

$$= f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = f(0)\frac{\sin x}{x} = C\frac{\sin x}{x}.$$

Итак, получили функцию $f(x) = \begin{cases} C\dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ C, & x = 0, \end{cases}$

непрерывную на $\mathbb{R}$.

7. Докажите, что если m — положительное целое число, то $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Воспользуемся тригонометрическим тождеством

$\sin n\varphi - \sin(n-2)\varphi = 2\sin\varphi\cos(n-1)\varphi,$ т.е.

$\sin n\varphi = 2\sin\varphi\cos(n-1)\varphi + \sin(n-2)\varphi.$

Положим $n = 2m+1$ и преобразуем исходный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2m\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi.$$

Первое слагаемое в правой части равно 0. Полагая последовательно $n = 2m-1, 2m-3, ..., 3$, после m-кратного повторения аналогичного преобразования сведём исходный интеграл к $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось.

Решения задач олимпиады по математике (старшие курсы)

1. Найдите все наборы вещественных чисел a, b, c, d, которые удовлетворяют равенству

$$(ad - bc) \cdot \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2012 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 2012 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, тогда исходное матричное уравнение примет вид

$(ad-bc)\cdot A^2 = B$. Следовательно,

$16 = |B| = \left|(ad-bc)\cdot A^2\right| = (ad-bc)^2 \cdot \left|A^2\right| = |A|^2 \cdot |A|^2 = |A|^4$,

откуда $ad - bc = |A| = \pm 2$. Это означает, что

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 2 & \pm 1006 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$. Из условий

$(a+d)b \neq 0$ и $(a+d)c = 0$ получаем $c = 0$ и, далее,

$a^2 = d^2 = \pm 2$. Вариант с минусом, очевидно,

невозможен, т.е. выполнено $\begin{pmatrix} a^2 & (a+d)b \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1006 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

причём $ad = |A| = 2$. Отсюда уже легко получить два решения исходного уравнения:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & \pm 503/\sqrt{2} \\ 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

2. Найдите наименьшее значение функции

$F(x,y,z) = \dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$, если $x>0, y>0, z>0$.

(Известно, что среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, т.е. $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$.)

Решение. Имеем $\dfrac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6} \geq \sqrt[6]{x\left(\frac{y}{2}\right)^2\left(\frac{z}{3}\right)^3}$

(равенство достигается лишь при $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$), т.е.

$\dfrac{x+y+z}{6} \geq \sqrt[6]{\dfrac{xy^2z^3}{108}}$, откуда $\dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3} \geq \dfrac{6^6}{108} = 432$.

Итак, получаем наименьшее значение $F(x,y,z)=432$ (оно достигается, например, при $x=1,\ y=2,\ z=3$).

3. Решите уравнение

$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}-x\right)^2-5\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)+4x+8=0$.

Решение. Представим уравнение в виде

$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}-x\right)^2-5\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}-x\right)+8=x$. Его можно переписать следующим образом:

$f\left(g\left(x\right)\right)=x$, где $g\left(x\right)=\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}-x$ и $f\left(y\right)=y^2-5y+8$.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} g\left(x\right)=y, \\ f\left(y\right)=x. \end{cases}$

Из этой системы следует равенство

$$g\left(x\right)+x=f\left(y\right)+y. \qquad (*)$$

В нашем случае это равенство имеет вид

$\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}=y^2-4y+8$. Рассмотрим отдельно его правую и левую части. Имеем $h\left(y\right)=y^2-4y+8\geq 4$, причем минимум достигается в точке $y=2$: $h_{\min}=h\left(2\right)=4$. ОДЗ для функции $z\left(x\right)=\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}$ есть отрезок $-2\leq x\leq 6$; исследуем её на экстремум:

$z'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}=\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+2}}{2\sqrt{(x+2)(6-x)}}$; производная равна 0 в точке $x=2$, причём найденная точка является точкой максимума: $z_{\max}=z(2)=4$, т.е. $z(x)\le 4$. Следовательно, равенство $(*)$ справедливо лишь для $x=2$, $y=2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=2$ есть решение исходного уравнения.

4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_k}$, где x_k — корни уравнения $1+x|\sin\pi x|=0$.

Решение. Из уравнения следует, что $\dfrac{1}{|\sin\pi x|}=-x$. Так как левая часть последнего уравнения положительна, то оно может иметь решения лишь при отрицательных x. Рассмотрим промежуток $I_n=(-n,-n+1)$, где $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ (на промежутке $(-1,0)$ уравнение, очевидно, не имеет решений, ибо на этом промежутке $\dfrac{1}{|\sin\pi x|}\ge 1$ и $0<-x<1$).

В точке $x=\dfrac{1}{2}-n$ имеем $\dfrac{1}{|\sin\pi x|}=1$ и $1+x|\sin\pi x|<0$, а при $x\to -n$ и при $x\to(-n+1)$ выполнено $\dfrac{1}{|\sin\pi x|}\to+\infty$, поэтому для x, близких к границам интервала, имеем $1+x|\sin\pi x|>0$. Следовательно, при $x\in I_n$ непрерывная функция $y=1+x|\sin\pi x|$ имеет два корня, причем

$$\frac{1-2n}{2}<x_n^1<1-n,\quad -n<x_n^2<\frac{1-2n}{2},\qquad (*)$$

где через x_n^1, x_n^2 обозначены корни уравнения, лежащие на отрезке I_n. Учитывая оценки $(*)$, получаем

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k} < -\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{2}{7}-\frac{1}{4}-\ldots$, т.е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k}$ расходится.

5. Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6; для второго 0,5; для третьего 0,4. В результате произведенных выстрелов в мишени образовалось две пробоины. Найдите вероятность того, что попали второй и третий стрелки.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в мишени образовалось две пробоины. Обозначим через A_i событие «*i*-й стрелок попал в мишень».

A_1 = {первый стрелок попал в мишень}, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)=0,6$.

$\overline{\mathrm{A}}_1$ = {первый стрелок не попал в мишень}, $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1)=0,4$.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{A}_1)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\overline{\mathrm{A}}_3+\overline{\mathrm{A}}_2\mathrm{A}_3)= \ 0,5\cdot 0,6+0,5\cdot 0,4=0,5$.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{A}}_1)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_2\cdot\mathrm{A}_3)=0,5\cdot 0,4=0,2$. Тогда полная вероятность того, что в мишени ровно две пробоины, равна $\mathrm{P}(\mathrm{A})= 0,6\cdot 0,5+0,4\cdot 0,2=0,38.$ Окончательно получаем

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1|\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\overline{\mathrm{A}}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{0,08}{0,38}=\frac{4}{19}\approx 0,211.$$

Ответ: $\mathrm{P}=\frac{4}{19}$.

6. Решите уравнение $x^2y^3+y+\left(x^3y^2-x\right)y'=0$.

Решение. Раскрывая скобки и собирая подобные, получим уравнение $x^2y^2\left(ydx+xdy\right)+\left(ydx-xdy\right)=0$, причем выражение в первой скобке есть $d\left(xy\right)$, а вторую скобку можно, домножая и деля на y^2, привести к $d\left(\frac{x}{y}\right)$. Таким образом, исходное уравнение заменяется следующим: $x^2y^2d\left(xy\right)+d\left(\frac{x}{y}\right)y^2=0$. Сделав замену $xy=t$, получим $\frac{t^2}{y^2}dt+d\left(\frac{t}{y^2}\right)=0$, откуда получаем уравнение с разделенными переменными: $-\frac{d\left(\frac{t}{y^2}\right)}{\frac{t}{y^2}}=tdt$.

Проинтегрировав и вернувшись к исходной переменной, получим общий интеграл первоначального уравнения: $y^2=Cx^2e^{x^2y^2}$. Заметим, что аналогичное решение получается с использованием интегрирующего множителя вида $w=\frac{1}{xy}$.

Ответ: $y^2=Cx^2e^{x^2y^2}$ **.**

7. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}2012xdx}{x\left(1+x^2\right)}$.

Решение.

Введем параметр a, полагая $I\left(a\right)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(ax\right)dx}{x\left(1+x^2\right)}$.

Подынтегральная функция $f(x,a)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg} ax}{x\left(x^2+1\right)}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$

непрерывна при $0\le x<+\infty$, $a\in\mathbb{R}$, а интеграл $I(a)$ сходится равномерно относительно $a\in\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса ($f(x,a)<\dfrac{a}{x^2+1}$ на $[0,1]$, а на $[1,+\infty)$ выполнено $f(x,a)<\dfrac{\pi}{2x\left(x^2+1\right)}$, причем интегралы от мажорирующих функций сходятся). Следовательно, функция $I(a)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Функция $f'_a(x,a)=\dfrac{1}{\left(1+a^2x^2\right)\left(1+x^2\right)}$ непрерывна при $x\in[0,+\infty)$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Дифференцируем по параметру под знаком несобственного интеграла:

$I'(a)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(1+a^2x^2\right)\left(1+x^2\right)}$, равномерная сходимость полученного интеграла следует согласно признаку Вейерштрасса: $f'(x,a)\le\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)}$ для $\forall a\in\mathbb{R}$, сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)}$ устанавливается непосредственным вычислением: $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)}=\dfrac{\pi}{2}$.

Вычислим $I'(a)$ для положительных a, найдем $I(a)$, а затем воспользуемся нечётностью функции $I(a)$:

$$I'(a)=\frac{-a^2}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+a^2x^2}+\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{-a^2}{1-a^2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg} ax\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+\frac{1}{1-a^2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty}==\frac{\pi}{2\left(1-a^2\right)}(1-a)=\frac{\pi}{2(1+a)}.$$

Тогда $I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C$. В силу непрерывности $I(a)$ в точке $a=0$ имеем: $\lim\limits_{a\to+0} I(a)=I(0)$, т.е. $\frac{\pi}{2}\ln 1+C=0$, откуда следует, что $C=0$. Нечётность $I(a)$ приводит к окончательному результату: $I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a\ln\left(1+|a|\right)$ для $\forall a\in\mathbb{R}$. При $a=2012$ имеем: $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} 2012x dx}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{\pi}{2}\ln 2013$.

Литература

1. Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly» / под ред. В.М. Алексеева. – М. : Мир, 1977. 596 с.
2. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. – М. : Бюро Квантум, 2007. 158 с.
3. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. – М. : Наука, 1978. 208 с.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 292 от «14» апреля 2014 г. Тираж 50 экз.