ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 56, № 10/2 ФИЗИКА 2013

УДК 521.182

И.В. ТОМИЛОВА, И.Н. ЧУВАШОВ, Е.В. ПАХОМОВА

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЛУНЫ. ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ[1]

Представлено краткое описание численной модели движения искусственного спутника Луны. В модель возмущающих сил включены несферичность селенопотенциала, гравитационное воздействие Земли и Солнца, приливные деформации в теле Луны и световое давление. Приводятся результаты тестирования разработанной модели и обсуждаются возможности ее использования.

Ключевые слова: *искусственные спутники Луны, численное моделирование движения.*

Введение

До недавнего времени задача моделирования движения искусственного спутника Луны (ИСЛ) решалась с помощью аналитических и полуаналитических методов, причем основное внимание уделялось возмущениям от сжатия Луны и влиянию третьего тела.

Особенностью аналитических теорий движения спутников планет является их ограниченная точность из-за невозможности учесть все действующие малые возмущающие факторы. Кроме того, аналитическая теория, как правило, привязана к определенному типу орбит, что очень ограничивает ее применение.

Новизна предлагаемой численной модели движения ИСЛ заключается в использовании численных методов высоких порядков, позволяющих решать широкий класс фундаментальных и прикладных задач динамики искусственных спутников Луны с высокой точностью.

В работе дано краткое описание разработанной авторами численной модели движения ИСЛ. Рассматриваются уравнения движения и математическая модель возмущающих сил, обусловленных влиянием несферичности селенопотенциала и его деформаций под приливным влиянием Земли и Солнца, гравитационным притяжением Земли и Солнца, а также световым давлением.

Кроме того, приводятся результаты тестирования и использования разработанной численной модели движения ИСЛ. Представлены оценки методической точности модели и влияния возмущающих факторов, а также показано, как использовать настоящую модель для построения оптимальных алгоритмов прогнозирования движения ИСЛ с учетом только тех возмущающих факторов, которые не выходят за пределы шума, неизбежно сопутствующего численному процессу.

Уравнения движения

Рассмотрим движение ИСЛ в инерциальной системе координат (СК), связанной с центром масс Луны, как движение материальной частицы бесконечно малой массы в поле тяготения центрального тела с массой M под действием сил, определенных потенциальными функциями U и R, а также совокупности сил P, не имеющих потенциала. В этом случае дифференциальные уравнения будут иметь вид

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}t} = Q\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{P} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0), \quad \dot{\boldsymbol{x}}_0 = \dot{\boldsymbol{x}}(t_0),$$

причем $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ – вектор положения спутника в инерциальной системе координат, $U(t, C_{n,m}, S_{n,m})$ – потенциал притяжения Луны, а $R = \sum_{i=1}^{2} R_i$, где R_i – возмущающие функции, обусловленные притяжением Земли и Солнца; $\boldsymbol{P}$ – возмущающее ускорение, обусловленное действи-

[1] Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.132.21.1436.

ем сил, не имеющих потенциала (например, световое давление); Q – матрица перехода из вращающейся системы координат x_1', x_2', x_3' в инерциальную систему x_1, x_2, x_3.

Переход из вращающейся системы координат, связанной с Луной, в инерциальную осуществляется в два этапа:

– переход из лунной вращающейся СК в земную вращающуюся систему координат;
– переход из земной вращающейся системы координат в инерциальную СК.

Этот переход можно задать следующей формулой:

$$\boldsymbol{x} = R_z(67'',92)R_y(78'',56)R_x(0'',30)R_z(\varphi)R_x(\theta)R_z(\psi)\boldsymbol{x}'. \tag{2}$$

Здесь произведение матриц поворота на заданные углы и углы φ, θ, ψ есть матрица Q; φ, θ, ψ – углы Эйлера, причем φ – угол в плоскости ICRF-экватора, отложенный от оси X в системе ICRF к восходящему узлу лунного экватора; θ – угол между лунным и земным экваторами; ψ – угол, лежащий в плоскости лунного экватора от узла до нулевого меридиана Луны. Значения углов Эйлера даны в каталоге DE421/LE421 [6].

Модели возмущающих сил

Алгоритмы вычисления возмущающих сил, связанных с несферичностью Луны. Следуя [1], селенопотенциал U будем задавать формулой

$$U = \frac{GM_{\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_{\mathrm{L}}}{r}\right)^{n+1}\overline{P}_{n,m}(\sin\varphi)\left[\overline{C}_{n,m}\cos m\lambda + \overline{S}_{n,m}\sin m\lambda\right]\right\}, \tag{3}$$

где R_{L} – экваториальный радиус Луны; GM_{L} – гравитационный параметр Луны; r, φ, λ – сферические координаты спутника во вращающейся системе координат, жестко связанной с Луной; $\overline{P}_{n,m}(\sin\varphi)$ – полностью нормированные присоединенные функции Лежандра, связанные с ненормированными $P_{n,m}$ формулой

$$\overline{P}_{n,m} = N_{n,m}P_{n,m},$$

где

$$N_{n,m} = \sqrt{\frac{(n-m)(2n+1)(2-E_m)}{(n+m)!}}, \tag{4}$$

$$E_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0. \end{cases}$$

Для вычисления составляющих разложения (3) и его производных будем использовать рекуррентный алгоритм Л. Каннингема. Для этого введем шаровую функцию

$$\overline{V}_{n,m} \equiv \frac{\overline{P}_{n,m}(\sin\varphi)(\cos m\lambda + i\sin m\lambda)}{r^{n+1}} \tag{5}$$

и перепишем соотношение (3) как

$$U = \mathrm{Real}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r_0^n(\overline{C}_{n,m} - i\overline{S}_{n,m})\overline{V}_{n,m}. \tag{6}$$

Выразим прямоугольные координаты x_1', x_2', x_3' через сферические r, λ, φ:

$$x_1' = r\cos\varphi\cos\lambda,\ x_2' = r\cos\varphi\sin\lambda,\ x_3' = r\sin\varphi, \tag{7}$$

а функцию $\overline{V}_{n,m}$ – через x_1', x_2', x_3'.

Шаровые функции $\overline{V}_{n,m}$ и их частные производные по x_1', x_2', x_3' будем вычислять с помощью рекуррентных соотношений, которые даны, например, в [3].

Коэффициенты гармоник разложения потенциала Луны до 150 степени и порядка представлены в модели LP150Q и приведены на сайте NASA [7].

Возмущения от приливных деформаций центрального тела. Возмущения от приливных деформаций в теле Луны под действие притяжения Земли и Солнца учитываются в рамках модели Лява и вводятся как поправки в свободные от приливов коэффициенты $\overline{C}_{n,m}, \overline{S}_{n,m}$ разложения гравитационного поля Луны (3). Задача сводится к вычислению поправок, обусловленных частотно независимыми величинами k_{nm}, по формуле

$$\Delta\overline{C}_{n,m} - \Delta\overline{S}_{n,m} = \frac{k_{nm}}{2n+1}\sum_{j=2}^{3}\frac{GM_j}{GM_+}\left(\frac{R_e}{r_j}\right)^{n+1}\overline{P}_{nm}\left(\sin\Phi_j\right)e^{-im\Lambda_j}, \tag{8}$$

где k_{nm} – номинальное число Лява степени *n*, порядка *m* (табл. 1); R_{L}, GM_{L} –экваториальный радиус и гравитационный параметр Луны соответственно; GM_j – гравитационные параметры Земли ($j=2$) и Солнца ($j=3$); r_j – расстояние от центра Луны до Земли или Солнца; Φ_j, Λ_j – соответственно широта и долгота Земли или Солнца в селеноцентрической системе координат, фиксированной в теле Луны; $\overline{P}_{nm}$ – нормализованные присоединенные функции Лежандра.

Таблица 1

Номинальные числа Лява

n	*M*	k_{nm}
2	0	0,02163
2	1	0,03786
2	2	0,10786

Возмущения от Земли и Солнца. При наличии в движении ИСЛ возмущений от третьего тела в уравнениях движения появляется сила, определяемая формулой [3]

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = GM_j\left(\frac{\tilde{x}_i - x_i}{\Delta^3} - \frac{\tilde{x}_i}{r'^3}\right), \tag{9}$$

где $\Delta = \sqrt{\left(\tilde{x}_1 - x_1\right)^2 + \left(\tilde{x}_2 - x_2\right)^2 + \left(\tilde{x}_3 - x_3\right)^2}$ – расстояние от спутника до возмущающего тела; $\tilde{\boldsymbol{x}} = \left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\right)$ – вектор положения возмущающего тела в инерциальной системе координат, отнесенной к центру масс Луны; $r' = |\tilde{\boldsymbol{x}}|$, а GM_j – произведение универсальной гравитационной постоянной на массу возмущающего тела. Отношение массы Солнца к массам больших планет задано в IERS-соглашении 2010 г. [5].

Для определения координат больших планет и Луны, в IERS-соглашении 2010 г. рекомендуется использовать эфемериды больших планет из фонда DE421/LE421.

Кроме того, необходимо рассматривать влияние на спутник Луны сжатия Земли. Эта поправка вводится в уравнения движения как разность точечного и полного потенциалов Земли, причем для учета влияния точечного потенциала используется формула (9).

Уравнения движения интегрируются численно с помощью интегратора Гаусса – Эверхарта. Порядок и степень учитываемых гармоник селенопотенциала, набор возмущающих сил, а также порядок интегратора задаются при обращении к программе.

Тестирование и использование разработанной численной модели движения ИСЛ

Дадим оценку методической точности численной модели движения ИСЛ. Оценку будем производить по сопоставлению результатов прямого и обратного интегрирования на интервале времени 1 сут. Обоснованность данного подхода для несимметричных численных алгоритмов, к которым относится метод Эверхарта, показана в [2].

Оценка точности, представленная на рис. 1, показывает, что ошибка в координатах, которая накапливается за 12 оборотов, не превосходит $1{,}4\cdot10^{-8}$ км.

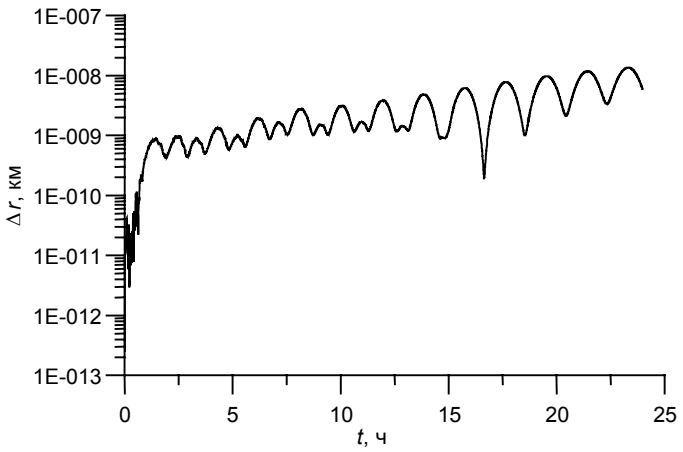

Рис. 1. Оценка точности численной модели движения ИСЛ, полученная по результатам прямого и обратного интегрирования

Далее было проведено сравнение численной модели движения спутника Луны GRAIL B с его эфемеридой. Спутники GRAIL A и GRAIL B были выведены на окололунную орбиту в январе 2012 г. для изучения гравитационного поля и внутреннего строения Луны. Эфемериды объектов GRAIL A и GRAIL B даны в системе координат EME 2000 и доступны по ссылке http://pds-geosciences.wustl.edu/grail/grail-l-lgrs-3-cdr-v1/grail_0101/.

Сравнение результатов, полученных с помощью численного моделирования, с эфемеридами объекта GRAIL B представлены на рис. 2. Отклонение результатов численного моделирование от эфемерид обусловлено тем, что информация о параметрах орбиты объекта, его массе и площади миделева сечения, а также модель, применяемая для получения эфемериды объекта, не является достаточно полной.

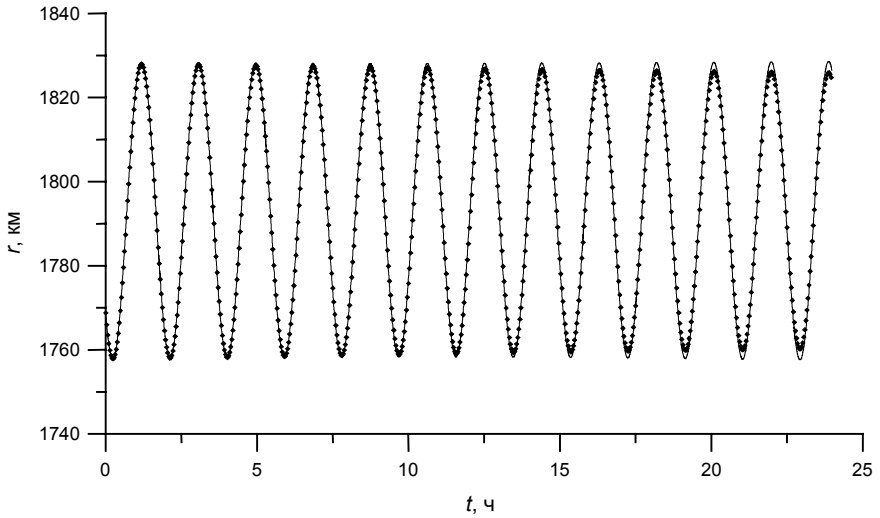

Рис. 2. Сравнение результатов численного моделирования с эфемеридами для спутника GRAIL B (сплошная линия – по результатам численного моделирования, точки – данные эфемериды)

Исследование структуры возмущений ИСЛ. Для исследования влияния возмущений на ИСЛ были выбраны объекты со следующими параметрами орбиты: $e = 10^{-6}$ – эксцентриситет, угловые величины i, Ω, ω, M_0 равны нулю. Значения большой полуоси варьировались от значения 50 км + R_M до значения 50 км + $5R_M$ с шагом равным радиусу Луны $R_M = 1738$ км.

Для всех перечисленных выше объектов было оценено влияние гармоник селенопотенциала до 15 порядка и степени на 10 оборотах спутника. В табл. 2 приведены оценки для выбранных объектов. Кроме того, для каждого объекта приведен уровень шума, полученный путем сопоставления результатов прямого и обратного интегрирования. Как видно из таблицы, величина влияния

гармоник селенопотенциала плавно уменьшается с высотой. На гистограммах, представленных на рис. 3, показаны гармоники, величина которых близка к уровню шума или ниже него.

Таблица 2

Оценка влияния гармоник селенопотенциала до 13 порядка и степени, км

Гармоники селено-потенциала	Большая полуось				
	50 км + R_M	50 км + $2R_M$	50 км + $3R_M$	50 км + $4R_M$	50 км + $5R_M$
$V_{2,0}$	16,11913	13,56257	12,75093	12,38188	12,18463
$V_{2,2}$	7,66257	4,30968	3,09254	2,28069	1,54501
$V_{3,3}$	3,79821	0,87732	0,34987	0,18314	0,12392
$V_{4,4}$	0,79937	0,13228	$4{,}45012\cdot10^{-2}$	$1{,}66205\cdot10^{-2}$	$6{,}54796\cdot10^{-3}$
$V_{5,5}$	3,55001	0,24683	$4{,}57912\cdot10^{-2}$	$1{,}02049\cdot10^{-2}$	$2{,}92243\cdot10^{-3}$
$V_{6,6}$	10,16158	0,33068	$3{,}39912\cdot10^{-2}$	$6{,}87672\cdot10^{-3}$	$2{,}65644\cdot10^{-3}$
$V_{7,7}$	5,20513	$8{,}66087\cdot10^{-2}$	$7{,}47767\cdot10^{-3}$	$1{,}25417\cdot10^{-3}$	$3{,}54060\cdot10^{-4}$
$V_{8,8}$	7,93062	$6{,}41807\cdot10^{-2}$	$3{,}96273\cdot10^{-3}$	$5{,}51112\cdot10^{-4}$	$1{,}17321\cdot10^{-4}$
$V_{9,9}$	1,67409	$7{,}16663\cdot10^{-3}$	$2{,}80751\cdot10^{-4}$	$2{,}93469\cdot10^{-5}$	$5{,}00559\cdot10^{-6}$
$V_{10,10}$	0,69746	$1{,}57835\cdot10^{-3}$	$4{,}44379\cdot10^{-5}$	$3{,}41454\cdot10^{-6}$	$4{,}69848\cdot10^{-7}$
$V_{11,11}$	1,16843	$1{,}40154\cdot10^{-3}$	$2{,}53929\cdot10^{-5}$	$1{,}50657\cdot10^{-6}$	$1{,}66566\cdot10^{-7}$
$V_{12,12}$	0,62272	$3{,}55315\cdot10^{-4}$	$4{,}37114\cdot10^{-6}$	$1{,}91418\cdot10^{-7}$	$1{,}68904\cdot10^{-8}$
$V_{13,13}$	0,86412	$2{,}51223\cdot10^{-4}$	$2{,}06659\cdot10^{-6}$	$6{,}79919\cdot10^{-8}$	$4{,}80815\cdot10^{-9}$
$V_{14,14}$	0,25429	$3{,}75281\cdot10^{-5}$	$2{,}06991\cdot10^{-7}$	$5{,}12683\cdot10^{-9}$	$2{,}90965\cdot10^{-10}$
$V_{15,15}$	0,50437	$3{,}77145\cdot10^{-5}$	$1{,}39055\cdot10^{-7}$	$2{,}58513\cdot10^{-9}$	$1{,}16825\cdot10^{-10}$
Уровень шума	$9{,}46736\cdot10^{-9}$	$1{,}24549\cdot10^{-7}$	$8{,}24144\cdot10^{-9}$	$1{,}07216\cdot10^{-8}$	$1{,}90241\cdot10^{-8}$

В табл. 3 приведены номера гармоник селенопотенциала, которые необходимо учитывать при прогнозировании движения ИСЛ. Величина влияния этих гармоник превосходит уровень шума. Для более точного прогнозирования движения объектов, высота которых над поверхностью Луны невелика, следует учитывать максимальное количество гармоник селенопотенциала.

Таблица 3

Гармоники селенопотенциала, величины которых превосходят уровнь шума

Большая полуось объекта	50 км + $2R_M$	50 км + $3R_M$	50 км + $4R_M$	50 км + $5R_M$
Гармоники, величина влияния которых выше уровня шума	$V_{2,0} - V_{23,23}$	$V_{2,0} - V_{17,17}$	$V_{2,0} - V_{13,13}$	$V_{2,0} - V_{11,11}$

На рис. 4 и 5 показана зависимость влияния третьих тел, Земли и Солнца, от величины большой полуоси. Из графиков видно, что влияние третьих тел увеличивается с высотой.

На рис. 6 дана оценка зависимости влияния приливных деформаций в теле Луны под действием Земли и Солнца от величины большой полуоси спутника. Из графика, представленного на рисунке, видно, что влияние приливных деформаций на спутник Луны тем меньше, чем больше большая полуось его орбиты.

Оценка влияния светового давления на ИСЛ приведена в табл. 4. Методика вычисления светового давления приводилась в [4].

Величина влияния третьих тел Земли и Солнца, приливных деформаций в теле Луны, а также светового давления на любой высоте значительно превосходят уровнь шума, а следовательно, эти факторы также необходимо учитывать при прогнозировании движения искусственных спутников Луны.

Таким образом, разработанный программный комплекс «Численная модель движения ИСЛ» позволяет решать разнообразные задачи исследования динамики и прогнозирования орбитального движения окололунных объектов.

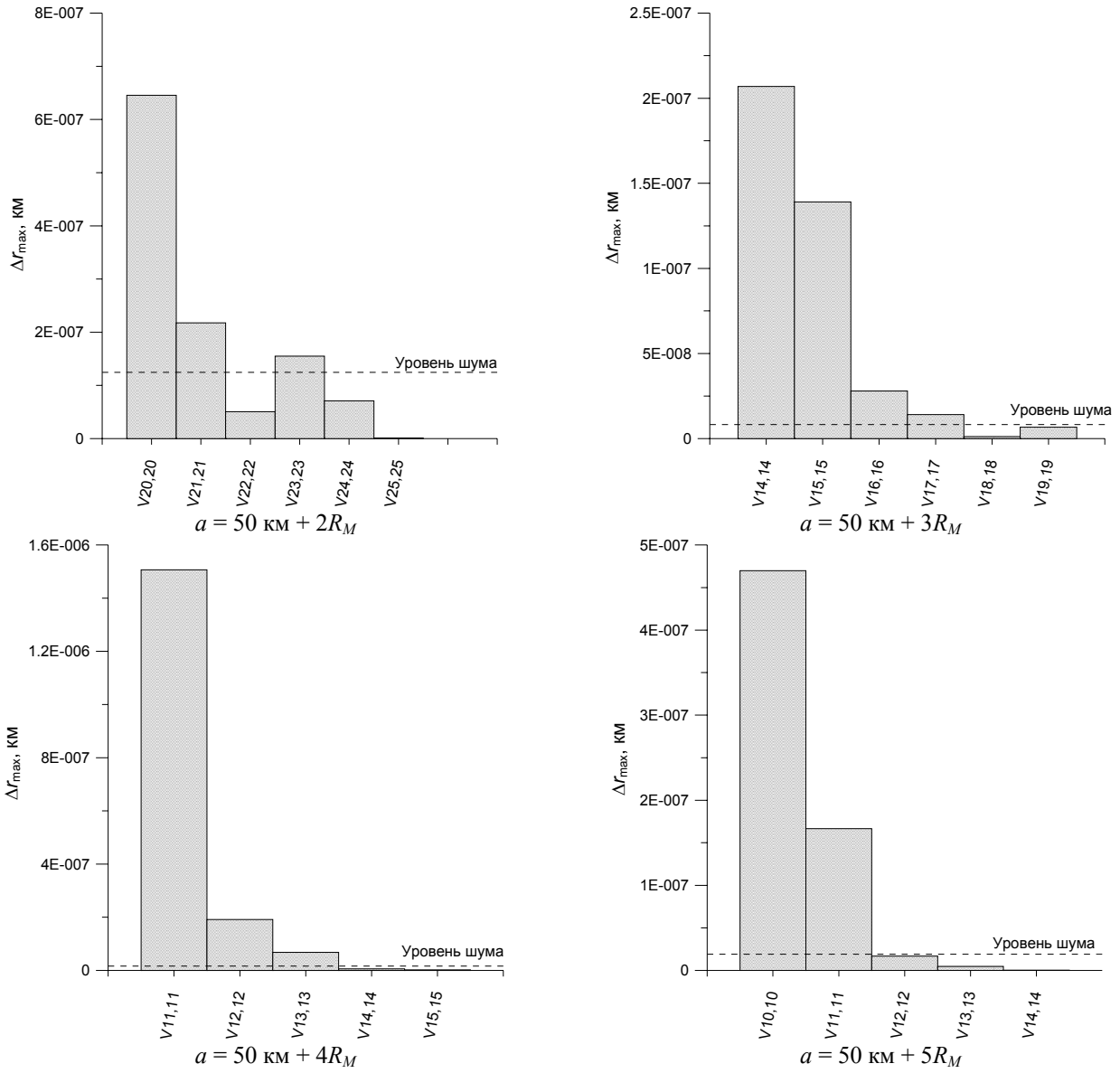

Рис. 3. Оценка влияния гармоник селенопотенциала для объектов с различной величиной большой полуоси

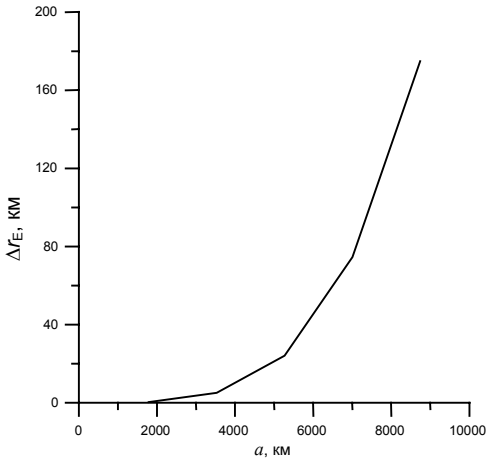

Рис. 4. Зависимость влияния Земли от величины большой полуоси

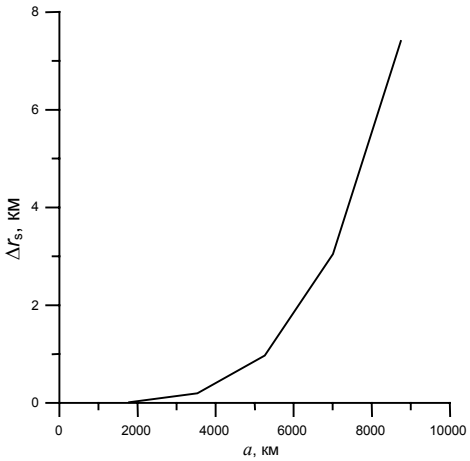

Рис. 5. Зависимость влияния Солнца от величины большой полуоси

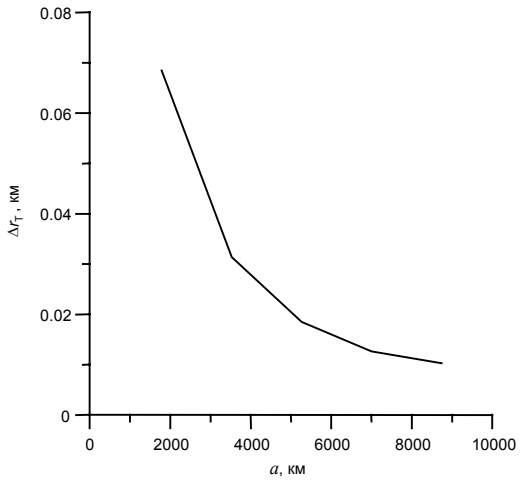

Рис. 6. Зависимость влияния приливов от величины большой полуоси

Таблица 4

Оценка влияния светового давления на ИСЛ

Большая полуось объекта	50 км + R_M	50 км + $2R_M$	50 км + $3R_M$	50 км + $4R_M$	50 км + $5R_M$
Δr_{light} , км	$1{,}38372\cdot10^{-03}$	$8{,}18675\cdot10^{-04}$	$1{,}83397\cdot10^{-03}$	$1{,}73901\cdot10^{-03}$	$3{,}91712\cdot10^{-03}$

Заключение

Приведено описание программного комплекса «Численная модель движения ИСЛ» и представлены примеры его использования.

Программный комплекс имеет следующую структуру:

- уравнение движения объекта в прямоугольных координатах;
- переход из вращающейся системы координат в инерциальную;
- модель возмущающих сил, включающая в себя такие факторы, как несферичность гравитационного поля Луны, гравитационное влияние Солнца и Земли, влияние приливных деформаций в теле Луны и световое давление.

Возможности использования программного комплекса продемонстрированы при решении следующих задач:

- оценка методической точности модели;
- сравнение результатов численного моделирования движения ИСЛ GRAIL B с его эфемеридой;
- оценка влияния гравитационных возмущений и изучение их зависимости от высоты.

На основании проведенных исследовании были даны рекомендации о том, какие факторы необходимо учитывать при прогнозировании движения спутников Луны с различной высотой полета.

Разработанный программный комплекс может найти применение при решении задач динамики ИСЛ и высокоточного прогнозирования движения ИСЛ при решении практических задач исследования Луны с помощью космических аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1977. – 360 с
2. Бордовицына Т.В. // Астрономия и геодезия. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. – Вып. 14. – С. 88–92.
3. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения ИСЗ. Аналитические и численные методы. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – 105 с.
4. Томилова И.В., Пахомова Е.В., Чувашов И.Н. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 6/3. – С. 241–243.
5. IERS Conventions 2010. – Gerard Petit and Brian Luzum (ed.) // IERS Technical note 36. – Paris, 2010. – 179 p.

6. JPL Planetary Ephemeris DE421/LE421 [Электронный ресурс]. – 2009. URL. – ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ascii/de421/ (дата обращения 04.11.2013)
7. Lunar Prospector Spherical Harmonics and Gravity Models [Электронный ресурс]. – 2006. – URL: http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/lunarp/shadr.html (дата обращения 19.10.2013).

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: astrodep@niipmm.tsu.ru

Поступила в редакцию 17.10.13.

I.V. TOMILOVA, I.N. CHUVASHOV, E.V. PAHOMOVA

NUMERICAL MODEL OF MOTION ARTIFICIAL LUNAR SATELLITE. POSSIBILITIES OF USING

Tomsk State University, Tomsk, Russia

In this paper the algorithms for numerical simulation of the motion of artificial satellites of the Moon are presented. The calculation of perturbations from the non-spherical selenopotentsial, the third body, the tidal distortion in the body of the Moon and light pressure are describes. The results of test of the model and the possibility of using are discussed.

Томилова Ирина Владимировна, аспирантка;
Чувашов Иван Николаевич, мл. науч. сотр.;
Пахомова Екатерина Валерьевна, аспирантка.