

МАТЕМАТИКА

УДК 512.541

О.М. Бабанская (Катеринчук)

СВЯЗЬ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП ПРОСТЫХ ПОРЯДКОВ С ГРУППАМИ ГОМОМОРФИЗМОВ

Между группами гомоморфизмов и прямыми суммами и произведениями абелевых групп имеются разнообразные соотношения. Например, часто используются естественные изоморфизмы $\text{Hom}\left(A, \prod_{i \in I} B_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i)$ и $\text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in I} B_i, A\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(B_i, A)$. В данной статье, как и в [1], рассматривается ситуация, когда $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) = \text{Hom}\left(A, \prod_{i \in I} B_i\right)$. Это эквивалентно существованию естественного изоморфизма $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i)$. Пусть $\mathbf{M}$ – множество групп $\{Z(p) \mid p \text{ пробегает некоторое бесконечное множество } T \text{ простых чисел}\}$. Абелева группа A называется $\mathbf{M}$ -большой, если $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T} Z(p)\right) = \text{Hom}\left(A, \prod_{p \in T} Z(p)\right)$. Дается характеристика $\mathbf{M}$ -больших групп без кручения и смешанных $\mathbf{M}$ -больших групп.

1. $\mathbf{M}$ -БОЛЬШИЕ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Пусть T – некоторое бесконечное множество простых чисел, $\mathbf{M} = \{Z(p) \mid p \in T\}$. Если для группы A имеет место равенство $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T} Z(p)\right) = \text{Hom}\left(A, \prod_{p \in T} Z(p)\right)$, то A называется большой относительно множества групп $\mathbf{M}$, или, кратко, $\mathbf{M}$ -большой. Свойство, близкое к свойству быть $\mathbf{M}$ -большой группой, играет заметную роль в работах [2, 3]. Отметим, что эти свойства служат аналогом того факта, что $\bigoplus_{p \in T} Z(p)$ есть вполне инвариантная подгруппа в $\prod_{p \in T} Z(p)$. Здесь мы характеризуем произвольные $\mathbf{M}$ -большие абелевы группы.

Сделаем одно уточнение по поводу статьи [1]. В ней изучаются группы большие относительно множества $\mathbf{K} = \{J_p \mid p \in T\}$, где J_p – группа целых p -адических чисел. Имеется в виду, что под группами C_p , фигурирующими в статье, следует понимать группы J_p .

P будет обозначать множество всех простых чисел, T – произвольное, но фиксированное бесконечное множество простых чисел. Далее положим $V = \bigoplus_{p \in T} Z(p)$ и $\bar{V} = \prod_{p \in T} Z(p)$.

Существенным для дальнейшего является то, что $\bar{V}$ – сервантно инъективная группа [4, 5].

Для некоторой группы X положим $\pi(X) = \{p \in P \mid pX \neq X\}$.

Несложно проверить, что всякая периодическая группа является $\mathbf{M}$ -большой.

Перейдем к значительно более содержательному случаю групп без кручения.

Для ненулевого элемента x группы без кручения X определим множество $\theta(x) = \{p \in P \mid h_p(x) = 0\}$, где $h_p(x)$ – p -высота элемента x в группе X .

Замечание. Если X – группа без кручения и ненулевые элементы $x, y \in X$ линейно зависимы (т.е. существуют ненулевые числа $s, t \in \mathbb{Z}$ такие, что $sx = ty$), то $\theta(x) \cap T$ – конечное множество тогда и только тогда, когда $\theta(y) \cap T$ – конечное множество.

Действительно, почти для всех $p \in P$ имеем $h_p(x) = h_p(y)$.

Лемма 1.1. Группа X без кручения ранга 1 является $\mathbf{M}$ -большой тогда и только тогда, когда $\theta(x) \cap T$ – конечное множество для некоторого ненулевого элемента $x \in X$.

Доказательство. Необходимость. Пусть X – $\mathbf{M}$ -большая группа. Предположим противное, что существует ненулевой элемент $a \in X$ такой, что $\theta(a) \cap T$ – бесконечное множество. Тогда для любого $p \in \theta(a) \cap T$ подгруппа $\langle a \rangle$ p -сервантна в X . Из теории сервантно-инъективных групп получается следующее. Возьмем группу $G = \prod_{p \in \theta(a) \cap T} Z(p)$, и далее пусть

$\psi : \langle a \rangle \rightarrow G$ – такой гомоморфизм, что $\psi(a) = (c_p)$, где $0 \neq c_p \in Z(p)$. Тогда ψ продолжается до гомоморфизма $\phi : X \rightarrow G \subseteq \bar{V}$. Так как по предположению $\theta(a) \cap T$ – бесконечное множество, то $\phi X \not\subseteq V$, что противоречит условию. Значит, $\theta(a) \cap T$ – конечное множество для любого элемента $a \in X$.

Достаточность. Допустим, что X не является $\mathbf{M}$ -большой группой. Значит, существует гомоморфизм $\phi : X \rightarrow \bar{V}$ со свойством $\phi X \not\subseteq V$. Следовательно, найдется $a \in X$ с образом $\phi(a) = (y_p) \in \bar{V}$ и $(y_p) \notin V$, откуда $y_p \neq 0$ для бесконечного множества чисел из T .

Пусть $\sigma_p: \prod_{p \in T} Z(p) \rightarrow Z(p)$ – проекция. Тогда $(\sigma_p \varphi)a = y_p$. Если $y_p \neq 0$, то $h_p(y_p) = 0$, значит, и $h_p(a) = 0$. Следовательно, $\theta(a) \cap T$ – бесконечное множество, что противоречит условию. Итак, если $\theta(x) \cap T$ – конечное множество для некоторого ненулевого элемента $x \in X$, то X – **M**-большая группа, что и требовалось доказать.

В соответствии с замечанием, приведенным выше, при рассмотрении вопросов о **M**-больших группах можно заменять элементы на линейно зависящие от них элементы.

Теорема 1.2. Группа A без кручения является **M**-большой тогда и только тогда, когда для каждого ненулевого элемента $x \in A$ множество $\theta(x) \cap T$ является конечным.

Доказательство. Необходимость. Пусть группа A является **M**-большой. Допустим, что существует ненулевой элемент $x \in A$, для которого $\theta(x) \cap T$ – бесконечное множество.

Пусть $X = \langle x \rangle$ – сервантная подгруппа ранга 1 группы A . По лемме 1.1 существует гомоморфизм $\psi: X \rightarrow \bar{V}$ со свойством $\psi X \not\subset V$. Так как $\bar{V}$ – сервантно инъективная группа, то ψ продолжается до гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow \bar{V}$ со свойством $\varphi A \not\subset V$. Но это противоречит условию. Таким образом, множество $\theta(x) \cap T$ является конечным.

Достаточность. Пусть $\theta(x) \cap T$ – конечное множество для каждого ненулевого элемента $x \in A$. Предположим, что группа A не является **M**-большой. Существует гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow \bar{V}$ со свойством $\varphi A \not\subset V$. Следовательно, имеется элемент $a \in A$ такой, что $\varphi(a) = (c_p) \in \bar{V}$, где $c_p \in Z(p)$, но $\varphi(a) = (c_p) \notin V$. В частности, $c_p \neq 0$ для бесконечного множества чисел p из T . Если $c_p \neq 0$, то p -высота элемента c_p равна нулю. Но тогда и $h_p(a) = 0$. Получили, что $\theta(x) \cap T$ – бесконечное множество, что противоречит условию. Следовательно, группа A является **M**-большой.

Несложно получить доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.3. Пусть A – **M**-большая группа. Тогда любая сервантная подгруппа B группы A также **M**-большая.

Теперь применим теорему 1.2 к некоторым группам без кручения.

Следствие 1.4. 1) Сепарабельная группа A без кручения является **M**-большой тогда и только тогда, когда любое ее прямое слагаемое ранга 1 является **M**-большой группой.

2) Вполне разложимая группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($r(A_i) = 1$ для всех $i \in I$) является **M**-большой тогда и только тогда, когда каждая A_i – **M**-большая.

3) Группа $A = \prod_{i \in I} A_i$ (A_i – группы без кручения произвольного ранга для любого $i \in I$) является **M**-большой тогда и только тогда, когда для любого набора

элементов $a_i \in A_i$ ($i \in I$) множество $\bigcup_{i \in I} (\theta(a_i) \cap T)$ является конечным.

4) Группа A без кручения конечного ранга n является **M**-большой тогда и только тогда, когда существует максимальная линейно независимая система элементов $a_1, \dots, a_n$ группы A , для которой множество

$\bigcup_{i=1}^n (\theta(a_i) \cap T)$ является конечным.

Пусть T – множество всех простых чисел и A – почти делимая группа, т.е. $pA = A$ для почти всех $p \in T$ или, что равносильно, $\pi(A)$ – конечное множество. Тогда для каждого ненулевого элемента $a \in A$ множество $\theta(a)$ является конечным. Следовательно, A – **M**-большая группа.

Возьмем еще множество **K** групп без кручения $K = \{J_p \mid J_p \text{ – группа целых } p\text{-адических чисел, } p \in T\}$ [1]. Какова связь между **K**-большими и **M**-большими группами?

Если группа A без кручения является **K**-большой, то она является **M**-большой. В самом деле, из $\theta(x) \subseteq \pi(X)$ выводим $\theta(x) \cap T \subseteq \pi(X) \cap T$. По теореме 3.2 из [1] $\pi(X) \cap T$ – конечное множество, значит, и $\theta(x) \cap T$ – конечное множество.

Обратное не всегда выполнимо. Рассмотрим группу A без кручения ранга 1 типа $t(A) = [(1, 1, \dots, 1, \dots)]$ и считаем, что $T = P$. Тогда для каждого ненулевого элемента $a \in A$ множество $\theta(a) = \{p \in P \mid h_p(a) = 0\}$ является конечным. А множество $\pi(A) = \{p \in P \mid pA \neq A\} = P$ – бесконечное множество. Следовательно, согласно теореме 3.3 из [1] группа A не является **K**-большой.

2. СЛУЧАЙ СМЕШАННОЙ ГРУППЫ A

Сохраняются все обозначения и соглашения, принятые в §1.

Найдем необходимые и достаточные условия того, чтобы произвольная смешанная группа A была **M**-большой. Что интересно, эти условия имеют вид условий расщепления некоторых смешанных групп, связанных с A .

Если A – смешанная **M**-большая группа, то $A/t(A)$ – также **M**-большая группа. Из дальнейшего будет видно, что обратное вообще неверно. Правда, в одном важном случае это так.

Для смешанной группы A введем еще одно множество простых чисел (кроме P и T). Для этого запишем $t(A) = \bigoplus_{p \in S} A_p$, где A_p – (ненулевая) p -компонента группы A . Буква S сохраняет этот смысл до конца параграфа.

Теорема 2.1. Если для смешанной группы A множество $T \cap S$ конечно, то A является **M**-большой в точности тогда, когда $A/t(A)$ – **M**-большая группа.

Доказательство. Требуется проверки лишь достаточность. Предположим, что $A/t(A)$ – **M**-большая группа. Принимая во внимание равенство $\bar{V} = \prod_{p \in T \cap S} Z(p) \oplus \prod_{p \in T \setminus S} Z(p)$, достаточно убедиться, что

$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T \setminus S} Z(p)\right) = \text{Hom}\left(A, \prod_{p \in T \setminus S} Z(p)\right)$. Поскольку

$\text{Hom}\left(t(A), \prod_{p \in T \setminus S} Z(p)\right) = 0$, то любой гомоморфизм $A \rightarrow \prod_{p \in T \setminus S} Z(p)$ аннулирует $t(A)$. Поэтому группу

$\text{Hom}\left(A, \prod_{p \in T \setminus S} Z(p)\right)$ можно стандартным образом отождествить с $\text{Hom}\left(A/t(A), \prod_{p \in T \setminus S} Z(p)\right)$, а $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T \setminus S} Z(p)\right)$ – с

$\text{Hom}\left(A/t(A), \bigoplus_{p \in T \setminus S} Z(p)\right)$. Ввиду предположения получаем $\text{Hom}\left(A, \prod_{p \in T \setminus S} Z(p)\right) = \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{p \in T \setminus S} Z(p)\right)$, и доказательство закончено.

Простейшей ситуацией для смешанных групп является ситуация расщепляющейся группы. Пусть группа A расщепляется, т.е. $A = t(A) \oplus C$, где группа без кручения $C \cong A/t(A)$. Из равенства

$\text{Hom}(A, \bar{V}) = \text{Hom}(t(A), \bar{V}) \oplus \text{Hom}(C, \bar{V})$ и аналогичного для V , выводим, что A есть **M**-большая группа, если и только если C (т.е. $A/t(A)$) – **M**-большая. Чуть ниже мы увидим, что для любой **M**-большой группы имеет место некоторая расщепляемость.

Периодическая группа G называется элементарной, если порядок каждого ее ненулевого элемента свободен от квадратов. Запишем элементарную группу G в виде $G = \bigoplus_{p \in S} G_p$, где G_p – p -компонента. Тогда G_p – элементарная p -группа. Это означает, что порядки ее ненулевых элементов равны p . Как хорошо известно, $G_p = \bigoplus Z(p)$.

Пусть A – некоторая смешанная группа. Сначала рассмотрим наиболее содержательный случай, когда $S \subseteq T$, где, по-прежнему, S есть множество простых чисел p с $A_p \neq 0$.

Теорема 2.2. Предположим, что A – такая смешанная группа, что $t(A)$ – элементарная группа и $S \subseteq T$. Тогда, если A – **M**-большая, то A расщепляется.

Доказательство. Приведем прежде один простой факт о **M**-больших группах. Пусть C_p ($p \in T$) есть некоторая элементарная p -группа. Положим $C = \bigoplus_{p \in T} C_p$ и $\bar{C} = \prod_{p \in T} C_p$. Проверим, что если A – **M**-большая группа, то A является большой относительно множества групп $\{C_p \mid p \in T\}$. Под этим понимаем, что $\text{Hom}(A, \bar{C}) = \text{Hom}(A, C)$. Допустим напротив существование гомоморфизма $\psi: A \rightarrow \bar{C}$ со свойством $\psi A \not\subseteq C$. Найдется элемент $a \in A$ такой, что $\psi(a) \notin C$. Если $\psi(a) = (x_p) \in \prod_{p \in T} C_p$, $x_p \in C_p$, то для бесконечного множества T' чисел из T будет $x_p \neq 0$. Запишем $C_p = \langle x_p \rangle \oplus C'_p$, $p \in T'$. образуем далее сумму

$X = \bigoplus_{p \in T'} \langle x_p \rangle$ и произведение $\bar{X} = \prod_{p \in T'} \langle x_p \rangle$. Можно

записать разложения

$$C = \bigoplus_{p \in T'} \langle x_p \rangle \oplus \bigoplus_{p \in T'} C'_p \oplus \bigoplus_{p \in T \setminus T'} C_p = X \oplus C' \text{ и}$$

$$\bar{C} = \prod_{p \in T'} \langle x_p \rangle \oplus \prod_{p \in T'} C'_p \oplus \prod_{p \in T \setminus T'} C_p = \bar{X} \oplus \bar{C}'.$$

Наконец, возьмем гомоморфизм $\phi = \pi\psi: A \rightarrow \bar{X}$, где π – проекция $\bar{C} \rightarrow \bar{X}$. Для него имеем $\phi(a) \notin \bigoplus_{p \in T'} \langle x_p \rangle$. Последнее невозможно ввиду того, что A – **M**-большая. Итак, A – большая относительно $\{C_p \mid p \in T\}$.

Установим расщепляемость A . Тождественное отображение $1_{t(A)}$ группы $t(A)$ можно рассматривать как гомоморфизм $t(A) \rightarrow \prod_{p \in T} A_p$. На основании сервантной

инъективности группы $\prod_{p \in T} A_p$ это отображение продолжается до гомоморфизма $\tau: A \rightarrow \prod_{p \in T} A_p$. Как замечено выше, A – большая относительно множества групп $\{A_p \mid p \in T\}$, что влечет $\tau A \subseteq \bigoplus_{p \in T} A_p = t(A)$. Таким образом, τ – эндоморфизм группы A со свойствами $\tau|_{t(A)} = 1$ и $\tau A \subseteq t(A)$. Значит, τ – проекция, т.е. $\tau^2 = \tau$, откуда $A = \text{Im } \tau \oplus \text{Ker } \tau = t(A) \oplus \text{Ker } \tau$, что означает расщепляемость A . Теорема доказана.

Рассмотрим теперь произвольную смешанную группу A . Напомним, что буква P означает множество всех простых чисел. Введем еще символ $Pt(A)$ для суммы $\bigoplus_{p \in S} pA_p$. Ясно, что любой гомоморфизм $A \rightarrow \bar{V}$ переводит $Pt(A)$ в ноль. Это дает равенство $\text{Hom}(A, \bar{V}) = \text{Hom}(A/Pt(A), \bar{V})$. Положим $\bar{A} = A/Pt(A)$. Из $t(\bar{A}) = t(A)/Pt(A)$ заключаем, что $t(\bar{A})$ – элементарная группа. Справедливы также соотношения $\bar{A}/t(\bar{A}) = (A/Pt(A))/(t(A)/Pt(A)) \cong A/t(A)$. Можно сформулировать следующий результат.

Теорема 2.3. Пусть A – такая смешанная группа, что $S \subseteq T$. Записанные ниже утверждения эквивалентны:

- 1) A – **M**-большая;
- 2) $\bar{A}$ – **M**-большая;
- 3) $A/t(A)$ – **M**-большая и $\bar{A}$ расщепляется.

Доказательство. Равносильность 1) и 2) вытекает из равенства $\text{Hom}(A, \bar{V}) = \text{Hom}(\bar{A}, \bar{V})$, так как для любого гомоморфизма $\phi: A \rightarrow \bar{V}$ образ $\phi Pt(A) = 0$. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) содержится в теореме 2.2.

3) $\Rightarrow$ 2). Имеем $\bar{A} = t(\bar{A}) \oplus C$, где $C \cong \bar{A}/t(\bar{A}) \cong A/t(A)$. Очевидно, что $\bar{A}$ – **M**-большая, что и требовалось доказать.

Наконец, пусть A – смешанная группа без всяких добавочных предположений. Случай, когда множество $S \cap T$ конечно, разобран в теореме 2.1. Поэтому счита-

ем это множество бесконечным. Поступим так. Запишем $t(A) = U \oplus W$, где $U = \bigoplus_{p \in S \setminus T} A_p$, W – дополнительное слагаемое. Тогда $\varphi U = 0$ для всех $\varphi: A \rightarrow \bar{V}$. Значит, $\text{Hom}(A, \bar{V}) = \text{Hom}(A/U, \bar{V})$. Положим $A' = A/U$. Можно утверждать, что A – $\mathbf{M}$ -большая тогда и только тогда, когда A' – $\mathbf{M}$ -большая. Кроме того, A' удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и $A'/t(A') = (A/U)/(t(A)/U) \cong A/t(A)$. Таким образом, мы располагаем необходимыми и достаточными усло-

виями того, чтобы произвольная смешанная группа была $\mathbf{M}$ -большой.

Приведем пример, когда фактор-группа $A/t(A)$ является $\mathbf{M}$ -большой, но сама группа A $\mathbf{M}$ -большой не является. Возьмем в качестве группы A произведение $\prod_{p \in T} Z(p)$. Пусть $\varepsilon: \prod_{p \in T} Z(p) \rightarrow \prod_{p \in T} Z(p)$ – тождественное отображение. Ясно, что $\text{Im } \varepsilon \not\subset \bigoplus_{p \in T} Z(p)$, т.е. группа $A = \prod_{p \in T} Z(p)$ не является $\mathbf{M}$ -большой по определению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Катеринчук О.М. К-большие и обобщенно К-большие абелевы группы // Вестник Томского государственного университета. 2006. Вып. 290. С. 48–55.
2. Крылов П.А., Пахомова Е.Г. Абелевы группы как инъективные модули над кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, вып. 4. С. 1365–1384.
3. Grinshpon S.Ya., Krylov P.A. Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sci. 2005. Vol. 128, № 3. P. 2894–2997.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
5. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. Endomorphism Rings of Abelian Groups // Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Boston; London, 2003.

Статья представлена кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 4 декабря 2006 г., принята к печати 11 декабря 2006 г.