УДК 271.39.15.17

М.С. Кобылина

LUR-НОРМЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПСЕВДОДЕРЕВЬЯХ

В статье доказано, что пространство непрерывных функций $C_0(K)$ со стандартной sup-нормой допускает эквивалентную локально равномерно выпуклую (LUR) норму. Здесь K – это локально компактное пространство, ассоциированное с некоторым псевдодеревом. Класс псевдодеревьев, введенный в данной статье, является расширением класса деревьев из [1].

Вопрос существования LUR-норм на банаховых пространствах имеет давнюю историю. Известно, что на пространствах вида $C(K)$ такая норма существует не всегда. Обзор недавних результатов в этом направлении можно найти в статьях [1–4].

В данной работе рассматривается класс объектов, названных псевдодеревьями, который расширяет класс деревьев. Мы показываем, что псевдодеревья могут быть наделены естественной топологией и они допускают естественное расширение до локально компактного пространства. Основным результатом является теорема 4 о том, что банаховы пространства непрерывных функций на определенных таким образом псевдодеревьях имеют локально равномерно выпуклую норму.

Назовем частично упорядоченное множество T *псевдодеревом,* если для каждого $t \in T$ множество $F_t = \{s \in T; s \le t\}$ является линейно упорядоченным и компактным относительно порядковой топологии. Будем говорить, что псевдодерево *густо ветвится*, если множество $G_t = \{s \in T; s > t\}$ нелинейно упорядочено для каждого $t \in T$. Назовем элемент $t \in T$ *точкой ветвления*, если существуют элементы u и v большие t, такие что $(t,u) \cap (t,v) = \varnothing$. Множество всех точек ветвления T обозначим B_T. Скажем, что элемент $t \in T$ имеет n ветвей, если существует последовательность из n элементов $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset G_t$, для которой множества (t, u_i) попарно не пересекаются. Обозначим $n(t)$ количество ветвей элемента $t \in B_T$ таких, что для любой более широкой последовательности элементов $\{u_1, \ldots, u_{n(t)+1}\} \subset G_t$ система множеств (t, u_i) не является дизъюнктной. Далее будем рассматривать псевдодерьевья, у которых каждая точка может иметь только конечное число ветвей. Введем на T топологию порядка. Базу топологии будут составлять множества вида $(u,v) = \{s \in T; u < s < v\}$. Отметим, что для элемента $t \in B_T$ обязательно существуют u и v большие t такие, что $(t,u) \cap (t,v) = \varnothing$. Рассмотрим множества (s,u) и (s,v), содержащие t. Эти множества открыты, следовательно, и их пересечение $(s,u) \cap (s,v) = (s,t]$ обязано быть открытым. Таким образом, базу окрестностей точек $t \in B_T$ будут составлять полуинтервалы вида $(s,t] = \{u \in T; s < u \le t\}$, а для точек $t \in T \setminus B_t$ – всевозможные интервалы $(u,v) = \{s \in T; u < s < v\}$, содержащие точку t, в общем случае не сводящиеся к полуинтервалам.

Заметим, что множества G_t в топологии порядка являются открыто-замкнутыми в T. Для каждого $t \in B_T$ множество G_t можно представить в виде дизъюнктного объединения $n(t)$ открыто-замкнутых множеств $G_{t,i}$ (ветвей), $i = 0, \ldots n(t)-1$. Множество $G_{t,i}$ содержит интервал (t, u_i) из соответствующей системы попарно не пересекающихся множеств, а также множества G_s для каждого $s \in (t, u_i)$. Назовем линейно упорядоченное множество $A_{t,i} \subset G_{t,i}$ *побегом элемента* $t \in T$, если оно максимально по включению. Побег так же, как и пространство $G_{t,i}$, является открыто-замкнутым множеством. Кроме того, для точек побега $A_{t,i}$ справедливо одно из следующих утверждений:

– в любой выколотой окрестности $O_s \setminus \{s\}$ элемента $s \in A_{t,i}$ содержатся точки ветвления;

– существует выколотая окрестность $O_s \setminus \{s\}$ точки $s \in A_{t,i}$, не содержащая точек ветвления.

Не теряя общности, можно считать, что псевдодерево T имеет минимальный элемент 0_T, который является либо изолированной точкой ветвления, либо имеет окрестности вида $[0_T, u) = \{t \in T; t < u\}$. Для элемента $0_T \in T$ фиксируем нулевой побег $A_{0_T,0}$, другие его ветви и соответствующие побеги, если они есть, нумеруем произвольным образом. Далее ветви и побеги точек ветвления будем выбирать и нумеровать таким образом, чтобы нулевым побегом точки ветвления $s \in A_{t,i}$ было продолжение $A_{t,i}$, т.е. $A_{s,0} = A_{t,i} \cap G_s$.

Факт 1. Псевдодерево T нелокально компактно, если оно содержит точки, удовлетворяющие (1).

Доказательство. Пусть точка $t \in T$ удовлетворяет условию (1) и O_t – ее окрестность. Тогда $|B_T \cap O_t| \ge \aleph_0$. Выберем в счетную O_t возрастающую последовательность точек ветвления $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$. Заметим, что система открытых множеств $(s_i, s_{i+1}]$ будет дизъюнктной. Рассмотрим множество $\overline{O_t}$. Семейство множеств $\{(s_i, s_{i+1}]\}_{i=1}^{\infty}$ и $\overline{O_t} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (s_i, s_{i+1}]$ образуют открытое покрытие $\overline{O_t}$. Данное покрытие счетно, и из него нельзя извлечь конечного подпокрытия. Следовательно, множество $\overline{O_t}$ не является компактом, а пространство T нелокально компактно.

Факт 2. Если псевдодерево T не имеет точек, удовлетворяющих условию (1), то оно локально компактно.

Доказательство. Рассмотрим точку t из T. Если t является точкой ветвления, то она имеет окрестность

$(u,t]$, не содержащую точек ветвления, отличных от t. Рассмотрим замыкание $(u,t]$, все точки множества $[u,t]$ будут иметь базу, состоящую из интервалов, не сводящихся к полуинтервалам. Тогда $[u,t]$ будет являться замкнутым подпространством F_t и поэтому обязано быть компактным.

Для точки, не имеющей ветви, также существует окрестность вида (u,v), не содержащая точек ветвления. Замыканием этой окрестности будет подпространство $[u,v]$ в пространстве F_t. Аналогично вышерассмотренному случаю, множество $[u,v]$ компактно.

Примером локально компактного псевдодерева может служить отрезок $[0,1]$ с обычной топологией. В качестве псевдодерева, не являющегося локально компактным, рассмотрим «стрелку Зоргенфрея». Пространство «две стрелки» можно рассматривать как локально компактное расширение «стрелки Зоргенфрея». Подобное расширение далее можно обобщить на случай нелокально компактных псевдодеревьев.

Для псевдодеревьев, не являющихся локально компактными, рассмотрим расширение $K_T = B_T\{0\}\times\cup T\times\{1\}$, подобное «двум стрелкам», с топологией:

1. Для $x=(t,0)$:

a) если любой интервал (t,u) побега $A_{t,0}$ содержит точки ветвления псевдодерева T, то окрестностями объявим множества вида $[t,u)\cap B_T\times\{0\}\cup(t,u)\times\{1\}$, $(t,u)\subset A_{t,0}$;

b) иначе x будем считать изолированной точкой.

2. Для $y=(t,1)$:

a) если $t\notin B_T$, ф.с.о.: $(u,v)\cap B_t\times\{0\}\cup(u,v)\times\{1\}$, $t\in(u,v)$;

b) иначе $(u,t)\cap B_t\times\{0\}\cup(u,t]\times\{1\}$.

Для открытого подмножества G в T обозначим $\widetilde{G}=G\cap B_T\times\{0\}\cup G\times\{1\}$. Пространство $\widetilde{A}_{t,i}\cup\{t,1\}$ открыто-замкнуто в K_T. Поэтому K_T можно представить в виде дизъюнктного объединения множеств $A_{0_T,0}$ и $A_{t,i}$, $t\in B_T$, $i=1,\dots,n(t)-1$.

Лемма 1. Подпространство $[t,u)\cap B_T\times\{0\}\cup[t,u]\times\{1\}$ пространства K_T является компактом.

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ – открытое покрытие пространства $[t,u)\cap B_T\times\{0\}\cup[t,u]\times\{1\}$. Рассмотрим $\{U_j\}_{j\in J}$ – измельчение покрытия $\{G_i\}_{i\in I}$, где U_j являются окрестностями x_j. Причем если окрестность $x\in B_T\times\{0,1\}$ является элементом покрытия, то окрестность точки y, $y|_T=x|_T$ также отнесем к элементам покрытия. Рассмотрим проекции элементов $\{U_j\}_{j\in J}$ на множество $[t,u]\times\{1\}$. Получим покрытие множества $[t,u]$ вида $\{(u_s,v_s)\}_{s\in S}\cup\{(u_s,t_s]\cup[t_s,v_s)\}_{s\in J\setminus S}$. Заметим, что покрытие $\{(u_s,v_s)\}_{s\in S}\cup\{(u_s,t_s]\cup[t_s,v_s)\}_{s\in J\setminus S}=\{(u_s,v_s)\}_{s\in J}$, а последнее является открытым покрытием компакта $[t,u]$. Извлечем из него конечное подпокрытие $\{(u_k,v_k)\}_{k=1}^{n}$, равное $\{(u_k,v_k)\}_{k=1,k\in S}^{m}\cup\{(u_k,t_k]\cup[t_k,v_k)\}_{k=1,k\in J\setminus S}^{m}$. Тогда семейство множеств, проекциями которых являются элементы покрытия $\{(u_k,v_k)\}_{k=1,k\in S}^{m}\cup\{(u_k,t_k]\cup[t_k,v_k)\}_{k=1,k\in J\setminus S}^{m}$, будет конечным покрытием пространства $[t,u)\cap B_T\times\{0\}\cup[t,u]\times\{1\}$.

Теорема 2. Для псевдодерева T пространство K_T является локально компактным пространством.

Доказательство. Пусть $x\in K_T$, O_x – окрестность точки x. Если x изолирована, то замыкание ее окрестности будет одной точкой, т.е. компактным. Если $x=(t,0)$ и x не является изолированной, то замыканием ее окрестности будет являться множество $[t,u)\cap B_T\times\{0\}\cup[t,u]\times\{1\}$. Множество $[t,u)\cap B_T\times\{0\}\cup[t,u]\times\{1\}$ в силу леммы 1 компактно. Замыкания окрестностей точек $y=(t,1)$ также являются компактами. Этот факт может быть доказан аналогично лемме 1.

Обозначим $C_0(K)$ – пространство всех непрерывных функций на *K*, стремящихся к нулю на бесконечности, т.е. таких, что для каждого $\varepsilon>0$ множества $\{x\in K;\ |f(x)|\geq\varepsilon\}$ компактны.

Замечание. Если для множества F_t пространство $C(F_t)$ допускает локально равномерно выпуклую норму, то пространство непрерывных функций $C_0[u,t]$, равных нулю на концах промежутка, допускает LUR-норму.

Доказательство. Пространство $C_0[u,t]$ гомеоморфно линейному подпространству $\{f\in C(F_1)\}$; $\{f(x)=0, x\in[0_T,u]\cup\{t\}\}$ пространства *C*(*F*$_t$). Следовательно, $C_0[u,t]$ допускает LUR-норму.

Далее нам потребуется следующая теорема.

Теорема 3 [3]. Пусть $(X,\|\cdot\|)$ – банахово пространство. Пусть в $(X,\|\cdot\|)$ задано семейство ограниченных линейных операторов $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, удовлетворяющее свойствам:

1) оператор T, определенный на X следующим образом: $Tx(\gamma)=\|P_\gamma(x)\|$, $x\in X$, отображает X в $c_0(\Gamma)$;

2) если $x\in X$, то $x\in\overline{sp\{P_\alpha x\}}$;

3) пространства $P_\alpha X$ допускают эквивалентную локально равномерно выпуклую норму.

Тогда X допускает эквивалентную локально равномерно выпуклую норму.

Теорема 4. Пусть T – псевдодерево, каждая точка ветвления которого имеет конечное число ветвей. Пусть для каждого $t\in T$ множество F_t является линейно упорядоченным компактом, и $C(F_t)$ допускает LUR-норму. Тогда $C_0(K_T)$ допускает локально равномерно выпуклую норму.

Доказательство. Для того чтобы теорема была верна, достаточно показать, что на $C_0(K)$ существует последовательность операторов $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, удовлетворяющих теореме Зизлера [3].

Для $t \in B_T$, $i = 1, \ldots, n(t)$, а также $(0_T, 0)$ определим $P_{t,i} f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \in \tilde{A}_{t,i}; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$

Покажем, что для $f \in C_0(K)$ функция $P_{t,i} f$ принадлежит $C_0(K)$. Рассмотрим следующие ситуации:

a) если $x \in \widetilde{A}_{t,i}$, то из непрерывности функции f следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $O_x \subset \widetilde{A}_{t,i}$, для которой $\left|P_{t,i} f(x) - P_{t,i} f(y)\right| = \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$, $y \in O_x$;

b) если $x \notin \widetilde{A}_{t,i}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует O_x, не пересекающаяся с $\widetilde{A}_{t,i}$, для которой $\left|P_{t,i} f(x) - P_{t,i} f(y)\right| = \left|0 - 0\right| = 0 < \varepsilon$, $y \in O_x$.

Далее покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует только конечное число индексов (t_n, i_n), для которых $\left\|P_{t_n, i_n} f\right\| \geq \varepsilon$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in C_0(K)$, существует компакт $K_\varepsilon \subset K$ такой, что $\left|f(y)\right| \geq \varepsilon$, $y \in K_\varepsilon$. Так как множества $\widetilde{A}_{t,i}$ открыто-замкнуты в K_T, то $K_\varepsilon \subset \coprod_{m=1}^{n} \tilde{A}_{t_m, i_m}$. Поэтому, по определению $P_{t,i} f$, $\left\|P_{t_n, i_n} f\right\| \geq \varepsilon$ может быть справедливо, только для (t_m, i_m), $m = 1, \ldots, n$. Кроме того, легко видеть, что $f \in \overline{sp\{P_{t,i}\}}$, так как $\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{n} P_{t_j, i_j} f(x) \right\| < \varepsilon$.

Заметим, что пространство $P_{t,i}(C_0(K_T))$ гомеоморфно $C_0(\widetilde{A}_{t,i})$. Таким образом, осталось показать, что $P_{t,i}(C_0(\widetilde{A}_{t,i}))$ допускает локально равномерно выпуклую норму. Этот факт будет доказан в лемме 2.

Лемма 2. $C_0(\widetilde{A}_{t,i})$ допускает LUR -норму.

Доказательство. Рассмотрим пространство $\widetilde{A}_{t,i}$. Для каждой точки $x \in \widetilde{A}_{t,i}$ справедливо одно из следующих утверждений:

a) любая окрестность x содержит точки $B_T \times \{0,1\}$;

b) существует окрестность x, не пересекающая $B_T \times \{0,1\}$.

Таким образом, $\widetilde{A}_{t,i}$ можно разбить на дизъюнктные, открыто-замкнутые множества M и N. M содержит точки, для которых справедливо (a), N – (b). Множество N, в свою очередь, представимо в виде $\coprod_{\delta \in \Delta} (u_\delta, v_\delta) \times \{1\}$.

Для $f \in C_0(\alpha \tilde{A}_{t,i})$ определим функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), x \in N; \\ 0, \quad x \in M. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что f_0 также принадлежит пространству $C_0(\widetilde{A}_{t,i})$. Далее определим оператор $T : C_0(\widetilde{A}_{t,i}) \mapsto C_0(\widetilde{A}_{t,i})$ по правилу $Tf(x) = f(x) - f_0(x)$. Оператор T линеен и ограничен. Причем $\operatorname{Im} T$ гомеоморфен $C_0(M)$, а $\ker T$ гомеоморфно $C_0(N)$. Согласно результатам [4], если $\operatorname{Im} T$ и $\ker T$ допускают LUR -норму, то ее допускает и $C_0(\widetilde{A}_{t,i})$.

Пространство

$$C_0(N) = c_0\{C_0[u_\delta, v_\delta];\ \delta \in \Delta\}.$$

Здесь пространство $C_0[u_\delta, v_\delta]$ – это пространство всех непрерывных функций на $[u_\delta, v_\delta]$, равных нулю на концах интервала. По замечанию каждое пространство $C_0[u_\delta, v_\delta]$ допускает LUR-норму. Из результатов Зизлера [3] следует, что и $C_0(N)$ имеет эквивалентную LUR-норму.

Для завершения доказательства рассмотрим $C_0(M)$. Построим на нем семейство операторов $\{\pi_\gamma\}_{\gamma \in B_T}$, удовлетворяющих теореме Зизлера. Определим

$$\pi_\gamma f(x) = \begin{cases} f(\gamma, 1) - f(\gamma, 0), \ x \in (\tilde{A}_{\gamma,0} \cap M) \cup \{\gamma, 1\}; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$\pi_\gamma f \in C_0(M).$$

Пусть $f \in C_0(M)$, $\varepsilon > 0$. Для него существует компакт $K_\varepsilon \subset (\tilde{A}_{\gamma,0} \cap M) \cup \{\gamma, 1\}$, в точках которого функция может изменяться больше, чем на ε. В силу непрерывности функции f для каждой точки $x \in K_\varepsilon$ существует окрестность O_x, в которой значение функции f изменяется меньше, чем на ε. В результате, получили открытое покрытие $\{O_x\}_{x \in \alpha M}$ компакта K_ε, и из него можно извлечь конечное подпокрытие. Пусть $\{O_{x_i}\}_{i=1}^{n} \cup O_\alpha$ – минимальное покрытие компакта K_ε, на каждом элементе которого функция отклоняется менее, чем на ε. В силу этого может существовать только конечное число точек $\gamma \in B_T \cap K_\varepsilon$, для которых

$$\left\|\pi_\gamma f(x)\right\| = \left|f(\gamma, 1) - f(\gamma, 0)\right| \geq \varepsilon.$$

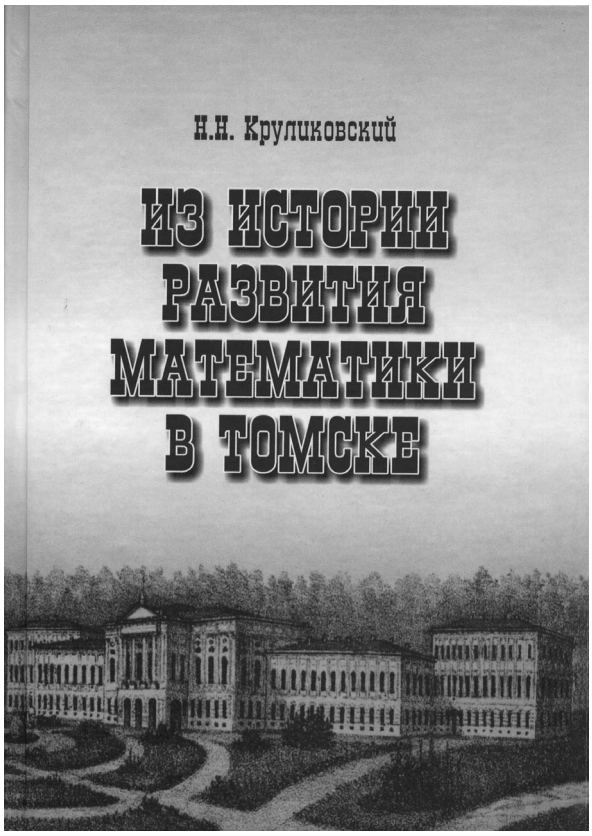
Далее вспомним, что M состоит из точек, в любой окрестности которых есть точки ветвления T. В каждом пересечении элементов покрытия $\{O_x\}_{x \in \alpha M}$ выберем по точке $q_j \subset B_T \times \{0,1\}$, $j = 1, \ldots, m$. Составим функцию $f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{m} \pi_{q_j} f(x)$, для нее будет справедливо $\left|f(x) - f_\varepsilon(x)\right| < \varepsilon$, $x \in M$. Таким образом, мы показали, что $f(x) \in \overline{sp\{\pi_\gamma f\}}$.

Третье условие теоремы Зизлера выполнено, так как $\pi_\gamma(C_0) \cong R$ допускает эквивалентную локально равномерно выпуклую норму.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Molto A., Orihuela J., Troyanski S., Valdivia M.* A non linear Transfer Technique for renorming // Pre-Publicationes del Departamento de Matematicas. Universidad de Murcia 20, 2003.
2. *Haydon A., Molto J.* Origuella Spaces of functions with countably many discontinuities // Preprint http://arxiv.org/math/0612307
3. *Zizler V.* Locally uniformly rotund renorming and decomposition of Banach spaces // Bull. Austr. Math. Soc. 1984. Vol. 29. P. 259–265.
4. *Godefroy G., Troyanski F., Whitfield G.H.M., Zizler V.* Locally uniformly rotund renorming and injections into $c_0(\Gamma)$ // Canad. Math. Bull. 1984. Vol. 27. P. 494–500.

Статья представлена кафедрой теории функций и топологии механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 13 ноября 2006 г., принята к печати 20 ноября 2006 г.



Круликовский Н.Н.
Из истории развития математики в Томске. – Томск: Томский государственный университет, 2006. – 174 с.

В книге содержится общий очерк развития математики в г. Томске с начала деятельности ученых-математиков и высшего математического образования в Сибири.

Для широкого круга читателей, интересующихся историей математики.