

*На правах рукописи*



Медных Илья Александрович

**Голоморфные отображения римановых  
поверхностей  
и их дискретные аналоги**

01.01.01 – Вещественный, комплексный  
и функциональный анализ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Томск — 2014

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, в лаборатории теории функций

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор  
**Асеев Владислав Васильевич**

**Официальные оппоненты:**

**Семенко Евгений Вениаминович**, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский государственный педагогический университет», институт физико-математического и информационно-экономического образования, кафедра математического анализа, заведующий кафедрой

**Родионов Евгений Дмитриевич**, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Алтайский государственный университет», кафедра математического анализа, профессор

**Ведущая организация:** федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Защита состоится 27 июня 2014 года в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.21, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, уч. корпус №2, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» [www.tsu.ru](http://www.tsu.ru).

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: [http://www.tsu.ru/content/news/announcement\\_of\\_the\\_dissertations\\_in\\_the\\_tsu.php](http://www.tsu.ru/content/news/announcement_of_the_dissertations_in_the_tsu.php)

Автореферат разослан «\_\_\_» мая 2014 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Малютина  
Александра Николаевна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы.**

Теория римановых поверхностей возникла на основе классических работ Римана и Гурвица в конце 19 — начале 20 веков. Первоначальное определение римановой поверхности давалось в терминах разветвленных накрытий над расширенной комплексной плоскостью (сферой Римана). Позже понятие разветвленного накрытия естественным образом переросло в понятие голоморфного отображения одномерного комплексного многообразия (римановой поверхности). При этом выяснилось, что образом такого отображения может быть не только сфера, но также любая другая риманова поверхность. Частным случаем голоморфного отображения является конформный автоморфизм римановой поверхности. Со времен Гурвица [15] известно, что порядок группы конформных автоморфизмов римановой поверхности рода  $g > 1$  не превосходит величины  $84(g-1)$ . Группы, для которых достигается верхняя оценка, называются группами Гурвица. Они являются предметом изучения различных разделов математики, таких как комплексный анализ, топологическая теория поверхностей, теория групп и теория чисел. В настоящее время существует более тысячи работ, написанных на эту тему.

Существенным обстоятельством, позволяющим добиться успехов в теории автоморфизмов, является классическая теорема Керекъярто. Она утверждает, что всякая конечная группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов топологической поверхности может быть представлена как группа конформных автоморфизмов после введения на поверхности подходящей комплексной структуры. Указанные результаты означают, что для исследования групп автоморфизмов можно использовать как топологический, так и аналитический аппараты теории функций. Они, как частный случай, включают в себя теорию фуковских и клейновых групп.

Совсем другая ситуация возникает, когда требуется изучать голоморфные отображения одной римановой поверхности на другую. Если  $S_g$  и  $S_{g'}$  — римановы поверхности родов  $g$  и  $g'$ , соответственно, и  $g > g' > 1$ , то доказанная в 1913 году теорема де Франкиса утверждает, что множество  $Hol(S_g, S_{g'})$  всех голоморфных отображений конечно и его порядок зависит только от  $g$  и  $g'$ . Точная оценка на величину  $|Hol(S_g, S_{g'})|$  неизвестна до сих пор. Важно отметить, что топологическая версия теоремы де Франкиса в настоящее время также не установлена. Частные результаты, связанные с теоремой де Франкиса, можно найти в работах ([3], [10], [11], [12], [14], [16], [20]).

В последнее десятилетие появилось множество работ различных авторов ([4], [5], [6], [7], [19]), посвященных дискретным версиям теории римановых поверхностей. Роль римановых поверхностей в этих теориях играют конечные графы, а в качестве голоморфных отображений выступают гармонические

отображения. Для них построена теория якобиевых многообразий (дискретными аналогами которых являются конечные абелевы группы) и доказаны аналоги теоремы Римана-Роха. Многие теоремы классической теории римановых поверхностей также получили свое воплощение и в дискретном случае. Этот подход нашел эффективные применения к теории кодирования, стохастической теории и финансовой математике. Библиографию по этому вопросу можно найти в [5].

В теории римановых поверхностей хорошо известен факт, что всякая риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической, то есть представляет собой двулистное разветвленное накрытие сферы. Дискретный аналог этой теоремы, установленный в [5] утверждает, что всякий граф рода 2 представляет собой двулистное разветвленное накрытие дерева. Известные теоремы Акколы [2] и Фаркаша [9] утверждают, что двулистное неразветвленное накрытие над римановой поверхностью рода 2 всегда гиперэллиплично. Кроме того, Акколой [2] показано, что трехлистное неразветвленное накрытие над римановой поверхностью рода 2 — гиперэллиплично, если оно нерегулярно и является двулистным разветвленным накрытием тора в регулярном случае.

### **Цель работы.**

Получить точные оценки в теореме де Франкиса для числа голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два.

Получить структурные теоремы, описывающие голоморфные отображения римановых поверхностей рода три и четыре на риманову поверхность рода два.

Установить дискретные версии теорем Акколы и Фаркаша о гиперэллиптичности накрытий над римановыми поверхностями.

### **Методы исследований.**

Для получения основных результатов использованы методы классического комплексного анализа, топологической теории графов, а также современные методы геометрической теории орбифолдов.

### **Научная новизна.**

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Получена точная верхняя оценка на число голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два. Это решает проблему де Франкиса для поверхностей минимально возможного рода.

2) Получены структурные теоремы, описывающие голоморфные отображения римановых поверхностей рода три и четыре на риманову поверхность

рода два.

3) Установлена дискретная версия теоремы Фаркаша, утверждающая, что любое двулистное неразветвленное накрытие графа рода два является гиперэллиптическим.

4) Показано, что нерегулярное трехлистное накрытие графа рода два также является гиперэллиптическим графом, в то время как его регулярное трехлистное накрытие двулистно накрывает граф рода один. Это является дискретным аналогом теоремы Акколы.

### **Теоретическая и практическая ценность.**

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в области геометрической теории функций, комплексного анализа, геометрии и теории графов.

### **Апробация работы.**

Результаты работы докладывались на следующих российских и международных конференциях.

2008 год:

1. XLVI Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс», НГУ, Новосибирск, 2008 г.

2009 год:

1. Девятая международная Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», 1 – 7 июля 2009 г., Казань

2. XLVII Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс», НГУ, Новосибирск, 2009 г.

2010 год:

1. International conference «Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2010», 08 – 12 March 2010, Hiroshima, Japan.

2. Международная школа-конференция «Геометрия и анализ на многообразиях», 21 – 27 июня 2010 г., Новосибирск.

3. Школа конференция по геометрическому анализу, 2 – 8 августа 2010 г., с. Артыбаш, Горно-Алтайск.

2011 год:

1. Международная школа-конференция по геометрии и анализу, 19 – 26 июня 2011, Кемерово, КемГУ.

2. Десятая Казанская летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы - 2011», 30 июня – 7 июля 2011, Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет.

3. Школа конференция по геометрическому анализу, 13 – 19 августа 2011 г., с. Артыбаш, Горно-Алтайск.

2012 год:

1. International conference «Workshop on low dimensional conformal structures and their groups», 26 – 29 June, 2012, Gdansk, Poland.

Кроме того, результаты диссертации обсуждались на следующих семинарах ведущих научно-исследовательских институтов и университетов: на семинаре отдела геометрии и анализа Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством академика Ю. Г. Решетняка, на семинаре «Инварианты трехмерных многообразий» ИМ СО РАН под руководством чл.-корр. РАН А. Ю. Веснина и на семинаре «Графы и римановы поверхности» под руководством профессора Р. Недели, University Matej Bel, Banská Bystrica, Словакия.

### **Публикации.**

Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах, в том числе в 5 журналах, входящих в перечень ВАК.

### **Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного содержания и списка литературы из 50 использованных источников. Общий объем диссертации — 123 страницы.

## **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** описываются основные результаты диссертации и дается краткий обзор исследований по теме диссертации.

**Первая глава** содержит предварительные сведения из теории римановых поверхностей, их автоморфизмов и голоморфных отображений.

**Вторая глава** посвящена решению проблемы де Франкиса для римановых поверхностей минимально возможного рода. Она состоит из двух параграфов.

В первом параграфе дается классификация голоморфных отображений римановой поверхности  $S_3$  рода три на риманову поверхность  $S_2$  рода два с точностью до эквивалентности. Обозначим через  $Hol(S_3, S_2)$  множество голоморфных отображений  $S_3$  на  $S_2$ . Отображения  $f : S_3 \rightarrow S_2$  и  $h : S_3 \rightarrow S_2$  называются эквивалентными, если существуют автоморфизмы  $\alpha \in Aut S_3$  и  $\beta \in Aut S_2$  такие, что  $f \circ \alpha = \beta \circ h$ . В теореме 1 устанавливается, что для заданных поверхностей  $S_3$  и  $S_2$  множество  $Hol(S_3, S_2)$  состоит не более чем из двух классов эквивалентности. Полностью описаны случаи, когда  $Hol(S_3, S_2)$  — пусто, состоит из одного или двух классов эквивалентности. Как следствие, установлен следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть  $S_3$  и  $S_2$  — римановы поверхности родов три и два, соответственно. Тогда число классов эквивалентности голоморфных отображений  $S_3$  на  $S_2$  не превосходит двух. Указанная оценка точная и достигается для пары римановых поверхностей  $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$  и  $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{a-2}{a+2})(v^2 - \frac{b-2}{b+2})$ , где неупорядоченная пара  $\{a, b\}$  совпадает с какой либо из следующих пар  $\{-6, -2 \pm 4i\}$ ,  $\{\pm 2i, 2 \pm 4i\}$ ,  $\{\pm 2i\sqrt{3}, -4 \pm 2i\sqrt{3}\}$ . При этом, неэквивалентные отображения имеют вид  $(u, v) = f(w, z)$  и  $(u, v) = g(w, z)$ , где  $f(w, z) = (\frac{8}{k(z^2-1)^3}w, \frac{z^2+1}{z^2-1})$ ,  $g(w, z) = (\frac{z^2-1}{8z^3}w, \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$ , а  $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$ .

Пусть  $S_g$  — заданная риманова поверхность рода  $g$ . Обозначим через  $I_{g'}(S_g)$  множество всех классов эквивалентности голоморфных отображений вида  $f : S_g \rightarrow S_{g'}$ , где  $S_{g'}$  пробегает все возможные римановы поверхности рода  $g'$  и  $g \geq g' > 1$ . В работе Е. Кани [17] показано, что  $|I_{g'}(S_g)| \leq 2^{2g^2-1}(2^{2g^2-1} - 1)$ . Имеет место следующая теорема

**Теорема 3.** Число элементов множества  $I_2(S_3)$  не превосходит 3. Данная оценка точная и достигается для римановой поверхности  $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$ , где  $a \neq b$ ,  $a, b \neq 0, \pm 2$  и  $(a+2)(b+2) \neq 16$ . При этом, за исключением конечного числа наборов  $\{a, b\}$ , поверхность  $S_3$  имеет три попарно не изоморфных образа  $f(S_3)$ ,  $g(S_3)$  и  $h(S_3)$ , где  $f$  и  $g$  те же, что и в предыдущей теореме, а голоморфное отображение  $h$  имеет вид  $h(w, z) = (\frac{i(z^2+1)}{8z^3}w, \frac{i}{2}(z - \frac{1}{z}))$ .

Следующий пример иллюстрирует, что случай  $|I_2(S_3)| = 2$  также реализуется. Рассмотрим риманову поверхность  $S_3 : w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$  и заданные на ней голоморфные отображения  $h_1(w, z) = (\frac{2i}{(z^2+1)^3}w, \frac{z^2-1}{z^2+1})$  и  $h_2(w, z) = (\frac{\sqrt{i}(z^2-i)}{8z^3}w, \frac{1}{2}(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}))$ . Тогда римановы поверхности  $h_1(S_3)$  и  $h_2(S_3)$  представляются уравнениями  $h_1(S_3) : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1)$  и  $h_2(S_3) : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 - 0.75)$ , соответственно. По классификации Больца они неизоморфны.

Целью второго параграфа главы 2 является конструктивное описание голоморфных отображений  $Hol(S_3, S_2)$ . Как следствие, будет получена точная верхняя оценка на число голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два. Будет установлено, что число указанных отображений не превосходит 48. Показано, что полученная оценка точная и приведены пары поверхностей для которых она достигается. Это полностью решает проблему де Франкиса для поверхностей минимальных родов. Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 4.** Число элементов множества  $Hol(S_3, S_2)$  не превосходит 48. Указанная оценка точная и достигается для пары римановых поверхностей  $S_3 : w^2 = z^8 - 1$  и  $S_2 : u^2 = v(v^4 - 1)$ . При этом, произвольное голоморфное отображение  $S_3$  на  $S_2$  представимо в виде суперпозиции  $\alpha \circ f \circ \beta$ , где  $f : (w, z) \rightarrow (u, v) = (zw, z^2)$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — подходящие автоморфизмы римановых поверхностей  $S_2$  и  $S_3$ , соответственно.

**Теорема 5.** Пусть  $S_3$  и  $S_2$  — произвольные римановы поверхности родов 3 и 2, соответственно. Предположим, что  $|Hol(S_3, S_2)| = 48$ . Тогда  $S_2$  — кривая Больца  $u^2 = v(v^4 - 1)$ , а  $S_3$  задается одним из следующих уравнений

$$(i) \ y^2 = x^8 - 1,$$

$$(ii) \ y^2 = x^8 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^6 + 5x^4 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^2 + 1.$$

В случае (i) мы имеем  $|Aut(S_3)| = 32$ .

В случае (ii) справедливо равенство  $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

Основная цель **третьей главы** — получить структурные теоремы для голоморфных отображений римановой поверхности рода четыре на риманову поверхность рода два.

Пусть  $f : S_g \rightarrow S_{g'}$  — произвольное отображение римановых поверхностей. Группой преобразований наложения отображения  $f$  называется следующая группа гомеоморфизмов поверхности  $S_g$  :

$$Cov_f(S_g, S_{g'}) = \{h \in Homeo(S_g) : f \circ h = f.\}$$

Отметим, что если отображение  $f$  голоморфно и сюръективно, то  $Cov_f(S_g, S_{g'})$  всегда состоит из конформных автоморфизмов римановой поверхности  $S_g$ .

Голоморфное отображение  $f : S_g \rightarrow S_{g'}$  поверхности  $S_g$  на  $S_{g'}$  называется регулярным, если группа  $\mathcal{G} = Cov_f(S_g, S_{g'})$  действует транзитивно на каждом слое отображения  $f$ . В этом случае поверхность  $S_{g'}$  конформно эквивалентна фактор-поверхности  $S_g/\mathcal{G}$ . В противном случае, отображение  $f$  называется нерегулярным.

Из формулы Римана-Гурвица следует, что всякое голоморфное отображение  $f : S_4 \rightarrow S_2$  римановой поверхности рода четыре на риманову поверхность рода два имеет кратность два или три. Отсюда группа  $Cov_f(S_4, S_2)$  либо тривиальна, либо циклическая порядка два или три.

В первом случае отображение  $f$  нерегулярно, а в остальных случаях — регулярно.

Регулярный случай сводится к изучению действия циклической группы порядка два или три на поверхности  $S_4$ . Все такие действия классифицированы в работе Такао Като [18]. Эти результаты позволяют получить полное описание регулярных голоморфных отображений  $S_4$  на  $S_2$ .

Нерегулярный случай представляется наиболее интересным и неизученным ранее.

Основной результат главы составляет следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть  $f : S_4 \rightarrow S_2$  — нерегулярное голоморфное отображение  $S_4$  на  $S_2$ . Тогда для подходящего набора комплексных параметров  $a, b, q$ ,  $a \neq b$ ,  $q \neq 0, \pm 1, \infty$  поверхности  $S_4$  и  $S_2$  представимы уравнениями

$$S_4 : w^2 = (z^3 - aqz^2 - qz + a)(z^3 - bqz^2 - qz + b)(z^4 + cz^2 + 1),$$

$$S_2 : y^2 = (x - a)(x - b)(x^4 + dx^2 + 1),$$

а отображение  $f$  имеет вид  $(x, y) = f(z, w)$ , где

$$x = z \frac{z^2 - q}{qz^2 - 1}, \quad y = w \frac{qz^4 + (q^2 - 3)z^2 + q}{(qz^2 - 1)^3 q}.$$

При этом, величины  $c$  и  $d$  выражаются через  $q$  по следующим формулам:

$$c = \frac{-3 - 6q^2 + q^4}{4q}, \quad d = \frac{-27 + 18q^2 + q^4}{4q^3}.$$

В случае, когда один из параметров  $a$  или  $b$  обращается в  $\infty$ , без ограничения общности можно считать, что  $b = \infty$ . При этом уравнения поверхностей редуцируются к более простому виду

$$S_4 : w^2 = (z^2 - q^{-1})(z^3 - aqz^2 - qz + a)(z^4 + cz^2 + 1) \text{ и } S_2 : y^2 = (x - a)(x^4 + dx^2 + 1).$$

Полученные результаты предполагается использовать в дальнейшем для получения точной верхней оценки на число элементов множества  $Hol(S_4, S_2)$ , которая в настоящее время неизвестна.

**Четвертая глава** посвящена изучению дискретных аналогов гиперэллиптических римановых поверхностей.

В последнее десятилетие появилось множество работ различных авторов ([4], [6], [7], [5]), посвященных дискретным версиям теории римановых поверхностей. Роль римановых поверхностей в этих теориях играют конечные графы, а в качестве голоморфных отображений выступают гармонические отображения. Для них построена теория якобиевых многообразий, получена формула Римана-Гурвица и доказаны аналоги теоремы Римана-Роха. Многие другие теоремы классической теории римановых поверхностей также получили свое воплощение в дискретном случае. Дискретная теория нашла эффективные применения в теории кодирования, стохастической теории и финансовой математике. Библиографию по этому вопросу можно найти в [5].

Основным объектом изучения данной главы являются графы и их накрытия. *Графом* называется конечный связный мультиграф без петель. В дальнейшем будем считать, что граф не содержит ребер, удаление которых разбивает его на две связных компоненты, то есть является 2 реберно-связным. Родом графа будем называть ранг его фундаментальной группы. Граф называется *гиперэллиптическим*, если он является двулистным разветвленным накрытием дерева. Это эквивалентно тому, что на графе существует инволюция  $\tau$  такая, что фактор-граф  $G/\tau$  является деревом. Указанная инволюция называется *гиперэллиптической инволюцией* графа  $G$ . Известно, что если гиперэллиптическая инволюция существует, то она — единственна. Это утверждение справедливо для 2 реберно-связных графов, род которых больше 1. Отметим, что граф рода два всегда гиперэллиптический [5]. Это хорошо согласуется с известным фактом, что любая поверхность рода два гиперэллипична.

Теорема Фаркаша [9] утверждает, что двулистное неразветвленное накрытие поверхности рода два является гиперэллиптической поверхностью. Этот результат был известен, по-видимому, еще Енрике [8]. Позже, теорема Фаркаша была передоказана в работах Акколы [1] и Идальго [13]. В работе Акколы [2] показано, что нерегулярное трехлистное накрытие римановой поверхности рода два является гиперэллиптической поверхностью, в то время как ее регулярное трехлистное накрытие двулистно и разветвлено накрывает тор.

Основная цель четвертой главы — установить дискретные версии теорем Фаркаша и Акколы для графов. Установлено, что любое двулистное неразветвленное накрытие графа рода два является гиперэллиптическим. Далее будет показано, что нерегулярное трехлистное накрытие графа рода два также является гиперэллиптическим графом, в то время как его регулярное трехлистное накрытие двулистно и разветвлено накрывает граф рода один.

Более точно, доказаны следующие теоремы.

**Теорема 7.** Пусть  $\tilde{G}$  — двулистное неразветвленное накрытие графа  $G$  рода два. Тогда  $\tilde{G}$  — гиперэллиптический граф.

**Теорема 8.** Пусть  $\tilde{G}$  — трехлистное неразветвленное накрытие графа  $G$  рода два. Тогда, если накрытие нерегулярно, то  $\tilde{G}$  — гиперэллиптический граф. Если указанное накрытие регулярно, то  $\tilde{G}$  двулистно и разветвлено накрывает граф рода один.

Доказательство указанных теорем существенно опирается на следующую лемму, представляющую также и самостоятельный интерес.

Обозначим через  $\mathbf{H}_1(G)$  и  $\mathbf{H}^1(G)$  — группы целочисленных гомологий и когомологий графа  $G$  соответственно. Для любого  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  рассмотрим его индуцированные действия  $\alpha_\#$  и  $\alpha^\#$  на указанных группах.

**Лемма 9.** Пусть  $G$  — произвольный 2-реберно-связный граф рода  $g \geq 2$  и  $\tau \in \text{Aut}(G)$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $G$  — гиперэллиптический граф с гиперэллиптической инволюцией  $\tau$ ;
- (2)  $\tau^\# : \mathbf{H}^1(G) \rightarrow \mathbf{H}^1(G)$  действует как умножение на  $-1$ ;
- (3)  $\tau_\# : \mathbf{H}_1(G) \rightarrow \mathbf{H}_1(G)$  действует как умножение на  $-1$ .

## Список литературы

- [1] Accola, R. D. M. Riemann surfaces with automorphism groups admitting partitions/ R. D. M. Accola // Proc. Amer. Math. Soc. –1969. –Vol. 21. –P. 477–482.
- [2] Accola, R. D. M. On Lifting the Hyperelliptic Involution/ R. D. M. Accola // Proc. Amer. Math. Soc. –1994. –Vol. 122, №2. –P. 341–347.
- [3] Alzati, A. Some Remarks on the de Franchis Theorem/ A. Alzati, G. P. Pirola // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) –1990. –Vol. 36. –P. 45–52.
- [4] Bacher, R. The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph/ R. Bacher, P. de la Harpe, T. Nagnibeda // Bull. Soc. Math. Fr. –1997. –Vol. 125. –P. 167–198.
- [5] Baker, M. Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs/ M. Baker, S. Norine // Int. Math. Res. Notes. –2009. –Vol. 15. –P. 2914–2955.
- [6] Biggs, N. L. Chip-firing and the critical group of a graph/ N. L. Biggs // J. Algebraic Combin. –1999. –Vol. 9, №1. –P. 25–45.
- [7] Cori, R. On the sandpile group of a graph/ R. Cori, D. Rossin // European J. Combin. –2000. –Vol. 21, №4. –P. 447–459.
- [8] Enriques, F. Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali/ F. Enriques // Reale Accad. Lincei, Rendiconti. –1898. –Vol. 5, №7. –P. 281–286.
- [9] Farkas, H. M. Automorphisms of compact Riemann surfaces and the vanishing of theta constants/ H. M. Farkas // Bull. Amer. Math. Soc. –1967. –Vol. 73. –P. 231–232.
- [10] de Franchis, M. Un teorema sulle involuzioni irrazionali/ M. de Franchis // Rend. Circ. Mat. Palermo. –1913. –Vol. 36. –P. 368.
- [11] Fuertes, Y. On the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces/ Y. Fuertes, G. Gonzalez-Diez // Publ. Mat. –1993. –Vol. 37. –P. 339–353.
- [12] Fuertes, Y. Some bounds for the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces/ Y. Fuertes // Israel J. Math. –1999. –Vol. 109, №1. –P. 1–12.
- [13] Hidalgo, R. On a theorem of Accola/ R. Hidalgo // Complex Variables: Theory and Applications. –1998. –Vol. 36. –P. 19–26.

- [14] Howard, A. On the theorem of de Franchis/ A. Howard, A. J. Sommese // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. –1983. –Vol. 10, №4. –P. 429–436.
- [15] Hurwitz, A. Uber Algebraische Gebilde mit Eindentigen Transformationen in Sich/ A. Hurwitz // Math. Ann. –1893. –Bd. 41. –P. 403–442.
- [16] Ito, M. Holomorphic mappings between compact Riemann surfaces/ M. Ito, H. Yamamoto // Proc. Edinburgh Math. Soc. –2009. –Vol. 52. –P. 109–126.
- [17] Kani, E. Bounds on the number of non-rational subfields of a function field/ E. Kani // Invent. Math. –1986. –Vol. 85. –P. 185–198.
- [18] Kato, T. On Riemann Surfaces of Genus Four with Non-Trivial Automorphisms/ T. Kato // Kodai Math. J. –1981. –Vol. 4. –P. 443–456.
- [19] Parsons, T. D. Dual imbeddings and wrapped quasi-coverings of graphs/ T. D. Parsons, T. Pisanski, B. Jackson // Discrete Mathematics. –1980. –Vol. 31, №1. –P. 43–52.
- [20] Tanabe, M. Holomorphic maps of Riemann surfaces and Weierstrass points / M. Tanabe // Kodai Math. J. –2005. –Vol. 28, №2. –P. 423–429.

## Список публикаций автора по теме диссертации

*Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций:*

1. Медных И. А. О голоморфных отображениях римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два // Доклады Российской академии наук. 2009. Т. 424, № 2. – С. 165–167. – 0.19 п.л.

2. Медных И. А. О нерегулярных голоморфных отображениях римановой поверхности рода четыре на риманову поверхность рода два // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 2. – С. 73–80. – 0.5 п.л.

3. Медных И. А. Классификация голоморфных отображений римановых поверхностей малых родов с точностью до эквивалентности // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 6. – С. 1379–1395. – 1 п.л.

4. Медных И. А. О точной верхней оценке на число голоморфных отображений римановых поверхностей малого рода // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 2. – С. 325–344. – 1.19 п.л.

5. Медных И. А. О теоремах Фаркаша и Акколы для графов // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 4. – С. 387–391. – 0.25 п.л.

*Статьи в других научных изданиях:*

6. Медных И. А. Теорема де Франкиса для римановых поверхностей малых родов // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Издательство Новосибирского государственного университета, 2008. – С. 225. – 0.06 п.л.

7. Медных И. А. Голоморфные отображения римановых поверхностей малого рода // Международная научная конференция «X Белорусская математическая конференция», Тезисы докладов Ч. 1. – Минск: Издательство Института математики НАН Беларуси, 2008. – С. 91. – 0.06 п.л.

8. Медных И. А. О голоморфных отображениях римановой поверхности рода четыре // Материалы XLVII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Издательство Новосибирского государственного университета, 2009. – С. 112–113. – 0.12 п.л.

9. Медных И. А. О голоморфных отображениях римановых поверхностей малых родов // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы девятой международной Казанской летней научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Казанского государственного университета, 2009. Т. 38. – С. 180–182. – 0.18 п.л.

10. Mednykh I. A. Holomorphic maps between Riemann surfaces of small genera // Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2010, 08 - 12 March 2010. Hiroshima, Japan. Electronic Abstract P. 1–18. – 1.12 p.s.

[http://download.springer.com/static/pdf/951/art%253A10.1134%252FS1064562409010098.pdf?auth66=1398418573\\_50129c16844af6cd1ac53724f4fc3c5a&ext=.pdf](http://download.springer.com/static/pdf/951/art%253A10.1134%252FS1064562409010098.pdf?auth66=1398418573_50129c16844af6cd1ac53724f4fc3c5a&ext=.pdf), дата обращения 8.04.2014.

11. Медных И. А. Верхняя оценка для числа голоморфных отображений римановых поверхностей // Материалы школы конференции по геометрическому анализу, – Горно-Алтайск: РИО Горно-Алтайского государственного университета, 2010. – С. 55–56. – 0.12 п.л.

12. Медных И. А. О дискретных аналогах гиперэллиптических римановых поверхностей // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы десятой международной Казанской летней научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Казанского государственного университета, 2011. Т. 43. – С. 252–253. – 0.12 п.л.

13. Mednykh I. A. On the upper bound in the de Franchise theorem for Riemann surfaces of low genera // Workshop on low dimensional conformal structures

and their groups, Gdansk, 27-29 June 2012. Abstracts, – P. 8, Gdansk University, Poland. – 0.06 p.s.

<http://mat.ug.edu.pl/conformal/files/Abstracts.pdf>, дата обращения 8.04.2014.

14. Медных И. А. Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы для графов // Материалы школы конференции по геометрическому анализу. – Горно-Алтайск: РИО Горно-Алтайского государственного университета, 2012. – С. 37–38. – 0.12 п.л.

15. Медных И. А. О голоморфных отображениях компактных римановых поверхностей // Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа», 19-21 сентября 2013 г. – Ташкент: Издательство Национального университета Узбекистана, 2013. – С. 86-87. – 0.12 п.л.

**Медных Илья Александрович**

Голоморфные отображения римановых поверхностей  
и их дискретные аналоги

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

---

|                                |                    |
|--------------------------------|--------------------|
| Подписано в печать 23.04.2014. | Формат 60 × 84/16. |
| Усл. печ. л. 0,93              | Печать RISO.       |
| Тираж 100 экз.                 | Заказ № 357        |

---

Отпечатано в издательстве Томского государственного  
университета систем управления и радиоэлектроники.

634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.  
Тел. 533018.