УДК 539.3

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ВИДЕ КЛИНЬЕВ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

Выявляется новый тип задач механики твердого деформируемого тела – нестандартные задачи, отличительной особенностью которых является избыточность, хотя бы в одной точке границы тела, задаваемых ограничений на его параметры состояния. Приводятся примеры конструкций, находящихся в условиях плоской нестандартной задачи. Предлагается метод исследования рассматриваемого типа задач.

Ключевые слова: *нестандартные задачи*, *особые точки*, *плоская задача*, *концентрация напряжений.*

Понятие нестандартной задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) не является общепринятым. Оно впервые вводится в настоящей статье. Под нестандартными мы понимаем задачи МДТТ, в которых количество ограничений, вытекающих из сути задачи, оказывается избыточным. Например, в плоской задаче при задании усилий на контуре в каждой точке стандартно задается вектор напряжений, определяемый двумя параметрами (в частности, нормальным и касательным напряжением). Если на контуре имеется точка, в которой заданы не два, а три или более условий для напряжений, задача становится нестандартной. Нестандартные задачи характерны для однородных тел, на границе которых касательные к образующим претерпевают разрывы первого рода; для составных тел, например слоистых; для конструкций, полученных путем пайки, сварки или склеивания; в контактных задачах при наличии и отсутствии сухого трения и т.п. Во всех этих случаях возникают точки концентрации напряжений, способствующие разрушению конструкции, поэтому изучению рассматриваемых задач уделяется достаточно большое внимание исследователей [1–17]. При этом обычно авторы нестандартную задачу заменяют стандартной. Для этого используется два подхода. Первый состоит в исключении из рассмотрения точки, в которой заданы избыточные условия [1,3–7 и др.]. Решение в этом случае может быть лишь асимптотическим и оно, как правило, не удовлетворяет всем ограничениям, накладываемым на параметры состояния в особой точке. Другой прием перехода от нестандартной задачи к стандартной основан на изменении заданной геометрии конструкции – окрестность точки, в которой имеется скачок касательной, изменяется таким образом, чтобы избавиться от этого скачка [17]. Такой прием, очевидно, приводит к совершенно другой задаче.

В настоящей статье предлагается способ выявления избыточно заданных независимых ограничений на параметры состояния в вершинах клиньев, являющихся конструктивными элементами однородных конструкций в условиях плоской задачи. Способ основан на использовании факта независимости компонент тензора напряжений или деформаций. Приводится пример исследования нестандартной задачи.

1. Клин, образующие которого свободны от нагрузок

Рассматривается элемент конструкции, имеющий особенность в виде клина. По биссектрисе угла 2α при вершине A клина направим ось x_1 декартовой ортонормированной системы координат x_1, x_2. Внешние нормали к образующим клина обозначим через $\vec{n}$, $\vec{m}$. Через $\vec{n}'$, $\vec{m}'$ обозначим соответственно перпендикулярные им орты (рис. 1).

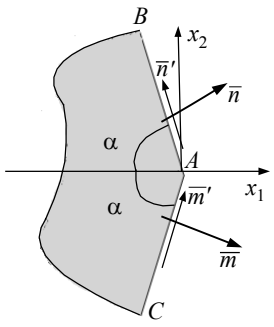


Рис. 1. Элемент конструкции в виде клина

Для компонент тензора напряжений принимаются обозначения σ_{ij}, для нормальных напряжений – σ_m, σ_n, для касательных – $\tau_{m'}, \tau_{n'}$. Векторы напряжений на образующих клина AB и AC равны нулю, поэтому граничные условия в рассматриваемой задаче вблизи вершины записываются равенствами

$$\sigma_n = 0,\ \tau_{n'} = 0,\ \sigma_m = 0,\ \tau_{m'} = 0. \qquad (1)$$

В точке A эти равенства представляют собой систему четырех линейных однородных уравнений относительно трех неизвестных напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}\sin^2\alpha + 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = 0,\\
-\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0,\\
\sigma_{11}\sin^2\alpha - 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = 0,\\
\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0.
\end{gathered} \qquad (2)$$

Из матрицы системы уравнений (2) можно построить четыре различных определителя третьего порядка Δ_i $(i = 1,2,3,4)$. Эти определители выражаются равенствами

$$\Delta_1 = \Delta_2 = -4\sin^2\alpha\ \cos^2\alpha, \quad \Delta_3 = -\Delta_4 = \cos 2\alpha\ \sin 2\alpha. \qquad (3)$$

Приравнивая нулю определители (3), находим условия, при которых ранг матрицы системы уравнений (2) оказывается меньшим трех:

$$\alpha = \pi/2, \quad \alpha = \pi. \qquad (4)$$

Следовательно, для решений уравнений (2) возможны три случая

1) $\alpha \neq \pi/2, \quad \alpha \neq \pi$. Матрица системы уравнений (2) имеет ранг равный трем. Поэтому решение будет тривиальным $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае напряженное состояние в точке A полностью известно и не зависит ни от материальных свойств конструкции, ни от способа ее нагружения. Оно обусловлено заданными граничными условиями в точке A. Здесь число заданных независимых условий оказывается избыточным, равным трем, что и свидетельствует о нестандартности данной задачи МДТТ.

2) $\alpha = \pi/2$. Граница тела не имеет угловой точки. Из уравнений (2) определяются напряжения $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0$. Компонента σ_{22} из системы уравнений не определяются, она должна находиться из решения задачи о расчете рассматриваемо-

го элемента конструкции в соответствии с его нагружением. Число граничных условий в точке A равно двум, задача МДТТ оказывается стандартной.

3) $\alpha = \pi$. Точка A в этом случае оказывается вершиной трещины. Из уравнений (2) определяются напряжения $\sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0$. Компонента σ_{11} должна находиться из решения задачи о расчете рассматриваемого элемента конструкции. Задача МДТТ является стандартной.

2. Клин с жестко заделанными образующими

Пусть образующие клина AB и AC (рис.1) жестко заделаны, точки этих образующих неподвижны в процессе деформирования элемента конструкции. Из этого следует, что в точке A относительное удлинение линейных элементов в направлении ортов $\vec{n}'$, $-\vec{m}'$, а также сдвиги между ними, обращаются в нуль. Эти условия выражаются равенствами

$$\varepsilon_{ij} n_i' n_j' = 0, \varepsilon_{ij} m_i' m_j' = 0, \ \varepsilon_{ij} n_i' m_j' = 0 . \tag{5}$$

Через ε_{ij} обозначены компоненты тензора деформаций. Третье из равенств (5) получено с использованием формулы

$$\varphi \sin\beta = \left[2\varepsilon_{rp} - (\eta_k + \eta_l)\delta_{rp} \right] k_r l_p , \tag{6}$$

определяющей сдвиг φ в произвольной точке сплошной среды между линейными элементами с направлениями $\vec{k}$, $\vec{l}$ и углом β между ними. В формуле (6) обозначено η_k, η_l – относительные удлинения в точке сплошной среды в направлении ортов $\vec{k}$, $\vec{l}$ соответственно, δ_{rp} – координаты метрического тензора.

Равенства (5) в результате подстановки координат ортов $\vec{n}'$, $\vec{m}'$ приводятся к системе линейных однородных уравнений относительно деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11}\cos^2\alpha - 2\varepsilon_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon_{22}\sin^2\alpha = 0, \\ \varepsilon_{11}\cos^2\alpha + 2\varepsilon_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon_{22}\sin^2\alpha = 0, \\ -\varepsilon_{11}\cos^2\alpha + \varepsilon_{22}\sin^2\alpha = 0 . \end{gathered} \tag{7}$$

Определитель Δ матрицы системы уравнений (7) $\Delta = 8\cos^3\alpha \sin^3\alpha$ в промежутке $0 < \alpha \le \pi$ обращается в нуль при $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = \pi$, поэтому возможны такие три случая решения системы (7):

1) $\alpha \ne \pi/2, \ \alpha \ne \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (7) равен трем. Ее решение $\varepsilon_{11} = 0, \ \varepsilon_{12} = 0, \ \varepsilon_{22} = 0$. Напряжения в вершине клина в отсутствие температурного нагружения ($\Delta T = 0$) также обращаются в нуль $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$.

Если элемент конструкции подвергается температурному нагружению ($\Delta T \ne 0$), в вершине клина возникают нормальные напряжения (в случае плоско напряженного состояния для линейно упругого материала)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{\omega \Delta T E}{1-\nu}, \ \sigma_{12} = 0 .$$

Обозначено: ω – коэффициент линейной температурной деформации, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Заданные условия на контуре в точке A формулируются тремя независимыми равенствами, задача является нестандартной.

2) $\alpha = \pi/2$. Из уравнений (7) определяются деформации $\varepsilon_{22} = 0$. Деформации $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ из уравнений (7) не определяются, они находятся из решения задачи о напряженно деформированном состоянии рассматриваемого тела. В отсутствие температурного нагружения из уравнений (7) с использованием физических соотношений следует зависимость между напряжениями (случай плосконапряженного состояния) $\sigma_{22} = \nu\sigma_{11}$.

При температурном нагружении эта зависимость принимает вид $\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} = -\omega\Delta T E$. Избыточных граничных условий в рассматриваемом случае нет.

3) $\alpha = \pi$. Аналогично предыдущему случаю из уравнений (7) определяется деформация $\varepsilon_{11} = 0$.

В отсутствие температурного нагружения напряжения связаны равенством $\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = 0$. При температурном нагружении $\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = -\omega\Delta T E$. Как и в предыдущем случае, задача является стандартной.

3. Клин, одна из сторон которого жестко защемлена, а другая свободна от нагрузки

Пусть образующая AB свободна от нагрузки, а образующая AC жестко защемлена. Тогда в вершине клина на площадке, ориентируемой ортом $\vec{n}$, обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения, а на площадке, ориентируемой ортом $\vec{m}$, обращается в нуль относительное удлинение в направлении орта $-\vec{m}'$. Эти условия записываются системой уравнений (плоское напряженное состояние, линейно упругое тело)

$$\begin{gathered}\sigma_{11}\sin^2\alpha + 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = 0,\\ -\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0,\\ \sigma_{11}(\cos^2\alpha - \nu\sin^2\alpha) + 2(1+\nu)\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}(\sin^2\alpha - \nu\cos^2\alpha) = -\omega E\Delta T.\end{gathered} \tag{8}$$

Определитель Δ матрицы системы уравнений (8) $\Delta = 1 - (1+\nu)\sin^2 2\alpha$ в промежутке $0 < \alpha \le \pi$ обращается в нуль при значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, определяемых равенствами

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, \quad \cos\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}};\\
&\sin\alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, \quad \cos\alpha_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}};\\
&\sin\alpha_3 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, \quad \cos\alpha_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}};\\
&\sin\alpha_4 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, \quad \cos\alpha_4 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если угол α не удовлетворяет условиям (9), ранг матрицы системы уравнений (8) равен трем. В этом случае в отсутствие температурного нагружения ($\Delta T = 0$) все напряжения в точке A обращаются в нуль $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$. При температурном нагружении ($\Delta T \neq 0$) рассматриваемая система уравнений имеет единственное решение

$$\sigma_{11} = -\frac{\omega E \Delta T \cos^2 \alpha}{1-(1+\nu)\sin^2 2\alpha}; \sigma_{12} = \frac{\omega E \Delta T \sin\alpha\cos\alpha}{1-(1+\nu)\sin^2 2\alpha}; \sigma_{11} = -\frac{\omega E \Delta T \sin^2 \alpha}{1-(1+\nu)\sin^2 2\alpha}.$$

Из приведенных решений следует, что в рассматриваемом случае в точке A задаются три независимых условия, поэтому задача является нестандартной. В случае, когда выполняется какое-либо из условий (9), ранг матрицы системы уравнений (8) будет равен двум. В отсутствие температурного нагружения ($\Delta T = 0$) два напряжения могут быть выражены через третье:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha, \quad \sigma_{12} = -\sigma_{22}\,\mathrm{ctg}\,\alpha,$$
$$\alpha = \alpha_i \; (i = 1,2,3,4).$$

Данная задача оказывается стандартной.

При наличии температурного нагружения ($\Delta T \neq 0$) и при выполнении какого-либо из условий (9) ранг расширенной матрицы системы уравнений (8) равен трем, поэтому решения задачи в плоской постановке не существует.

4. Клин, одна из сторон которого жестко заделана, а другая проскальзывает без трения вдоль жесткой стенки

Пусть жестко заделанной является образующая клина AC, тогда на параметры состояния в точке A накладываются такие ограничения

а) на стороне клина AB обращаются в нуль касательные напряжения;

б) в направлении вектора $-\vec{m}'$ относительное удлинение линейного элемента обращается в нуль;

в) сдвиг между направлениями $\vec{n}'$ и $-\vec{m}'$ обращается в нуль.

Эти условия выражаются уравнениями относительно напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ (плоско напряженное состояние, линейно упругое тело):

$$-\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

$$\sigma_{11}(\cos^2\alpha - \nu\sin^2\alpha) + 2(1+\nu)\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}(\sin^2\alpha - \nu\cos^2\alpha) = -\omega E\Delta T, \qquad (10)$$

$$\sigma_{11}(\cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha) + (1+\nu)\sigma_{12}\sin 2\alpha\cos 2\alpha - \sigma_{22}(\sin^2\alpha + \nu\cos^2\alpha) = -\omega E\Delta T\cos 2\alpha.$$

Определитель Δ матрицы этой системы $\Delta = \frac{\nu^2-1}{2}\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha$ на промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль в точках $\alpha = \pi/4, \alpha = \pi/2, \alpha = 3\pi/4, \alpha = \pi$.

Поэтому возможны следующие случаи для напряжений в точке A:

1) $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$.

Ранг матрицы системы уравнений (10) равен трем. В отсутствие температурного нагружения она имеет нулевое решение: $\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0$.

При температурном нагружении уравнения (10) имеют единственное решение $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \dfrac{\omega E \Delta T}{\nu - 1}$, $\sigma_{12} = 0$. В рассматриваемом случае в точке A задаются три независимых условия, задача о расчете элемента конструкции, содержащей такую особую точку, является нестандартной.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы (10) равен двум. В отсутствие температурного нагружения напряжения σ_{11} и σ_{12} можно выразить через σ_{22}: $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = \dfrac{\nu - 1}{\nu + 1}\sigma_{22}$.

При температурном нагружении ранг расширенной матрицы также равен двум, система уравнений (10) совместна, два напряжения выражаются через третье:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = -\frac{[\omega E \Delta T + \sigma_{22}(1 - \nu)]}{\nu + 1}.$$

В точке A в рассматриваемом случае нет избыточных ограничений, задача является стандартной.

3) $\alpha = \pi/2$. Ранг матрицы системы уравнений (10) и ранг ее расширенной матрицы одинаковы и равны двум, система совместна. Между напряжениями имеются зависимости $\sigma_{22} = \nu\sigma_{11} - \omega E \Delta T$, $\sigma_{12} = 0$. Задача является стандартной.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Случай аналогичен рассмотренному в п.2. Задача является стандартной, напряжения в точке A связаны равенствами

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = \frac{[\omega E \Delta T + \sigma_{22}(1 - \nu)]}{\nu + 1}.$$

5) $\alpha = \pi$. В данном случае также задача является стандартной. Напряжения в точке A связаны соотношениями $\sigma_{11} = \nu\sigma_{22} - \omega E \Delta T$, $\sigma_{12} = 0$.

5. Клин, одна из сторон которого свободна от напряжений, а другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности

Примем, что на образующей AB обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения, а на образующей AC в нуль обращаются касательные напряжения. Эти условия выражаются уравнениями в точке A:

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}\sin^2\alpha + 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = 0, \\
-\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0, \\
\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Матрица этой системы имеет определитель $\Delta = \sin 2\alpha \cos 2\alpha$, обращающийся в нуль на промежутке $0 < \alpha \le \pi$ в точках $\alpha = \pi/4, \alpha = \pi/2, \alpha = 3\pi/4, \alpha = \pi$. Поэтому возможны следующие случаи решения уравнений (11):

1) $\alpha \ne \pi/4, \alpha \ne \pi/2, \alpha \ne 3\pi/4, \alpha \ne \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (11) равен трем, поэтому она имеет лишь тривиальное решение $\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0$. Количество независимых задаваемых условий в точке A элемента конст-

рукции, имеющего такую особую точку, является избыточным, задача о расчете является нестандартной.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы уравнений (11) равен двум, между напряжениями в точке A имеются зависимости $\sigma_{11} = \sigma_{22}$; $\sigma_{12} = -\sigma_{22}$. Задача о расчете элемента конструкции с такой особой точкой является стандартной.

3) $\alpha = \pi/2$. Из уравнений (11) определяются два напряжения $\sigma_{11} = 0$; $\sigma_{12} = 0$. Задача является стандартной.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Из уравнений (11) следуют зависимости $\sigma_{11} = \sigma_{22}; \sigma_{12} = \sigma_{22}$. Задача о расчете элемента конструкции является стандартной.

5) $\alpha = \pi$. Из уравнений (11) определяются компоненты напряжений $\sigma_{22} = 0$; $\sigma_{12} = 0$.

Избыточные условия в точке A отсутствуют. Задача является стандартной.

6. Клин, образующие которого нагружены поверхностными усилиями

В данной задаче напряжения на образующих AB и AC равны заданным нормальным и касательным усилиям

$$\sigma_n = p_n; \qquad \tau_{n'} = \tau_n; \quad \sigma_m = p_m; \qquad \tau_{m''} = \tau_m.$$

В точке A эти равенства запишутся системой четырех уравнений относительно трех напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}\sin^2\alpha + 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = p_n, \\
-\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = \tau_n, \\
\sigma_{11}\sin^2\alpha - 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = p_m, \\
\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = \tau_m.
\end{gathered} \tag{12}$$

Четыре различных определителя матрицы системы уравнений (12) имеют значения (3) и одновременно обращаются в нуль при условиях (4): $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi$. Поэтому возможны такие три случая поведения решений уравнений (12):

1) $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (12) равен трем. Для того чтобы в этом случае существовало решение, ранг расширенной матрицы системы тоже должен равняться трем. Это условие приводит к ограничению на приложенные нагрузки:

$$(p_n - p_m)\cos 2\alpha + (\tau_n + \tau_m)\sin 2\alpha = 0. \tag{13}$$

Ограничение (13) требует, чтобы заданные усилия на образующих клина в точке A находились в соответствии с условием симметричности тензора напряжений. Ограничение (13) выражает равенство в точке A проекции вектора напряжений на площадке, ориентированной вектором $\vec{n}$, на направление $\vec{m}$ проекции вектора напряжений на площадке, ориентированной вектором $\vec{m}$, на направление $\vec{n}$ $(\vec{P}_n \cdot \vec{m} = \vec{P}_m \cdot \vec{n})$. При невыполнении ограничения (13) симметричная теория упругости не описывает напряженное состояние в окрестности вершины клина. Если приложенные нагрузки удовлетворяют условию (13), уравнение (12) имеет единственное решение

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_m - \tau_n)\operatorname{ctg}\alpha, \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\tau_m + \tau_n) + \frac{1}{2}(p_n - p_m)\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_n - \tau_m)\operatorname{tg}\alpha. \qquad (14)$$

Заметим, что данное решение может быть найдено и другим способом – путем составления уравнения равновесия бесконечно малого элемента, примыкающего к вершине клина. Как следует из равенств (14), в данном случае в точке A задаются три независимых условия, задача оказывается нестандартной.

2) $\alpha = \pi/2$. Ранг матрицы системы уравнений (12) равен двум. Для того чтобы существовало решение этих уравнений, ранг расширенной матрицы также должен быть равен двум. Это условие приводит к ограничениям в точке A на прикладываемую нагрузку

$$p_n = p_m, \quad \tau_n = \tau_m. \qquad (15)$$

Ограничения (15) обусловлены требованием к нагрузке соответствовать симметричности тензора напряжений. При выполнении условия (15) из уравнений (12) получаем $\sigma_{11} = p_m$, $\sigma_{12} = \tau_n$.

Избыточных условий на параметры состояния в точке A не накладывается, задача является стандартной.

3) $\alpha = \pi$. Данный случай аналогичен предыдущему. Система уравнений (12) совместна при выполнении ограничений (15), ее решение $\sigma_{22} = p_n$, $\sigma_{12} = -\tau_n$. Задача является стандартной.

7. Клин, одна из сторон которого жестко защемлена, а другая нагружена поверхностными усилиями

Пусть образующая AB клина нагружена нормальным напряжением p_n и касательным τ_n, а образующая AC жестко защемлена, поэтому относительное удлинение в направлении орта $-m'$ в точке A обращается в нуль. Указанные ограничения записываются системой уравнений относительно компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\sigma_{11}\sin^2\alpha + 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = p_n,$$

$$-\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = \tau_n, \qquad (16)$$

$$\sigma_{11}(\cos^2\alpha - \nu\sin^2\alpha) + 2(1+\nu)\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}(\sin^2\alpha - \nu\cos^2\alpha) = 0.$$

Определитель матрицы системы уравнений (16) $\Delta = 1 - (1+\nu)\sin^2 2\alpha$ в промежутке $0 < \alpha \le \pi$ обращается в нуль при значениях α_i $(i = 1,2,3,4)$, определяемых равенствами (9). Если угол α не равен α_i $(i = 1,2,3,4)$, ранг системы уравнений (16) равен трем и она имеет единственное решение

$$\sigma_{11} = \frac{p_n[\sin^2\alpha + \nu\cos^2\alpha - (1+\nu)\sin^2 2\alpha] - \tau_n \sin 2\alpha[1 - (1+\nu)\cos^2\alpha]}{1 - (1+\nu)\sin^2 2\alpha},$$

$$\sigma_{12} = \frac{p_n(1-\nu)\sin\alpha\cos\alpha - \tau_n\cos 2\alpha}{1 - (1+\nu)\sin^2 2\alpha},$$

$$\sigma_{22} = \frac{p_n[\cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha - (1+\nu)\sin^2 2\alpha] - \tau_n \sin 2\alpha[2(1+\nu)\sin^2\alpha - 1]}{1-(1+\nu)\sin^2 2\alpha}.$$

В точке A количество заданных независимых условий оказывается избыточным, поэтому рассматриваемый случай описывается нестандартной задачей.

Если угол α совпадает с каким-либо из углов (9), ранг системы уравнений (16) становится равным двум. Для того чтобы вычислить ранг расширенной матрицы, построим три определителя, получающиеся путем последовательной замены столбцов матрицы системы (16) столбцом свободных членов. Получим

$$\Delta_i = p_n f_i(\nu) + \tau_n \varphi_i(\nu), \quad (i-1,2,3). \tag{17}$$

Здесь введены обозначения

$$f_1(\nu) = \cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha - (1+\nu)\sin^2 2\alpha, \quad \varphi_1(\nu) = \sin 2\alpha[\cos^2\alpha - (1+2\nu)\sin^2\alpha],$$

$$f_2(\nu) = (1-\nu)\sin\alpha\cos\alpha, \quad \varphi_2(\nu) = -\cos 2\alpha,$$

$$f_3(\nu) = \sin^2\alpha + \nu\cos^2\alpha - (1+\nu)\sin^2 2\alpha, \quad \varphi_3(\nu) = \sin 2\alpha[2(1+\nu)\cos^2\alpha - 1].$$

Приравнивая определители (17) нулю, получим систему уравнений относительно параметров нагружения p_n, τ_n. Ранг матрицы этой системы уравнений в точках α_i $(i = 1,2,3,4)$ оказывается равным единице. Это означает, что уравнения (16) будут совместны при выполнении условий

$$\begin{aligned} p_n(\nu-1) - 2\tau_n\sqrt{\nu} = 0, \quad &для \quad \alpha_1, \alpha_4; \\ p_n(\nu-1) + 2\tau_n\sqrt{\nu} = 0, \quad &для \quad \alpha_2, \alpha_3. \end{aligned} \tag{18}$$

В этом случае ранг матрицы системы уравнений (16) и ранг расширенной матрицы совпадают, два компонента напряжений выражаются через третий и приложенную нагрузку:

$$\sigma_{11} = p_n(1-\operatorname{tg}^2\alpha) + \sigma_{22}\operatorname{tg}^2\alpha - 2\tau_n \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sigma_{12} = (p_n - \sigma_{22})\operatorname{ctg}\alpha + \tau_n, \ \alpha = \alpha_i \ (i = 1,2,3,4).$$

Задача с рассматриваемой особенностью является стандартной. Если приложенная нагрузка не удовлетворяет ограничениям (18) в точках α_i $(i = 1,2,3,4)$, решение уравнений (16) не существует.

8. Клин, одна из сторон которого скользит без трения по жесткой поверхности, а другая нагружена

Примем, что образующая клина AB нагружена нормальными и касательными усилиями p_n, τ_n, а образующая клина AC скользит без трения по жесткой поверхности. В этом примере параметры состояния в точке А подчинены ограничениям $\sigma_n = p_n$, $\tau'_n = \tau_n$, $\tau'_m = 0$, что описывается равенствами

$$\begin{aligned} &\sigma_{11}\sin^2\alpha + 2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = p_n, \\ &-\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = \tau_n, \\ &\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

представляющими собой систему уравнений для напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Определитель матрицы этой системы $\Delta = \cos 2\alpha \sin 2\alpha$ обращается в нуль в точках $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = \pi/2, \alpha_3 = 3\pi/4, \alpha_4 = \pi$. Поэтому возможны такие варианты решения системы уравнений (19):

1) $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений равен трем, она имеет единственное решение:

$$\sigma_{11} = p_n + \tau_n \frac{\sin^2 2\alpha - \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\tau_n}{2\cos 2\alpha}, \quad \sigma_{22} = p_n + \tau_n \frac{\sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}.$$

В точке A конструкции задаются три независимых компоненты тензора напряжений, задача оказывается нестандартной.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы уравнений (19) равен двум, условием совместности этих уравнений служит равенство

$$\tau_n = 0. \tag{20}$$

В этом случае ранг расширенной матрицы оказывается равен рангу матрицы системы, зависимости между напряжениями записываются соотношениями $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = p_n - \sigma_{22}$. Задача о расчете элемента конструкции является стандартной. Если условие (20) не выполняется, решение системы (19) не существует.

3) $\alpha = \pi/2$. Условием совместности уравнений (19) служит равенство (20). Решение имеет вид $\sigma_{11} = p_n$, $\sigma_{12} = 0$. Задача оказывается стандартной.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Условием совместности уравнений (19) также служит равенство (20). Решение записывается зависимостями между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = \sigma_{22} - p_n$. Задача является стандартной.

5) $\alpha = \pi$. Аналогично предыдущим случаям условие совместности системы (19) записывается равенством (20), решение имеет вид $\sigma_{22} = p_n$, $\sigma_{12} = 0$. Задача о расчете элемента конструкции решается стандартными методами.

9. Пример решения нестандартной задачи

Рассматривается задача о растяжении пластинки с особенностью в виде клина с образующими, свободными от нагрузок (п. 1). Принимается, что угол α при вершине клина A находится в промежутке $\pi/2 < \alpha < \pi$. В этом случае задача является нестандартной. Условия для напряжений в точке A запишутся равенствами

$$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0. \tag{21}$$

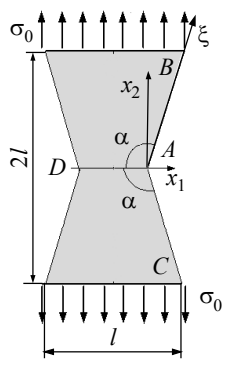


Рис. 2. Расчетная схема

Геометрические и материальные параметры в расчетах имели значения (рис. 2) $l = 1$ см, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}3$, угол α принимался равным 93, 99 и 105°.

Нагружение осуществляется напряжениями $\sigma_0 = 1 \cdot 10^8$ Па. Для построения решения применяется итерационный численно-аналитический подход, предложенный в работах [18, 19]. При этом на каждом шаге применяется метод конечных элементов, разрешающие уравнения ко-

торого строятся как условия стационарности функционала [20]

$$J_{u\varepsilon} = \int_V \left[(Lu)^T D\left(\varepsilon - \varepsilon^0\right) - \frac{1}{2}\varepsilon^T D\,\varepsilon \right] dV + W\,, \tag{22}$$

где независимыми параметрами являются перемещения u и деформации ε. Обозначено: L – матрица дифференциальных операторов в равенстве $Lu = \varepsilon$; D – матрица упругих модулей материала; W – потенциальная энергия заданных сил; ε_0 – вектор начальных (в частности, температурных) деформаций. Использование смешанного функционала позволяет определять параметры состояния (напряжения, деформации) без применения операции дифференцирования приближенного решения. Этапы построения решения:

1) Устанавливаются условия, которым должны удовлетворять напряжения в точке A (21) и на образующих, кроме точки A (2).

2) Нулевое приближение разыскивается путем решения стандартной задачи, то есть считается, что граничные условия заданы равенствами (2) во всех точках образующих, включая точку A.

3) Узлы КЭ-сетки, в которых должны выполняться равенства (21) и (2), объявляются основными. В этих узлах проверяется выполнение равенств (21) и (2). Отклонение от нуля полученных значений образует вектор невязок.

4) Равенства (21) и (2), записанные через перемещения, рассматриваются как система уравнений для основных перемещений (остальным перемещениям присваиваются значения нулевого приближения). Число таких уравнений в нестандартной задаче оказывается большим, чем число неизвестных (матрица системы уравнений оказывается прямоугольной), поэтому строится обобщенное (псевдо) решение этих уравнений. Полученное решение используется в качестве граничных условий в основных узлах при построении первого приближения.

Далее процесс повторяется. Сходимость итерационного процесса контролируется среднеквадратическим отклонением величины вектора невязок от заданного значения.

Вычисления проводились на сгущающейся к особой точке сетке с минимальным размером элемента 0,53 мкм. Рис. 3 демонстрирует сходимость итерационного процесса.



Рис. 3. Зависимость среднеквадратического отклонения величины вектора невязок от количества итераций

На рис. 4 и 5 приводятся графики, иллюстрирующие концентрацию напряжений σ_{22}/σ_0 в малой окрестности особой точки. Примечательно, что наибольшего значения концентрация напряжений достигает не в точках оси x_1. На рис. 5 приводятся относительные нормальные напряжения $\sigma_{\xi\xi}/\sigma_0$ на образующей AB. Максимальные значения этих напряжений оказываются большими, чем на оси x_1. С ростом угла α, как и следовало ожидать, концентрация напряжений в окрестности особой точки возрастает.

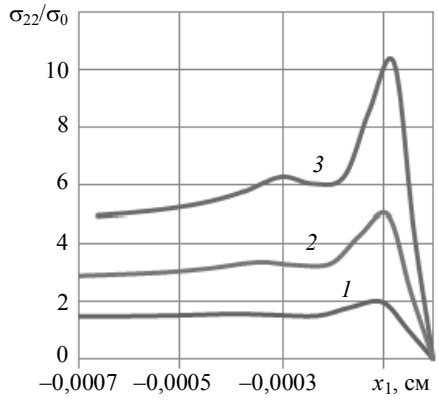


Рис. 4. Зависимость напряжений σ_{22}/σ_0 от x_1 (линия AD): *1* – $\alpha = 93°$; *2* – $\alpha = 99°$; *3* – $\alpha = 105°$

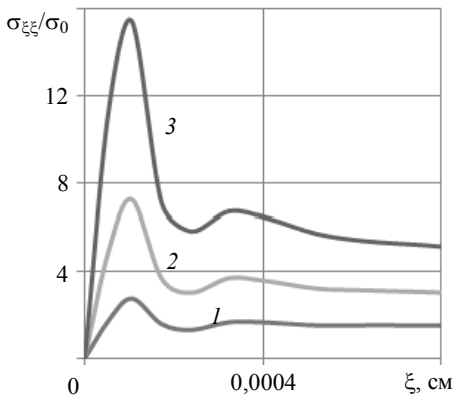


Рис.5. Зависимость напряжений σ_{22}/σ_0 от ξ (линия AB) при различных α: *1* – $\alpha = 93°$; *2* – $\alpha = 99°$; *3* – $\alpha = 105°$

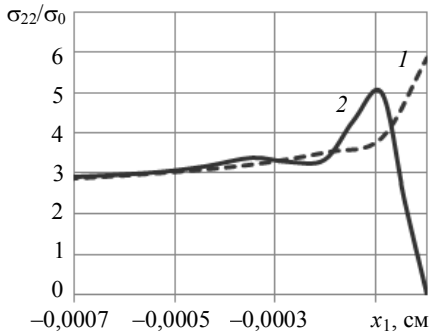


Рис. 6. Сравнение решений нестандартной задачи, построенных стандартным методом (*1*) и итерационным (*2*). $\alpha = 99°$

На рис. 6 приводятся решение данной задачи с использованием пакета ANSYS (штриховая линия) и решение предлагаемым итерационным методом (сплошная линия). В обоих случаях использовалась одна КЭ-сетка, угол α принимался 99°. Решение, полученное в ANSYS, совпадает с нулевым приближением итерационного решения. Нулевое приближение не согласуется с заданными условиями (21) в особой точке. При уточнении решения методом последовательных приближений граничные условия вблизи точки A задаются в перемещениях, которые изменяются от шага к шагу так, чтобы улучшить выполнение всех заданных условий. Видно, что кривые на рис.6 отличаются лишь в малой окрестности точки A.

Заключение

Предлагаемый в работе способ анализа ограничений на параметры состояния вблизи особой точки позволяет выявить заданные независимые условия и, исходя из их количества, определить тип рассматриваемой задачи, правильно выбрать метод решения. Оказывается, что основными задачами элементов конструкций с особыми точками являются нестандартные задачи. Стандартные задачи составляют исключения. Они отвечают лишь определенному сочетанию материальных и геометрических параметров элементов конструкций. Дальнейшее изучение нестандартных задач МДТТ предполагается вести посредством развития методов их решения, изучения пространственных и составных тел с различными механическими свойствами.

Расчеты проводились на суперкомпьютере ТЕСЛА-ПГУ научно-образовательного центра параллельных и распределенных вычислений Пермского государственного национального исследовательского университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. P. 526–528.
2. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
3. *Bogy D.B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // J. Appl. Mechanics. 1968. V. 35. P. 460–466.
4. *Bogy D.B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96.
5. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. 1967. № 1. С. 178–186.
6. *Аксентян О.К.*, *Лущик О.Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 5. С. 102–108.
7. *Аксентян О.К.*, *Лущик О.Н.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения // Прикладная механика. 1982. Т. 18. № 7. С. 66–73.
8. *Задоян М.А.* Прочность соединения составных плит // Механика твердого тела. 2003. № 1. С. 111–122.
9. *Матвеенко В.П.* Метод численного анализа сингулярности напряжений в угловых точках трехмерных тел // Изв. РАН МТТ. 1995. № 5. С. 71–77.
10. *Матвеенко В.П.*, *Накарякова Т.О.*, *Севодина Н.В.*, *Шардаков И.Н.* Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 477–484.
11. *Матвеенко В.П.*, *Федоров А.Ю.* Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4. № 4. С. 63–70.
12. *Sinclear G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
13. *Sinclear G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
14. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
15. *Barut A.*, *Guven I.*, *Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Int. J. Solid and Structures. 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
16. *Борзенков С.М.*, *Матвеенко В.П.* Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости // Изв. РАН МТТ. 1995. № 6. С.48–61.

17. *Adams R.D.*, *Atkins R.W.*, *Harris J.A.*, *Kinloch A.J.* Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastid steel double-lap joints // J. Adhesion. 1986. V. 20. P. 29–53.
18. *Пестренин В.М.*, *Пестренина И.В.*, *Ландик Л.В.* Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 78–87.
19. *Пестренин В.М.*, *Пестренина И.В.*, *Ландик Л.В.*, *Степина Е.В.* Температурное нагружение составной конструкции в условиях плоской задачи // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. № 3(22). С. 66–71.
20. *Пестренин В.М.*, *Пестренина И.В.* Механика композитных материалов и элементов конструкций. Пермь: Перм. ун-т, 2005. 364 с.

Статья поступила 04.11.2013 г.

Pestrenin V. M., *Pestrenina I. V.*, *Landik L. V.* NON-STANDARD PROBLEMS OF HOMOGENEOUS STRUCTURAL ELEMENTS WITH WEDGE SHAPE FEATURES IN THE PLANE CASE. A new type of solid mechanics problems – non-standard ones – is distinguished. Their distinctive feature is the redundancy of restrictions on status parameters at at least one point on the body boundary. It is shown that the use of standard methods in solving non-standard problems does not guarantee the fulfillment of all specified conditions. The most important cases of non-standard restrictions in flat homogeneous structural elements with singularities in the form of wedges are presented. Wedge side loading is studied in the following cases: free from stress, rigidly clamped, sliding without friction along a rigid surface, and surface power loaded. An iterative converging numerical-analytical method for studying problems of this type is proposed. At each step of the iterative process converging to the solution of the non-standard problem, the inverse problem in displacements is solved. An illustrative example shows the essential difference between the standard and iterative solutions of the non-standard problem in a vicinity of the wedge tip.

Keywords: non-standard problems, singular points, plane problem, stress concentration

REFERENCES

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. P. 526–528.
2. *Uflyand Ya.S.* Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti. M.-L.: Izd-vo AN SSSR, 1967. 402 p. (in Russian).
3. *Bogy D.B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // J. Appl. Mechanics. 1968. V. 35. P. 460–466.
4. *Bogy D.B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96.
5. *Aksentyan O.K.* Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra // Prikladnaya matematika i mekhanika. 1967. No. 1. P. 178–186 (in Russian).
6. *Aksentyan O.K., Lushchik O.N.* Ob usloviyakh ogranichennosti napryazheniy u rebra sostavnogo klina // Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. 1978. No. 5. P. 102–108 (in Russian).
7. *Aksentyan O.K., Lushchik O.N.* Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti vershiny stykovogo soedineniya // Prikladnaya mekhanika. 1982. V. 18. No. 7. P. 66–73 (in Russian).
8. *Zadoyan M.A.* Prochnost' soedineniya sostavnykh plit // Mekhanika tverdogo tela. 2003. No. 1. P. 111–122 (in Russian).
9. *Matveenko V.P.* Metod chislennogo analiza singulyarnosti napryazheniy v uglovykh tochkakh trekhmernykh tel // Izv. RAN MTT. 1995. No. 5. P. 71–77 (in Russian).
10. *Matveenko V.P., Nakaryakova T.O., Sevodina N.V., Shardakov I.N.* Singulyarnost' napryazheniy v vershine odnorodnykh i sostavnykh konusov pri raznykh granichnykh usloviyakh // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2008. V. 72. Vyp. 3. P. 477–484 (in Russian).

11. *Matveenko V.P., Fedorov A.Yu.* Optimizatsiya geometrii sostavnykh uprugikh tel kak osnova sovershenstvovaniya metodik ispytaniy na prochnost' kleevykh soedineniy // Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred. 2011. V. 4. No. 4. P. 63–70 (in Russian).
12. *Sinclear G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
13. *Sinclear G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
14. *Chobanyan K.S.* Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh. Erevan: Izd-vo AN ArmSSR, 1987. 338 p. (in Russian).
15. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Int. J. Solid and Structures. 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
16. *Borzenkov S.M., Matveenko V.P.* Poluanaliticheskie singulyarnye elementy dlya ploskikh i prostranstvennykh zadach teorii uprugosti // Izv. RAN MTT. 1995. No. 6. P. 48–61 (in Russian).
17. *Adams R.D., Atkins R.W., Harris J.A., Kinloch A.J.* Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastid steel double-lap joints // J. Adhesion. 1986. V. 20. P. 29–53.
18. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V.* Napryazhennoe sostoyanie vblizi osoboy tochki sostavnoy konstruktsii v ploskoy zadache // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2013. No. 4(24). P. 78–87 (in Russian).
19. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Stepina E.V.* Temperaturnoe nagruzhenie sostavnoy konstruktsii v usloviyakh ploskoy zadachi // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2013. No. 3(22). P. 66–71 (in Russian).
20. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V.* Mekhanika kompozitnykh materialov i elementov konstruktsiy. Perm': Perm. un-t, 2005. 364 p. (in Russian).

PESTRENIN Valery Mihailovich (Perm State University, Perm, Russian Federation)
E-mail: pestreninVM@mail.ru

PESTRENINA Irena Vladimirovna (Perm State University, Perm, Russian Federation)
E-mail: IPestrenina@gmail.com

LANDIK Lidia Vladimirovna (Perm State University, Perm, Russian Federation)
E-mail: LidiaLandik@gmail.com