ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 56, № 12 ФИЗИКА 2013

УДК 517.9

Е.А. ЛЕВЧЕНКО, А.Ю. ТРИФОНОВ*, А.В. ШАПОВАЛОВ***

ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА – КОЛМОГОРОВА – ПЕТРОВСКОГО – ПИСКУНОВА С КВАДРАТИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ[1]

Построен класс нелинейных операторов симметрии для многомерного нелокального уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова, квадратичного по независимым переменным и производным. Конструкция оператора симметрии включает сплетающий оператор для вспомогательных линейных уравнений и дополнительные нелинейные алгебраические условия. В явном виде построены операторы симметрии для одномерного уравнения с постоянной функцией влияния, с помощью которых получен счетный набор точных решений.

Ключевые слова: *нелокальное уравнение Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова, сплетающий оператор, нелинейный оператор симметрии.*

Введение

Свойства симметрии дифференциального уравнения (ДУ) ассоциируются с преобразованиями, оставляющими инвариантным множество решений уравнения. Такие преобразования будем называть операторами симметрии (ОС). С помощью операторов симметрии можно генерировать новые решения уравнения, действуя последовательно на известное решение оператором симметрии. Процедура генерации решений является лишь иллюстрацией возможностей операторов симметрии уравнений, но не исчерпывает их. Проблема заключается в том, как найти в явном виде операторы симметрии или иные симметрийные конструкции.

Основным математическим аппаратом систематического исследования симметрии дифференциальных уравнений является теория непрерывных групп Ли преобразований, оставляющих инвариантным дифференциальное уравнение (обыкновенное или в частных производных). Группу инвариантности уравнения называют также группой симметрии, или группой, допускаемой уравнением. Нахождение группы симметрии сводится к решению линейной системы определяющих уравнений для инфинитезимального оператора (генератора) группы Ли. Построенная по генератору группа Ли конечных преобразований может применяться к любому решению уравнения, допускающему группу, и, таким образом, генерировать параметрические семейства новых решений уравнения из известного решения. Группа Ли точечных преобразований инвариантности дифференциального уравнения может рассматриваться как пример семейства операторов симметрии уравнения. Подробное описание применения групп Ли к обыкновенным ДУ можно найти, например, в [1–3]. Для ДУ с частными производными (ДУЧП) применение методов теории групп Ли опирается на процедуру продолжения действия группы Ли на частные производные высших порядков [1–3]. Генератор продолженной группы Ли имеет специальную структуру и является базовым объектом исследования свойств симметрии ДУЧП. Для группы Ли, допускаемой ДУЧП, генератор определяется линейным уравнением в частных производных на коэффициенты генератора, которые задают так называемые симметрии уравнения. Множество симметрий обладает алгебраическими свойствами, которые используются для анализа свойств уравнений и нахождения семейств их решений [1–3].

Однако вопрос о нахождении в явном виде ОС нелинейных уравнений прямыми методами, не связанными с группами Ли, мало изучен. В общей постановке такая задача не имеет конструктивного решения ввиду значительных математических трудностей. Поэтому естественно искать ОС для нелинейных уравнений специального вида, свойства которых, до известной степени, подобны свойствам линейных уравнений. Примером таких уравнений является нелокальное обобщение уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова (ФКПП), описывающее популяционную динамику [4, 5] с оператором, квадратичным по независимым переменным и производным, которое в [6] отнесено к классу уравнений, близких к линейным.

[1] Работа выполнена в рамках госзадания вузам «Наука», рег. № 1.604.2011, и в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Целью данной работы является построение операторов симметрии нелокального уравнения ФКПП с квадратичным по координатам и производным оператором.

1. Задача Коши

Рассмотрим обобщенное нелокальное уравнение ФКПП для случая, когда оператор уравнения квадратичен по независимым переменным и производным, и кратко изложим метод решения задачи Коши для этого уравнения.

Различные виды нелокальных обобщений уравнения ФКПП вводились в ряде работ, например в [7–9], для исследования влияния эффектов дальнодействия на динамику популяций. В этих исследованиях проводился анализ стационарных состояний, бегущих популяционных волн [10], описывалось формирование структур в колониях бактерий [7, 8].

Применение метода квазиклассических асимптотик [11, 12] к нелокальному уравнению ФКПП общего вида приводит к уравнению с квадратичным оператором, решение которого определяет главный член асимптотического разложения. В одномерном случае квазиклассические асимптотики для нелокального обобщения уравнения ФКПП построены в [13], где, в частности, использовалось уравнение с квадратичным оператором. В данной работе мы исследуем многомерное обобщенное нелокальное уравнение ФКПП с квадратичным оператором, которое в соответствии с [13] запишем в виде

$$[-D\partial_t+\hat{\mathcal{H}}(\hat{\boldsymbol{\pi}},\boldsymbol{x};m_u(t),\boldsymbol{x}_u(t))]u(\boldsymbol{x},t)=0\,; \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(\hat{\boldsymbol{\pi}},\boldsymbol{x};m_u(t),\boldsymbol{x}_u(t))&=\langle\hat{\boldsymbol{\pi}},\hat{\boldsymbol{\pi}}\rangle-\langle\hat{\boldsymbol{\pi}},K_1(t)\boldsymbol{x}\rangle-æ m_u(t)\langle\hat{\boldsymbol{\pi}},[K_2(t)\boldsymbol{x}+\\&+K_3(t)\boldsymbol{x}_u(t)]\rangle+Da(t)-Dæ m_u(t)(\langle\boldsymbol{k}_1(t),\boldsymbol{x}_u(t)\rangle+k_0(t)).\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь введены следующие обозначения: $t\in\mathbb{R}^1_+$ и $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^n$ – независимые переменные; угловые скобки $\langle .,.\rangle$ обозначают евклидово скалярное произведение векторов пространства $\mathbb{R}^n$; функция $u(\boldsymbol{x},t)$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}$ по переменным $\boldsymbol{x}$ и равномерна по t; $\hat{\boldsymbol{\pi}}=D\partial_{\boldsymbol{x}}$, $\partial_{\boldsymbol{x}}=\partial/\partial\boldsymbol{x}$; вещественный параметр D есть постоянный коэффициент диффузии; гладкая функция $a(t)$ имеет смысл темпа роста функции $u(\boldsymbol{x},t)$ со временем; $K_1(t)$, $K_2(t)$, $K_3(t)$ – произвольные матричные функции размера $n\times n$; $\boldsymbol{k}_1(t)$ – произвольная вектор-функция; $k_0(t)$ – произвольная функция. Все указанные функции гладко зависят от t. Переменные и параметры уравнения (1), (2) принимаются безразмерными.

Величина $m_u(t)$ является нулевым моментом, а $\boldsymbol{x}_u(t)$ – вектором первых нормированных моментов функции $u(\boldsymbol{x},t)$:

$$m_u(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}\,; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x}_u(t)=\frac{1}{m_u(t)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\boldsymbol{x}u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

Здесь $d\boldsymbol{x}=dx_1\cdots dx_n$. В уравнение (1) нелокальность входит в виде моментов искомой функции $u(\boldsymbol{x},t)$, поэтому (1) можно отнести к классу уравнений, близких к линейным в смысле работы [6].

Получим уравнения, описывающие эволюцию моментов $m_u(t)$ и $\boldsymbol{x}_u(t)$. Для компактной записи введем совокупный вектор нулевого и первого моментов:

$$\Theta_u(t)=(m_u(t),\boldsymbol{x}_u(t)). \tag{5}$$

Продифференцируем соотношения (3), (4) по t и подставим производную u_t из (1). После простых преобразований получим систему динамических уравнений

$$\dot{\Theta}_u(t)=\Gamma(t,\Theta_u(t)), \tag{6}$$

где

$$\Gamma(t,\Theta_u(t))=\begin{pmatrix} a(t)m_u(t)-æ m_u^2(t)[\langle \boldsymbol{k}_1(t),\boldsymbol{x}_u(t)\rangle+k_0(t)] \\ [K_1(t)+æ m_u(t)(K_2(t)+K_3(t))]\boldsymbol{x}_u(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Систему (6) будем называть *системой уравнений Эйнштейна – Эренфеста* (ЭЭ) для уравнения (1). Нетрудно видеть, что система ЭЭ замкнута в том смысле, что в ней число уравнений равно числу искомых функций, и она может быть решена независимо от (1).

Для уравнения (1) поставим задачу Коши

$$u(\boldsymbol{x},t)|_{t=0}=\gamma(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

Тогда, в соответствии с обозначениями (3), (4), (5), для функции $\gamma(\boldsymbol{x})$ получим

$$m_u(t)|_{t=0}\equiv m_\gamma=\int_{\mathbb{R}^n}\gamma(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}_u(t)|_{t=0}\equiv \boldsymbol{x}_\gamma=\frac{1}{m_\gamma}\int_{\mathbb{R}^n}\boldsymbol{x}\gamma(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\quad \Theta_\gamma=(m_\gamma,\boldsymbol{x}_\gamma). \tag{9}$$

Решение задачи Коши для системы моментов (6) с начальными условиями (9) обозначим как

$$\Theta[\gamma](t)=(m[\gamma](t),\boldsymbol{x}[\gamma](t)). \tag{10}$$

Заменим в (1) $m_u(t)$ и $\boldsymbol{x}_u(t)$ неизвестными функциями $m(t)$ и $\boldsymbol{X}(t)$ соответственно. В результате получим следующее уравнение:

$$[-D\partial_t+\hat{\mathcal{H}}(\hat{\boldsymbol{\pi}},\boldsymbol{x};m(t),\boldsymbol{X}(t))]v(\boldsymbol{x},t)=0, \tag{11}$$

где вид оператора $\hat{\mathcal{H}}(\hat{\boldsymbol{\pi}},\boldsymbol{x};m(t),\boldsymbol{X}(t))$ задан выражением (2), в котором следует заменить $m_u(t)$ и $\boldsymbol{x}_u(t)$ на $m(t)$ и $\boldsymbol{X}(t)$ соответственно.

Аналогично из системы (6) для $\Theta(t)=(m(t),\boldsymbol{X}(t))$ получим

$$\dot{\Theta}(t)=\Gamma(t,\Theta(t)), \tag{12}$$

вид $\Gamma(t,\Theta(t))$ ясен из (7).

Систему уравнений (11) и (12) назовем *объединенной системой* [6]. Решение системы (11), (12) равносильно решению исходного уравнения (1).

Используя объединенную систему, задачу Коши (1), (8) можно решить поэтапно, следуя приведенным ниже теоремам.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\Theta[\gamma](t)=\Theta_u(t), \tag{13}$$

где $u(\boldsymbol{x},t)$ *и* $\gamma(\boldsymbol{x})$ *связаны условием* (8), а $\Theta_u(t)$ *и* $\Theta[\gamma](t)$ *определены в* (5) *и* (10) *соответственно*.

Обозначим через

$$\Theta(t,\mathbf{C})=(m(t,\mathbf{C}),\boldsymbol{X}(t,\mathbf{C})) \tag{14}$$

общее решение системы (12). Здесь $\mathbf{C}=(C_1,C_2,\dots,C_{n+1})$ – набор $(n+1)$ постоянных интегрирования. Подчиним произвольные постоянные **C** условию

$$\Theta(t,\mathbf{C})|_{t=0}=\Theta_\gamma, \tag{15}$$

где Θ_γ определено в (9). Решение системы алгебраических уравнений (15) обозначим через $\mathbf{C}[\gamma]$.

Поскольку $\Theta[\gamma](t)$ – решение задачи Коши (6), (9), а $\Theta(t,\mathbf{C})$ – общее решение системы (12), то, выбрав постоянные **C** из условия (15), получим равенство

$$\Theta[\gamma](t)=\Theta(t,\mathbf{C}[\gamma]), \tag{16}$$

справедливое в силу единственности решения задачи Коши для систем (6) и (12) и равенства начальных условий, $\Theta(0,\mathbf{C}[\gamma])=\Theta_\gamma$, следующего из (15). Аналогично определим $\mathbf{C}[u(t)]$ как решение алгебраической системы

$$\Theta(t,\mathbf{C})=\Theta_u(t). \tag{17}$$

Величины $\mathbf{C}[\gamma]$ в (16) и $\mathbf{C}[u(t)]$, полученные из (17), являются функционалами, зависящими от функций $\gamma(\boldsymbol{x})$ и $u(\boldsymbol{x},t)$ соответственно.

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$\mathbf{C}[\gamma] = \mathbf{C}[u(t)], \tag{18}$$

т.е. функционалы $\mathbf{C}[u(t)]$, *определяемые из условия* (17), *являются интегралами уравнения* (1).

Подставим в (11) вместо $\Theta(t) = (m(t), \boldsymbol{X}(t))$ общее решение (14) системы (12). Получим линейное уравнение, зависящее от $\mathbf{C}$ как от параметров:

$$\hat{L}(t, \mathbf{C})v(\boldsymbol{x}, t) = [-D\partial_t + \hat{\mathcal{H}}(\hat{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{x}; m(t, \mathbf{C}), \boldsymbol{X}(t, \mathbf{C}))]v(\boldsymbol{x}, t) = 0, \tag{19}$$

где вид оператора $\hat{\mathcal{H}}(\hat{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{x}; m(t, \mathbf{C}), \boldsymbol{X}(t, \mathbf{C}))$ очевиден из выражения (2). Отметим, что решение уравнения (19) зависит от параметров $\mathbf{C}$: $v(\boldsymbol{x}, t) = v(\boldsymbol{x}, t, \mathbf{C})$.

Уравнение (19) будем называть *ассоциированным линейным уравнением* для нелокального уравнения ФКПП (1).

Отметим, что (19) не является линеаризацией уравнения (1), а привлекается в качестве вспомогательной линейной задачи для решения уравнения (1).

Справедлива теорема

Теорема 3. *Решение задачи Коши* (1), (8) *имеет вид*

$$u(\boldsymbol{x}, t) = v(\boldsymbol{x}, t, \mathbf{C})|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[\gamma]}, \tag{20}$$

где $\mathbf{C}[\gamma]$ *определяется системой алгебраических уравнений* (15).

Используя решение задачи Коши (20), построим специальный класс операторов симметрии уравнения (1).

2. Оператор симметрии

Оператор симметрии $\hat{A}(t)$, в общем случае нелинейный, зависящий от t как от параметра, согласно определению, переводит любое решение $u(\boldsymbol{x}, t)$ уравнения (1) в некоторое другое решение $u_A(\boldsymbol{x}, t)$ этого же уравнения:

$$u_A(\boldsymbol{x}, t) = (\hat{A}u)(\boldsymbol{x}, t). \tag{21}$$

Поскольку $u(\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{S}$, оператор $\hat{A}(t)$ действует в пространстве Шварца $\mathcal{S}$. Будем искать операторы $\hat{A}(t)$, такие, что

$$\hat{A}(t)|_{t=0} = \hat{a}, \tag{22}$$

где $\hat{a}$ – заданный линейный оператор. Если $u(\boldsymbol{x}, t)|_{t=0} = \gamma(\boldsymbol{x})$ и $u_A(\boldsymbol{x}, t)|_{t=0} = \gamma_a(\boldsymbol{x})$, то из (21), (22) следует

$$\gamma_a(\boldsymbol{x}) = \hat{a}\gamma(\boldsymbol{x}). \tag{23}$$

Обозначим через $\Theta_{\gamma_a} = (m_{\gamma_a}, \boldsymbol{x}_{\gamma_a})$ совокупный вектор нулевого и первого моментов функции $\gamma_a(\boldsymbol{x})$, определяемых в соответствии с (9), а $\Theta[\gamma_a](t) = (m[\gamma_a](t), \boldsymbol{x}[\gamma_a](t))$ – решение системы моментов (6) с начальным условием $\Theta[\gamma_a](t)|_{t=0} = \Theta_{\gamma_a}$.

Общее решение $\Theta(t, \mathbf{C})$ вида (14) подчиним условию

$$\Theta(t, \mathbf{C})|_{t=0} = \Theta_{\gamma_a}. \tag{24}$$

Найденные из (24) постоянные обозначим $\mathbf{C}[\gamma_a]$. Аналогично (16) имеем

$$\Theta[\gamma_a](t) = \Theta(t, \mathbf{C}[\gamma_a]). \tag{25}$$

Пусть $\Theta(t, \mathbf{C})$ и $\Theta(t, \mathbf{C}')$ – два экземпляра общего решения вида (14) с наборами констант $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$. Теорема 3 позволяет представить функцию $u_A(\boldsymbol{x}, t)$ в следующем виде:

$$u_A(\boldsymbol{x}, t) = v(\boldsymbol{x}, t, \mathbf{C}')|_{\mathbf{C}'=\mathbf{C}[\gamma_a]}. \tag{26}$$

Найдем аналитический вид оператора $\hat{A}(t)$, связывающего произвольное решение $u(\boldsymbol{x},t)$ вида (20) и соответствующее ему решение $u_A(\boldsymbol{x},t)$ вида (26) согласно (21) для любого линейного оператора $\hat{a}$. Для этого построим линейный оператор $\hat{M}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$, зависящий от двух наборов постоянных $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ и сплетающий линейные операторы $\hat{L}(t,\mathbf{C}')$ и $\hat{L}(t,\mathbf{C})$ вида (19):

$$\hat{L}(t,\mathbf{C}')\hat{M}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})=\hat{R}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})\hat{L}(t,\mathbf{C}); \tag{27}$$

$$\hat{M}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})\,|_{t=0}=\hat{a}, \tag{28}$$

где оператор $\hat{R}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ имеет смысл множителя Лагранжа. Определим линейный сплетающий оператор $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ следующими условиями:

$$\hat{L}(t,\mathbf{C}')\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})=\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})\hat{L}(t,\mathbf{C}),\quad \hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})\,|_{t=0}=\hat{\mathbb{I}}, \tag{29}$$

где $\hat{\mathbb{I}}$ – единичный оператор. Будем называть $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ *фундаментальным* сплетающим оператором. Тогда оператор $\hat{M}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ вида (27) можем представить в виде

$$\hat{M}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})=\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})\hat{B}(t,\mathbf{C}), \tag{30}$$

где $\hat{B}(t,\mathbf{C})$ – оператор симметрии ассоциированного линейного уравнения (19), определяемый условиями

$$[\hat{L}(t,\mathbf{C}),\hat{B}(t,\mathbf{C})]=0,\quad \hat{B}(t,\mathbf{C})\,|_{t=0}=\hat{a}. \tag{31}$$

Определим действие оператора $\hat{A}(t)$ на функцию $u(\boldsymbol{x},t)$ следующим выражением:

$$\hat{A}(u)(\boldsymbol{x},t)=\hat{M}(t,\mathbf{C}[\hat{a}\gamma],\mathbf{C}[u(t)])u(\boldsymbol{x},t)=\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}[\hat{a}\gamma],\mathbf{C}[u(t)])\hat{B}(t,\mathbf{C}[u(t)])u(\boldsymbol{x},t). \tag{32}$$

По построению оператор $\hat{A}(t)$ является *нелинейным* оператором симметрии уравнения (1).

Таким образом, построение оператора симметрии (32) сводится к нахождению фундаментального сплетающего оператора $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ и оператора симметрии ассоциированного линейного уравнения. Последняя задача сводится к решению определяющих уравнений (31). Эта задача подробно изучалась для многих линейных уравнений, и мы не будем здесь подробно останавливаться на ее решении, а уделим внимание нахождению оператора $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$.

3. Фундаментальный сплетающий оператор

Следуя теории псевдодифференциальных операторов (см., например, [11]), оператор $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ зададим соотношением

$$\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})\varphi(\boldsymbol{x},t)=(2\pi D)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\boldsymbol{p}\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\boldsymbol{y}\exp\left[\frac{i}{D}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right]\mathcal{D}\left(\boldsymbol{p},\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),t,\mathbf{C}',\mathbf{C}\right)\varphi(\boldsymbol{y},t), \tag{33}$$

где функция $\mathcal{D}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x},t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ – вейлевский символ оператора $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$, а $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ – произвольная функция, на которую действует $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$. Можно показать, что $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ – оператор, действующий в пространстве $\mathcal{S}$, если его символ – бесконечно дифференцируемая функция, растущая при $|\boldsymbol{x}|,|\boldsymbol{p}|\to\infty$ не быстрее, чем полином [11].

Найдем символ фундаментального сплетающего оператора $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$. Для этого запишем уравнение (29) в терминах символов входящих в него операторов. Далее для оператора $\hat{\mathcal{H}}(\hat{\boldsymbol{\pi}},\boldsymbol{x};m(t,\mathbf{C}),\boldsymbol{X}(t,\mathbf{C}))$ в уравнении (19) используем сокращенное обозначение

$$\hat{H}(t,\mathbf{C})=\hat{\mathcal{H}}(\hat{\boldsymbol{\pi}},\boldsymbol{x};m(t,\mathbf{C}),\boldsymbol{X}(t,\mathbf{C})). \tag{34}$$

Обозначим $H(z,t,\mathbf{C},D)$ и $H(z,t,\mathbf{C}',D)$ – символы операторов $\hat{H}(t,\mathbf{C})$ и $\hat{H}(t,\mathbf{C}')$ соответственно вида (34), где

$$z = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})^{\intercal}, \quad \hat{z} = (\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{x}})^{\intercal} = (-iD\partial_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x})^{\intercal}. \tag{35}$$

В (35) вещественные переменные $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^{2n}$. Символ $H(z,t,\mathbf{C},D)$ с учетом (19) представим в виде

$$\begin{gathered} H(z,t,\boldsymbol{C},D) = H^{(0)}(z,t,\mathbf{C}) + DH^{(1)}(z,t,\mathbf{C}), \\ H^{(0)}(z,t,\mathbf{C}) = -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle - i\langle \boldsymbol{p}, \Lambda(t,\mathbf{C})\boldsymbol{x}\rangle - iæm(t,\mathbf{C})\langle \boldsymbol{p}, K_3(t)\boldsymbol{X}(t,\mathbf{C})\rangle, \\ H^{(1)}(z,t,\mathbf{C}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}[\Lambda(t,\mathbf{C})] + a(t) - æm(t,\mathbf{C})(\langle \boldsymbol{k}_1(t), \boldsymbol{X}(t,\mathbf{C})\rangle + k_0(t)), \end{gathered} \tag{36}$$

где $\Lambda(t,\mathbf{C}) = K_1(t) + æm(t,\mathbf{C})K_2(t)$, а функции $H^{(k)}(z,t,\mathbf{C}), \quad k = 0,1$, не зависят от D.

Вейлевский символ произведения двух линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, согласно [14], дается выражением

$$(A * B)(z) = A\left(z + \frac{1}{2}iDJ\partial_{z_B}\right)B(z) = B\left(z - \frac{1}{2}iDJ\partial_{z_A}\right)A(z). \tag{37}$$

Здесь $J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{I}$ – единичная матрица; $A(z)$ и $B(z)$ – вейлевские символы операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ соответственно, а индекс A (B) у производной ∂_{z_A} (∂_{z_B}) указывает функцию $A(z)$ ($B(z)$), на которую эта производная действует. Из соотношений (29) и (37) получим условия на символ $\mathcal{D}(z,t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ оператора $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ в виде

$$\left[-D\partial_t + H\left(z + \frac{1}{2}iDJ\partial_{z_{\mathcal{D}}}, t, \mathbf{C}', D\right) - H\left(z - \frac{1}{2}iDJ\partial_{z_{\mathcal{D}}}, t, \mathbf{C}, D\right)\right]\mathcal{D}(z,t,\mathbf{C}',\mathbf{C}) = 0; \tag{38}$$

$$\mathcal{D}(z,t,\mathbf{C}',\mathbf{C})|_{t=0} = 1. \tag{39}$$

Коэффициент диффузии D в уравнении (38) будем считать произвольным параметром, т.е. равенство (38) выполняется тождественно не только по z, но и по D. Зависимость от параметра D в символе $\mathcal{D}(z,t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ для краткости опускаем. Из (36), (38) получим

$$\begin{gathered} \left[-D\partial_t + H(t,\mathbf{C}') + \left\langle H_z(t,\mathbf{C}'), z + \frac{1}{2}iDJ\partial_z\right\rangle + \right. \\ + \frac{1}{2}\left\langle z + \frac{1}{2}iDJ\partial_z, H_{zz}(t,\mathbf{C}')\left(z + \frac{1}{2}iDJ\partial_z\right)\right\rangle - H(t,\mathbf{C}) - \\ \left. - \left\langle H_z(t,\mathbf{C}), z - \frac{1}{2}iDJ\partial_z\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle z - \frac{1}{2}iDJ\partial_z, H_{zz}(t,\mathbf{C})\left(z - \frac{1}{2}iDJ\partial_z\right)\right\rangle\right]\mathcal{D}(z,t,\mathbf{C}',\mathbf{C}) = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

Здесь и далее угловые скобки $\langle , \rangle$ обозначают евклидово скалярное произведение $2n$-мерных векторов; H_z есть $2n$-мерный градиент, а H_{zz} – матрица Гессе размерности $2n \times 2n$ функции $H(z)$. Решение уравнения (40) будем искать в виде

$$\mathcal{D}(z,t,\mathbf{C}',\mathbf{C}) = \exp\left[\frac{1}{D}\left(\Phi_0(t) + D\Phi_1(t) + \langle \pi(t), z\rangle + \frac{1}{2}\langle z, Q(t)z\rangle\right)\right], \tag{41}$$

где функции $\Phi_0(t) = \Phi_0(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$, $\Phi_1(t) = \Phi_1(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$, $2n$-мерный вектор $\pi(t) = \pi(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ и симметричная матрица $Q(t) = Q(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$ размерности $2n \times 2n$ не зависят от D. Из (39) следует

$$\Phi_0(t)|_{t=0} = 0, \quad \Phi_1(t)|_{t=0} = 0, \quad \pi(t)|_{t=0} = 0, \quad Q(t)|_{t=0} = 0. \tag{42}$$

Подставим (41) в (40) и в полученном уравнении приравняем слагаемые при одинаковых степенях z и D. После простых преобразований приходим к следующей системе уравнений:

$$\dot{\Phi}_0(t) = \frac{i}{2}\langle \Sigma H_z, J\pi(t)\rangle - \frac{1}{8}\langle J\pi(t), \delta H_{zz} J\pi(t)\rangle; \qquad (43)$$

$$\dot{\Phi}_1(t) = \delta H + \frac{1}{8}\mathrm{Sp}[J\delta H_{zz} JQ(t)]; \qquad (44)$$

$$\dot{\pi}(t) = \delta H_z - \frac{i}{2}Q(t)J\Sigma H_z + \frac{i}{2}\Sigma H_{zz} J\pi(t) + \frac{1}{4}Q(t)J\delta H_{zz} J\pi(t); \qquad (45)$$

$$\dot{Q}(t) = \delta H_{zz} + \frac{i}{2}[\Sigma H_{zz} JQ(t) + (\Sigma H_{zz} JQ(t))^{\intercal}] + \frac{1}{4}Q(t)J\delta H_{zz} JQ(t). \qquad (46)$$

Здесь $\delta H = H^{(1)}(t,\mathbf{C}') - H^{(1)}(t,\mathbf{C})$; $\delta H_z = H_z^{(0)}(t,\mathbf{C}') - H_z^{(0)}(t,\mathbf{C})$; $\Sigma H_z = H_z^{(0)}(t,\mathbf{C}') + H_z^{(0)}(t,\mathbf{C})$; $\delta H_{zz} = H_{zz}^{(0)}(t,\mathbf{C}') - H_{zz}^{(0)}(t,\mathbf{C})$; $\Sigma H_{zz} = H_{zz}^{(0)}(t,\mathbf{C}') + H_{zz}^{(0)}(t,\mathbf{C})$. Интегрируя уравнения (43), (44) и учитывая начальные условия (42), запишем

$$\Phi_0(t) = \int_0^t \left(\frac{i}{2}\langle \Sigma H_z, J\pi(t)\rangle - \frac{1}{8}\langle J\pi(t), \delta H_{zz} J\pi(t)\rangle\right)dt; \qquad (47)$$

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \left(\delta H + \frac{1}{8}\mathrm{Sp}[J\delta H_{zz} JQ(t)]\right)dt. \qquad (48)$$

Решение линейного уравнения (45) находится известным способом, а матричное уравнение Рикката (46) подстановкой $Q(t) = C(t)B(t)^{-1}$ приводится к линейной системе

$$\dot{B}(t) = -\frac{1}{4}J\delta H_{zz} JC(t) + \frac{i}{2}J\Sigma H_{zz} B(t), \quad \dot{C}(t) = \frac{i}{2}\Sigma H_{zz} JC(t) + \delta H_{zz} B(t), \qquad (49)$$

где $B(t)$ и $C(t)$ – матрицы размерности $2n \times 2n$.

Таким образом, нахождение символа оператора $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$, а вместе с ним и оператора симметрии $\hat{A}(t)$ вида (32) сводится к решению уравнения (45) и системы (49).

4. Операторы симметрии и генерация решений в одномерном частном случае

Найдем в явном виде операторы симметрии (32) для простейшего частного случая одномерного уравнения (1) при $K_1(t) = K_2(t) = K_3(t) = \boldsymbol{k}_1(t) = 0$, $a(t) = a = \mathrm{const}$, $k_0(t) = b = \mathrm{const}$, $æ = 1$:

$$[-\partial_t + D\partial_x^2 + a - bm_u(t)]u(x,t) = 0. \qquad (50)$$

Начальное условие для уравнения (50) обозначим как

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (51)$$

Для уравнения (50) система (12) на функции $m(t)$ и $X(t)$ есть

$$\dot{m}(t) = am(t) - bm^2(t), \quad \dot{X} = 0. \qquad (52)$$

Начальные условия для (52) в соответствии с (9) и (51) примут вид

$$m(t)|_{t=0} = m_\varphi, \quad X(t)|_{t=0} = x_\varphi. \qquad (53)$$

Интегрируя уравнения (52), получим общее решение

$$m(t,\mathbf{C}) = ae^{at}(aC_1 + be^{at})^{-1}, \quad X(t,\mathbf{C}) = C_2, \qquad (54)$$

где $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ – произвольные постоянные интегрирования. Подчинив произвольные постоянные $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ начальным условиям (53), получим $\mathbf{C} = \mathbf{C}[\varphi] = (C_1[\varphi], C_2[\varphi])$, $C_1[\varphi] = (m_\varphi)^{-1} - ba^{-1}$, $C_2[\varphi] = x_\varphi$. Тогда из (54) следует

$$m(t,\mathbf{C}[\varphi]) \equiv \xi(t,m_\varphi) = am_\varphi e^{at}(a + bm_\varphi(e^{at} - 1))^{-1}, \quad X(t,\mathbf{C}[\varphi]) = x_\varphi. \qquad (55)$$

Ассоциированное линейное уравнение (19) для (50) принимает форму

$$[-\partial_t + D\partial_x^2 + a - bm(t,\mathbf{C})]v(x,t,\mathbf{C}) = 0. \tag{56}$$

Нетрудно проверить, что операторы

$$\hat{a}^{(\pm)}(t) = \pm(2D)^{-1/2}[(\mp 2t+1)D\partial_x \mp x] \tag{57}$$

коммутируют с оператором уравнения (56) и, таким образом, являются операторами симметрии этого уравнения.

Построим нелинейный оператор симметрии уравнения (50), следуя (32), выбрав в качестве начального условия (22) линейный оператор $(\hat{a}^{(+)}(0))^n$. Обозначим искомый нелинейный оператор через $\hat{A}_n(t)$, $\hat{A}_n(t)|_{t=0} = (\hat{a}^{(+)}(0))^n$.

Символ оператора $H(t,\mathbf{C},D)$ вида (36) для уравнения (56) представим в форме

$$H(t,\mathbf{C},D) = -p^2 + D(a - bm(t,\mathbf{C})). \tag{58}$$

С учетом (58) система (43)–(46) примет вид

$$\dot{\Phi}_0(t) = 0, \quad \dot{\Phi}_1(t) = -b[m(t,\mathbf{C}') - m(t,\mathbf{C})], \quad \dot{\pi}_1(t) = 2i\pi_2(t), \quad \dot{\pi}_2(t) = 0; \tag{59}$$

$$\dot{Q}_1(t) = 4iQ_2(t), \quad \dot{Q}_2(t) = 2iQ_3(t), \quad \dot{Q}_3(t) = 0, \tag{60}$$

где $\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t))^{\mathsf{T}}$; $Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2(t) & Q_3(t) \end{pmatrix}$. Обозначим

$$\mu(t,\mathbf{C}',\mathbf{C}) = \frac{m(t,\mathbf{C}')}{m(t,\mathbf{C})}\frac{m(0,\mathbf{C})}{m(0,\mathbf{C}')}, \tag{61}$$

очевидно, $\mu(0,\mathbf{C}',\mathbf{C}) = 1$. Тогда решение системы (59)–(60) с начальными условиями (42) можно записать как

$$\Phi_1(t) = \ln[\mu(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})], \quad \pi(t) = Q(t) = \Phi_0(t) = 0. \tag{62}$$

Из (41) следует выражение для символа фундаментального сплетающего оператора

$$\mathcal{D}(z,t,\mathbf{C}',\mathbf{C}) = \mu(t,\mathbf{C}',\mathbf{C}), \tag{63}$$

тогда соответствующий оператор $\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})$, с учетом (33) и (63), есть

$$\hat{\mathcal{D}}(t,\mathbf{C}',\mathbf{C}) = \mu(t,\mathbf{C}',\mathbf{C})\hat{\mathbb{I}}. \tag{64}$$

В соответствии с (32), (57) и (64) счетный набор нелинейных операторов симметрии $\hat{A}_n(t)$ уравнения (50), действующих на произвольное решение $u(x,t)$ с начальным условием (51), определяется соотношением

$$\hat{A}_n(u)(x,t) = \mu(t,\mathbf{C}[\varphi_n],\mathbf{C}[u(t)])(\hat{a}^{(+)}(t))^n u(x,t), \tag{65}$$

где $\varphi_n(x) = (\hat{a}^{(+)}(0))^n\varphi(x)$; $u(x,t) = v(x,t,\mathbf{C}[u(t)])$.

Отметим, что в операторы симметрии $\hat{A}_n(t)$ нелинейность входит через наборы констант $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$, так как они являются функционалами решения $u(x,t)$ и начального условия $\varphi_n(x)$ соответственно.

Перейдем к генерации решений уравнения (50) с помощью операторов симметрии (65). Начальное условие для уравнения (50) выберем в форме нормированного гауссова пакета

$$u(x,t)|_{t=0} = \gamma(x) \equiv \psi(2D,x) = (2\pi D)^{-1/2}\exp(-x^2(2D)^{-1}). \tag{66}$$

Начальные условия для системы (52) в соответствии с (9) и (66) получим в виде

$$m(t)|_{t=0} = m_\gamma = 1, \quad X(t)|_{t=0} = x_\gamma = 0. \tag{67}$$

Подчиним произвольные постоянные $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ начальным условиям (67). Тогда из (54) следует

$$m(t, \mathbf{C}[\gamma]) \equiv \xi(t, m_\gamma), \quad X(t, \mathbf{C}[\gamma]) = 0. \tag{68}$$

Обозначим $\sigma(t, D) = 2D(2t+1)$. Нетрудно проверить, что линейное уравнение (56) имеет частное решение [15]:

$$v_0(x, t, \mathbf{C}) = m(t, \mathbf{C})\psi(\sigma(t, D), x), \tag{69}$$

где $\psi(\sigma(t, D), x) = (\pi\sigma(t, D))^{-1/2}\exp[-x^2\sigma(t, D)^{-1}]$, согласно (66).

С помощью теоремы 3 по формуле (20) найдем частное решение нелинейного уравнения (50), соответствующее (69):

$$u_0(x, t) = v_0(x, t, \mathbf{C})\big|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[u_0(t)]} = \xi(t, m_\gamma)\psi(\sigma(t, D), x). \tag{70}$$

Построим счетный набор $u_n(x, t)$ решений уравнения (50) с начальным условием

$$u_n(x, t)\big|_{t=0} = \gamma_n(x), \quad \gamma_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{(+)}(0))^n\gamma(x), \tag{71}$$

где функция $\gamma(x)$ задана выражением (66). Из (66) и (71) следует

$$\gamma_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{D}}\right)\gamma(x), \tag{72}$$

где $H_n(x)$ – полином Эрмита порядка n [15]. В (72) четность функции $\gamma_n(x)$ совпадает с четностью числа n. Действительно, функция $\gamma(x)$ в (66) четная, а четность полинома Эрмита $H_n(x)$ совпадает с его порядком n [15]. В соответствии с (9) и (72) обозначим

$$m_n = m(t)\big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_n(x)dx, \quad x_n = X(t)\big|_{t=0} = \frac{1}{m_n}\int_{-\infty}^{+\infty}x\gamma_n(x)dx. \tag{73}$$

Из (54) для начальных условий (73) получим

$$m(t, \mathbf{C}[\gamma_n]) = \xi(t, m_n), \quad X(t, \mathbf{C}[\gamma_n]) = x_n, \tag{74}$$

где $\xi(t, m_n)$ определено выражением (55).

Подставив (72) в (73), для нечетных n, $n = 2k+1$, $k = 0, 1, \ldots$, получим $m_n = 0$, из (74) следует $m(t, \mathbf{C}[\gamma_n]) = 0$, а из (69) и (70) имеем $u_n(x, t) = 0$. Таким образом, для нечетных n решение уравнения (50) тривиально.

Аналогично для четных $n = 2k$ получим $m_n = \sqrt{n!}[\sqrt{2^n}(n/2)!]^{-1}$, $x_n = 0$. Построим для четных n счетный набор точных решений уравнения (50), действуя на частное решение (70) операторами $\hat{A}_n(t)$ вида (65). В результате получим

$$u_n(x, t) = \hat{A}_n(u_0)(x, t) = \left[\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{a + bm_\gamma(e^{at}-1)}{a + bm_n(e^{at}-1)}(\hat{a}^{(+)}(t))^n\right]\xi(t, m_\gamma)\psi(\sigma(t, D), x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\frac{\xi(t, m_n)}{m_n}\left[\frac{1-2t}{1+2t}\right]^{n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{D(1-4t^2)}}\right)\psi(\sigma(t, D), x). \tag{75}$$

При $t \to 1/2$ решение $u_n(x, t)$ вида (75) имеет предел равный

$$\lim_{t\to 1/2} u_n(x, t) = \frac{ae^{a/2}(n/2)!x^n}{2\sqrt{\pi D^{n+1}}[a2^{n/2}(n/2)! + b\sqrt{n!}(e^{a/2}-1)]}\exp\left(-\frac{x^2}{4D}\right). \tag{76}$$

Операторы симметрии $\hat{A}_n(t)$ являются обобщениями операторов «рождения», используемых в теории комплексного ростка Маслова, и при стремлении параметра нелинейности к нулю ($\varkappa \to 0$) переходят в них [11].

Заключение

В работе для нелокального уравнения ФКПП с квадратичным по координатам и производным оператором построен класс операторов симметрии специального вида. Решение задачи Коши для нелокального уравнения ФКПП получается из решения вспомогательного ассоциированного линейного уравнения и нелинейных алгебраических условий. Построенные операторы симметрии представляют собой композицию фундаментального сплетающего оператора и оператора симметрии ассоциированного линейного уравнения. В частном случае найден счетный набор операторов симметрии и счетный набор точных решений для одномерного нелокального уравнения ФКПП.

Полученные результаты необходимы для построения приближенных операторов симметрии уравнения ФКПП с неквадратичным оператором. Построенные операторы симметрии дают дополнительные возможности изучения симметрийных свойств нелокальных нелинейных уравнений, например исследование связи симметрий и операторов симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 339 с.
2. Olver P.J. Application of Lie Groups to Differential Equations. – N. Y.: Springer, 1986. – 544 p.
3. Bluman G.W., Cheviakov A.F., and Anco S. Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations. – N. Y.: Springer, 2010. – 398 p.
4. Fisher R.A. // Annu. Eugenics. – 1937. – V. 7. – P. 255–369.
5. Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.С. // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. – 1937. – Т. 1. – № 6. – С. 1–16.
6. Levchenko E.A., Shapovalov A.V., and Trifonov A.Yu. // J. Math. An. Appl. – 2012. – V. 395. – P. 716–726.
7. Fuentes M.A., Kuperman M.N., and Kenkre V.M. // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 91. – P. 158104–158108.
8. Da Cunha J.A.R., Penna A.L.A., Vainstein M.H., et al. // Phys. Lett. A. – 2009. – V. 373. – P. 661–667.
9. Kenkre V.M. // Physica A. – 2004. – V. 342. – P. 242–248.
10. Berestycki H. at el. // Nonlinearity. – 2009. – V. 22. – P. 2813–2844.
11. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука, 1973. – 544 с.
12. Карасев М.В., Маслов В.П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. – М.: Наука, 1991. – 368 с.
13. Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 9. – С. 14–23.
14. Буданов В.Г. // ТМФ. – 1984. – Т. 61. – № 3. – С. 347–363.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 296 с.

*Физико-технический институт Национального исследовательского
Томского политехнического университета, г. Томск, Россия
**Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия
E-mail: levchenkoea@tpu.ru; shpv@phys.tsu.ru

Поступила в редакцию 27.09.13.

Левченко Евгений Анатольевич, аспирант, ассистент каф. высшей математики и математической физики;
Трифонов Андрей Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. каф. высшей математики и математической физики;
Шаповалов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. каф. теоретической физики.