

УДК 539.3

Многоуровневый подход к определению эффективных свойств композита с учетом повреждаемости

Ю.В. Советова, Ю.Н. Сидоренко, В.А. Скрипняк

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, 634050, Россия

Исследование влияния процесса развития повреждений в композите со стохастической структурой на его механические свойства возможно в рамках численного моделирования поведения представительного объема материала, испытывающего воздействие некоторого пробного нагружения. При решении задачи предлагается использовать три уровня моделирования: уровень компонентов композита (микроуровень), уровень структуры армирования (мезоуровень) и уровень эффективных свойств (макроуровень).

Оценка макроскопической прочности проводится по результатам исследования процессов накопления повреждения по всей совокупности мезообъемов. Для этой цели предлагается использовать решение задачи о перколяции. Локальное состояние материала может характеризоваться одним из двух значений: «материал поврежден» или «материал не поврежден». На основе анализа расположения поврежденных мезообъемов в пределах представительного объема материала для каждого уровня нагружения формируются кластеры повреждений. В качестве критерия макроскопической прочности композита предлагается использовать условие образования в представительном объеме материала соединяющего кластера. Таким образом, изучение процесса накопления повреждений в представительном объеме композита сводится к анализу эволюции поля кластеров локальных повреждений вплоть до момента образования соединяющего кластера.

Ключевые слова: повреждаемость, многоуровневая модель, микрообъем, мезоуровень, порог перколяции, соединительный кластер

Multiscale approach to estimation of effective properties of a composite with regard to its damaging

Yu.V. Sovetova, Yu.N. Sidorenko, and V.A. Skripnyak

National Research Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia

The effect of damage evolution on the mechanical properties of a stochastically structured composite can be studied by numerically simulating the behavior of its representative volume under certain test loading. In solving the problem, it is proposed to use three levels of modeling: the level of composite components (microscale), the level of structural reinforcement (mesoscale), and the level of effective properties (macroscale).

The macroscopic strength is estimated from research results on damage accumulation within the whole range of mesovolumes. For this purpose, it is proposed to solve a percolation problem. The local state of material can be characterized by one of two conditions: the material is either damaged or not damaged. The arrangement of damaged mesovolumes within the material representative volume is analyzed to specify clusters of damages for each loading level. The formation condition of a joining cluster in the material representative volume is suggested as a macroscopic strength criterion of the composite. Thus, the study of damage accumulation in the composite representative volume is reduced to evolution analysis of the field of local damage clusters up to the point at which a joining cluster is formed.

Keywords: damages, multiscale model, microvolume, mesoscale, percolation threshold, joining cluster

1. Введение

Применение новых композиционных материалов в различных областях техники делает актуальной разработку математических моделей, позволяющих получать адекватные оценки механического поведения этих материалов. Растущие требования к надежности и безопас-

ности современной техники и сооружений обуславливают, среди прочего, актуальность задачи прогнозирования прочностных свойств композитов. Одним из перспективных путей получения оценок прочностных свойств композитов является развитие численных методов моделирования процесса разрушения композитов.

В случае конструкций, работающих в условиях статического нагружения, в процессе разрушения композитов можно выделить несколько этапов. На начальном этапе происходят зарождение и накопление повреждений; наиболее активно эти процессы развиваются в зонах повышенной концентрации напряжений. На следующем этапе происходит слияние отдельных зон накопления повреждений с образованием достаточно протяженных, но все еще локализованных участков поврежденного материала (кластеров повреждений). На последнем этапе, когда доля объема поврежденного материала достигает некоторого критического значения, процесс разрушения приобретает макроскопический характер и сопровождается общим разрушением материала.

Таким образом, при решении задачи прогнозирования прочности композита особое значение приобретают, во-первых, оценка условий, при которых начинается процесс активного накопления повреждений на начальном этапе разрушения, а во-вторых, оценка условий, при которых происходит переход от локализованного накопления повреждений к макроскопическому разрушению материала. Определение этих условий позволяет выделить три основных состояния композиционного материала, которые условно можно назвать исходным (неповрежденным), поврежденным и разрушенным. С некоторой долей условности можно полагать, что в исходном состоянии материал не имеет существенных дефектов, в поврежденном состоянии наличие дефектов проявляется в снижении механических характеристик материала, в разрушенном состоянии материал считается исчерпавшим свои несущие способности.

Использование методов компьютерного моделирования позволяет решить задачу оценки прочностных свойств композита в условиях возрастания внешних нагрузок с привлечением тех или иных критериев (теорий) прочности [1], однако существенную сложность при этом представляет собой необходимость учета стохастического характера структуры армирования реальных материалов. Наличие стохастической структуры армирования приводит к тому, что поле концентраторов напряжений в композите также является стохастическим. Как следствие, процесс накопления повреждений имеет очаговый характер, при этом в условиях возрастания внешней нагрузки зоны накопления повреждений могут появляться неодновременно, а накопление повреждений в них может идти с разной интенсивностью.

В рамках предлагаемого подхода к решению задачи прогнозирования прочностных свойств композитов полагается, что каждому этапу процесса разрушения материала может быть сопоставлен некоторый объем, в котором этот процесс развивается. Начальный этап процесса разрушения композита локализован в зонах высокой концентрации напряжений. На этом этапе могут проис-

ходить частичное разрушение отдельных элементов структуры композита, отслоение матрицы от армирующих элементов и другие подобные процессы. В случае композиционных материалов существенную роль в формировании поля концентраторов напряжений играет структура, образованная армирующими элементами [2]. Полагая справедливым принцип локальности формирования механических свойств композитов [3], можно утверждать, что характеристики параметров напряженно-деформированного состояния композита полностью определяются особенностями локальной конфигурации элементов армирования в сравнительно небольших объемах материала. Следовательно, именно такие объемы композита, линейные размеры которых сравнимы с размерами типичных элементов структуры армирования материала, должны использоваться для оценки условий начала развития процесса накопления повреждений.

С другой стороны, корректная оценка эффективных механических свойств композита в процессе возникновения и развития зон накопления повреждений возможна только по результатам анализа макроскопически представительного объема материала с учетом наличия в нем множественных поврежденных фрагментов. Линейные размеры такого объема, очевидно, должны быть существенно больше размеров типичных элементов структуры армирования композита.

Учитывая значительную разницу в размерах объемов композита, «отвечающих» за различные этапы развития процесса накопления повреждений и разрушения, моделирование процесса накопления повреждений и разрушения композита предлагается проводить в рамках многоуровневых представлений об условиях формирования механических свойств материалов [4, 5].

В соответствии с этим рассматриваются три уровня проявления свойств композита: уровень компонентов композита (микроуровень), уровень структуры армирования (мезоуровень) и уровень эффективных свойств (макроуровень). Каждому уровню ставятся в соответствие объемы композита, имеющие характерные для данного уровня размеры. Принимая в качестве единицы измерения величину, характеризующую типичный линейный размер элементов структуры армирования композита L_0 (например диаметр армирующих элементов, среднюю толщину прослоек матричного материала и т.п.), в качестве характерных линейных размеров моделируемых объемов L_i можно указать следующие: микроуровень — $L_1 = (10^{-2} \div 10^{-1})L_0$, мезоуровень — $L_2 = (10^0 \div 10^2)L_0$, макроуровень — $L_3 > 10^2 L_0$.

2. Многоуровневый подход к моделированию накопления повреждений

При решении задачи прогнозирования механического поведения стохастического композита в условиях накопления повреждений для каждого структурного

уровня реализуется собственный подход к описанию (моделированию) соответствующего этому уровню объема материала и вводятся свои правила определения характерных для этого уровня механических свойств.

На макроуровне рассматривается объем композита, включающий в себя достаточно большое количество элементов структуры армирования, обеспечивающее такому объему свойство представительности. Размеры представительного объема выбираются исходя из требования обеспечения статистической надежности определения основных геометрических параметров структуры армирования. Способы получения оценок размеров объемов основаны на положениях стереологии и рассматриваются, например, в работах [6, 7].

В рамках предлагаемого подхода представительный объем стохастического композита описывается имитационной геометрической моделью. Геометрическая модель формируется в результате решения задачи о размещении объектов, имитирующих армирующие элементы, в пределах представительного объема материала. Использование геометрической модели позволяет описать как геометрию армирующих элементов композита, так и их взаимное расположение в пределах представительного объема.

В соответствии с теорией эффективных свойств представительному объему композита сопоставляется равный ему по величине объем квазиоднородного материала (тело сравнения). Полагается, что механические свойства тела сравнения представляют собой случайные функции координат. Свойства тела сравнения (эффективные свойства) определяются по результатам статистического анализа репрезентативной выборки его локальных свойств. Выборка точек, в которых определяются локальные свойства, формируется с использованием генераторов случайных чисел, что обеспечивает равномерное распределение этих точек по всему телу сравнения. Каждой точке тела сравнения сопоставляется фрагмент представительного объема композита, расположение которого в пределах представительного объема материала соответствует расположению выбранной точки в пределах тела сравнения. Локальные свойства тела сравнения в каждой конкретной точке определяются как свойства, характеризующие поведение соответствующего фрагмента представительного объема композита в условиях заданного внешнего воздействия.

Поскольку фрагменты представительного объема композита сами по себе не обладают свойством представительности, характер их отклика на внешнее воздействие будет зависеть от величины этих фрагментов и конфигурации армирующих элементов в пределах их объемов. В таких условиях необходимо введение некоторого критерия выбора размеров фрагментов представительного объема композита, обеспечивающих корректность процедуры определения его локальных свойств. Фраг-

менты представительного объема композита, удовлетворяющие такому критерию, в рамках данной работы рассматриваются в качестве объемов, отвечающих за формирование локальных свойств материала на мезоуровне — мезообъемов. Методика оценки линейных размеров таких объемов, основанная на принципе локальности формирования механических свойств композитов, изложена в работе [8].

Таким образом, в качестве мезообъема композита рассматривается фрагмент его представительного объема, в состав которого включается малое количество структурных элементов, расположенных в непосредственной окрестности соответствующей точки тела сравнения. В качестве источника информации об особенностях конфигурации структурных элементов в пределах каждого мезообъема используется геометрическая модель представительного объема композита. Для имитации условий нагружения, реализующихся внутри представительного объема композита, мезообъем погружается в среду, механические свойства которой эквивалентны локальным свойствам тела сравнения в данной точке. Поскольку эти свойства заранее неизвестны, они определяются в процессе итерационного уточнения свойств мезообъема.

С другой стороны, мезообъем рассматривается как совокупность микрообъемов материала, одна часть которых обладает механическими свойствами матрицы композита, а другая — свойствами армирующих элементов. Между микрообъемами разных типов имеются явные границы раздела, совокупность которых образует собственно границы раздела фаз композита в пределах мезообъема. Размеры микрообъемов выбираются такими, чтобы в их пределах параметры напряженно-деформированного состояния компонента композита менялись не слишком быстро.

Последнее условие позволяет рассматривать микрообъемы в качестве элементарных объектов, для которых в рамках предлагаемого подхода может быть зафиксирован переход из исходного неповрежденного состояния в поврежденное. Для оценки состояния микрообъемов используется критерий прочности Цая–Ву [9]

$$F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \geq 1, \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; коэффициенты F_{ij} и F_{ijkl} вычисляются по значениям пределов прочности компонентов материала при одноосном растяжении и сжатии, а также их сдвиговой прочности [10].

Компоненты тензора напряжений, необходимые для вычисления величины критерия Цая–Ву, вычисляются в результате численного решения задачи о напряженно-деформированном состоянии мезообъема композита, находящегося в условиях заданного статического внешнего нагружения. В качестве предельных значений напряжений, а также характеристик механических свойств микрообъемов используются соответствующие значе-

ния, полученные в результате макроиспытаний образцов, изготовленных из материала компонентов композита. В рассматриваемом подходе выполнение критерия прочности Цая–Ву для микрообъема рассматривается лишь как признак начала (либо развития) процесса накопления повреждений в мезообъеме, включающем в себя данный микрообъем.

Для учета влияния повреждений на механические свойства мезообъема вводятся параметры повреждаемости компонент вида

$$\Pi_k = V_k^* / V_k, \quad (2)$$

где V_k — удельный объем k -го компонента материала в составе мезообъема; V_k^* — удельный объем k -го компонента, для которого выполняется критерий Цая–Ву (1). Параметр повреждаемости (2) позволяет для каждого из компонентов рассчитать текущее значение модуля упругости компонента E_k с учетом повреждений, накопленных компонентом:

$$E_k = E_k^0 (1 - \Pi_k), \quad (3)$$

где E_k^0 — модуль упругости k -го компонента в отсутствие повреждений.

Полагается, что для оценки прочности отдельного мезообъема применима модель «слабейшего звена», в соответствии с которой мезообъем сохраняет свою несущую способность до тех пор, пока для каждого из его компонентов выполняется условие

$$\Pi_k < \Pi_k^{\max}, \quad (4)$$

где Π_k^{\max} — предельно допустимый удельный объем повреждений в k -м компоненте композита, величина которого должна задаваться с учетом как физических соображений, так и требований к устойчивости вычислительного метода. Нарушение условия (4) рассматривается как признак локального разрушения композита.

Учитывая наличие физической нелинейности, связанной с влиянием повреждений на упругие свойства компонентов, задача определения параметров напряженно-деформированного состояния мезообъема решается методом пошагового нагружения. В рамках каждого шага по нагрузке полагаются справедливыми уравнения теории малых деформаций. Система уравнений включает в себя уравнения равновесия

$$\nabla_j \sigma_{ij} = 0,$$

уравнения Коши

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i}),$$

уравнения состояния

$$\sigma_{ij}^{(k)} = f^{(k)}(\varepsilon_{ij}^{(k)}, \Pi), \quad (5)$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; U_i, U_j — компоненты вектора перемещений, индекс k обозначает номер компонента композита. Граничные условия выбираются в соответствии с моделируемым способом нагружения композита.

Сформулированная задача решается методом конечных элементов для каждого мезообъема в составе выборки, формируемой для определения эффективных свойств. В рамках численной реализации излагаемого подхода конечные элементы отождествляются с микрообъемами композита, что накладывает определенные требования на качество построения конечно-элементных моделей мезообъемов.

Локальные свойства в некоторой точке тела сравнения на каждом шаге по нагрузке определяются как эффективные свойства соответствующего этой точке мезообъема. В частности, локальные значения упругих модулей C_{ijkl} находятся из соотношения, связывающего усредненные по мезообъему компоненты тензоров напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\bar{\varepsilon}_{kl}$:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}, \quad (6)$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV,$$

V — величина мезообъема. Также на каждом шаге нагружения для мезообъема контролируется выполнение условия локального разрушения (4).

Репрезентативность выборки мезообъемов оценивается по характеристикам распределения локальных значений модуля упругости композита по соотношению [11]

$$N = (t_{\infty} S / \Delta)^2, \quad (7)$$

где N — объем выборки; t_{∞} — коэффициент Стьюдента для заданного значения доверительной вероятности; S — среднеквадратичное выборочное отклонение; Δ — допустимая погрешность определения выборочного среднего. На каждом шаге по нагрузке по совокупности результатов, полученных для выборки мезообъемов, вычисляются основные статистические параметры (параметры распределений) моделируемых характеристик композита, которые и являются оценками его эффективных свойств.

Особую важность представляет собой вопрос перехода от анализа локальной поврежденности композита к оценке его макроскопической прочности. Для этой цели предлагается использовать решение задачи о перколяции [12]. Согласно представлениям теории перколяции, объединение нескольких однородных элементов, принадлежащих одной системе, которое может рассматриваться как самостоятельная единица в составе системы, обладающая свойствами, отличными от свойств остальных элементов системы, называется кластером. Кластер, в состав которого входят элементы, принадлежащие противоположным границам системы, называется бесконечным или соединяющим, а совокупность условий, при которых он возникает, — порогом перколяции. Преодоление порога перколяции, как правило, служит признаком качественного изменения состояния системы.

В рамках предлагаемого подхода при анализе условий перехода материала от стадии накопления повреждений к макроскопическому разрушению рассматриваются кластеры, элементами которых являются мезообъемы материала, утратившие свою несущую способность. Образование соединяющего кластера таких мезообъемов интерпретируется как признак начала макроскопического разрушения представительного объема композита.

Решение задачи об определении условий начала макроскопического разрушения композита сводится к построению и анализу поля кластеров повреждений в пределах представительного объема материала в процессе возрастания нагрузок. При решении данной задачи на множестве точек тела сравнения, для которых определены локальные свойства, строится триангуляционный граф. Для каждого узла этого графа в результате решения задачи о нагружении соответствующего мезообъема композита для каждого уровня внешних нагрузок определяется характеристика его состояния («разрушен» или «не разрушен»). На основании информации о состоянии всех узлов графа на каждом уровне

нагружения строится поле кластеров «поврежденных» точек в пределах тела сравнения.

Анализ конфигурации поля кластеров повреждений в процессе его эволюции по мере возрастания внешних нагрузок позволяет определить величину нагрузки, при которой в теле сравнения образуется соединяющий кластер повреждений. Данная величина нагрузки для моделируемого представительного объема композита принимается в качестве предельной.

3. Реализация многоуровневого подхода к определению механических характеристик стохастически армированного композита

В качестве примера практического применения изложенного подхода ниже представлены результаты определения эффективных упругих и предельных механических характеристик модельного волокнистого однонаправленного композиционного материала. Механические свойства компонентов композита соответствуют эпоксидной смоле (матрица) и стекловолокнам (включения). Пределы прочности матрицы и включений соответственно равны $\sigma_m = 100$ МПа, $\sigma_i = 450$ МПа, модуль

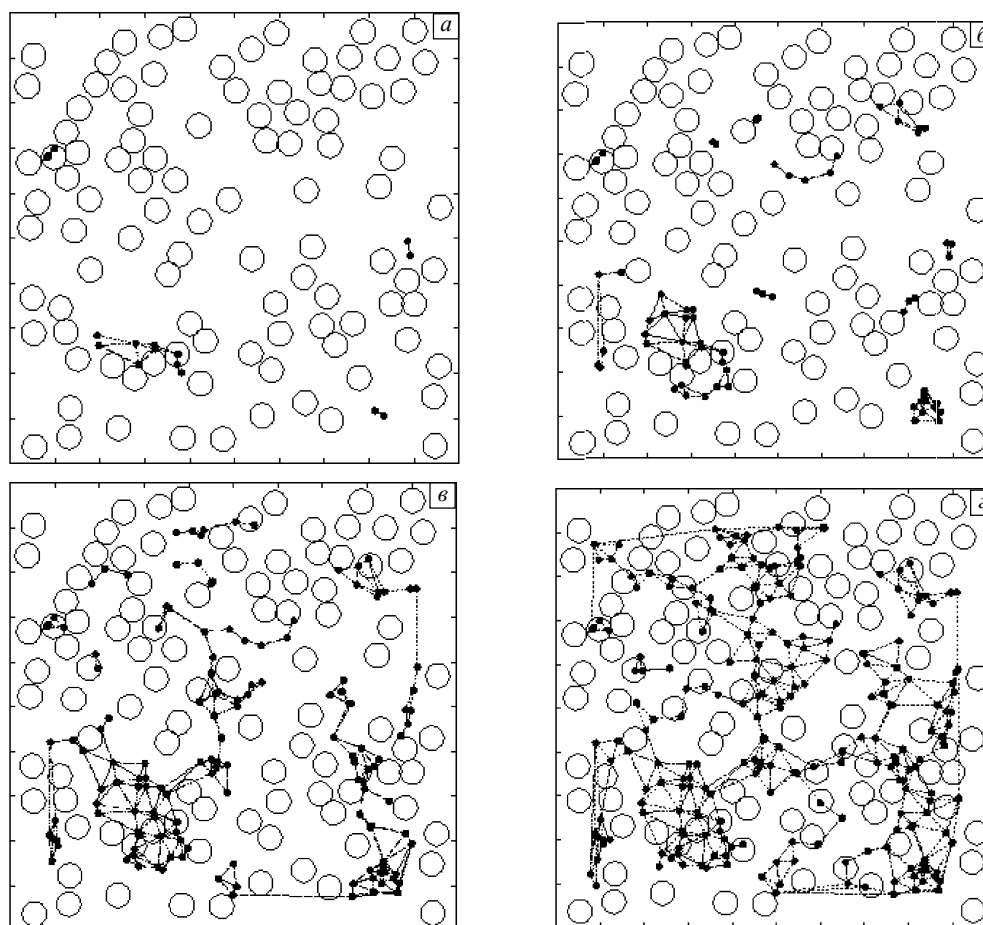


Рис. 1. Развитие кластеров повреждений: $\varepsilon_1 = 2.9$ (а), 3.0 (б), 3.1 (в), 3.2 % (г)

ли упругости $E_m = 3.4$ ГПа, $E_i = 85.0$ ГПа и коэффициенты Пуассона $\nu_m = 0.30$, $\nu_i = 0.25$.

Диаметр включений принят равным 50 мкм, объемное содержание включений в составе композита — 20 %. Рассматривается случай нагружения материала по нормали к направлению армирования. Задача решается в двумерной постановке. Двумерная геометрическая модель композита размерами 990×990 мкм включала в себя 100 включений, размещенных случайным образом (рис. 1).

Для контроля представительности результатов расчета моделирования локальных свойств композита рассматривались пять выборок, содержащих соответственно 50, 100, 200, 300, 400, 500 точек. На рис. 2 показаны средние значения и доверительные интервалы (с доверительной вероятностью 95 %) предельных значений эффективного главного напряжения σ_1 , макроскопической деформации ϵ_1 и эффективного модуля Юнга E модельного композита, полученные на разных выборках. Видно, что для выборок с объемом элементов более 200 средние значения показанных характеристик практически совпадают. Доверительные интервалы с увеличением объема выборок постоянно сужаются, что говорит о возрастании степени однородности локальных характеристик композита. Представленные на рисунках результаты подтверждают пригодность методики для

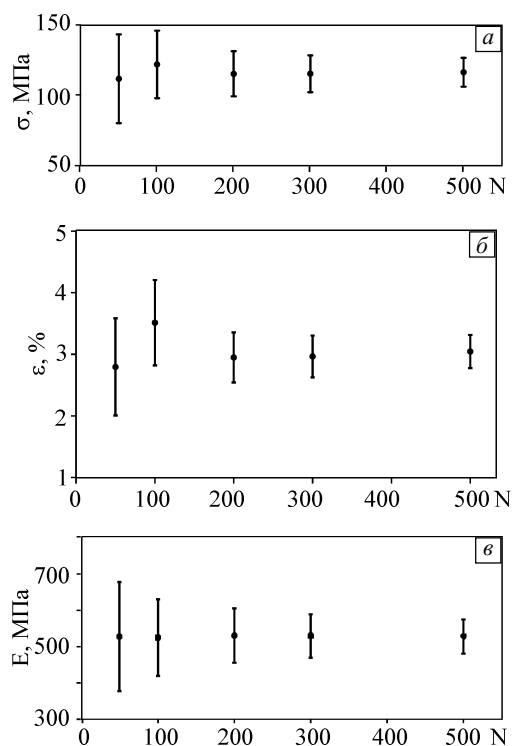


Рис. 2. Средние значения и доверительные интервалы локальных характеристик модельного композита в зависимости от объема выборки: главного напряжения σ_1 (а), деформации ϵ_1 (б), модуля Юнга E (е)

надежного определения характеристик модельного композита и позволяют оценить необходимый для этого минимальный объем выборки точек.

На рис. 1 показана эволюция кластеров повреждений в представительном объеме композита по мере роста макроскопической деформации. Представленные результаты получены на выборке, включающей 300 точек. Согласно представленным выше результатам такой объем достаточен для обеспечения представительности. Узлы кластерной решетки, в которых не выполнен критерий поврежденности (4), на рисунке не показаны. Конфигурация соединительного кластера, образовавшегося при значении макроскопической деформации $\epsilon = 3.2$ %, представлена на рис. 1, з.

Как видно по результатам, представленным на рис. 1, повреждения практически вплоть до образования соединяющего кластера (макроразрушения) локализируются преимущественно в матрице композита.

Отмеченная особенность развития процесса повреждений подтверждается данными, представленными на рис. 3. На рисунке показаны зависимости параметров поврежденности компонентов композита от макроскопической деформации. Кривая 1 соответствует поврежденности матрицы, кривая 2 — поврежденности армирующих волокон в пределах представительного объема материала. Вертикальная прямая соответствует значению макроскопической деформации, при котором возникает соединяющий кластер повреждений.

Как видно из представленных на рис. 1, 3 результатов, на начальном этапе накопления повреждений может иметь место разрушение отдельных армирующих элементов, вслед за которым происходит быстрое нарастание объема повреждений в матрице.

Как показали проведенные исследования, такой характер развития процесса накопления повреждений в представительном объеме композита не зависит от объема выборки и, следовательно, является характерной особенностью моделируемого материала.

На рис. 4 показана эффективная диаграмма деформирования модельного композита, построенная по ре-

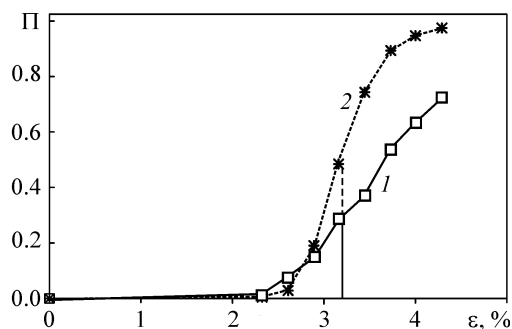


Рис. 3. Зависимость параметров поврежденности матрицы (1) и армирующих волокон (2) композита от макроскопической деформации

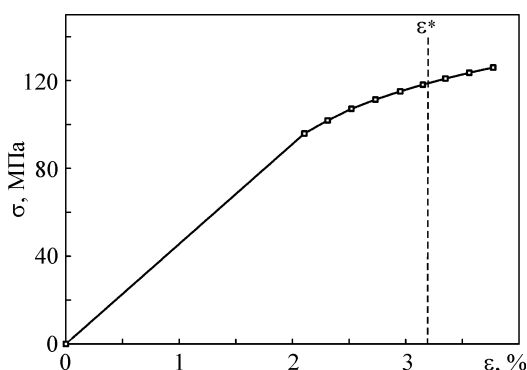


Рис. 4. Кривая деформирования модельного композита и предельные значения макроскопической деформации и главного напряжения

зультатам осреднения представительной выборки локальных свойств. Прямолинейный участок диаграммы деформирования соответствует этапу нагружения, на котором отсутствуют повреждения на мезоуровне. Видно, что по мере увеличения деформации накопление повреждений в материале приводит к снижению эффективного модуля упругости, диаграмма при этом становится более пологой. На рисунке также отмечено предельное значение макроскопической деформации, соответствующее моменту образования в представительном объеме материала соединяющего кластера повреждений. Качественно вид полученной диаграммы деформирования соответствует известным экспериментальным результатам.

4. Заключение

Предложен подход к численному моделированию поведения стохастически армированных композитов, основанный на использовании представлений о многоуровневом характере процессов, сопровождающих деформирование материалов. Оценка макроскопической прочности проводится на основе представлений теории перколяции, при этом за критерий макроразрушения

принимается момент появления соединяющего кластера повреждений. Предложенный подход к моделированию процесса накопления повреждений в композите позволяет рассчитать эффективные упругие свойства материала, оценить значения предельных механических характеристик, а также исследовать особенности развития процесса накопления повреждений с учетом реальной структуры армирования композита. Указанные возможности делают предложенный подход весьма актуальным при решении прикладных инженерных задач, связанных с созданием новых композиционных материалов. Эффективность предложенного подхода показана на примере решения задачи об определении эффективных предельных свойств модельного стохастического композита.

Литература

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М: Наука, 1979. – 560 с.
2. Победра Б.Е. Принципы вычислительной механики композитов // Механика композиционных материалов. – 1996. – № 6. – С. 729–746.
3. Ташинов А.А. Исследование статистических задач механики структурно-неоднородных сред на основе принципа локальности: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МГТУ им. Баумана, 1981. – 10 с.
4. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.
5. Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Панин А.В. Физическая мезомеханика деформируемого твердого тела как многоуровневой системы // Физ. мезомех. – 2006. – Т. 9. – № 3. – С. 9–22.
6. Howard C.V., Reed M. Unbiased Stereology: Three-Dimensional Measurement in Microscopy. – Oxon, UK: Garland Science, 2005. – 277 p.
7. Jensen E. Local Stereology. – Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd., 1998. – 247 p.
8. Сидоренко Ю.Н. Прогнозирование механических свойств стохастических композиционных материалов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск: ТГУ, 2004. – 142 с.
9. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. Т. 2. – М.: Мир, 1978. – 566 с.
10. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
11. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М: Юнити-Дана, 2004. – 573 с.
12. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. – М.: Едиториал УРРС, 2002. – 112 с.

Поступила в редакцию 10.06.2012 г.,
после переработки 19.08.2013 г.

Сведения об авторах

Советова Юлия Валерьевна, асп. ТГУ, kasy@sibmail.com

Сидоренко Юрий Николаевич, к.ф.-м.н., доц. ТГУ, sid@strelka.ftf2.tsu.ru

Скрипняк Владимир Альбертович, д.ф.-м.н., проф., зав. каф. ТГУ, skrp2006@yandex.ru