ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики

«Утверждаю»
Декан ММФ
В.Н. Берцун
18 декабря 2013 г.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методическая разработка

Томск
2013

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики
Зав. кафедрой, профессор Е.Н. Путятина

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией ММФ
Протокол № 12 от 16 декабря 2013 г.
Председатель комиссии О.П. Федорова

В методической разработке изложена теоретическая часть занятий по теме «Неопределенный интеграл» и предложены разнообразные задачи.

Для студентов физического, физико-технического, радиофизического факультетов дневной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛЬ

доцент Е.Н. Путятина

§ 1. Определение неопределённого интеграла

Рассмотрим задачу о восстановлении функции по заданной производной этой функции. К числу таких задач относятся известные задачи механики об определении закона движения материальной точки по её скорости, а также установление закона движения и скорости материальной точке по её ускорению.

<u>Определение 1.</u> Функция $F(x)$ называется первообразной функцией (или просто первообразной) для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если функция $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x)=f(x)$.

В данном определении a и b могут быть как конечными, так и бесконечными. Например, функция $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ является первообразной для $f(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ на $(-1,1)$, а функция $F(x)=\operatorname{arctg} x$ является первообразной для $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ на $(-\infty,+\infty)$.

Очевидно, что первообразная $F(x)$ для данной функции $f(x)$ определяется не единственным образом: функция $F(x)+C$, где $C=const$, также является первообразной. Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ − любые первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то всюду на этом интервале $F_1(x)-F_2(x)=C$, где C − некоторая постоянная.

Таким образом, если $F(x)$ − одна из первообразных для функции $f(x)$, то любая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ имеет вид $\Phi(x)=F(x)+C$.

<u>Определение 2.</u> Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на (a,b) и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ – какая-либо из первообразных для функции $f(x)$ на (a,b), то согласно теореме 1 $\int f(x)dx=F(x)+C$, C − произвольная постоянная. Следовательно, любое равенство, содержащее неопределённые интегралы, является равенством между множествами.

<u>Теорема 2.</u> Всякая непрерывная на (a,b) функция имеет первообразную.

Основные свойства неопределённого интеграла

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где k – некоторая постоянная.

Свойства 1–2 говорят о том, что знаки d и $\int$, следующие друг за другом, взаимно уничтожаются. Свойства 3-4 называются свойствами линейности неопределённого интеграла. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ предполагается существование первообразных.

Операция нахождения неопределённого интеграла от данной функции, называемая операцией интегрирования, является обратной операции дифференцирования. Поэтому всякая формула для производной конкретной функции $F'(x) = f(x)$ может быть обращена: $\int f(x)dx = F(x) + C$. Таким путём из таблицы основных производных может быть получена таблица основных интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad \mu \neq -1$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$ **8a.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C. \end{cases}$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$ **9a.** $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C. \end{cases}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$.

10a. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

11. $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln\left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$. **11a.** $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

15. $\int \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Формулы 1–9, 12–15 являются непосредственным обращением таблицы основных производных, формулы 10, 11 могут быть легко установлены посредством дифференцирования, формулы 8а, 9а, 10а, 11а будут получены в примерах 8–11 как следствие формул 8–11 соответственно.

Примеры 1–6 решены с использованием таблицы интегралов и основных свойств неопределённого интеграла.

Пример 1. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx = \int x^{3/4} dx - \int \frac{dx}{x^{5/4}} = \frac{4}{7} x^{7/4} + \frac{4}{x^{1/4}} + C$.

Пример 2. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\left(x^2 + x^{-2}\right)^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx =$

$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^5} = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$.

Пример 3. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx = \int \frac{\left(x^2 - 1\right) + 4}{x^2 - 1} dx =$

$= \int dx + 4\int \frac{dx}{x^2 - 1} = x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

Пример 4.

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \left(e^{2x} - e^x + 1\right) dx = \frac{1}{2}\int e^{2x} d\left(2x\right) - \int e^x dx + \int dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C .$$

Пример 5. $\int \mathrm{tg}^2\, x dx = \int \frac{\left(1 - \cos^2 x\right)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$

Первообразная $F\left(x\right)$ для функции $f\left(x\right)$ на $\left(a, b\right)$, являясь дифференцируемой на данном промежутке, должна быть непрерывной функцией, поэтому при отыскании неопределённого интеграла это необходимо учитывать.

Пример 6.

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} dx = \int \sqrt{\left(\sin x - \cos x\right)^2} dx =$$

$$= \int \left|\sin x - \cos x\right| dx = \begin{cases} \sin x + \cos x + C_0, & \frac{\pi}{4} - \pi \le x < \frac{\pi}{4}, \\ -\sin x - \cos x + C_1, & \frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{4} + \pi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\ \left(-1\right)^n \left(\sin x + \cos x\right) + C_n, & \frac{\pi}{4} + \pi\left(n-1\right) \le x < \frac{\pi}{4} + \pi n. \end{cases}$$

Обозначим $I = \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$. Первообразная данной функции должна быть непрерывной, поэтому $I\left(\frac{\pi}{4} + \pi n - 0\right) = I\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, следовательно, $I\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+\pi n-0}(-1)^n(\sin x+\cos x)$, т.е. $-\sqrt{2}+C_{n+1}=\sqrt{2}+C_n$. Если $n=0$, то $C_1=2\sqrt{2}+C_0$, при $n=2$ получаем $C_2=2\cdot 2\sqrt{2}+C_0$, поэтому, следуя методу математической индукции, находим, что $C_n=2\sqrt{2}n+C_0$. Для выражения n через x воспользуемся неравенством $\frac{\pi}{4}+\pi(n-1)\le x<\frac{\pi}{4}+\pi n$. Приведя его к виду $n\le\frac{x-\frac{\pi}{4}+\pi}{\pi}<n+1$, получим, что $n=\left[\frac{x-\frac{\pi}{4}+\pi}{\pi}\right]$.

Таким образом, окончательно имеем

$$\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=(-1)^{\left[\frac{x-\pi/4+\pi}{\pi}\right]}(\sin x+\cos x)+2\sqrt{2}\left[\frac{x-\frac{\pi}{4}+\pi}{\pi}\right]+C .$$

Основными методами интегрирования являются метод замены переменной и метод интегрирования по частям. Рассмотрим их.

§ 2. Интегрирование методом замены переменной

Теорема 3. Пусть на некотором промежутке определена сложная функция $f(\varphi(t))$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема во всех его внутренних точках. Тогда если существует интеграл $\int f(x)dx=F(x)+C$, то существует и интеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, причём имеет место равенство

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}=F(\varphi(t))+C. \quad (1)$$

Данная формула называется формулой интегрирования подстановкой. Она показывает, что таблица интегралов справедлива независимо от того, является переменная интегрирования независимой переменной или функцией. Для её успешного применения в подинтегральном выражении нужно увидеть производную $\varphi'(t)$ функции $\varphi(t)$, которая должна быть подведена под знак дифференциала.

В примерах 7–23 первообразная может быть легко найдена с использованием метода подведения под знак дифференциала и таблицы основных интегралов.

Пример 7. $\int \sqrt[3]{1-3x}dx = -\frac{1}{3}\int \sqrt[3]{1-3x}d\left(1-3x\right) = -\frac{1}{4}\left(1-3x\right)^{4/3} + C$.

Пример 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $a > 0$.

Пример 9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

Пример 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right| + C^* =$

$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, $a > 0$.

Пример 11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\frac{x}{a} - 1}{\frac{x}{a} + 1}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Пример 12. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{1+x^3}d\left(1+x^3\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^4 + C$.

Пример 13. $\int \frac{xdx}{5-3x^2} = -\frac{1}{6}\int \frac{d\left(5-3x^2\right)}{5-3x^2} = -\frac{1}{6}\ln\left|5-3x^2\right| + C$.

Пример 14. $\int \frac{x^2dx}{9+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{3^2 + \left(x^3\right)^2} = \frac{1}{9}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{3} + C$.

Пример 15. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{d\left(e^x\right)}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \arcsin e^x + C$.

Пример 16. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x+1}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{\sin^2 x+1}} = \ln\left(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+1}\right)+C$.

Пример 17. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx = \int \sqrt[3]{\ln x}d(\ln x) = \frac{3}{4}(\ln x)^{4/3}+C$.

Пример 18. $\int \frac{2\operatorname{ctg} x-\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx = -\int\left(2\operatorname{ctg} x-\sqrt{\operatorname{ctg} x}\right)d(\operatorname{ctg} x)=$

$=-\int 2\operatorname{ctg} x d(\operatorname{ctg} x)+\int \sqrt{\operatorname{ctg} x}d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg}^2 x+\frac{2}{3}(\operatorname{ctg} x)^{3/2}+C$.

Пример 19. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int \frac{d(\operatorname{th} x)}{\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = 3\sqrt[3]{\operatorname{th} x}+C$.

Пример 20. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arctg} x)^2\left(1+x^2\right)} = \int \frac{d(\operatorname{arctg} x)}{(\operatorname{arctg} x)^2} = -\frac{1}{\operatorname{arctg} x}+C$.

Пример 21. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)(1+\arcsin x)}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\sqrt{1+\arcsin x}} =$

$= \int \frac{d(1+\arcsin x)}{\sqrt{1+\arcsin x}} = 2\sqrt{1+\arcsin x}+C$.

Пример 22. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} =$

$= \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C\cdot$

Пример 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$. Подинтегральная функция определена при $x(1+x)>0$, т.е. при $x>0$ и при $x<-1$. Поэтому для $x>0$ получим $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\int \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}} = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+C$, а для $x<-1$ в силу равенства $\sqrt{x(1+x)} = \sqrt{-x}\cdot\sqrt{-1-x}$ будем иметь:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = -2\int \frac{d\left(\sqrt{-1-x}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{-1-x}\right)^2}} = -2\ln\left(\sqrt{-1-x}+\sqrt{-x}\right)+C .$$

Полученные решения могут быть объединены:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\operatorname{sgn} x \ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|}\right)+C .$$

более сложных случаях формулу (1) необходимо использовать в обратном порядке, т.е. справа налево:

$$\int f(x)\,dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} . \qquad (2)$$

Делая замену переменной $x=\varphi(t)$, мы сводим вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ к нахождению интеграла $\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$. Формула (2) называется формулой интегрирования заменой переменной. Из неё следует, что для функции $x=\varphi(t)$ на рассматриваемом промежутке существует обратная функция $t=\varphi^{-1}(x)$. В параграфах 5 и 6 этот метод интегрирования будет рассмотрен подробно.

§ 3. Метод интегрирования по частям

Теорема 4. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и интеграл $\int v\,du$ существует, то существует и интеграл $\int u\,dv$, причём

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du . \qquad (3)$$

Формула (3) называется формулой интегрирования по частям. Она эффективна в том случае, когда подынтегральное выражение удаётся представить в виде произведения u и dv так, что интегрирование выражений dv и vdu является задачей более простой, чем интегрирование исходного выражения.

Метод интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной, но есть целые классы интегралов, которые находятся этим методом, причём часто правило (3) приходится применять повторно. Интегралы вида $\int P_n(x)\,g(x)\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, а $g(x)$ – одна из функций e^{ax}, $\sin bx$, $\cos bx$, $\ln x$, $\arcsin bx$, $\operatorname{arctg} bx$, $a,b \in \mathbb{R}$, вычисляются интегрированием по частям.

Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

Пример 24. $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Положим $u = x,\ dv = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = -\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}$, тогда $du = dx,\ v = \frac{1}{\cos x}$ и

$$\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{x}{\cos x} - \int \frac{d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{x}{\cos x} - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Пример 25. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

Положим $u = \arcsin x,\ dv = \frac{dx}{x^2}$, тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\frac{1}{x}$ и $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. К интегралу $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ применим метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \int \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = -\int \frac{\operatorname{sgn} x d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} =$$

$$= -\operatorname{sgn} x \ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|.$$

Для исходного интеграла окончательно получим

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{\arcsin x}{x} - \operatorname{sgn} x \ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right| + C .$$

Пример 26. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$. Положим $u = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $dv = dx$, $du = \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{1+x}$, $v = x$, тогда

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{xd\left(\sqrt{x}\right)}{x+1} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{\left(\left(x+1\right)-1\right)d\left(\sqrt{x}\right)}{x+1} =$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int d\left(\sqrt{x}\right) + \int \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \left(x+1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C .$$

Пример 27. $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$. Пусть $u = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $dv = xdx$, тогда $du = \frac{-dx}{x\left(1+x\right)}$, $v = \frac{x^2}{2}$ и $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{x}{x+1}dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{\left(x+1\right)-1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|1+x\right|+C .$$

Пример 28. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x dx}{e^x}$. Положим $u = \operatorname{arctg} e^x$, $dv = e^{-x}dx$,

тогда $du = \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$, $v = -e^{-x}$

и $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x dx}{e^x} = -e^{-x}\operatorname{arctg} e^x + \int \frac{e^{-x}e^x dx}{1+e^{2x}} = -e^{-x}\operatorname{arctg} e^x + \int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}dx =$

$$-e^{-x}\operatorname{arctg} e^x + x - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+e^{2x}\right)}{1+e^{2x}} = -e^{-x}\operatorname{arctg} e^x + x - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+C .$$

Пример 29. $\int \frac{x-\sin x}{1-\cos x}dx$. Пусть $u = x-\sin x$, $dv = \frac{dx}{1-\cos x} = \frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}$,

тогда $du = \left(1-\cos x\right)dx = 2\sin^2\frac{x}{2}dx$, $v = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

и $\int \frac{x-\sin x}{1-\cos x}dx = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(\sin x - x\right)+\int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(1-\cos x\right)dx =$

$$= \operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\sin x - x) + \int \operatorname{ctg}\frac{x}{2} 2\sin^2\frac{x}{2}dx = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\sin x - x) + \int \sin x dx =$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\sin x - x) - \cos x + C.$$

Пример 30. $\int \arccos(5x-2)dx = \frac{1}{5}\int \arccos(5x-2)d(5x-2)$.

Далее положим $u = \arccos(5x-2)$, $dv = d(5x-2)$, тогда $du = \frac{-d(5x-2)}{\sqrt{1-(5x-2)^2}}$, $v = 5x-2$, и для интеграла будем иметь

$$\int \arccos(5x-2)dx = \frac{1}{5}(5x-2)\arccos(5x-2) + \frac{1}{5}\int \frac{(5x-2)d(5x-2)}{\sqrt{1-(5x-2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{5}(5x-2)\arccos(5x-2) - \frac{1}{5}\sqrt{1-(5x-2)^2} + C.$$

Пример 31. $\int e^{ax}\cos bxdx$. Данный интеграл называется циклическим. В процессе его нахождения мы получим уравнение для определения интеграла, при этом нам придётся применить метод интегрирования по частям два раза, выбирая за функцию u либо экспоненту, либо тригонометрическую функцию.

Положим $u = \cos bx,\ \ dv = e^{ax}dx$, тогда $du = -b\sin bxdx,\ \ v = \frac{e^{ax}}{a}$,

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx \qquad (*).$$

Выберем в качестве u опять тригонометрическую функцию: $u = \sin bx,\ \ du = b\cos bxdx$ и, применив метод интегрирования по частям к интегралу $\int e^{ax}\sin bxdx$, получим равенство для определения исходного интеграла: $\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{x}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bxdx\right)$,

откуда следует: $\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$.

Равенство $(*)$ позволяет легко найти интеграл $\int e^{ax}\sin bxdx$:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx - \frac{1}{b}e^{ax}\cos bx =$$

$$= e^{ax}\left(\left(\frac{a^2}{b\left(a^2+b^2\right)} - \frac{1}{b}\right)\cos bx + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bx\right) = \frac{e^{ex}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right).$$

Пример 32. $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$. Данный интеграл также является циклическим. Положим $dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$, $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, тогда $v = e^{\operatorname{arctg} x}$, $du = \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$, и для интеграла $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$ будем иметь $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$. К полученному интегралу $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$ снова применим интегрирование по частям, взяв за dv то же самое дифференциальное выражение, а за u, следовательно, $u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $du = -\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$:

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Из полученного равенства находим интеграл:

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{1}{2}\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Добавим в основную таблицу ещё два часто встречающихся интеграла.

Пример 33. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx$.

Пусть $u = \sqrt{x^2 \pm a^2}$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, $v = x$. Тогда

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{x^2\pm a^2\mp a^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}-\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm$$

$$\pm a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)-\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx\,,$$

откуда находим

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C\,.$$

Пример 34. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Полагая $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$, $du=-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $v=x$, получим

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2}-$$

$$-\int\frac{\left(a^2-x^2\right)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,.$$

Из данного равенства следует, что

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\,.$$

Пример 35. Получить для интеграла $J_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, $n\in\mathbb{N}$, $a\neq 0$ рекуррентную формулу.

Следуя методу интегрирования по частям, положим

$u=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, $dv=dx$. Тогда $du=\frac{-2nxdx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$, $v=x$ и

$$J_n=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx=$$

$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1}\,,$$

откуда

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+(2n-1)J_n\right).$$

Для J_1 легко получить $J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$, тогда полученная рекуррентная формула позволит вычислить J_n для $\forall n\in\mathbb{N}$.

§ 4. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены с вещественными коэффициентами. Если степень многочлена $Q(x)$ больше степени многочлена $P(x)$, то такая дробь называется правильной рациональной дробью, в противном случае – неправильной. Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная, то её можно представить в виде суммы многочлена $S(x)$ и правильной дроби: $\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, здесь степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Поэтому интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной дроби.

<u>Определение.</u> Рациональные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, где $a,p,q,A,M,N\in\mathbb{R}$, $p^2-4q<0$, $k\in\mathbb{N}$, называются элементарными или простыми дробями.

<u>Теорема 5</u> (основная). Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет вид

$$Q(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_l)^{k_l}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\times$$
$$\times\ldots\cdot\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{m_n}.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение (тождество):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_1^2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_1^{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_2^1}{x-a_2} + \frac{A_2^2}{(x-a_2)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_2^{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_l^1}{x-a_l} + \frac{A_l^2}{(x-a_l)^2} + \ldots + \frac{A_l^{k_l}}{(x-a_l)^{k_l}} + \frac{M_1^1 x + N_1^1}{x^2 + p_1 x + q_1} +$$

$$+ \frac{M_1^2 x + N_1^2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{M_1^{m_1} x + N_1^{m_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \frac{M_2^1 x + N_2^1}{x^2 + p_2 x + q_2} + \frac{M_2^2 x + N_2^2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{M_2^{m_2} x + N_2^{m_2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2}} + \ldots + \frac{M_n^1 x + N_n^1}{x^2 + p_n x + q_n} + \frac{M_n^2 x + N_n^2}{(x^2 + p_n x + q_n)^2} +$$

$+ \ldots + \dfrac{M_n^{m_n} x + N_n^{m_n}}{(x^2 + p_n x + q_n)^{m_n}}$, где $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_l^{k_l}, M_1^1, N_1^1, \ldots, M_n^{m_n}, N_n^{m_n}$ – некоторые вещественные постоянные.

Таким образом, теорема утверждает, что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму простых дробей. Для получения конкретного разложения правильной дроби нужно в правой части тождества привести дроби к общему знаменателю и после этого приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей.

Отметим, что иногда разложение дроби на сумму элементарных может быть получено путём простейших преобразований. Например,

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} \equiv \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} \equiv \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \equiv \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} -$$

$$- \frac{1}{(1+x^2)^2} \equiv \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Проинтегрируем элементарные дроби. Их можно разделить на четыре типа.

I. $\dfrac{A}{x-a} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}, k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}, p^2-4q<0 \Rightarrow x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}=z^2+a^2,$

где $z=x+\dfrac{p}{2},\;\; a=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$, $dz=dx$, поэтому

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M\left(z-\frac{p}{2}\right)+N}{z^2+a^2}dz=M\int\frac{zdz}{z^2+a^2}+$$

$$+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(z^2+a^2\right)}{z^2+a^2}+\left(\frac{2N-pM}{2}\right)\int\frac{dz}{z^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(z^2+a^2\right)+\frac{2N-pM}{2a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-pM}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n},\; p^2-4q<0,\; n\in\mathbb{N} \;\Rightarrow$ применяя тот же приём, что и в случае III, имеем:

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(z^2+a^2\right)}{\left(z^2+a^2\right)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^n}=$$

$$=\frac{M}{2(1-n)\left(z^2+a^2\right)^{n-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)J_n,$$

а для интеграла J_n воспользуемся рекуррентной формулой из примера 35. Возвращаясь к переменной x, получим окончательный результат.

Итак, интегралы от простых дробей представляют собой элементарные функции, ибо выражаются через логарифмы, арктангенсы и рациональные функции. Тем самым мы приходим к теореме, исчерпывающей проблему интегрирования рациональной дроби.

Теорема 6. Всякая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.

Отметим, что главной трудностью при интегрировании рациональных дробей является разложение многочлена $Q(x)$ на произведение неприводимых сомножителей, т.е. отыскание вещественных и комплексных корней многочлена $Q(x)$.

Пример 36. $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

Так как под интегралом имеем правильную дробь, то согласно теореме она разлагается на простые дроби следующим образом:

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4} \equiv$$

$$\equiv \frac{A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x-4)},$$

откуда следует тождество

$$A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3) \equiv 2x^2+41x-91. \qquad (*)$$

В данном случае мы можем обойтись без приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x, а воспользоваться тем, что знаменатель исходной дроби имеет лишь вещественные корни. Полагая в $(*)$ последовательно $x=1$, $x=-3$ и $x=4$, получим систему уравнений для определения A, B и C

$x=1$: $-12A=-48 \Rightarrow A=4;$

$x=-3$: $28B=-196 \Rightarrow B=-7;$

$x=4$: $21C=105 \Rightarrow C=5.$

Следовательно, $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx = 4\int\frac{dx}{x-1} - 7\int\frac{dx}{x+3} + 5\int\frac{dx}{x-4} =$

$$= 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C.$$

Пример 37. $\displaystyle\int \frac{x^3-x^6+x+1}{x^3\left(1+x^2\right)^2}dx$.

Разложение данной правильной дроби на элементарные имеет следующий вид: $\displaystyle\frac{x^3-x^6+x+1}{x^3\left(1+x^2\right)^2} \equiv \frac{ax+b}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{cx+d}{\left(1+x^2\right)} + \frac{e}{x^3} + \frac{f}{x^2} + \frac{g}{x} \equiv$

$$\equiv \frac{(ax+b)x^3+(cx+d)x^3\left(x^2+1\right)+e\left(1+x^2\right)^2+f\left(1+x^2\right)^2x+g\left(1+x^2\right)^2x^2}{x^3\left(1+x^2\right)^2}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей тождества:

$x^6:\ c+g=-1\ (A);\quad x^5:\ d+f=0\ (B);\quad x^4:\ a+c+e+2g=0\ (C);$
$x^3:\ b+d+2f=1\ (D);\quad x^2:\ 2e+g=0\ (E);\quad x:\ f=1;\quad x^0:\ e=1.$

Из (B) следует, что $d=-1$, а из (E) – $g=-2$; тогда из (A) получим $c=1$; из (C) – $a=2$, а из (D) будем иметь $b=0$.

Итак, $\int \frac{x^3-x^6+x+1}{x^3\left(1+x^2\right)^2}dx \equiv \int \frac{2xdx}{\left(1+x^2\right)^2}+\int \frac{x-1}{\left(1+x^2\right)}dx+\int \frac{dx}{x^3}+$

$$+\int \frac{dx}{x^2}-2\int \frac{dx}{x}=\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)}-\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-2\ln|x|=$$

$$=-\frac{1}{\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C.$$

Пример 38. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

$$x^4+x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right),$$

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}\equiv\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\equiv(Ax+B)\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2-x+1\right),$$

откуда следует система уравнений $\begin{cases} A+C=0, \\ A+B-C+D=0, \\ A+B+C-D=0, \\ B+D=1. \end{cases}$ Её решение: $A=-\frac{1}{2},\ \ B=C=D=\frac{1}{2}$.

Тогда $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{1-x}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx=$

$$=-\frac{1}{4}\int \frac{(2x-1)-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{4}\int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}dx=-\frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

Метод Остроградского

Если знаменатель правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ имеет комплексные кратные корни, то разложение этой дроби на простые будет содержать дроби IV типа, интегрирование которых связано с громоздкими выкладками. Для подобных интегралов М.В.Остроградским был придуман остроумный метод. Этот метод основан на анализе интегралов от простых дробей четырех типов. Интегралы от дробей I и III типов являются нерациональными функциями. Интеграл от дроби II типа является правильной рациональной дробью со знаменателем, равным тому же двучлену в степени на единицу меньшей. Интеграл от дроби IV типа равен сумме правильной рациональной дроби со знаменателем, равным тому же трёхчлену в степени на единицу меньшей, и интеграла вида $\int\frac{Cdx}{x^2+px+q}$, приводящегося к арктангенсу. Тогда, если знаменатель $Q(x)$ правильной рациональной дроби имеет вид

$$Q(x)=\left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(x-a_l\right)^{k_l}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\times$$
$$\times\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{m_n},$$

то рациональная часть интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ равна сумме правильных рациональных дробей со знаменателями $\left(x-a_1\right)^{k_1-1}$, $\left(x-a_2\right)^{k_2-1}$, ..., $\left(x-a_l\right)^{k_l-1}$, $\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1-1}$, $\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2-1}$, ..., $\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{m_n-1}$, т.е. представляет собой правильную рациональную дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\cdot\ldots\cdot(x-a_l)^{k_l-1}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1-1}\times$$
$$\times\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2-1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{m_n-1}.$$

Сумма дробей I и III типов, интегралы от которых представляют собой нерациональные функции, будет равна $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, где

$$Q_2(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_l)\left(x^2+p_1x+q_1\right)\times$$
$$\times\left(x^2+p_2x+q_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_nx+q_n\right).$$

Таким образом, мы приходим к тождеству, полученному Остроградским: $\displaystyle\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx \equiv \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$.

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены с неопределёнными коэффициентами, их степени естественно задать на единицу меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ соответственно. Для вычисления неопределённых коэффициентов данное тождество следует продифференцировать, привести результат справа к общему знаменателю и сопоставить коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях левой и правой частей.

Проиллюстрируем метод М.В. Остроградского примерами.

Пример 39. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}$.

Согласно методу Остроградского получим:

$$\int\frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2} \equiv \frac{ax^2+bx+c}{x^3+1}+\int\left(\frac{d}{x+1}+\frac{ex+f}{x^2-x+1}\right)dx .$$

Дифференцируя данное тождество, будем иметь

$$\frac{1}{\left(x^3+1\right)^2} \equiv \frac{(2ax+b)\left(x^3+1\right)-3x^2\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(x^3+1\right)^2}+\frac{d}{x+1}+\frac{ex+f}{x^2-x+1} \equiv$$
$$\equiv \frac{(2ax+b)\left(x^3+1\right)-3x^2\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(x^3+1\right)^2}+\frac{d\left(x^5-x^4+x^3+x^2-x+1\right)}{\left(x^3+1\right)^2}+$$
$$+\frac{(ex+f)\left(x^4+x^3+x+1\right)}{\left(x^3+1\right)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях, получим систему алгебраических уравнений для определения значений неизвестных a,b,c,d,e,f :

$$x^5: \quad d+e=0, \tag{1}$$

$$x^4: \quad -a-d+e+f=0, \tag{2}$$

$$x^3: \quad -2b+d+f=0, \tag{3}$$

$$x^2: \quad -3c+d+e=0, \tag{4}$$

$$x: \quad 2a-d+e+f=0, \tag{5}$$

$$x^0: \quad b+d+f=1. \tag{6}$$

Из (3) и (6) следует, что $b=\dfrac{1}{3}$. Из (1): $e=-d$; из (2) и (5) имеем $a=0$; из (1) и (4) следует, что $c=0$; из (2) имеем $f=2d$; поэтому из (3) получаем $d=\dfrac{2}{3}b=\dfrac{2}{9}$, а значит, $e=-\dfrac{2}{9}$, $f=\dfrac{4}{9}$. Таким образом, тождество принимает вид

$$\int\frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}\equiv\frac{x}{3\left(x^3+1\right)}+\int\left(\frac{2}{9(x+1)}+\frac{4-2x}{9\left(x^2-x+1\right)}\right)dx .$$

Под интегралом справа имеем сумму простых дробей I и III типов:

$$\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|, \qquad \int\frac{4-2x}{x^2-x+1}dx=-\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}+3\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=-\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} .$$

Итак, исходный интеграл равен

$$\int\frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{x}{3\left(x^3+1\right)}+\frac{1}{9}\ln\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C .$$

Пример 40. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{11}+2x^6+x}$.

Применение метода Остроградского приводит к тождеству

$$\int \frac{dx}{x\left(x^5+1\right)^2} \equiv \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x^5+1} + \int \frac{fx^5+gx^4+hx^3+ix^2+jx+k}{x\left(x^5+1\right)}dx.$$

После дифференцирования этого тождества будем иметь

$$\frac{1}{x\left(x^5+1\right)^2} \equiv \frac{\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)\left(x^5+1\right)-5x^4\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)}{\left(x^5+1\right)^2}+$$

$$+\frac{fx^5+gx^4+hx^3+ix^2+jx+k}{x\left(x^5+1\right)}.$$

Приводим справа к общему знаменателю и приравниваем коэффициенты в числителях при одинаковых степенях x:

$$\frac{1}{x\left(x^5+1\right)^2} \equiv \frac{\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)\left(x^6+x\right)-5x^5\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)}{x\left(x^5+1\right)^2}+$$

$$+\frac{\left(fx^5+gx^4+hx^3+ix^2+jx+k\right)\left(x^5+1\right)}{x\left(x^5+1\right)^2};$$

1) x^{10} : $f=0$; 2) x^9 : $g-a=0$; 3) x^8 : $h-2b=0$; 4) x^7 : $i-3c=0$;

5) x^6 : $j-4d=0$; 6) x^5 : $f-5e+k=0$; 7) x^4 : $4a+g=0$;

8) x^3 : $3b+h=0$; 9) x^2 : $2c+i=0$; 10) x : $d+j=0$; 11) x^0 : $k=1$.

Из 2-го и 7-го, 3-го и 8-го, 4-го и 9-го, 5-го и 10-го уравнений следует $a=g=0$; $b=h=0$; $c=i=0$; $d=j=0$. Из 6-го и последнего уравнений получим: $e=\frac{1}{5}$.

Итак, исходный интеграл принимает следующий вид:

$$\int \frac{dx}{x^{11}+2x^6+x} \equiv \frac{1}{5\left(x^5+1\right)} + \int \frac{dx}{x\left(x^5+1\right)}.$$

Интеграл $\int \frac{dx}{x\left(x^5+1\right)}$ легко может быть найден с помощью элементарных преобразований методом подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{x\left(x^5+1\right)} = \int \frac{dx}{x^6\left(1+\frac{1}{x^5}\right)} = -\frac{1}{5}\int \frac{d\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^5}\right)} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right|.$$

Следовательно, $\int \frac{dx}{x^{11}+2x^6+x} = \frac{1}{5\left(x^5+1\right)} + \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right| + C.$

Отметим, что при интегрировании рациональных дробей не всегда необходимо применять теорему о разложении правильной дроби на простые или метод М.В. Остроградского. Иногда с помощью элементарных преобразований, метода поведения под знак дифференциала или интегрирования по частям можно получить результат гораздо быстрее и проще. Продемонстрируем это.

Пример 41. $\int \frac{dx}{x\left(x^{10}+2\right)} = \int \frac{x^9 dx}{x^{10}\left(x^{10}+2\right)} = \frac{1}{10}\int \frac{d\left(x^{10}\right)}{x^{10}\left(x^{10}+2\right)} =$

$$= \left\{z = x^{10}\right\} = \frac{1}{10}\int \frac{dz}{z(z+2)} = \frac{1}{20}\int\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right)dz = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{x^{10}}{x^{10}+2}\right) + C\ .$$

Пример 42. $\int \frac{\left(x^4-1\right)dx}{x\left(x^4-5\right)\left(x^5-5x+1\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{\left(5x^4-5\right)dx}{\left(x^5-5x\right)\left(x^5-5x+1\right)} =$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d\left(x^5-5x\right)}{\left(x^5-5x\right)\left(x^5-5x+1\right)} = \left\{z = x^5-5x\right\} = \frac{1}{5}\int \frac{dz}{z(z+1)} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{dz}{z} - \frac{d(z+1)}{z+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{z}{z+1}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5-5x}{x^5-5x+1}\right| + C\ .$$

Пример 43. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-2} =$

$$\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) + C\ .$$

Пример 44. $\int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\left(\left(x^2\right)^2 - 1 \right) d\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^4 + 1} = \quad \left\{ z = x^2 \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{z^2 - 1}{z^4 + 1} dz =$

$\{\text{пример } 43\} \quad = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{z^2 - \sqrt{2}z + 1}{z^2 + \sqrt{2}z + 1} \right) + C = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right) + C$.

Пример 45.

$$\int \frac{x^4 - 3}{x\left(x^4 + 1\right)\left(x^4 + 2\right)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^4\right)}{\left(x^4 + 1\right)\left(x^4 + 2\right)} - \frac{3}{4} \int \frac{d\left(x^4\right)}{x^4\left(x^4 + 1\right)\left(x^4 + 2\right)}.$$

Сделав замену $z = x^4$, получим разность интегралов $\frac{1}{4} \int \frac{dz}{(z+1)(z+2)} - \frac{3}{4} \int \frac{dz}{z(z+1)(z+2)}$, к которым легко может быть применена теорема о разложении на простые дроби:

$$\frac{1}{z(z+1)(z+2)} \equiv \frac{a}{z} + \frac{b}{z+1} + \frac{c}{z+2} \equiv \frac{a(z+1)(z+2) + bz(z+2) + cz(z+1)}{z(z+1)(z+2)},$$

$$z = 0 \;\Rightarrow\; 2a = 1,\; a = \frac{1}{2};\;\; z = -1 \;\Rightarrow\; b = -1;\;\; z = -2 \;\Rightarrow\; 2c = 1,\; c = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{4(z+1)(z+2)} - \frac{3}{4z(z+1)(z+2)} \equiv \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - 3\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2(z+2)} \right) \right) \equiv$$

$\equiv \frac{1}{(z+1)} - \frac{3}{8z} - \frac{5}{8(z+2)}$. Интегрируя, будем иметь

$$\frac{1}{4} \int \frac{dz}{(z+1)(z+2)} - \frac{3}{4} \int \frac{dz}{z(z+1)(z+2)} = \ln(z+1) - \frac{5}{8}\ln(z+2) - \frac{3}{8}\ln z + C,$$

ведь $z > 0$.

Возвращаясь к переменной x, получим ответ:

$$\int \frac{x^4 - 3}{x\left(x^4 + 1\right)\left(x^4 + 2\right)} dx = \frac{5}{8} \ln\left(\frac{x^4}{x^4 + 2} \right) - \ln\left(\frac{x^4}{x^4 + 1} \right) + C.$$

Пример 46. $\int \frac{x^9 dx}{\left(x^{10} + 2x^5 + 2\right)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{x^5 d\left(x^5\right)}{\left(\left(x^5 + 1\right)^2 + 1\right)^2} = \left\{ z = x^5 + 1 \right\} =$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{(z-1)}{\left(z^2+1\right)^2}dz\equiv\{\text{по методу Остроградского}\}\equiv\frac{1}{5}\left(\frac{az+b}{z^2+1}+\int\frac{cz+d}{z^2+1}dz\right).$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}\equiv\frac{a\left(z^2+1\right)-2z(az+b)}{\left(z^2+1\right)^2}+\frac{(cz+d)\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^2},$$

откуда следует:

$$z^3:\ c=0;\quad z^2:\ -a+d=0;\quad z:\ -2b+c=1;\quad z^0:\ a+d=-1.$$

Решение этой системы: $a=b=d=-\frac{1}{2};\ c=0$.

Итак, $\int\frac{z-1}{\left(z^2+1\right)^2}dz=-\frac{z+1}{2\left(z^2+1\right)}-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}=-\frac{z+1}{2\left(z^2+1\right)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z,$

и, возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\int\frac{x^9dx}{\left(x^{10}+2x^5+2\right)^2}=-\frac{1}{10}\frac{x^5+2}{x^{10}+2x^2+2}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\left(x^5+1\right)+C.$$

Пример 47.

$$\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int\frac{\left(x^4-x^2+1\right)+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+C.$$

В следующих параграфах рассмотрим некоторые классы нерациональных функций, интегрируемых в элементарных функциях. Применяя соответствующую подстановку, мы будем сводить данный интеграл к интегралу от рациональной дроби.

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

Договоримся всюду в дальнейшем символом $R(x,y)$ обозначать любую рациональную функцию от 2 аргументов: x и y.

Покажем интегрируемость в элементарных функциях любой функции вида $R(\sin x,\cos x)$.

Сделаем замену:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\cdot tg\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t \;\Rightarrow\; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом, $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$ – интеграл от рациональной дроби, так как рациональная функция от рациональных функций также представляет собой рациональную функцию.

Подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ называется *универсальной тригонометрической подстановкой.*

Пример 48. $\int\frac{dx}{\sin x - \cos x + 2}$.

Используем универсальную тригонометрическую постановку:

$$I = \int\frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} = \int\frac{2\left(t^2+1\right)dt}{\left(t^2+1\right)\left(3t^2+2t+1\right)} = \int\frac{dt}{3t^2+2t+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\sqrt{3}t\right)}{\left(\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{2}} + C_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} + C_n,$$

где $-\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. В силу непрерывности первообразной имеем: $I\left(\pi + 2\pi n - 0\right) = I\left(\pi + 2\pi n + 0\right)$, т.е. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{n+1}$, откуда следует, что $C_{n+1} = C_n + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, поэтому $C_n = \frac{\pi n}{\sqrt{2}} + C$. Осталось установить связь между x и n: из неравенства $-\pi+2\pi n<x<\pi+2\pi n$ получим, что $n<\dfrac{x+\pi}{2\pi}<n+1$, а значит, $n=\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right]$. Таким образом,

$$I=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right]+C, & x\neq\pi+2\pi n,\\ \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{2}+n\right), & x=\pi+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}\ .\end{cases}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким выкладкам. Укажем ряд частных случаев, когда интеграл может быть рационализирован с помощью других более простых подстановок.

Предварительно сделаем следующие замечания из области алгебры:

1) если $R(-u,v)=R(u,v)$, то $R(u,v)=R_1(u^2,v)$;

2) если же $R(-u,v)=-R(u,v)$, то $R(u,v)=R_2(u^2,v)\cdot u$, что сразу вытекает из замечания 1, если применить его к функции $\dfrac{R(u,v)}{u}$: $\dfrac{R(-u,v)}{-u}=\dfrac{-R(u,v)}{-u}=\dfrac{R(u,v)}{u}$, т.е. для функции $\dfrac{R(u,v)}{u}$ справедливо замечание 1, тогда $\dfrac{R(u,v)}{u}=R_2(u^2,v)$;

3) если $R(-u,-v)=R(u,v)$, то $R(u,v)=R\left(\dfrac{u}{v}\cdot v,v\right)=R_3\left(\dfrac{u}{v},v^2\right)$;

действительно, введя обозначение $R(u,v)=R\left(\dfrac{u}{v}\cdot v,v\right)=R_1\left(\dfrac{u}{v},v\right)$, получим $R(-u,-v)=R\left(\dfrac{u}{v}\cdot(-v),-v\right)=R_1\left(\dfrac{u}{v},-v\right)=R_1\left(\dfrac{u}{v},v\right)=R(u,v)$ – для функции $R_1\left(\dfrac{u}{v},v\right)$ выполнено 1, т.е. $R_1\left(\dfrac{u}{v},v\right)=R_3\left(\dfrac{u}{v},v^2\right)$ или $R(u,v)=R_3\left(\dfrac{u}{v},v^2\right)$.

Вернёмся к $\int R(\sin x,\cos x)dx$.

1. Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то согласно замечанию 2 $R(\sin x,\cos x)=R_1(\sin^2 x,\cos x)\cdot\sin x$ и

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1(\sin^2 x,\cos x)\cdot\sin xdx=$$
$$=-\int R_1(1-\cos^2 x,\cos x)d(\cos x)=\int R_1(1-t^2,t)dt.$$

2. Если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то согласно замечанию 2 $R(\sin x,\cos x)=R_1(\sin x,\cos^2 x)\cdot\cos x$ и

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1(\sin x,\cos^2 x)\cdot\cos xdx=$$
$$=\int R_1(\sin x,1-\sin^2 x)d(\sin x)=\int R_1(t,1-t^2)dt.$$

3. Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то согласно замечанию 3 $R(\sin x,\cos x)=R_3(\operatorname{tg} x,\cos^2 x)$

и

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_3\left(\operatorname{tg} x,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)dx=$$
$$=\left\{z=\operatorname{tg} x, x=\operatorname{arctg} z, dx=\frac{dz}{1+z^2}\right\}=\int R_3\left(z,\frac{1}{1+z^2}\right)\frac{dz}{1+z^2}.$$

Замечание. Любую рациональную функцию $R(u,v)$ можно представить в виде суммы выражений рассмотренных выше типов: $R(u,v)=\dfrac{R(u,v)-R(-u,v)}{2}+\dfrac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2}+\dfrac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}$,

здесь первое выражение меняет знак при изменении знака u, второе меняет знак при изменении знака v, а последнее остаётся неизменным при одновременном изменении знаков u и v.

Пример 49.

$$\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x-6\sin x+5}=\int\frac{d(\sin x)}{(1-\sin x)(5-\sin x)}=\frac{1}{4}\left(\int\frac{d(5-\sin x)}{(5-\sin x)}-\int\frac{(1-\sin x)}{(1-\sin x)}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(5-\sin x)}{(1-\sin x)}+C.$$

Пример 50.

$$\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos^4 x}=-\int\frac{(1-\cos^2 x)d(\cos x)}{\cos^4 x}=\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}=$$

$$=-\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C.$$

Пример 51.

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx=\left\{\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1,\quad \frac{dx}{\cos^2 x}=d\left(\operatorname{tg} x\right)\right\}=\int \operatorname{tg}^3 x d\left(\operatorname{tg} x\right)-$$

$$-\int \operatorname{tg}^3 x dx=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\int \operatorname{tg} x d\left(\operatorname{tg} x\right)+\int \operatorname{tg} x dx=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln\left|\cos x\right|+C.$$

Иногда интегрирование тригонометрических функций может быть осуществлено непосредственно или с использованием метода интегрирования по частям, а также всевозможных тригонометрических формул, что иллюстрируют нижеследующие примеры.

Пример 52. Вывести формулы понижения для интегралов:

1) $I_n=\int \sin^n x dx$; 2) $J_n=\int \cos^n x dx$; 3) $K_n=\int \frac{dx}{\sin^n x}$;

4) $L_n=\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

1) $I_n=\int \sin^n x dx=\int \sin^{n-2} x\left(1-\cos^2 x\right)dx=I_{n-2}-\int \sin^{n-2} x\cos^2 x dx$.

Ко второму интегралу справа применим формулу интегрирования по частям: $u=\cos x$, $du=-\sin x dx$, $dv=\sin^{n-2} x\cos dx=\sin^{n-2} x d\left(\sin x\right)$, $v=\frac{\sin^{n-1} x}{n-1}$, поэтому $I_n=I_{n-2}-\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n-1}-\frac{1}{n-1}\int \sin^n x dx=$ $=I_{n-2}-\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n-1}-\frac{1}{n-1}I_n$, откуда следует $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n}$.

2) $J_n=\int \cos^n dx=\int \cos^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx=J_{n-2}-\int \cos^{n-2} x\sin^2 x dx$.

Используем интегрирование по частям к интегралу справа: $u=\sin x$, $du=\cos x dx$, $dv=\cos^{n-2} x\sin x dx=-\cos^{n-2} x d\left(\cos x\right)$, $v=-\frac{\cos^{n-1} x}{n-1}$, следовательно, $J_n=J_{n-2}+\frac{\sin x\cos^{n-1} x}{n-1}-\frac{1}{n-1}J_n$, поэтому $J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}+\frac{\sin x\cos^{n-1} x}{n}$.

3) $K_n=\int \frac{dx}{\sin^n x}=\int \frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx}{\sin^n x}=K_{n-2}+\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^n x}$.

Интегрируем по частям интеграл в правой части: $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$, $dv = \frac{\cos x dx}{\sin^n x} = \frac{d(\sin x)}{\sin^n x}$, $v = \frac{1}{(1-n)\sin^{n-1} x}$,

$$K_n = K_{n-2} + \frac{\cos x}{(1-n)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} = \frac{n-2}{n-1}K_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x}.$$

4) $L_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)dx}{\cos^n x} = L_{n-2} + \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^n x}$.

К интегралу $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^n x}$ применим формулу интегрирования по частям: $u = \sin x$, $du = \cos x dx$, $dv = \frac{\sin x dx}{\cos^n x} = -\frac{d(\cos x)}{\cos^n x}$, $v = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x}$, поэтому

$$L_n = L_{n-2} + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} = \frac{n-2}{n-1}L_{n-2} + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x}.$$

Пример 53. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx$.

Используя формулы $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right)$, $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$ и формулы понижения степени $\sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$, $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$, преобразуем подинтегральную функцию:

$$\sin^3 2x \cos^2 3x = \sin 2x \frac{(1-\cos 4x)}{2}\frac{(1+\cos 6x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x\left(1 - \cos 4x + \cos 6x - \cos 4x \cos 6x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin 2x - \sin 2x \cos 4x + \sin 2x \cos 6x - \frac{1}{2}\sin 2x\left(\cos 2x + \cos 10x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x -$$

$$-\frac{1}{16}\sin 12x = \frac{3}{8}\sin 2x - \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 6x + \frac{3}{16}\sin 8x - \frac{1}{16}\sin 12x\ .$$

Тогда $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx = -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x - \frac{3}{128}\cos 8x +$ $+\frac{1}{192}\cos 12x + C$.

Пример 54. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(a-b)dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} =$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \sin(x+b)\cos(x+a)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx\right) = \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C,$$

если $\sin(a-b) \neq 0$.

Следующие примеры показывают, что во многих случаях можно не только избежать универсальной тригонометрической подстановки, но и даже получить некоторые общие формулы.

Пример 55. $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$. С помощью простейших преобразований и с использованием примера 22, получим

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}{2}\right)\right| + C\ .$$

Пример 56. $\int \frac{c\sin x + d\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$, где $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ и $a^2+b^2 \neq 0$.

Покажем, что в данном случае можно проинтегрировать, не прибегая к универсальной тригонометрической подстановке.

Для этого представим числитель данной дроби в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$c\sin x + d\cos x \equiv C_1\left(a\sin x + b\cos x\right) + C_2\left(a\cos x - b\sin x\right).$$

Для нахождения постоянных C_1, C_2 приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в правой и левой частях тождества:

$$\begin{cases} c = C_1 a - C_2 b, \\ d = C_1 b + C_2 a, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{ac+bd}{a^2+b^2},\ C_2 = \frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

Тогда $\displaystyle\int \frac{c\sin x + d\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = C_1\int \frac{a\sin x + b\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx + C_2\int \frac{d\left(a\sin x + b\cos x\right)}{a\sin x + b\cos x} =$
$= C_1 x + C_2 \ln\left|a\sin x + b\cos x\right| + C$.

Пример 57. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\sin x - 3\cos x}$.

Используя предыдущий пример, получим

$$\int \frac{\sin x dx}{\sin x - 3\cos x} = \frac{x}{10} + \frac{3}{10}\ln\left|\sin x - 3\cos x\right| + C.$$

Пример 58. Доказать рекуррентную формулу

$$\int \frac{dx}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-2}},$$

где $A = \dfrac{b}{(n-1)\left(a^2+b^2\right)}$, $B = \dfrac{-a}{(n-1)\left(a^2+b^2\right)}$, $C = \dfrac{n-2}{(n-1)\left(a^2+b^2\right)}$, и с её помощью найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(2\cos x + \sin x\right)^3}$.

Воспользуемся интегрированием по частям:

$$I_{n-2} = \int \frac{dx}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-2}} = \int \frac{d\left(-a\cos x + b\sin x\right)}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-1}} = \frac{-a\cos x + b\sin x}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-1}} -$$

$$-(n-1)\int \frac{\left(a\cos x - b\sin x\right)^2 dx}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^n} = \frac{-a\cos x + b\sin x}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-1}} -$$

$$-(n-1)\int \frac{\left(a\cos x - b\sin x\right)^2 + \left(a\sin x + b\cos x\right)^2}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^n}dx + (n-1)I_{n-2} =$$

$$= \frac{-a\cos x + b\sin x}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-1}} - (n-1)\int \frac{\left(a^2+b^2\right)dx}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^n} + (n-1)I_{n-2} =$$

$$= \frac{-a\cos x + b\sin x}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-1}} - (n-1)\left(a^2+b^2\right)I_n + (n-1)I_{n-2}$$, откуда следует

$$I_n = \frac{1}{(n-1)\left(a^2+b^2\right)}\left((n-2)I_{n-2} + \frac{b\sin x - a\cos x}{\left(a\sin x + b\cos x\right)^{n-1}}\right).$$

Тогда, используя полученную формулу и пример 55, получим

$$\int \frac{dx}{\left(2\cos x + \sin x\right)^3} = \frac{2\sin x - \cos x}{10\left(2\cos x + \sin x\right)^2} + \frac{1}{10}\int \frac{dx}{2\cos x + \sin x} =$$

$$= \frac{2\sin x - \cos x}{10\left(2\cos x + \sin x\right)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x + \operatorname{arctg} 2}{2}\right| + C.$$

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin^p x \cos^q x dx$, $p,q \in \mathbb{Q}$. Сделаем замену: $t = \sin^2 x$, $\cos^2 x = 1-t$, $x = \arcsin\sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{(1-t)t}}$, тогда $\int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}} dt$ – подинтегральное выражение. Полученное подинтегральное выражение представляет собой биномиальный дифференциал, и, следовательно (как будет рассмотрено в следующем параграфе), интегрируется в конечном виде только в трёх случаях: 1) $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{p+1}{2} \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{Z}$ или 1) $q = 2k-1$; 2) $p = 2m-1$; 3) $p+q = 2l$. Если оба показателя степени p,q – целые, имеем рациональную функцию $R(\sin x, \cos x)$ – данная ситуация рассматривалась выше.

Пример 59. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} = \int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)d\left(\operatorname{tg} x\right)}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} =$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C.$$

Пример 60. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

Сделаем замену: $z=\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$, $x=\operatorname{arctg} z^3$, $dx=\dfrac{3z^2dz}{1+z^6}$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}=3\int \frac{zdz}{1+z^6}=\frac{3}{2}\int \frac{d\left(z^2\right)}{1+\left(z^2\right)^3}=\left\{t=z^2\right\}=\frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^3}.$$

Раскладывая полученную дробь на простые дроби, будем иметь $\dfrac{1}{1+t^3}\equiv\dfrac{A}{t+1}+\dfrac{Bt+C}{t^2-t+1}\equiv\dfrac{A\left(t^2-t+1\right)+\left(Bt+C\right)\left(t+1\right)}{1+t^3}$, откуда следует алгебраическая система для определения A,B,C:

$\begin{cases}A+B=0,\\ -A+B+C=0,\\ A+C=1.\end{cases}$ решением которой является $A=\dfrac{1}{3}$, $B=-\dfrac{1}{3}$, $C=\dfrac{2}{3}$,

Интегрируя, получим

$$\frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int \frac{2t-4}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{2}\ln\left|t+1\right|-\frac{1}{4}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+$$

$$+\frac{3}{4}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{1}{2}\ln\left|t+1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|t^2-t+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arcctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z^4-z^2+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arcctg}\frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\left(\operatorname{tg}^{2/3}x+1\right)^2}{\operatorname{tg}^{4/3}x-\operatorname{tg}^{2/3}x+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}^{2/3}x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 6. Интегрирование иррациональных функций

1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Рассмотрим интеграл $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где a,b,c,d – некоторые постоянные, а n – любое целое положительное число. Подинтегральное выражение рационализируется подстановкой $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ при $ad-bc\neq 0.$ В самом деле, $t^n=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n}$,

$dx=\dfrac{(ad-bc)nt^{n-1}dt}{(a-ct^n)^2}$ $\Rightarrow$ $\int R\left(\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\cdot\dfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$.

К данному интегралу сводятся и более общие интегралы $\int R\left(x,\sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},...,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$ стоит лишь найти наименьшее общее кратное l целых чисел $k,m...n$ и сделать замену: $t=\sqrt[l]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}.$

Пример 61. $\int\dfrac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x^5}\right)^3}$. Сделаем замену: $x=t^{12}$, $dx=12t^{11}dt$,

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x^5}\right)^3}=12\int\frac{t^{11}dt}{\left(t^2+t^5\right)^3}=12\int\frac{t^5dt}{\left(1+t^3\right)^3}\ .$$

Полученная рациональная дробь может быть проинтегрирована без разложения согласно основной теореме 5 или по методу Остроградского:

$$12\int\frac{t^5dt}{\left(1+t^3\right)^3}=4\int\frac{t^3d\left(t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^3}=\left\{z=t^3\right\}=4\int\frac{\left(z+1\right)-1}{\left(z+1\right)^3}dz=4\int\frac{dz}{\left(z+1\right)^2}-$$

$$-4\int\frac{dz}{\left(z+1\right)^3}=\frac{-4}{z+1}+\frac{2}{\left(z+1\right)^2}+C=\frac{2}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2}-\frac{4}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}+C\ .$$

Пример 62. $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)^7}}=\int\dfrac{dx}{\left(x-1\right)^3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}}$.

Сделаем замену: $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=\dfrac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}$, $x-1=\dfrac{2}{t^3-1}$. Тогда $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)^7}}=-\dfrac{3}{4}\int\left(t^3-1\right)dt=-\dfrac{3}{16}t^4+\dfrac{3}{4}t+C=\dfrac{3}{16}\left(3x-5\right)\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{\left(x-1\right)^4}}+C\cdot$

2. Интегрирование биномиальных дифференциалов. Подстановки Чебышева

Рассмотрим интеграл $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx,$ где $a,b \in \mathbb{R},\ \ m,n,p \in \mathbb{Q}.$ Выясним, когда эти выражения интегрируются в элементарных функциях.

1. Один такой случай ясен: $p \in \mathbb{Z}$ и рассматриваемый интеграл относится к типу, изученному в предыдущем пункте. Если через k обозначить наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и $n,$ то мы имеем под интегралом выражение вида $R\left(\sqrt[k]{x}\right)dx,$ так что для рационализации достаточна подстановка $t=\sqrt[k]{x}.$

Пусть теперь p – не целое. Преобразуем данное выражение подстановкой $z=x^n$: $x=z^{1/n}$, $dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1-n}{n}}dz$ и $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}\left(a+bz\right)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz,$ поэтому

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{1}{n}\int\left(a+bz\right)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz. \qquad (*)$$

2. Из равенства $(*)$ следует второй случай: $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$. Действительно, если через q обозначить знаменатель дроби p, то преобразованный интеграл имеет вид $\int R\left(z,\sqrt[q]{a+bz}\right)dz$ и согласно случаю 1 легко рационализируется подстановкой $t=\sqrt[q]{a+bz}=\sqrt[q]{a+bx^n}$.

Перепишем второй из интегралов в равенстве $(*)$ так:
$\int\left(a+bz\right)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz=\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{\frac{m+1}{n}+p-1}dz.$

3. Из предыдущего равенства вытекает третий случай: $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$.

Подстановка $t=\sqrt[q]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[q]{ax^{-n}+b}$ позволяет рационализировать подинтегральное выражение $R\left(z,\sqrt[q]{\frac{a+bz}{z}}\right)dz$.

Итак, интеграл вида $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$ выражается в элементарных функциях, если:

1) $p\in\mathbb{Z}$; 2) $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$; 3) $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$. П.Л. Чебышевым доказано, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет (т.е. мы самое важное не доказали!). Именно поэтому подстановки носят имя Чебышева.

Пример 63. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

В данном примере $m=0$, $n=\dfrac{1}{4}$, поэтому $\dfrac{m+1}{n}=4$, и мы имеем 2-й случай Чебышева: $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \;\Rightarrow\; x=\left(t^3-1\right)^4$, $dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3 dt$. Тогда

$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx=12\int t^3\left(t^3-1\right)^3 dt=12\int\left(t^{12}-3t^9+3t^6-t^3\right)dt=$$

$$=\frac{12}{13}t^{13}-\frac{18}{5}t^{10}+\frac{36}{7}t^7-3t^4+C=$$

$$=\frac{12}{13}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^{13}-\frac{8}{5}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^{10}+\frac{36}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^{7}-3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^{4}+C.$$

Пример 64. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}}$. Для этого интеграла $m=-2$, $n=3$, $p=-\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{m+1}{n}+p=-2$ – целое, поэтому $t=\sqrt[3]{\dfrac{2+x^3}{x^3}} \;\Rightarrow\; t^3x^3=2+x^3 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; x=\sqrt[3]{\frac{2}{t^3-1}},\quad dx=-\frac{\sqrt[3]{2}t^2\,dt}{\sqrt[3]{\left(t^3-1\right)^4}},\quad \sqrt[3]{2+x^3}=tx=t\sqrt[3]{\frac{2}{t^3-1}}.$$

Тогда $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}}=-\int\frac{\left(t^3-1\right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^2}}\frac{\left(t^3-1\right)^{5/3}}{t^5\sqrt[3]{2^5}}\frac{\sqrt[3]{2}t^2}{\left(t^3-1\right)^{4/3}}dt=-\int\frac{t^3-1}{4t^3}dt=$$

$$=-\frac{1}{4}t-\frac{1}{8t^2}+C=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2+x^3}{x^3}}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{x^3}{2+x^3}\right)^2}+C=-\frac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+C.$$

3. Интегрирование функций вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. *Подстановки Эйлера*

Предположим, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, где a, b, c – вещественные постоянные, не имеет равных корней.

1-я постановка Эйлера – случай $a > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \mp \sqrt{a}x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} =$$

$= \dfrac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$, $dx = 2\dfrac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt$ (в приведенных выкладках из двух возможных был выбран знак «–») и вопрос сводится к интегрированию рациональной функции от t. После интегрирования необходимо сделать обратную замену: $t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{a}x$.

2-я подстановка Эйлера – случай $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} =$$

$= \dfrac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}$, $dx = 2\dfrac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2}dt$ (в этом случае мы выбрали знак «+») и выражение $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ рационализируется. Проинтегрировав, положим $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c} \mp \sqrt{c}}{x}$.

Замечание: случаи 1 $(a > 0)$ и 2 $(c > 0)$, рассмотренные выше, приводятся один к другому подстановкой $x = \dfrac{1}{z}$ $\left(\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\dfrac{a}{z^2}+\dfrac{b}{z}+c} = \dfrac{1}{\sqrt{z^2}}\sqrt{a+bz+cz^2}\right)$, поэтому второй подстановки всегда можно избежать.

3-я подстановка Эйлера – случай вещественных корней. Пусть λ и μ есть корни квадратного трёхчлена: $ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\mu)$. Положим $\quad t=\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\dfrac{a(\lambda-\mu)}{t^2-a},$

$dx=\dfrac{2a(\mu-\lambda)t}{\left(t^2-a\right)^2}dt$ и подинтегральное выражение рационализируется.

Покажем, что 1-й и 3-й подстановок Эйлера достаточно для того, чтобы осуществить рационализацию подинтегрального выражения во всех возможных случаях. Действительно, если трёхчлен ax^2+bx+c имеет вещественные корни, то применима 3-я подстановка. Если же вещественных корней нет, т.е. $b^2-4ac<0$, то трёхчлен ax^2+bx+c при всех значениях x имеет знак коэффициента a. Случай $a<0$ нас не интересует, ибо квадратный корень из отрицательного числа не имеет вещественных значений, а при $a>0$ применима 1-я подстановка.

Итак, интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ всегда берутся в конечном виде, причём для представления их кроме функций, через которые выражаются интегралы от рациональных дифференциалов, нужны ещё квадратные корни.

Пример 65. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(x+1)}\right)^2}$.

Применим 1-ю подстановку Эйлера: $\sqrt{x(x+1)}=t+x \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x^2+x=t^2+2tx+x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{t^2}{1-2t}, \quad dx=\frac{2\left(t-t^2\right)}{(1-2t)^2}dt,$$

$1+\sqrt{x(x+1)}=1+t+\dfrac{t^2}{1-2t}=\dfrac{1-t-t^2}{1-2t}$, поэтому

$$\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(x+1)}\right)^2}=\int\frac{2\left(t-t^2\right)}{(1-2t)^2}\frac{(1-2t)^2}{\left(1-t-t^2\right)^2}dt=2\int\frac{t-t^2}{\left(1-t-t^2\right)^2}dt.$$

Полученная рациональная дробь может быть проинтегрирована с помощью метода Остроградского:

$$\int\frac{2t-2t^2}{\left(1-t-t^2\right)^2}dt\equiv\frac{at+b}{\left(1-t-t^2\right)}+\int\frac{ct+d}{\left(1-t-t^2\right)}dt.$$

Дифференцируя данное тождество, получим

$$\frac{2t-2t^2}{\left(1-t-t^2\right)^2}\equiv\frac{a\left(1-t-t^2\right)+\left(at+b\right)\left(1+2t\right)}{\left(1-t-t^2\right)^2}+\frac{\left(ct+d\right)\left(1-t-t^2\right)}{\left(1-t-t^2\right)^2}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в числителях левой и правой частей тождества:

$t^3:\ c=0;\quad t^2:\ a-c-d=-2;\quad t:\ 2b+c-d=2;$

$t^0:\ a+b+d=0$.

Из системы 4 линейных уравнений следует

$a=-\frac{8}{5};\ b=\frac{6}{5};\ c=0;\ d=\frac{2}{5}.$

Следовательно, $\int\frac{2t-2t^2}{\left(1-t-t^2\right)^2}dt\equiv\frac{6-8t}{5\left(1-t-t^2\right)}+\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(1-t-t^2\right)}=$

$$=\frac{6-8t}{5\left(1-t-t^2\right)}+\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\right)}=\frac{6-8t}{5\left(1-t-t^2\right)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right|+C.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt{x\left(x+1\right)}\right)^2}=\frac{6-8t}{5\left(1-t-t^2\right)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right|+C,$$

где $t=\sqrt{x\left(x+1\right)}-x$.

Пример 66. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Воспользуемся 2-й подстановкой Эйлера: $tx=1+\sqrt{1-2x-x^2}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ t^2x^2-2tx+1=1-2x-x^2\ \Rightarrow\ x=\frac{2\left(t-1\right)}{t^2+1},\ dx=2\frac{\left(t^2+1\right)-2t\left(t-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt,$

$1+\sqrt{1-2x-x^2}=\frac{2t\left(t-1\right)}{t^2+1}$, тогда

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=2\int\frac{\left(t^2+1\right)}{2t\left(t-1\right)}\frac{\left(\left(t^2+1\right)-2t\left(t-1\right)\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int\frac{dt}{t\left(t-1\right)}-$$

$$-2\int\frac{dt}{t^2+1}=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t+C,$$

где $t=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

Пример 67. $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

Так как квадратный трёхчлен x^2+3x+2 имеет вещественные корни, то можно рационализировать подинтегральное выражение с помощью 3-й подстановки Эйлера: $\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{(x+1)(x+2)}=t(x+1)$, откуда следует $(x+1)(x+2)=t^2(x+1)^2 \Rightarrow (x+2)=t^2(x+1) \Rightarrow x=\dfrac{2-t^2}{t^2-1}$,

$dx=\dfrac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$, $\qquad x-\sqrt{x^2+3x+2}=\dfrac{2-t-t^2}{t^2-1}=\dfrac{-(t+2)(t-1)}{t^2-1}$,

$x+\sqrt{x^2+3x+2}=\dfrac{2+t-t^2}{t^2-1}=\dfrac{-(t-2)(t+1)}{t^2-1}$.

Следовательно, $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{-2t(t+2)}{(t+1)^3(t-2)(t-1)}dt$.

Разложение полученной правильной дроби на простые имеет следующий вид: $\dfrac{-2t(t+2)}{(t+1)^3(t-2)(t-1)}\equiv\dfrac{a}{t+1}+\dfrac{b}{(t+1)^2}+\dfrac{c}{(t+1)^3}+\dfrac{d}{t-2}+\dfrac{e}{t-1}$.

Приводя в правой части к общему знаменателю, получим тождество

$$-2t(t+2)\equiv a(t+1)^2(t-2)(t-1)+b(t+1)(t-2)(t-1)+c(t-2)(t-1)+$$
$$+d(t+1)^3(t-1)+e(t+1)^3(t-2).$$

Воспользуемся сначала вещественными коэффициентами знаменателя нашей дроби.

При $t=-1$ имеем: $6c=2$, откуда $c=\dfrac{1}{3}$; если $t=1$, то $-8e=-6$ или $e=\dfrac{3}{4}$; при $t=2$ получаем $27d=-16$, т.е. $d=-\dfrac{16}{27}$. Далее приравниваем коэффициенты при t^4 и t^0 в правой и левой частях тождества:

$t^4: \ \ a+d+e=0 \ \ \Rightarrow \ \ a=-d-e=-\dfrac{17}{108}$;

$t^0: \ \ 2a+2b+2c-d-2e=0 \ \ \Rightarrow \ \ b=-a-c+\dfrac{d}{2}+e=\dfrac{5}{18}$.

Таким образом,

$$\int \frac{-2t(t+2)}{(t+1)^3(t-2)(t-1)}dt=\frac{-17}{108}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{5}{18}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^3}-$$

$$-\frac{16}{27}\int\frac{dt}{t-2}+\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}=-\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{1}{6(t+1)^2}-$$

$$-\frac{16}{27}\ln|t-2|+\frac{3}{4}\ln|t-1|+C.$$

Итак, для исходного интеграла имеем

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=-\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{1}{6(t+1)^2}-$$

$$-\frac{16}{27}\ln|t-2|+\frac{3}{4}\ln|t-1|+C, \text{ где } \ t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}.$$

Подстановки Эйлера, как правило, приводят к громоздким выкладкам. Покажем, что существуют и другие способы вычисления интегралов $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Обозначим $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, тогда какова бы ни была функция $R(x,y)$, её можно привести к виду $R(x,y)=\dfrac{P_1(x)+P_2(x)y}{P_3(x)+P_4(x)y}$, где $P_i(x)$, $i=1,2,3,4$ – многочлены. Умножая числитель и знаменатель дроби на $P_3(x)-P_4(x)y$ и заменяя y^2 на ax^2+bx+c, получим $R(x,y)=R_1(x)+R_2(x)y$, где $R_1(x)$, $R_2(x)$ – рациональные дроби. Таким образом, необходимо рассмотреть интегралы вида

$$\int R_2(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{R_2(x)\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{R^*(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Представив рациональную дробь $R^*(x)$ в виде суммы многочлена $P_n(x)$ степени n и элементарных дробей, получим интегралы следующих трёх типов:

I. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. **II.** $\int \frac{dx}{(x-d)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

III. $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $p^2-4q<0$.

Рассмотрим их.

Для интеграла **I** воспользуемся тождеством:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (*)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени не выше $(n-1)$-й с неопределёнными коэффициентами, λ – некоторое число. Дифференцируя данное тождество, получим равенство двух многочленов, из которого могут быть найдены коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и λ. Интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ легко сводится к табличному:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|.$$

Тождество $(*)$ устанавливается с помощью рекуррентной формулы

$$I_m = P_{m-1}(x)\,y+\lambda_m I_0,$$

где $I_m=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{x^m dx}{y}$, $P_{m-1}(x)$ – многочлен $(m-1)$-й степени.

Докажем её. Считая $m\ge 1$, возьмём производную

$$\left(x^{m-1}y\right)'=(m-1)x^{m-2}y+\frac{x^{m-1}\left(ax^2+bx+c\right)'}{2y}=$$

$$=\frac{2(m-1)x^{m-2}\left(ax^2+bx+c\right)+x^{m-1}(2ax+b)}{2y}=$$

$$= ma\frac{x^m}{y} + \left(m - \frac{1}{2}\right)b\frac{x^{m-1}}{y} + (m-1)c\frac{x^{m-2}}{y}$$

и проинтегрируем полученное тождество:

$$x^{m-1}y = maI_m + \left(m - \frac{1}{2}\right)bI_{m-1} + (m-1)cI_{m-2}\ .$$

Полагая здесь $m = 1$, найдём $I_1 = \frac{y}{a} - \frac{b}{2a}I_0$, при $m = 2$ получим $I_2 = \frac{1}{4a^2}(2ax - 3b)\,y + \frac{1}{8a^2}\left(3b^2 - 4ac\right)I_0$.

Продолжая аналогично, придём к общей формуле

$$I_m = P_{m-1}(x)\,y + \lambda_m I_0\ .$$

Таким образом, все интегралы I_m приводятся к I_0.

Пример 68. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}dx$.

Согласно изложенному методу запишем

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}dx = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}\ .$$

Дифференцируем данное тождество, будем иметь

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} \equiv (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + \left(Ax^2 + Bx + C\right)\times$$

$$\times\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} \equiv$$

$$\equiv \frac{(2Ax + B)\left(x^2 + 4x + 3\right) + \left(Ax^2 + Bx + C\right)(x + 2) + \lambda}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}\ .$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^3:\ \ 3A = 1 \ \Rightarrow\ A = \frac{1}{3};\quad x^2:\ \ 10A + 2B = -6 \ \Rightarrow\ B = -\frac{14}{3};$$

$$x:\ \ 6A + 6B + C = 11 \ \Rightarrow\ C = 37;\quad x^0:\ \ 3B + 2C + \lambda = -6 \ \Rightarrow\ \lambda = -66\ .$$

Интегрируя $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}\right|$, получим окончательный ответ:

$$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=$$
$$=\frac{x^2-14x+111}{3}\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.$$

II. Интеграл $\int\frac{dx}{(x-d)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью замены $z=\frac{1}{x-d}$ приводится к интегралу **I**: $x-d=\frac{1}{z}$, $dx=-\frac{dz}{z^2}$, $ax^2+bx+c=\frac{(ad^2+bd+c)z^2+(2ad+b)z+a}{z^2}$, поэтому, положив для определённости $x>d$, $z>0$, получим

$$\int\frac{dx}{(x-d)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{z^{k-1}dz}{\sqrt{(ad^2+bd+c)z^2+(2ad+b)z+a}}.$$

Отметим, что в случае $ad^2+bd+c=0$ мы получаем интеграл, содержащий дробно-линейную иррациональность.

III. $\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Здесь необходимо рассмотреть два случая: 1) квадратные трёхчлены ax^2+bx+c и x^2+px+q совпадают или отличаются только множителями; 2) случай $p\neq\frac{b}{a}$.

В первом случае искомый интеграл имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}=\frac{M}{2\sqrt{a}}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}dx+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{a}}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}.$$

Для первого интеграла правой части получим

$$\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}=\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}}=\frac{1}{\left(\frac{1-2m}{2}\right)(x^2+px+q)^{\frac{2m-1}{2}}}.$$

Второй интеграл может быть найден с помощью подстановки Абеля:

$$t=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'=\frac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{x^2+px+q}}, \qquad dx=\sqrt{x^2+px+q}\,dt+t^2dx \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

После возведения в квадрат и простейших преобразований получим интеграл от многочлена:

$$z=x^2+px+q \ \Rightarrow \ \begin{cases} 4zt^2=4x^2+4px+p^2, \\ 4z=4x^2+4px+4q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4z\left(1-t^2\right)=4q-p^2 \ \Rightarrow \ z=\frac{4q-p^2}{4\left(1-t^2\right)},$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\frac{2m+1}{2}}}=\int\frac{dx}{z^{\frac{2m+1}{2}}}=\left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^m\int\left(1-t^2\right)^{m-1}dt.$$

Во втором случае, когда $p\neq\dfrac{b}{a}$, применяется подстановка $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$, где константы α и β подбираются так, чтобы в квадратных трёхчленах x^2+px+q и ax^2+bx+c отсутствовали члены первой степени относительно t:

$$\begin{cases} 2\alpha\beta+p\left(\alpha+\beta\right)+2q=0, \\ 2a\alpha\beta+b\left(\alpha+\beta\right)+2c=0. \end{cases}$$

Если же $p=\dfrac{b}{a}$, но $q\neq\dfrac{c}{a}$, уничтожение членов первой степени достигается проще – подстановкой $t=x+\dfrac{p}{2}$.

Выполнив подстановку, преобразуем интеграл $\displaystyle\int\frac{\left(Mx+N\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ к виду $\displaystyle\int\frac{P_{2m-1}\left(t\right)dt}{\left(t^2+\mu\right)^m\sqrt{\nu t^2+\lambda}}$, где $P_{2m-1}\left(t\right)$ есть многочлен степени $\left(2m-1\right)$ и $\mu>0$. После разложения правильной рациональной дроби $\dfrac{P_{2m-1}(t)}{\left(t^2+\mu\right)^m}$ на элементарные получим сумму интегралов вида $\displaystyle\int\frac{tdt}{\left(t^2+\mu\right)^k\sqrt{\nu t^2+\lambda}}$, $\displaystyle\int\frac{dt}{\left(t^2+\mu\right)^k\sqrt{\nu t^2+\lambda}}$, $k\in\mathbb{N}$. Первый легко находится с помощью замены $u=\sqrt{\nu t^2+\lambda}$, $du=\dfrac{\nu tdt}{\sqrt{\nu t^2+\lambda}}$, $\displaystyle\int\frac{tdt}{\left(t^2+\mu\right)^k\sqrt{\nu t^2+\lambda}}=\int\frac{\nu^{k-1}du}{\left(u^2+\mu\nu-\lambda\right)^k}$ ко второму применима подстановка Абеля: $w=\left(\sqrt{\nu t^2+\lambda}\right)'=\dfrac{\nu t}{\sqrt{\nu t^2+\lambda}}$, $\sqrt{\nu t^2+\lambda}dw+w^2dt=\nu dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{dt}{\sqrt{\nu t^2+\lambda}}=\dfrac{dw}{\nu-w^2}$, $t^2+\mu=\dfrac{(\lambda-\mu\nu)w^2+\mu\nu^2}{\nu\left(\nu-w^2\right)}$,

$\displaystyle\int\frac{dt}{\left(t^2+\mu\right)^k\sqrt{\nu t^2+\lambda}}=\int\frac{\nu^k\left(\nu-w^2\right)^{k-1}dw}{\left((\lambda-\mu\nu)w^2+\mu\nu^2\right)^k}$, в результате которой мы приходим к интегралу от рациональной функции.

Пример 69. $\displaystyle\int\frac{2x^4+x^3+x^2+2x-3}{\left(x^3+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Первая подстановка Эйлера $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$ приводит к следующему интегралу

$$\int\frac{2x^4+x^3+x^2+2x-3}{\left(x^3+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx=$$
$$=2\int\frac{\left(2t^8-2t^7-3t^6-14t^5-22t^4+102t^3-97t^2+34t-3\right)dt}{(1-2t)^2\,t\left(t^5-3t^3-8t^2+15t-6\right)},$$

требующему значительных вычислений. Вторая подстановка Эйлера приводит к не менее сложному подинтегральному выражению.

Поэтому представим неправильную дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби, которую разложим на простые:

$$\frac{2x^4+x^3+x^2+2x-3}{\left(x^3+1\right)}=2x+1+\frac{2x-3}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}.$$

Тогда $\int \frac{2x^4+x^3+x^2+2x-3}{\left(x^3+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx +$

$\int \frac{2x-3}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx - \int \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}.$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{d\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}} = 2\sqrt{x^2+x+1}\ .$$

Обозначим $I_1 = \int \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}$, $I_2 = \int \frac{2x-3}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Для I_1 воспользуемся заменой: $t = \frac{1}{x+1}$, $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $x^2+x+1 = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1$.

Для случая $\left(x+1\right) > 0$ будем иметь:

$$I_1 = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\int \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= -\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| = -\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{\left(x+1\right)^2}}\right|.$$

При $\left(x+1\right) < 0$ этим же путем получится тот же результат.

Рассмотрим I_2. Так как отношение квадратных трёхчленов x^2+x+1 и x^2-x+1 не является постоянным, необходимо использовать замену $x = \frac{\alpha z+\beta}{z+1}$. Тогда

$$x^2-x+1 = \frac{\alpha^2z^2+2\alpha\beta z+\beta^2-\left(\alpha z+\beta\right)\left(z+1\right)+z^2+2z+1}{\left(z+1\right)^2},$$

$$x^2+x+1 = \frac{\alpha^2z^2+2\alpha\beta z+\beta^2+\left(\alpha z+\beta\right)\left(z+1\right)+z^2+2z+1}{\left(z+1\right)^2}.$$

Константы α и β определяются из условий $\begin{cases} 2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0, \\ 2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2 = 0, \end{cases}$ откуда следует $\beta = -\alpha$, $\alpha^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 1, \ \beta = \mp 1$. Выберем $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $x = \frac{z-1}{z+1}$. В этом случае $x^2 - x + 1 = \frac{z^2+3}{(z+1)^2}$, $x^2 + x + 1 = \frac{3z^2+1}{(z+1)^2}$, $2x - 3 = -\frac{z+5}{z+1}$, $dx = \frac{2dz}{(z+1)^2}$. Следовательно,

$$I_2 = -2\int \frac{(z+5)dz}{(z^2+3)\sqrt{3z^2+1}} = -2\int \frac{zdz}{(z^2+3)\sqrt{3z^2+1}} - 10\int \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{3z^2+1}} =$$

$$= -2J_1 - 10J_2.$$

Для интеграла J_1 используем замену $u = \sqrt{3z^2+1}$, $du = \frac{3zdz}{\sqrt{3z^2+1}}$, $z^2 = \frac{u^2-1}{3}$, $z^2 + 3 = \frac{u^2+8}{3}$, поэтому

$$J_1 = \int \frac{du}{u^2+8} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3z^2+1}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{2(1-x)^2}}.$$

Для J_2 применим подстановку Абеля $v = \left(\sqrt{3z^2+1}\right)' = \frac{3z}{\sqrt{3z^2+1}}$,

$$v\sqrt{3z^2+1} = 3z \Rightarrow \sqrt{3z^2+1}dv + vd\left(\sqrt{3z^2+1}\right) = \sqrt{3z^2+1}dv + v^2dz = 3dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{3-v^2} = \frac{dz}{\sqrt{3z^2+1}}, \ z^2 = \frac{v^2}{9-3v^2}, \ z^2 + 3 = \frac{27-8v^2}{9-3v^2}.$$

Следовательно,

$$J_2 = \int \frac{3(3-v^2)dv}{(27-8v^2)(3-v^2)} = 3\int \frac{dv}{27-8v^2} = \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}v}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}v}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(3z^2+1)}+2\sqrt{2}z}{\sqrt{3(3z^2+1)}-2\sqrt{2}z}\right| = \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt{2}(x+1)}\right|.$$

Итак, окончательно получим

$$\int \frac{2x^4+x^3+x^2+2x-3}{\left(x^3+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx = 2\sqrt{x^2+x+1}+\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{\left(x+1\right)^2}}\right|-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{2\left(1-x\right)^2}}-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3\left(x^2+x+1\right)}+\sqrt{2}\left(x+1\right)}{\sqrt{3\left(x^2+x+1\right)}-\sqrt{2}\left(x+1\right)}\right|+C.$$

Замечание: иногда можно избежать применения и подстановок Эйлера с их громоздкими выкладками, и только что рассмотренных приёмов. Проиллюстрируем это примерами.

Пример 70. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx = \int \frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\left(x+2\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx +$

$$+2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}} -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2}} = \sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{2}x}\right|+C\,.$$

Пример 71.

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{\left(x+\sqrt{1+x+x^2}\right)\left(1+x-\sqrt{1+x+x^2}\right)}{1+2x+x^2-\left(1+x+x^2\right)}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}\left(x+x^2+x\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1+x+x^2}-x\sqrt{1+x+x^2}-1-x-x^2\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right)dx = \int\left(\frac{1+x+x^2}{x\sqrt{1+x+x^2}}-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\ln\left|x\right| = \sqrt{1+x+x^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right|-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right|-\ln|x|+C=$$

$$=\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}}{\left(x+2+2\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}+C\,.$$

Пример 72. $\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\int\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{1-x+1+x+2\sqrt{1-x^2}-2}dx=$

$$=\int\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+C\,.$$

4. Интегрирование иррациональных выражений вида $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$, $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$, $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$, $a=const$

Избавиться от иррациональности позволяют следующие подстановки:

а) $x=a\cdot\operatorname{tg}z \quad \Rightarrow \sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 z\right)}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 x}}=\frac{a}{|\cos x|}$,

$dx=\frac{adz}{\cos^2 z}$ (здесь и далее считаем $a>0$);

б) $x=a\cdot\sin z \quad \left(x=a\cdot\cos z\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2\cdot\left(1-\sin^2 z\right)}=$

$=\sqrt{a^2\cdot\cos^2 z}=a|\cos z|$, $dx=a\cdot\cos z dz$;

в) $x=\frac{a}{\sin z} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 z}-a^2}=\sqrt{\frac{a^2\cdot\left(1-\sin^2 z\right)}{\sin^2 z}}=a|\operatorname{ctg}z|$,

$dx=\frac{-a\cdot\cos z dz}{\sin^2 z}$.

В результате данных подстановок иррациональные выражения преобразуются в тригонометрические, которые иногда удаётся легко проинтегрировать.

Кроме тригонометрических подстановок, в рассмотренных случаях возможны также подстановки с использованием гиперболических функций: $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $dx = a\,\mathrm{ch}\,t dt$, $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2\left(1+\mathrm{sh}^2 t\right)} = a\,\mathrm{ch}\,t$ – для $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$; $x = \dfrac{a}{\mathrm{ch}\,t}$, $dx = -\dfrac{a\,\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^2 t}dt$, $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\right)} = = a\left|\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t}\right| = a\left|\mathrm{th}\,t\right|$ – для $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$; $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $dx = a\,\mathrm{sh}\,t dt$, $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\left(\mathrm{ch}^2 t - 1\right)} = a\left|\mathrm{sh}\,t\right|$ – для $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$.

Пример 73. $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$.

Подстановка Чебышева $z = \sqrt{\dfrac{x^2+4}{x^2}}$, $x = \dfrac{2}{\sqrt{z^2-1}}$, $dx = \dfrac{-2zdz}{\left(z^2-1\right)^{3/2}}$ приводит к интегралу $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = -16\int \dfrac{z^2dz}{\left(z^2-1\right)^3}$. Тригонометрическая подстановка $x = 2\,\mathrm{tg}\,y$, $dx = \dfrac{2dy}{\cos^2 y}$, $\sqrt{x^2+4} = \dfrac{2}{\left|\cos y\right|}$ даёт интеграл $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = 16\int \dfrac{\mathrm{tg}^2 y}{\left|\cos^3 y\right|}dy$.

Используем гиперболические функции: $x = 2\,\mathrm{sh}\,t$, $dx = 2\,\mathrm{ch}\,t dt$, $\sqrt{x^2+4} = 2\,\mathrm{ch}\,t$, поэтому $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = 16\int \mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t dt = = 4\int \mathrm{sh}^2 2t dt = 2\int\left(\mathrm{ch}\,4t - 1\right)dt = \dfrac{\mathrm{sh}\,4t}{2} - 2t.$

Так как

$$\mathrm{sh}\,4t = 4\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{ch}\,2t = 4\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t\left(2\,\mathrm{sh}^2 t + 1\right) = 4\,\mathrm{sh}\,t\left(2\,\mathrm{sh}^2 t + 1\right)\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t} =$$

$$= \frac{x^3+2x}{2}\sqrt{x^2+4},\ t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right),$$

то $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \dfrac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) + C$.

Пример 74. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Подстановка Чебышева $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ приводит к интегралу $-\int\dfrac{y^2dy}{\left(1+y^2\right)^3}$.

Тригонометрическая подстановка $x=\sin t$, $dx=\cos t dt$ дает более простой интеграл:

$$\int\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{4}\int\sin^2 2tdt=\frac{1}{8}\int\left(1-\cos 4t\right)dt=\frac{t}{8}-\frac{\sin 4t}{32}+C .$$

Так как

$$\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=4\sin t\cos t\left(1-2\sin^2 t\right)=4x\left(1-2x^2\right)\sqrt{1-x^2} ,$$

то

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\arcsin x}{8}-\frac{x}{8}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{4}\sqrt{1-x^2}+C .$$

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Определение неопределённого интеграла 3
§ 2. Интегрирование методом замены переменной 7
§ 3. Метод интегрирования по частям 10
§ 4. Интегрирование рациональных функций 16
§ 5. Интегрирование тригонометрических функций 27
§ 6. Интегрирование иррациональных функций 36

Редактор Н.А. Афанасьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 101 от «24» декабря 2013 г. Тираж 50 экз.