ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА ИЗ ДЕФОРМАЦИИ РАСТЯЖЕНИЕМ

Методические указания для выполнения лабораторной работы

Томск
2014

Рассмотрено и утверждено методической комиссией физического факультета

Председатель комиссии В.М. Вымятнин

Описаны основные свойства деформируемого твердого тела, введены основные параметры, характеризующие его деформацию.
Для студентов физических специальностей дневной формы обучения.

СОСТАВИТЕЛЬ доцент И.И. Клыков

Рецензент В.Ф. Нявро

Издание вышло в свет в авторской редакции

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 113 от «26» декабря 2013 г. Тираж 100 экз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА ИЗ ДЕФОРМАЦИИ РАСТЯЖЕНИЕМ

Цель работы: научиться находить модуль Юнга, используя метод зеркала и шкалы для определения абсолютного удлинения проволоки при растяжения.

ТЕОРИЯ РАБОТЫ

Механические свойства твердых тел

Механика описывает упругие свойства тел посредством некоторых эмпирически вводимых упругих постоянных (модуль Юнга, коэффициент Пуассона и др.), различных для различных тел и зависящих от их (физического состояния. Более глубоким является физический подход, рассматривающий явление деформаций с атомистической точки зрения. Этим занимается теория твердого тела. Она позволяет в принципе не только вывести основные уравнения механики деформируемых тел с атомистической точки зрения, но и установить связь упругих постоянных вещества с другими его физическими свойствами.

Деформацией твердого тела называется изменение его формы и/или объема. Упругими называются деформации, исчезающие после прекращения действия приложенных сил. Пластическими (остаточными) деформациями называются такие, которые сохраняются в теле, по крайне мере частично, и после прекращения действия внешних сил.

Мерой деформации считается относительная деформация $\Delta x \;_{x}$, равная отношению абсолютной деформации Δx к первоначальному значению величины x, характеризующей размеры или форму тела. Так относительное удлинение стержня обозначим через

$$\varepsilon = \Delta l \;\; l,$$

где Δl – приращение длины стержня под действием внешней силы.

Механическим напряжением σ называется упругая сила F, приходящаяся на единицу площади сечения тела S:

$$\sigma = F \quad S$$

(измеряется в Н/м^2=Па). При растяжении это напряжение называется *натяжением*, при сжатии *давлением*.

При не слишком больших упругих деформациях относительное удлинение прямо пропорционально напряжению (закон Гука):

$$\sigma = E\varepsilon \ , \qquad (1)$$

где E – модуль Юнга, численно равный напряжению, вызывающему удлинение образца вдвое, то есть

$$\Delta l = l$$

(что в действительности не происходит). График зависимости $\sigma = \sigma \ \ \varepsilon$ при одностороннем растяжении называется *диаграммой растяжения*.

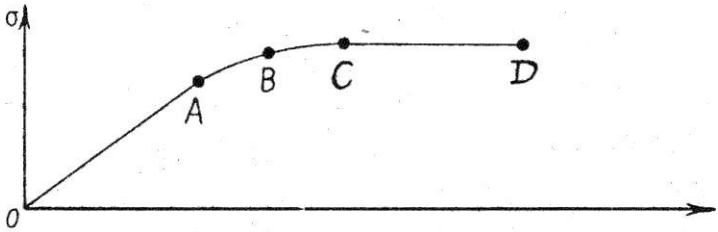

Рис. 1. Диаграмма растяжения.

В линейной области *OA* справедлив закон Гука. Точка *A,* в которой нарушается закон Гука, называется **пределом пропорциональности. Пределом упругости** (точка *B)* называется наибольшее напряжение, при котором еще не возникают остаточные деформации. Области *BC* соответствуют остаточные деформации. **Предел текучести** *C* достигается, когда тело продолжает удлиняться без дальнейшего увеличения напряжения (область *CD* характеризует текучесть). **Пределом прочности** (точка С) называется механическое напряжение, которому соответствует наибольшее выдерживаемая телом нагрузка перед его разрушением.

Остановимся несколько подробнее о достоверности закона Гука (закона прямой пропорциональности). Опыт

показывает, что существует очень много твердых тел, упругая деформация которых заметно не следует закону Гука: резина, кожа, дерево, большинство нековких и литых металлов (например, чугун). С большой точностью опытные данные Иенша для стали дают следующее выражение:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}(1 + æ\sigma \;\; E),$$

где æ – коэффициент, равный для стали от 5 до 7. Порядок отклонения от закона Гука определяется величиной $æ\sigma \;\; E$. Типичные значения для стали: æ = 7; σ = $8 \cdot 10^8$ Па, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Тогда $æ\sigma \;\; E = 0.023$. Даже для неблагоприятных случаев поправка Иенша составляет 2-3% от измеряемой величины упругой деформации.

ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Положим, что тело подвергается медленному растяжению. Выделим в теле элемент объема в виде куба с гранями *l*. На грань элемента, перпендикулярную к направлению растяжения, действует со стороны соседнего элемента сила

$$F = \sigma l^2 = \varepsilon E l^2$$

(в силу малости *l* справедлив закон Гука). При перемещении этого элемента на расстояние *dx* будет совершена работа

$$dA = F dx = \varepsilon E l^2 dx$$

С этим перемещением связано увеличение растяжения на

$$d\varepsilon = dx \;\; l$$

Тогда

$$dA = E l^3 \varepsilon d\varepsilon$$

Интегрируя это выражение на всем пути изменения деформации от 0 до *E*, найдем всю работу, затраченную на деформацию объема l^3:

$$A = E l^3 \;\; {}_0^{\varepsilon} \varepsilon d\varepsilon = l^3 \frac{E\varepsilon^2}{2}, \qquad (3)$$

Эта работа превращается в ту энергию упругой

деформации U, которой обладает выделенный элемент тела, деформированный до растяжения ε. Объемная плотность энергии равна

$$w = \frac{U}{l^3} = \frac{E\varepsilon^2}{2}, \qquad (4)$$

Пользуясь соотношением

$$\sigma = E\varepsilon$$

можно формулу (4) привести к другому виду:

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \qquad (5)$$

Энергия упругой неоднородной деформации определяется интегралом по всему объему тела:

$$U = \int_v w dV = \int_v (E\epsilon^2)/2dV \qquad (6)$$

Энергия упругой однородной деформации имеет вид:

$$U = wV = \frac{E\varepsilon^2}{2} V, \qquad (7)$$

Для однородно растянутого стержня сечения S энергия запишется в виде:

$$U = ES\,\Delta l^2 \;\; 2l, \qquad (8)$$

ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА ПРИ ДЕФОРМАЦИЯХ

Всякое растяжение тела всегда сопровождается соответствующим сокращением его поперечного сечения и, наоборот, сжатие – соответствующим увеличением поперечного сечения. Характеристикой этого изменения поперечных размеров тела является относительное поперечное расширение или сжатие

$$\lambda = (d_1 - d) \;\; d = \Delta d \;\; d$$

где d - поперечный раздел тела до деформации. При растяжении λ<0; при сжатии λ>0. Таким образом, ε и λ всегда различны по знаку. Отношение

$$\nu = -\lambda \;\; \varepsilon$$

называется коэффициентом Пуассона. Коэффициент Пуассона не зависит от размеров тел и для всех тел, сделанных из данного материала, имеет одно и то же значение.

Деформация растяжения и сжатия, вообще говоря, связаны с изменением объема тел. При одностороннем растяжении цилиндр примет объем

$$V = \ l + \Delta l \ \pi \ d + \Delta d \ ^2 = l\pi d^2(1+\varepsilon)(1-\lambda)^2 \cong V_0(1+\varepsilon)(1-2\lambda)$$

где V_0 - объем цилиндра до деформации. Изменение объема составит

$$\Delta V = V_0\varepsilon(1-2\nu), \qquad (9)$$

У всех реальных тел при растяжении объем увеличивается, при сжатии - уменьшается. В силу этого ΔV и ε должны быть одного знака, а для этого должно быть $\nu < 1/2$.

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Джоуль обнаружил, что упругий металлический стержень немного охлаждается, если приложить к нему растягивающую нагрузку, и нагревается, если его быстро разгрузить. Однако при испытании вулканизированного каучука, когда к стержню, изготовленному из этого материала, подвешивался, а затем снимался груз, Джоуль наблюдал соответственно нагревание и охлаждение. В. Томсон (Кельвин) следующим образом описывает некоторые поразительные эксперименты по термоупругости резины: "Слегка зажмите кончиками губ ленточку из каучука и рывком растяните ее – она ощутимо нагреется. Подержите ее некоторое время растянутой, доведя почти до разрыва, и затем быстро дайте сжаться. Совершенно удивительным образом она охладится, причем охлаждение будет ощущаться не только губами, но и пальцами, которыми вы держите резинку".

Изменение температуры упругого стержня, когда его в

упругом диапазоне **мгновенно** нагружают напряжением σ, определяется формулой, предложенной В.Томсоном:

$$\Delta T = -\frac{\alpha T \sigma}{C\rho}$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения, Т – абсолютная температура, c – удельная теплоемкость (Дж/(кг·К), ρ – плотность материала стержня.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Принадлежности к работе: 1) прибор Лермантова, 2) зрительная труба со шкалой, 3) микрометр, 4) рулетка, 5) набор грузов.

Для определения малых удлинений проволоки из растяжения используется прибор Лермантова (Рис.2). Верхний конец проволоки *G* диаметра *d*, изготовленный из исследуемого материала, закреплен в неподвижном кронштейне *A,* а нижний крепится к цилиндру *N,* которым заканчивается шарнирный кронштейн *B*. На цилиндр *N* опирается рычаг *R*, связанный с зеркалом *S*. Удлинение проволоки Δl может быть определено по углу поворота зеркала *S* в зависимости от нагрузки, приложенной к проволоке. Угол поворота зеркала можно определить с помощью зрительной трубы *T* и шкалы *P*, отражение которой в зеркале *S* можно увидеть через трубу *T*. Для выпрямления проволоки *G* служит постоянный груз *Q*. Арретиром *H* освобождают проволоку от нагрузки. Изменение напряжения, действующего на проволоку, достигается последовательным перемещением грузов *V,* подвешенных к подвесу *K* (прикрепленному к верхнему кронштейну *A*), на груз *Q*. Оставшиеся на подвесе *K* грузы *M* необходимо размещать равномерно. Благодаря такой системе кронштейн *A* будет непрерывно находится под влиянием постоянной нагрузки и тем самым на измерениях не будет сказываться деформация кронштейна. (Внимание! Грузы *M* должны находиться только

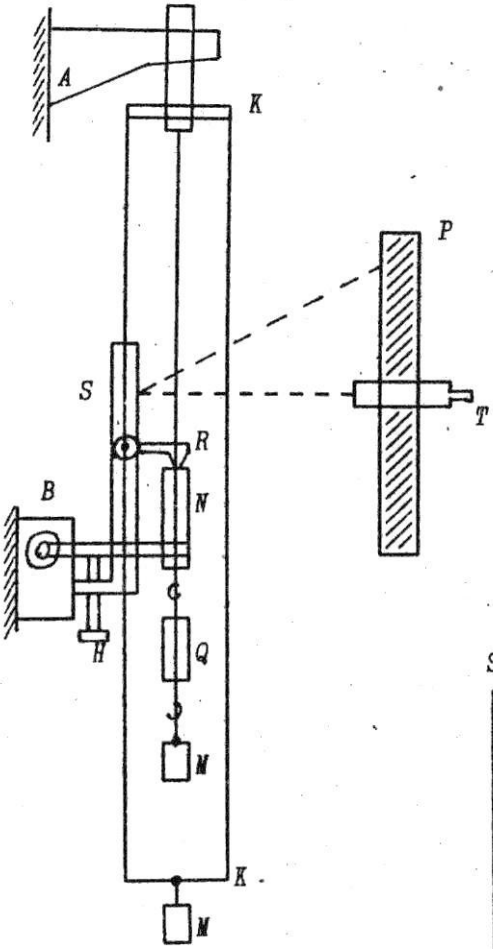

Рис. 2.

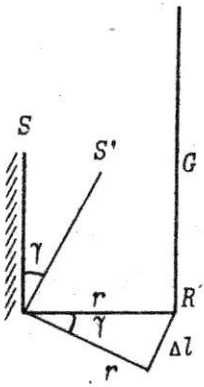

Рис. 3.

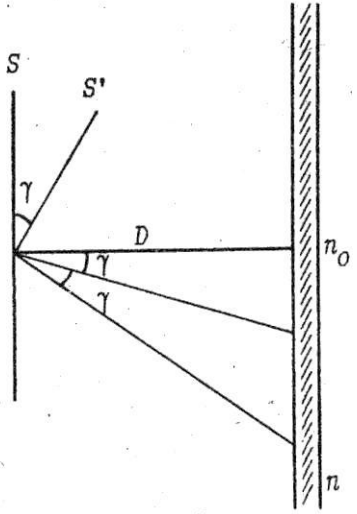

Рис. 4.

на подвесе K либо на грузе Q. Лишь при этом условии возможно получение удовлетворительных результатов).

МЕТОДИКА РАБОТЫ

а) Вывод рабочей формулы

Перепишем закон Гука (1) в более удобной для нас форме:

$$\mathrm{F} = \mathrm{ES}\,\Delta l \quad l\,, \qquad (11)$$

Из этой формулы следует, что для определения модуля Юнга E необходимо знать абсолютное удлинение проволоки Δl, ее начальную длину l, площадь поперечного сечения S и растягивающую силу F.

Начальная длина l дается как постоянная прибора, величину нагрузки

$$F=mg$$

можно подсчитать из обозначений на грузах, площадь поперечного сечения

$$S=\pi d^2/4,$$

где d - диаметр исследуемой проволоки.

Абсолютное удлинение проволоки определяют методом зеркала и шкалы. При удлинении проволоки на величину Δl рычаг R поворачивается вместе с зеркалом на некоторый угол γ. Из рис. 3 видно, что

$$\sin(\gamma/2) = \Delta l \quad 2\mathrm{r}$$

Так как угол γ мал, то

$$\sin\gamma \cong \gamma$$

и

$$\Delta l \cong \gamma r$$

где r - длина рычага (постоянная прибора). Угол γ определяют с помощью шкалы и трубы. Обозначим расстояние от зеркала до шкалы через D. Если в первоначальном состоянии (проволока раззаретирована и

находится под действием только постоянного груза Q) зеркало S параллельно шкале (Рис. 4.), то в окуляре трубы видно некоторое деление шкалы n_0, принимаемое за нулевое. При повороте зеркала на угол γ нормаль к зеркалу повернется также на угол γ. Луч, падающий на зеркало от шкалы, повернется на угол 2γ (по закону отражения) и в окуляре трубы будет видно деление шкалы n, соответствующее приложенной нагрузке. Из рис.4 видно, что

$$tg\gamma = \Delta n/2D$$

где $n - n_0 = \Delta n$ – разность отсчетов по шкале. Вследствие малости угла γ можно считать, что

$$\mathrm{tg}\,\gamma \cong \gamma$$

и тогда

$$\gamma \cong \Delta n/2D$$

Подставляя это значение для γ в выражение для удлинения проволоки Δl, получим

$$\Delta l = \Delta n r/2D$$

Используя полученные значения Δl и S, найдем рабочую формулу для определения модуля Юнга:

$$E = \frac{8Dl}{\pi d^2 r} \cdot \frac{mg}{\Delta n}, \qquad (12)$$

б) Порядок работы

Настройка оптического устройства.

Поместить половину грузов на подвес К, а другую половину к грузу Q. Плавно разарретировать цилиндрик N, повернув винт Н. Встать напротив зеркальца и постараться увидеть свой глаз; поместить штатив с трубой на этой линии; сфокусировать трубу на оправе зеркальца, затем сфокусировать за зеркальцем, чтобы отчетливо увидеть изображение шкалы. Шкалу устанавливают так, чтобы

была видна ее середина.

Проведение измерений.

После этого помещают **(аккуратно!)** все грузы M на подвес K и отмечают нулевую точку на шкале n_0.

Последовательно нагружая проволоку грузами один за другим, снимая их с подвеса K и прикрепляя к грузу Q производят отсчеты делений шкалы n_i, наблюдаемых в трубу. Так проделывают для всех грузов, снимая их с подвеса, а после этого так же последовательно идут в обратном порядке, снимая грузы и перекладывая их на подвес.

Если нулевая точка не совпадает с прежней, то берут среднее значение из двух показаний; так же поступают с каждыми двумя отсчетами, полученными при одинаковых нагрузках.

Диаметр проволоки d измеряется микрометром несколько раз в разных точках по длине проволоки. Расстояние от зеркала до шкалы D измеряется рулеткой несколько раз. Величины l и r указаны на установке, массы m грузов M указаны на них самих.

в) Обработка данных.

В этой работе целесообразно использовать метод наименьших квадратов. Перепишем формулу (12), явно выразив величину деформации Δn_i от нагрузки m_i:

$$\Delta n_i = \frac{8Dlg}{E\pi d^2 r} \cdot m_i = \Gamma \cdot m_i = \Gamma \cdot m_{0i}, \quad (13)$$

где m_{0i} - масса отдельного грузика (если они все равны по массе), $i = 1,2, .,., N$, N - число грузов.

Если представить на графике зависимость (13), то экспериментальные точки должны располагаться вблизи прямой, проходящей через начало координат и имеющей тангенс угла наклона к оси абсцисс, равный Г. Метод наименьших квадратов дает следующую зависимость:

$$tg\beta = \Gamma = \frac{{}_i m_i \Delta n_i}{{}_i m_i^2} = \frac{6 \quad {}_i i \Delta n_i}{m_0 N(N+1)(2N+1)}, \qquad (14)$$

Определив из (14) коэффициент Г и сравнив его с Г, определенным из графика, получим рабочую формулу:

$$E = \frac{8Dlg}{\Gamma \pi d^2 r}, \qquad (15)$$

г) Вычисление ошибок.

Метод наименьших квадратов для доверительного интервала тангенса угла наклона прямой, **проходящей через начало координат,** дает

$$\Delta\Gamma = t_{N-1} \quad \frac{{}_i m_i^2 \quad {}_i \Delta n_i^2 - (\quad {}_i m_i \Delta n_i)^2}{(N-1)(\quad {}_i m_i^2)^2} \quad {}^{1/2}, \qquad (16)$$

где t_{N-1} - коэффициент Стьюдента для $(N-1)$ степеней свободы.

Обратите внимание на то, что используется выражение (N - 1), а не (N - 2), так как нулевая точка графика жестко фиксирована.

Упрощая, получим

$$\Delta\Gamma = \frac{6\, t_{N-1}}{m_0 N \quad N+1 \quad 2N+1} \quad \frac{N \quad N+1 \quad 2N+1}{6 \quad N-1} \quad {}_i \Delta n_i^2 - (\quad {}_i i \Delta n_i)^2 \quad {}^{\frac{1}{2}}$$

Учитывая, что измерение величин (d, r и D) производится с некоторой ошибкой, получим для относительной ошибки модуля Юнга:

$$\frac{\Delta E}{E} = \quad \frac{\Delta D}{D} \quad {}^2 + \frac{2\Delta d}{Dd} \quad {}^2 + \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} \quad {}^2 + \frac{\Delta r}{r} \quad {}^2 \quad {}^{1/2}, \qquad (17)$$

где ΔD и Δd есть ошибка прибора (рулетки и микрометра).

Определяя из (17) абсолютную ошибку ΔE**,** окончательный результат записывают в виде

$$E = \mathrm{E} + \Delta E.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Пояснить диаграмму растяжения. Что называется пределами упругости, пропорциональности, текучести, прочности?
2. В чем заключается принцип суперпозиции деформаций? Справедлив ли он для всей диаграммы растяжения?
3. Пояснить физический смысл модуля Юнга, используя диаграмму растяжения. Для какого участка диаграммы модуль Юнга постоянен?
4. Оцените отклонение от закона пропорциональности в данном эксперименте, используя формулу (2).
5. Какую ошибку вносят приближения $\mathrm{tg}\,\gamma \cong \gamma$ и $\sin\gamma \cong \gamma$? Получите точную формулу

$$\frac{\Delta l}{r} = 2\sin\ \frac{1}{2} arctg\ \frac{\Delta n}{2D} \cong \frac{\Delta n}{2D}$$

   Какова ошибка данного приближения? Сравните эту ошибку с ошибкой вопроса (4).
6. Почему необходимо, чтобы в приборе Лермантова грузы *m* находились только на подвесе кронштейна, либо на грузе *Q*?
7. Оцените поправку для относительного удлинения *E* в данном эксперименте, обусловленную собственным весом проволоки.
8. Почему на измерительной шкале цифры нанесены зеркально? Существует ли ошибка отсчета в данном эксперименте, обусловленная параллаксом?
9. Какая из экспериментально определяемых величин (D, l, d, r, m, Δn) вносит наибольший вклад в ошибку определения *E?*
10. Если погрузить прибор Лермантова в воду, то как это скажется на измерениях? Какие поправки

необходимо ввести? Изменится ли фокусировка трубы?

11. Обсудите следующую методику измерения: расстояние от трубы до зеркала D измеряется с точностью до нескольких сантиметров. Гораздо точнее можно измерить расстояние между двумя последовательными положениями трубы $D1$ и $D2$ при той же нагрузке проволоки. Тогда

$$D1 = (\ D1 - D2\ \ \Delta n_1)/(n_2 - n_1)$$

Даст ли этот способ более точное определение D?

12. Получите формулу (14) для определения Γ методом наименьших квадратов. Чему равна размерность Γ?
13. Нагревается или охлаждается проволока с увеличением нагрузки? В каком месте проволоки изменение температуры максимально?
14. Какую форму принимает вертикально висящий стержень под действием собственного веса? Деформация упругая.
15. Найти относительное удлинение ε вертикально подвешенного стержня под действием собственного веса mg.
16. Найти энергию упругой деформации U, возникающую в вертикально подвешенном стержне под действием собственного веса.
17. Тонкий стержень длины l равномерно вращается вокруг перпендикулярной ему оси, проходящей через конец стержня, с угловой скоростью w. Зная поперечное сечение стержня S, модуль Юнга E, найти удлинение стержня Δl, энергию упругой деформации U, изменение объема ΔV, плотность энергии упругой деформации w.
18. Какую работу может совершить при нагревании на $\Delta T = 200°K$ медный стержень ($E = 1.18 \cdot 10^{11}$ Па) длины l=1 м и площади поперечного сечения

S = 10 мм^2. Плотность меди ρ = 8.6·10^3 кг/м^3, удельная теплоемкость меди – c = 395 Дж/(кг·К), температурный коэффициент линейного расширения α = 1.6·10^{-5} К$^{-1}$. Чему равен к.п.д. этого процесса?

19. Между двумя неподвижными жесткими стенками вставлен без зазора металлический стержень, сечением S = 1 см^2 . С какой силой F стержень будет действовать на стенки, если его нагреть на Δt= 50°С? Температурный коэффициент линейного расширения металла α = 1.1 10^{-5} К$^{-1}$, модуль Юнга E = 2·10^{11}Па.
20. Медный стержень длины l = 1 м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. При какой частоте вращения w стержень разорвется, если предел прочности меди на разрыв $\sigma_{пр}$ = 3·10^8 Па?
21. Почему в законе Гука не принимается во внимание атомарная структура вещества?
22. Чему равен коэффициент Пуассона для абсолютно твердого тела? Модуль Юнга?
23. Справедлива ли формула (6) для энергии упругой деформации за пределом пропорциональности?

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В., Общий курс физики, 3-е изд.,-М: Наука, 1989; т.1: Механика. - 1989. - 576 с.
2. Физический практикум, Механика и молекулярная физика, под ред. Ивероновой В.И. Изд. 2-е,-М.: Наука, 1967, - 352 с.
3. Китаева Л.П., Рекомендации по оценке погрешностей измерений в физическом практикуме,-Томск: ТГУ, 1983,-72с.