УДК 517.986.6, 517.968.74

А.И. БРЕЕВ,**, М.М. ГОНЧАРОВСКИЙ***, И.В. ШИРОКОВ****

УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА – ГОРДОНА С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА НА КОММУТАТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКОЙ[1]

Построено параметрическое семейство частных решений уравнения Клейна – Гордона с нелокальной нелинейностью на коммутативных однородных пространствах при помощи метода орбит. Рассмотрено нелинейное уравнение Клейна – Гордона на плоскости, на которой действует группа E(2).

Ключевые слова: *метод орбит, нелинейное уравнение Клейна – Гордона, однородное пространство.*

Введение

Нелинейные уравнения математической физики являются основой описания широкого класса физических явлений. Особый интерес представляют уравнения в многомерных пространствах с переменными коэффициентами (внешними полями) и различными видами нелинейности. Разработка аналитических методов интегрирования таких уравнений представляет актуальную проблему математической физики.

В настоящей работе рассматривается уравнение Клейна – Гордона с нелокальной нелинейностью специального вида на коммутативных однородных пространствах с инвариантной метрикой. Уравнение имеет лагранжеву форму и может быть получено вариацией соответствующего действия на однородном пространстве. Нелокальный член обладает тем свойством, что данное многомерное интегродифференциальное уравнение с переменными коэффициентами является интегрируемым. В частном случае, когда однородное пространство является групповым многообразием, данное нелинейное уравнение сводится к интегродифференциальному уравнению, рассмотренному в работе [1]. Для построения параметрического семейства частных решений используется гармонический анализ на однородных пространствах, основанный на методе K-орбит [2].

Отметим, что метод орбит применяется в методе некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [3, 4]. В работах [5, 6] при помощи данного метода рассматривался эффект поляризации вакуума на основе решений уравнений Клейна – Гордона и Дирака на группах Ли и однородных пространствах. Использование метода орбит позволяет учесть некоммутативные симметрии уравнения и редуцировать исходное уравнение к более простому уравнению на K-орбите с меньшим количеством независимых переменных.

В первых двух пунктах работы кратко изложены основы метода орбит и гармонического анализа на коммутативных однородных пространствах, следуя в основном работам [7–9]. В третьем пункте проводится некоммутативная редукция нелинейного интегродифференциального уравнения Клейна – Гордона к интегральному уравнению на K-орбите. Показано, что интегрирование уравнения сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения на комплексную функцию от времени. Построено параметрическое семейство частных решений, зависящих от времени по гармоническому закону.

В четвертом пункте рассматривается нелинейное уравнение Клейна – Гордона на плоскости, на которой действует группа движений E(2). Стоит отметить, что нелокальная нелинейность существенно зависит от преобразований группы Ли, действующей на однородном пространстве. В работе [10] приведены солитонные решения для нелинейного уравнения Шредингера на плоскости с нелинейностью, соответствующей абелевой группе R^2.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракты П691; П789, Минобрнауки России по гранту № 14.B37.21.0911 и госзаданию «Наука», контракт № 1.604.2011. Также работа выполнена частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

1. Метод орбит. λ-представление

Пусть группа Ли G действует на сопряженном пространстве L^* коприсоединенным представлением Ad^*: $G\times L^*\to L^*$. Данное действие расслаивает L^* на K-орбиты размерности $\dim L - \mathrm{ind}L - 2k$, где число k принимает значения от 0 до $(\dim L - \mathrm{ind}L)/2$. *Индекс* алгебры $\mathrm{ind}L$ определяется как количество независимых функций Казимира на сопряженном пространстве L^* относительно скобки Пуассона – Ли $\{,\}^{\mathrm{Lie}}$. Коалгебра L^* является объединением связных инвариантных алгебраических поверхностей $M_{(s)}$, где каждая связная поверхность $M_{(s)}$ является объединением K-орбит размерности $\dim L - \mathrm{ind}L - 2s$.

Непостоянные на $M_{(s)}$ функции $K^{(s)}{}_{\mu}(f)$, коммутирующие с любой функцией на $M_{(s)}$, называются *функциями Казимира* (s)*-типа*. Число $r_{(s)}$ функционально независимых функций Казимира (s)-типа совпадает с размерностью пространства $\dim M_{(s)} = r_{(s)}$. K-орбита называется *орбитой s-типа*, если $O_\lambda\in M_{(s)}$, а число s – *степенью вырождения орбиты*. K-орбиты с нулевой степенью вырождения называются *невырожденными*, а остальные – *сингулярными*. Через $F^{(s)}{}_{\alpha}(f)$ ($\alpha = 1, \ldots, \dim L - r_{(s)}$) обозначим независимый набор функций, определяющих поверхность $M_{(s)}$.

Пусть далее O_λ – K-орбита группы Ли G s-типа, содержащая ковектор λ. Форма Кириллова ω_λ задает на K-орбите O_λ симплектическую структуру. Введем на K-орбите канонические координаты Дарбу $(p, q)\in P\times Q$, в которых форма Кириллова ω_λ принимает канонический вид: $\omega_\lambda = dp^a\wedge dq_a$, $a = 1, \ldots, 1/2 \dim O_\lambda$. Очевидно, что области P и Q являются лагранжевыми подмногообразиями размерности $1/2 \dim O_\lambda$. Определим *каноническое вложение* f: $O_\lambda\to L^*$, когда ковектору $f\in L^*$ставятся в соответствие его канонические координаты на соответствующей K-орбите. Каноническое вложение однозначно определяется функциями $f_X(p, q, \lambda)$, $X\in L$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\{f_X, f_Y\}^{\mathrm{Lie}} = f_{[X,Y]}, \quad f_X(0,0,\lambda) = \lambda(X), \quad X, Y\in L .$$

Так как $f\in M_{(s)}$, то в случае сингулярных K-орбит каноническое вложение также должно удовлетворять условию $F^{(s)}{}_{\alpha}(f) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, \dim L - r_{(s)}$. Перейдем от алгебры Ли L к соответствующему комплексному расширению L_{C} и рассмотрим каноническое вложение, линейное по переменным p:

$$f_X(q,p,\lambda) = \alpha^a_X(q)p_a + \chi_X(q,\lambda), \quad X\in L_{\mathrm{C}}, \quad a = 1,\ldots,\dim Q . \tag{1}$$

Для существования линейного канонического вложения (1) орбиты O_λ необходимо и достаточно, чтобы функционал λ допускал *поляризацию* $\boldsymbol{n}\subset L$ (см. [11]). Напомним, что поляризацией $\boldsymbol{n}$ функционала λ называется подалгебра в L_{C} размерности $\dim\boldsymbol{n} = \dim L - 1/2 \dim O_\lambda$, подчиненная функционалу λ: $\langle\lambda, [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}]\rangle = 0$. Отметим, что поляризация $\boldsymbol{n}$ является подалгеброй изотропии алгебры L_{C} локальной группы G_{C}, действующей на локальном однородном пространстве $Q \approx G_{\mathrm{C}}/\exp(\boldsymbol{n})$.

Проведем процедуру квантования K-орбит, которое заключается в сопоставлении каждому спектральному типу орбит специального представления алгебры Ли. Функциям канонического вложения $f_X(p, q, \lambda)$ соответствуют операторы $\hat{f}_X(q,\lambda) = f_X(-i\partial_q, q, \lambda)$. Данная процедура квантования однозначна при наложении условия

$$i[\hat{f}_X, \hat{f}_Y] = \hat{f}_{[X,Y]}, \quad X, Y\in L.$$

Операторы $l_X(q,\lambda)\equiv i\hat{f}(q,\lambda)$ реализуют неприводимое представление алгебры Ли L в пространстве гладких функций $\mathrm{L}_2(Q, \boldsymbol{n}, \lambda)$, которое называется λ-представлением алгебры Ли.

Введем на многообразии Q меру $d\mu_0(q)$ и скалярное произведение

$$(\psi_1,\psi_2) = \int_Q \overline{\psi_1(q)}\psi_2(q)d\mu(q), \quad d\mu(q) = \Delta(q)d\mu_0(q),$$

где $\Delta(q) = \Delta(s(q), e_H)$, $\Delta(g)$ – модуль группы Ли G, s: $Q\to G_{\mathrm{C}}$ – гладкое сечение расслоения L_{C} с базой Q и слоем $\exp(\boldsymbol{n})$. Потребуем, чтобы операторы λ-представления были косоэрмитовы относительно меры $d\mu_0(q)$. Для выполнения этого условия достаточно ввести соответствующий «квантовый сдвиг» на вещественный вектор β в операторы λ-представления: $l_X(q, \lambda') = l_X(q, \lambda+i\beta)$.

Введем поднятие λ-представления алгебры Ли L до локального представления ее группы Ли G:

$$T^\lambda(g)\varphi(q) = \int D^\lambda_{q\overline{q'}}(g)\varphi(q')d\mu(q'), \quad \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} T^\lambda(\exp(tX))\varphi(q) = l_X(q,\lambda)\varphi(q),$$

где $\varphi\in\mathrm{L}_2(Q, d\mu(q))$. Можно показать, что обобщенные функции $D^\lambda_{q\overline{q'}}(g)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$[\eta_X(g)+l_X(q,\lambda)]D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)=0,\quad [\xi_X(g)-\overline{l^{\dagger}_X(q',\lambda)}]D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)=0, \tag{2}$$

где $\xi_X(x)$, $\eta_X(x)$ – левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля на группе Ли G соответственно ($X\in L$).

Из требования однозначной определенности функций $D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)$ на группе Ли G следует условие Кириллова целочисленности орбиты O_λ [2]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\omega_\lambda = n_\gamma \in Z,\quad \gamma\in H_2(O_\lambda).$$

Инвариантному подпространству $M_{(s)}$ пространства L^* сопоставим инвариантное функциональное подпространство $L_{(s)}$ = $\{\varphi\in \mathrm{L}_2(G,\ d\mu(g))\,|\,F^{(s)}{}_{\alpha}(\xi)\varphi(g)=0\}$ пространства $\mathrm{L}_2(G,\ d\mu(g))$. Семейство обобщенных функций $D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)$ обладает свойствами полноты и ортогональности, поэтому для каждой функции $\varphi(g)$ из $L_{(s)}$ определено прямое и обратное преобразование Фурье:

$$\psi(q,q',\lambda)=\Delta^{-1}(q)\int\varphi(g)\overline{D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g^{-1})}d\mu(g)\,; \tag{3}$$

$$\varphi(g)=\int\psi(q,q',\lambda)D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g^{-1})d\mu(q)d\mu(q')d\mu(\lambda), \tag{4}$$

где $d\mu(\lambda)$ – спектральная мера операторов Казимира $K_\mu(\eta)$ на группе Ли G; $d\mu(g)$ – правая мера Хаара на группе Ли G. Для невырожденных орбит прямое и обратное преобразование (3), (4) определено на всем пространстве $L_{(0)}=\mathrm{L}_2(G,\ d\mu(g))$.

2. Гармонический анализ на коммутативных пространствах

Мы будем рассматривать правое однородное пространство M, которое допускает группу движений G. Любая точка $x\in M$ однородного пространства определяет подгруппу изотропии $H_x\in G$, оставляющую данную точку на месте. Пусть H – замкнутая стационарная подгруппа некоторой точки $x_0\in M$, $\boldsymbol{h}$ – ее алгебра Ли. Однородное пространство M диффеоморфно фактор-многообразию G/H правых смежных классов группы Ли G по подгруппе изотропии H, а группу преобразований G можно рассматривать как расслоенное многообразие расслоения (G,π,M,H) со структурной группой H, базой M и канонической проекцией π: $G\to M$. Причем линейное пространство алгебры Ли L допускает разложение в прямую сумму подпространств $L=\boldsymbol{h}\oplus\boldsymbol{m}$, где $\boldsymbol{m}\approx T_{x_0}M$ – дополнение к $\boldsymbol{h}$.

Над областями тривиализации $U\in M$ в расслоенном пространстве G введем координаты $g^A=$ $=(x^a,\ h^\alpha)$ прямого произведения $U\times H$ ($a=1,\ \ldots,\ \dim M$, $\alpha=\dim M+1,\ \ldots,\ \dim G$). При этом координаты произвольной точки $g\in G$ можно представить в виде $g=hs(x)$, где s: $G\to M$ – локальное гладкое сечение расслоения G. Здесь и далее латинские индексы в нижнем регистре принимают значения от 1 до $\dim M$.

Максимальная размерность К-орбит (s)-типа, имеющих ненулевое пересечение с подпространством $\boldsymbol{h}^{\perp}=\{f\in L^*, f(X)=0,\ X\in\boldsymbol{h}\}$ равна $\dim L-\mathrm{ind}L-s_M$.

Число s_M называется *степенью вырождения* однородного пространства M. В работе [9] показано, что набор из i_M независимых тождеств на однородном пространстве M состоит из функций $\Gamma(f)=\{F^{(s_M)}_{\alpha}(f),\tilde{K}^{(s_M)}_{\mu}(f)\}$, где $\tilde{K}^{(s_M)}_{\mu}(f)$ – *тривиальные* функции Казимира (s_M)-типа (тривиальные функции Казимира равны нулю для всех $f\in\boldsymbol{h}^{\perp}$). Число i_M называется *индексом однородного пространства* M. Индекс и степень вырождения однородного пространства определяются структурными константами алгебры L группы преобразований и подалгебры изотропии $\boldsymbol{h}$:

$$s_M=\frac{1}{2}\sup_{\lambda\in\boldsymbol{h}^{\perp}}\mathrm{rank}\langle\lambda,[L,L]\rangle-\frac{1}{2}\mathrm{ind}L,\quad i_M=\dim\boldsymbol{h}-\mathrm{rank}\langle\lambda,[L,\boldsymbol{h}]\rangle,$$

где λ – элемент общего положения пространства $\boldsymbol{h}^{\perp}$.

Дефект однородного пространства определяется характеристиками алгебры Ли группы преобразований и F-алгебры инвариантных операторов:

$$d(M)=\dim M+i_M-s_M-\frac{1}{2}(\dim L+\mathrm{ind}\,L).$$

Каждой группе Ли G, действующей на однородном пространстве M, соответствует алгебра инвариантных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, коммутирующих с генераторами группы. Однородные пространства, для которых дефект равен нулю, называются *коммутативными* пространствами, так как алгебра инвариантных операторов для таких пространств коммутативна.

Рассмотрим процедуру построения гармонического анализа на однородном пространстве M с нулевым дефектом, следуя в основном работам [7, 8]. Мы будем рассматривать гармонический анализ функций, принадлежащих гильбертову пространству $\mathrm{L}_2(M, d\mu(x))$, снабженному римановой мерой $d\mu(x)$, построенной по инвариантной метрике на однородном пространстве M.

Любой гладкой функции $\varphi(g)$ на группе Ли G, постоянной на слоях H главного расслоения (G, π, M, H), однозначно соответствует функция $(\pi^*\varphi)(x) = \varphi(s(x))$ на однородном пространстве M (проекция функции φ на M). Другими словами, имеет место изоморфизм $C^\infty(M) \approx F_G$, где функциональное пространство F_G, ввиду связности группы Ли H, определяется равенством

$$F_G \equiv \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \eta_X \varphi(g) = 0, \quad X \in \boldsymbol{h}, \quad g \in G\}.$$

Так как $F^{(sM)}(\xi) = 0$, то пространство $\mathrm{L}_2(M, d\mu(x))$ изоморфно пространству $L_{(sM)} \cap F_G$. Таким образом, гармонический анализ на однородном пространстве сводится к гармоническому анализу в пространстве $L_{(sM)}$.

Инвариантному пространству $L_{(sM)}$ соответствует инвариантное подпространство $M_{(sM)}$, состоящее из К-орбит $O_\lambda^{(sM)}$, представители которых лежат в $\boldsymbol{h}^\perp$. Проведем квантование К-орбит и построим λ-представление алгебры L, соответствующее К-орбите $O_\lambda^{(sM)}$. Так как $\lambda \in \boldsymbol{h}^\perp$, то на параметры λ налагается условие $\tilde{K}_\mu^{(s_P)}(\lambda) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, r_{s_P}$. λ-представление, удовлетворяющее данному требованию, будем называть *соответствующим однородному пространству M*.

Поднимем λ-представление алгебры L (s_M)-типа, соответствующее однородному пространству M, до представления группы Ли G. Набор функций $D^\lambda_{q\bar{q}'}(g^{-1})$ в силу полноты и ортогональности образует базис функционального пространства $L_{(sM)}$.

Определим параметрическое семейство функций $D_q^\lambda(x)$, задающих базис в функциональном пространстве $\mathrm{L}_2(M, d\mu(x)) \approx L_{(sM)} \cap F_G$, в виде разложения по функциям $D^\lambda_{q\bar{q}}(g^{-1})$:

$$D_q^\lambda(x) = \int c_\lambda(q') D^\lambda_{q\bar{q}'}(g^{-1}) d\mu(q'), \quad g = (x, h). \tag{5}$$

Для того чтобы правая часть выражения (5) принадлежала классу функций F_G, на коэффициенты разложения необходимо наложить условие

$$l_X(q', \lambda) c_\lambda(q') = 0, \quad X \in \boldsymbol{h}. \tag{6}$$

Коэффициенты $c_\lambda(q')$ определяются из (6) с точностью до постоянного множителя. Функции $D_q^\lambda(x)$ образуют полный и ортогональный набор, и любую функцию $\varphi \in \mathrm{L}_2(M, d\mu(x))$ можно разложить в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \int \psi(q, \lambda) D_q^\lambda(x) d\mu(x).$$

Для коммутативных пространств алгебра инвариантных операторов коммутативна и система (6) всегда имеет решение. В общем случае, когда однородное пространство имеет ненулевой дефект, при построении гармонического анализа необходимо учитывать алгебру инвариантных операторов однородного пространства.

3. Уравнение Клейна – Гордона с нелокальной нелинейностью на коммутативных пространствах

Компоненты метрического тензора инвариантной метрики на однородном пространстве M определяются выражением

$$\gamma^{ij}(x) = G^{ab} \eta_a^i(x, h) \eta_b^j(x, h), \tag{7}$$

где G^{ab} – компоненты 2-формы $\mathbf{G}$, задающей метрику и удовлетворяющей условию $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантности:

$$G^{ad} C^c_{\alpha a} + G^{cb} C^d_{\alpha b} = 0, \tag{8}$$

где $C_{AB}^{D} = ([e_A, e_B])^D$ – структурные константы алгебры Ли L. Условие (8) обеспечивает независимость определения G-инвариантной метрики при действии группы H левыми сдвигами на пространстве расслоения G. Латинские индексы в (7), (8) принимают значения от 1 до $\dim M$, греческие индексы – от $\dim M + 1$ до $\dim G$.

Оператор Лапласа инвариантной метрики на однородном пространстве M выражается полиномиально через правоинвариантные векторные поля:

$$\Delta_M = G^{ab}(\eta_a \eta_b - 2c_a \eta_b), \quad c_a \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(ad_a|_m).$$

Рассмотрим уравнение скалярного поля на однородном пространстве:

$$\left(\partial_t^2 - \Delta + m^2\right)\varphi(t,x) - \varepsilon^2 H[\varphi]\varphi(t,x) = 0, \quad \varepsilon = \mathrm{const}, \tag{9}$$

с нелокальным взаимодействием вида

$$H[\varphi]\varphi(t,x) = \int \varphi(t,x_1)\varphi(t,x_2)\overline{\varphi(t,x_3)}\delta(x(g_3 g_2^{-1}), x_1) d\mu(x_1) d\mu(g_2) d\mu(g_3), \tag{10}$$

где $\delta(x,\ x')$ – дельта-функция Дирака относительно римановой меры на однородном пространстве M. Уравнение (9) имеет лагранжеву форму и его можно получить как вариацию от действия

$$S = \int \left(\partial_t \varphi(t,x)\overline{\partial_t \varphi(t,x)} - G^{ab}\eta_a \varphi(t,x)\overline{\eta_b \varphi(t,x)} - m^2 \varphi(t,x)\overline{\varphi(t,x)}\right) d\mu(x) dt +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int \varphi(t,x_1)\varphi(t,x_2)\overline{\varphi(t,x_3)\varphi(t,x_4)}\,\delta(x(g_4 g_3 g_2^{-1}), x_1) d\mu(x_1) d\mu(g_2) d\mu(g_3) d\mu(g_4).$$

Частное решение уравнения (9) будем искать в виде

$$\varphi(t,x) = \int_{J'} \psi_\lambda(t,q) D_q^\lambda(x) d\mu(q) d\mu(\lambda), \quad J' \subseteq J. \tag{11}$$

Подмножество J' ненулевой меры сконструируем как объединение непересекающихся открытых связных подмножеств из J, с условием сходимости интеграла по спектральной мере $d\mu(\lambda)$.

Для однородного пространства нулевого дефекта оператор Лапласа $H(\eta)$ относительно инвариантной метрики является оператором Казимира. Поэтому при подстановке (11) в линейную часть уравнения (9) оператор Лапласа переходит в функцию, зависящую только от параметра орбиты: $H(l(q',\lambda)) = \kappa(\lambda)$.

Редуцируем нелинейную часть уравнения (10). Для этого подставим (11) в (10):

$$H[\varphi]\varphi(t,x) = \int \psi_{\lambda_1}(t,q_1)\psi_{\lambda_2}(t,q_2)\overline{\psi_{\lambda_3}(t,q_3)} D_{q_1}^{\lambda_1}(x(g_3 g_2^{-1})) D_{q_2}^{\lambda_2}(x_2)\overline{D_{q_3}^{\lambda_3}(x_3)} \times$$
$$\times d\mu(q_1) d\mu(q_2) d\mu(q_3) d\mu(\lambda_1) d\mu(\lambda_2) d\mu(\lambda_3) d\mu(g_2) d\mu(g_3).$$

Пользуясь свойствами λ-представления, функцию $D_{q_1}^{\lambda_1}(x(g_3 g_2^{-1}))$ можно представить в форме

$$D_{q_1}^{\lambda_1}(x(g_3 g_2^{-1})) = \int D_{q_1''}^{\lambda_1}(x) D_{q_1 \overline{q''}_1}^{\lambda_1}(g_2 g_3^{-1}) d\mu(q_1'') =$$
$$= \int D_{q_1''}^{\lambda_1}(x) D_{q_1 \overline{q'}_1}^{\lambda_1}(g_2) D_{q_1' \overline{q''}_1}^{\lambda_1}(g_3^{-1}) d\mu(q_1') d\mu(q_1'').$$

Подставляя данное выражение в нелинейную часть (10) и учитывая свойства ортогональности

$$\int D_{q_2}^{\lambda_2}(x_2) D_{q_1 \overline{q}_1'}^{\lambda_1}(g_2) d\mu(g_2) = c_{\lambda_1}(q_1)\Delta(q_1)\delta(q_2, \overline{q_1'})\delta(\lambda_1,\lambda_2),$$

$$\int \overline{D_{q_3}^{\lambda_3}(x_3)} D_{q_2 \overline{q}_1''}^{\lambda_1}(g_3^{-1}) d\mu(g_3) = \overline{c_{\lambda_1}(q_1'')}\Delta(q_2)\delta(q_2, \overline{q_3})\delta(\lambda_1,\lambda_3),$$

получим

$$H[\varphi]\varphi(t,x) = \int H_Q[\psi]\psi_\lambda(t,q) D_q^\lambda(x) d\mu(q) d\mu(\lambda),$$

$$H_Q[\psi]\psi_\lambda(t,q) = \overline{c_\lambda(q)}\int c_\lambda(q_1)\psi_\lambda(t,q_1)\Delta(q_1) d\mu(q_1)\int |\psi_\lambda(t,q_2)|^2 \Delta(q_2) d\mu(q_2).$$

Таким образом, исходное уравнение редуцируется к уравнению на функцию $\psi_\lambda(t,q)$:

$$\left(\partial_t^2 - \kappa(\lambda) + m^2\right)\psi_\lambda(t,q) = \varepsilon^2 H_Q[\psi]\psi_\lambda(t,q). \tag{12}$$

Из вида уравнения (12) следует, что его решение представляется в виде произведения $\psi_\lambda(t,q)=\overline{c_\lambda(q)}f_\lambda(t)$. На функцию $f_\lambda(t)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f''_\lambda(t)+(m^2-\kappa(\lambda))f_\lambda(t)=\varepsilon^2 I^2(\lambda)\,|\,f_\lambda(t)|^2\,f_\lambda(t),\quad I(\lambda)=\int\Delta(q)\,|\,c_\lambda(q)|^2\,d\mu(q). \tag{13}$$

Решение исходного интегродифференциального уравнения (9) выражается через $f_\lambda(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t,x)=\int_{J'}f_\lambda(t)\chi^\lambda(x)d\mu(\lambda),\quad \chi^\lambda(x)=\int\overline{c_\lambda(q)}D_q^\lambda(x)d\mu(q). \tag{14}$$

Из свойств λ-представления следуют следующие соотношения для функции $\chi^\lambda(x)$:

$$\Delta_M\chi^\lambda(x)=\kappa(\lambda)\chi^\lambda(x),\quad \int\overline{\chi^\lambda(x)}\chi^{\tilde\lambda}(x)d\mu(x)=I(\lambda)\delta(\lambda,\tilde\lambda).$$

Норма решений (14) определяется квадратом модуля функции $f_\lambda(t)$:

$$\|\,\varphi(t,x)\,\|=\int|\,\varphi(t,x)|^2\,d\mu(x)=\int_{J'}|\,f_\lambda(t)|^2\,I(\lambda)d\mu(\lambda).$$

Если функцию $f_\lambda(t)$ представить в тригонометрической форме $f_\lambda(t)=\rho_\lambda(t)\exp(i\theta_\lambda(t))$, где $\rho_\lambda(t)$, $\theta_\lambda(t)$ – искомые вещественные функции, то уравнение (13) можно записать в виде

$$\rho''_\lambda(t)+2i\theta'_\lambda(t)\rho'_\lambda(t)+[m^2-\kappa^2(\lambda)-\theta'^2_\lambda(t)+i\theta''_\lambda(t)]\rho_\lambda(t)=\varepsilon^2 I^2(\lambda)\rho^3_\lambda(t). \tag{15}$$

Рассмотрим частный случай, когда $\theta_\lambda(t)$ есть линейная функция, а $\rho_\lambda(t)$ не зависит от времени t. Решая (15), получим решения, зависящие от времени по гармоническому закону:

$$f_{\lambda\omega}(t)=\frac{\sqrt{m^2-\omega^2-\kappa(\lambda)}}{\varepsilon I(\lambda)}e^{i\omega t+\alpha},\quad \alpha=\mathrm{const}.$$

Если в (15) функция $\theta_\lambda(t)$ не зависит от времени, то получим частные решения вида

$$f_{\lambda\omega}(t)=\frac{\sqrt{m^2-\kappa(\lambda)}}{\varepsilon I(\lambda)}\left(\sqrt{m^2-\kappa(\lambda)}\frac{t}{\sqrt2}\right)e^{i\omega}.$$

4. Пример. Уравнение на плоскости

Рассмотрим группу E(2) движений двумерной евклидовой плоскости R^2, трехмерная алгебра Ли $\boldsymbol{e}_2$ которой определяется коммутационными соотношениями $[e_1,e_3]=-e_2$, $[e_2,e_3]=e_1$. В канонических координатах второго рода

$$g(x,y,\alpha)=e^{\alpha e_3}e^{ye_2}e^{xe_1},\quad (x,y)\in R^2,\quad \alpha\in[0,2\pi),$$

левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля на группе E(2) имеют вид

$$\xi_1=\partial_x,\quad \xi_2=\partial_y,\quad \xi_3=y\partial_x-x\partial_y+\partial_\alpha,$$

$$\eta_1=-\cos(\alpha)\partial_x+\sin(\alpha)\partial_y,\quad \eta_2=-\sin(\alpha)\partial_x-\cos(\alpha)\partial_y,\quad \eta_3=-\partial_\alpha.$$

Инвариантная мера на группе совпадает с мерой Лебега $d\mu(g)=dxdyd\alpha$. Запишем закон композиции группы E(2):

$$g_1g_2=(x_2+x_1\cos(\alpha_2)+y_1\sin(\alpha_2),y_2-x_1\sin(\alpha_2)+y_1\cos(\alpha_2),\alpha_1+\alpha_2),$$

$$g_1=(x_1,y_1,\alpha_1),\quad g_2=(x_2,y_2,\alpha_2).$$

Каждая невырожденная K-орбита определяется единственной функцией Казимира $K(f)=f_1^2+f_2^2$ на коалгебре $\boldsymbol{e}^*(2)\cong\mathrm{R}^2$ и проходит через параметризованный ковектор $\lambda(j)=(j,0,0)$, $j>0$: $O_j=\{f\in\mathrm{R}^2\,|\,K(f)=j^2,\ (f_1=f_2=0)\}$. Операторы λ-представления, соответствующие невырожденным K-орбитам и вещественной поляризации $\boldsymbol{n}=\{e_1,e_2\}$, имеют вид

$$l_1=ij\cos(q),\quad l_2=-ij\sin(q),\quad l_3=\partial_q,\quad q\in Q=[0,2\pi). \tag{16}$$

Все невырожденные K-орбиты удовлетворяют условию целочисленности. Отметим, что операторы λ-представления (16) косоэрмитовы относительно меры $d\mu(q)=d\mu_0(q)=dq$. Решая систему уравнений (2), найдем функции $D^j_{qq'}(g)$, из условия полноты и ортогональности которых определяется мера по параметрам K-орбит:

$$D^j_{qq'}(g^{-1}) = \exp\left(-ij[y\sin(q') - x\cos(q')]\right)\delta(\alpha + q - q'), \quad d\mu(\lambda) = d\mu(j) = \frac{jdj}{(2\pi)^2}.$$

Рассмотрим двумерную плоскость R^2 с координатами (x, y) как однородное пространство M с группой преобразований E(2) и подгруппой изотропии $SO(2) \approx \exp(\alpha e_3)$. Однородное пространство M является симметрическим пространством, индекс и степень вырождения которого равны нулю. Действие группы E(2) на M имеет вид

$$(x, y)(x_1, y_1, \alpha_1) = (x\cos(\alpha_1) + y\sin(\alpha_1) + x_1), -x\sin(\alpha_1) + y\cos(\alpha_1) + y_1),$$
$$(x, y) \in M, \quad (x_1, y_1, \alpha_1) \in \mathrm{E}(2).$$

Интегродифференциальное уравнение (9) на M в канонических координатах второго рода имеет вид

$$\begin{gathered}(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2)\varphi(t, x, y) = \varepsilon^2 \int dx_2 dx_3 dy_2 dy_3 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha_2 d\alpha_3 \; \varphi(t, x_2, y_2)\overline{\varphi(t, x_3, y_3)} \times \\ \times\varphi(t, x\cos(\alpha_2 - \alpha_3) - y\sin(\alpha_2 - \alpha_3) + (y_2 - y_3)\sin(\alpha_2) - (x_2 - x_3)\cos(\alpha_2), \\ x\sin(\alpha_2 - \alpha_3) + y\cos(\alpha_2 - \alpha_3) - (x_2 - x_3)\sin(\alpha_2) - (y_2 - y_3)\cos(\alpha_2)).\end{gathered} \tag{17}$$

λ-представление, задаваемое операторами (16), соответствует однородному пространству M в смысле определения на стр. 10. Решая систему уравнений (6), найдем $c_\lambda(q') = 1$, $I(\lambda) = 2\pi$ и

$$D^j_q(x, y) = \exp(-ij[y\sin(q) - x\cos(q)]), \quad \chi^\lambda(x, y) = J_0(j\sqrt{x^2 + y^2}),$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Оператор Лапласа является оператором Казимира $K(\eta)$ и $\kappa(j) = j^2$.

В качестве подмножества J' выберем конечный интервал $J' = [0, a]$, $a > 0$. Тогда соответствующий класс решений интегродифференциального уравнения (17) с гармонической зависимостью от времени имеет вид

$$\varphi_{\omega a}(t, \rho) = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\varepsilon}\int_{j=0}^{a} j\sqrt{m^2 - \omega^2 + j^2}\, J_0(\rho j)dj, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{18}$$

В частном случае $\omega = m$ интеграл в (18) берется в классе специальных функций

$$\varphi_{ma}(t, \rho) = \frac{a}{4\pi\varepsilon}\frac{(2a\rho - \pi\boldsymbol{H}_0(a\rho))J_1(a\rho) + \pi\boldsymbol{H}_1(a\rho)J_0(a\rho)}{\rho^2}e^{imt},$$

где $\boldsymbol{H}_k(z)$ – функция Струве k-го порядка..

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Углирж А.Ю., Широков И.В. // Изв. вузов. Физика. – 2007. – Т. 50. – № 5. – С. 63–68.
2. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978.
3. Шаповалов А.В., Широков И.В. // ТМФ. – 1995. – Т. 104. – № 2. – С. 195–213.
4. Шаповалов А.В., Широков И.В. // ТМФ. – 1996. – Т. 106. – № 1. – С. 3–14.
5. Бреев А.И., Широков И.В., Магазев А.А. // ТМФ. – 2011. – Т. 167. – № 1. – С. 78–95.
6. Бреев А.И., Широков И.В. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 8. – С. 51–57.
7. Широков И.В. K-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений / Препринт. – Омск.: ОмГУ, 1998. – 100 с.
8. Широков И.В. // ТМФ. – 2000. – Т. 123. – № 3. – С. 407–423.
9. Широков И.В. // ТМФ. – 2001. – Т. 126. – № 3. – С. 393–408.
10. Гончаровский М.М., Широков И.В. // ТМФ. – 2009. – Т. 161. – № 3. – С. 332–345.
11. Барановский С.П., Широков И.В. //Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – № 4. – С. 737–745.

*Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
**Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия
***Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, г. Омск, Россия
E-mail: breev@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 25.04.13.

Бреев Александр Игоревич, к.ф.-м.н., доцент каф. теоретической физики ТГУ, ассистент каф. высшей математики и математической физики ТПУ;
Гончаровский Михаил Михайлович, аспирант;
Широков Игорь Викторович, д.ф.-м.н., профессор.